THOMAS
CÁLCULO
UNA VARIABLE

UNDÉCIMA EDICIÓN



REGLAS DE DERIVACIÓN

Fórmulas generales

Suponiendo que u y v son funciones diferenciables de x.

Constante: $\frac{d}{dx}(c) = 0$

Suma: $\frac{d}{dx}(u + v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$

Diferencia: $\frac{d}{dx}(u - v) = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}$

Múltiplo constante: $\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}$

Producto: $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

Cociente: $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

Potencia: $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$

Regla de la cadena: $\frac{d}{dx}(f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Funciones trigonométricas

$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x$ $\qquad$ $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x$

$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$ $\qquad$ $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$

$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$ $\qquad$ $\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$

Funciones exponenciales y logarítmicas

$\frac{d}{dx}e^x = e^x$ $\qquad$ $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$

$\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$ $\qquad$ $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}$

Funciones trigonométricas inversas

$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ $\qquad$ $\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1 + x^2}$ $\qquad$ $\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$

$\frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = -\frac{1}{1 + x^2}$ $\qquad$ $\frac{d}{dx}(\csc^{-1} x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$

Funciones hiperbólicas

$\frac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) = \cosh x$ $\qquad$ $\frac{d}{dx}(\cosh x) = \operatorname{senh} x$

$\frac{d}{dx}(\tanh x) = \operatorname{sech}^2 x$ $\qquad$ $\frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \tanh x$

$\frac{d}{dx}(\coth x) = -\operatorname{csch}^2 x$ $\qquad$ $\frac{d}{dx}(\operatorname{csch} x) = -\operatorname{csch} x \coth x$

Funciones hiperbólicas inversas

$\frac{d}{dx}(\operatorname{senh}^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$ $\qquad$ $\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

$\frac{d}{dx}(\tanh^{-1} x) = \frac{1}{1 - x^2}$ $\qquad$ $\frac{d}{dx}(\operatorname{sech}^{-1} x) = -\frac{1}{x\sqrt{1 - x^2}}$

$\frac{d}{dx}(\coth^{-1} x) = \frac{1}{1 - x^2}$ $\qquad$ $\frac{d}{dx}(\operatorname{csch}^{-1} x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{1 + x^2}}$

Ecuaciones paramétricas

Si $x = f(t)$ y $y = g(t)$ son diferenciables, entonces

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} \qquad \text{y} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt}$$



George B. Thomas, Jr.
Massachusetts Institute of Technology

Revisado por:

Maurice D. Weir
Naval Postgraduate School

Joel Hass
University of California, Davis

Frank R. Giordano
Naval Postgraduate School

TRADUCCIÓN

Elena de Oteyza de Oteyza
Instituto de Matemáticas,
Universidad Nacional Autónoma de México

Víctor Hugo Ibarra Mercado
Escuela Superior de Física y Matemáticas
Instituto Politécnico Nacional

REVISIÓN TÉCNICA

Dr. Carlos Bosh Giral
Departamento de Matemáticas
Instituto Tecnológico Autónomo de México (ITAM)

César Luis García García
Departamento de Matemáticas
Instituto Tecnológico Autónomo de México (ITAM)

Claudia Gómez Wulschner
Departamento de Matemáticas
Instituto Tecnológico Autónomo de México (ITAM)

Mauricio Pedraza Pérez
Departamento de Matemáticas
Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
Unidad Azcapotzalco
Instituto Politécnico Nacional

María Elisa Barrón García, M.E.
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey
campus Guadalajara

Roberto Núñez Malherbe
Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Occidente (ITESO)

Francisco Javier González Piña
Departamento de Matemáticas, CUCEI
Universidad de Guadalajara

Carlos J. Zea Rivera
Coordinación de Ciencias Físico-Matemáticas
Universidad Iberoamericana
campus Torreón

José Botto
Universidad Nacional de Rosario, Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Argentina

Emilio Sastre
Universidad Nacional de Rosario, Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Argentina

Antonio Merchan Abril
Coordinador Cálculo Diferencial
Departamento de Matemáticas
Pontificia Universidad Javeriana
Colombia

Óscar Andrés Montaño Carreño
Departamento de Ciencias Naturales y Matemáticas
Pontificia Universidad Javeriana
Colombia

Leonardo Sánchez
Profesor del Departamento de Ingeniería Matemática
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Chile

René Jorge Piedra de la Torre
Director del Departamento de Matemática y Física
Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra
República Dominicana

María Rosa Brito
Profesora de Cálculo
Universidad Simón Bolívar, Venezuela

Antonio José Syers Hernández
Coordinador de Cálculo
Universidad Metropolitana, Venezuela



México • Argentina • Brasil • Colombia • Costa Rica • Chile • Ecuador
España • Guatemala • Panamá • Perú • Puerto Rico • Uruguay • Venezuela

Datos de catalogación bibliográfica

THOMAS, JR., GEORGE B.

Cálculo. Una variable. Undécima edición

PEARSON EDUCACIÓN, México, 2006

ISBN: 970-26-0643-8
Área: Universitarios

Formato: 21 × 27 cm Páginas: 824

Dedicado a

Ross Lee Finney III

(1933-2000)

profesor, mentor, autor,

gran persona, y amigo de todos

Authorized translation from the English language edition, entitled Thomas' calculus 11th ed., George B. Thomas, Jr., published by Pearson Education, Inc., publishing as Addison Wesley, Copyright © 2005. All rights reserved.
ISBN 0-321-185587

Traducción autorizada de la edición en idioma inglés, titulada Thomas' calculus 11a ed., de George B. Thomas, Jr., publicada por Pearson Education, Inc., publicada como Addison Wesley, Copyright © 2005. Todos los derechos reservados.

Esta edición en español es la única autorizada.

Edición en español
Editor: Enrique Quintanar Duarte
e-mail: enrique.quintanar@pearsoned.com
Editor de desarrollo: Miguel B. Gutiérrez Hernández
Supervisor de producción: José D. Hernández Garduño

Edición en inglés:
Publisher: Greg Tobin
Acquisitions Editor: Willliam Hoffman
Managing Editor: Karen Wernholm
Senior Project Editor: Rachel S. Reeve
Editorial Assistants: Mary Reynolds, Emily Portwood
Production Supervisor: Julie LaChance James
Marketing Manager: Phyllis Hubard
Marketing Assistant: Heather Peck
Senior Manufacturing Buyer: Evelyn Beaton
Senior Prepress Supervisor: Caroline Beaton
Associate Media Producer: Sara Anderson
Software Editors: David Malone, Bob Carroll
Senior Author Suppor/Technology Specialist: Joe Vetere
Supplements Production Supervisor: Sheila Spinney
Composition and Production Services: Nesbitt Graphics, Inc.
Illustrations: Techsetters, Inc.
Senior Designer: Geri Davis/The Davis Group, Inc.
Cover Design: Barbara T. Atkinson
Cover Photograph: © Benjamin Mendlowitz

UNDÉCIMA EDICIÓN, 2006

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana. Reg. Núm. 1031



ISBN 970-26-0643-8

Impreso en México. *Printed in Mexico.*

® 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 09 08 07 06

Contenido

7 Funciones trascendentes 466

8 Técnicas de integración 553

9 Aplicaciones adicionales de integración 642

Volumen II

13 Funciones con valores vectoriales y movimiento en el espacio 906

14 Derivadas parciales 965

15 Integrales Múltiples 1067

16 Integración en Campos Vectoriales 1143

Apéndices AP-1

Respuestas R-1

Índice I-1

Breve tabla de integrales T-1

Créditos C-1

PREFACIO

INTRODUCCIÓN Al preparar la undécima edición de *Cálculo* de Thomas, hemos querido mantener el estilo de las versiones anteriores y conservar las fortalezas detectadas en ellas. Nuestra meta ha sido, por lo tanto, identificar las mejores características de las ediciones clásicas de la obra y, al mismo tiempo, atender cuidadosamente las sugerencias de nuestros muchos usuarios y revisores. Con estos altos estándares en mente, hemos reconstruido los ejercicios y aclarado algunos temas de difícil comprensión. De acuerdo con el autor, George Thomas, "hemos intentado escribir el libro con tanta claridad y precisión como ha sido posible". Además, hemos restablecido los contenidos para que sean más lógicos y congruentes con los programas de estudio de mayor difusión. Al revisar esta labor en retrospectiva, nos percatamos de que los muchos conocimientos adquiridos nos han ayudado a crear un texto de cálculo útil y atractivo para la siguiente generación de ingenieros y científicos.

En su undécima edición, el texto no sólo presenta a los estudiantes los métodos y las aplicaciones del cálculo, sino que plantea también una manera de pensar totalmente matemática. A partir de los ejercicios, los ejemplos y el desarrollo de los conceptos que revela la teoría en un lenguaje legible, este libro se centra en el pensamiento y la comunicación de ideas matemáticas. El cálculo tiene gran relación con muchos de los paradigmas clave de las matemáticas, y establece los fundamentos reales para la reflexión precisa y lógica en torno de temas físicos y matemáticos. Nuestro propósito se centra en ayudar a los estudiantes a alcanzar la madurez matemática necesaria para dominar el material y aplicar sus conocimientos de manera íntegra. El razonamiento que se deriva de la comprensión de lo analizado en las páginas de esta obra hacen que el esfuerzo que ha implicado su creación valga la pena.

Una vez analizado el contenido de este libro, los estudiantes estarán bien instruidos en el lenguaje matemático que se necesita para aplicar los conceptos de cálculo a numerosas situaciones de ciencias e ingeniería. También estarán preparados para tomar cursos de ecuaciones diferenciales, álgebra lineal o cálculo avanzado.

Cambios en la undécima edición

EJERCICIOS Los ejercicios y ejemplos juegan un papel crucial en el aprendizaje del cálculo. En esta edición hemos incluido muchos ejercicios que ya aparecían en versiones anteriores de la obra por considerarlos una de las grandes fortalezas de la misma. Los ejercicios se han reorganizado por tema en cada una de las secciones, planteando primero los problemas computacionales para luego abordar los relativos a la teoría y las aplicaciones. Esta disposición permite que los estudiantes desarrollen habilidades en el uso de los métodos del cálculo y adquieran una comprensión más profunda de sus aplicaciones en el marco de una estructura matemática coherente.

RIGOR En comparación con las ediciones anteriores, en esta versión el contenido del texto es más riguroso y consistente. En él se brindan análisis formales e informales, haciendo una clara distinción entre ambos; además, se incluyen definiciones precisas y demostraciones accesibles para los estudiantes. Este texto está organizado de manera que el material pueda ser cubierto informalmente, dando cierta flexibilidad al instructor. Por ejemplo, a pesar de que no se prueba que una función continua en un intervalo cerrado y acotado tiene un máximo ahí, el teorema correspondiente se expone con todo cuidado para comprobar varios resultados subsecuentes. Más aún, el capítulo de límites ha sido reorganizado de manera sustancial, haciendo hincapié tanto en su claridad como en su precisión. Como en las ediciones anteriores, el concepto de límite se basa en la importante idea de obtener la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto de aquella.

CONTENIDO En la preparación de esta edición hemos puesto especial atención a las sugerencias y comentarios de los usuarios y revisores de las versiones anteriores de *Cálculo* de Thomas. Esto ha dado como resultado extensas modificaciones en varios de los capítulos.

TOMO I

- **Preliminares** Hemos reescrito el capítulo 1, de manera que proporcione una breve revisión de las funciones elementales. Aunque muchos profesores podrían optar por obviar este capítulo, su estudio permite a alumnos un fácil repaso de conocimientos para que unifiquen notaciones. También contiene material útil que muchos estudiantes podrían desconocer, como los errores que se producen al confiar totalmente en las calculadoras o computadoras para construir la gráfica de una función.
- **Límites** En el capítulo 2 se incluyen las definiciones epsilón-delta, las demostraciones de muchos teoremas, así como límites en el infinito y límites infinitos (y sus relaciones con las asíntotas de una gráfica).
- **Antiderivadas** En los capítulos 3 y 4 presentamos la derivada y sus aplicaciones más importantes, concluyendo con el concepto de antiderivada, con lo cual se establecen las bases para la integración.
- **Integración** Después de discutir varios ejemplos de sumas finitas, en el capítulo 5 introducimos la integral definida en la forma tradicional del área debajo de la curva. Continuamos con el análisis del teorema fundamental del cálculo, relacionando derivadas y antiderivadas, y con la presentación de la integral indefinida, junto con la regla de sustitución para integración. Luego proseguimos con el capítulo tradicional de aplicaciones de las integrales definidas.
- **Técnicas de integración** En el capítulo 8 se presentan las principales técnicas de integración, incluyendo integración numérica. Después se ofrece una introducción a las funciones trascendentes, definiendo el logaritmo natural como la integral y la función exponencial como su inversa.
- **Ecuaciones diferenciales** La mayor parte del material para resolver ecuaciones diferenciales básicas ahora está organizado solamente en el capítulo 9. Esta disposición permite que los profesores encuentren la flexibilidad idónea para cubrir los temas correspondientes.

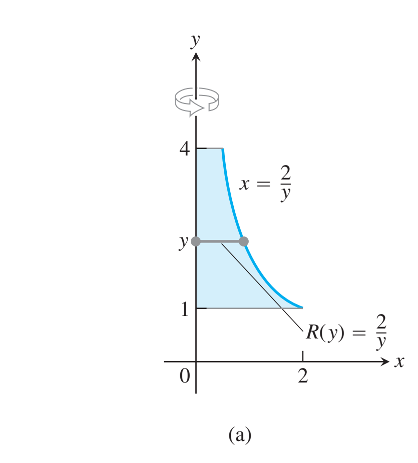
TOMO II

- **Cónicas** Atendiendo a la demanda de muchos usuarios, el capítulo 10 ha sido totalmente reescrito. Por otro lado, este capítulo completa el material de ecuaciones paramétricas, dando las parametrizaciones para las parábolas, las hipérbolas y las cicloides.
- **Series** En comparación con ediciones anteriores, en el capítulo 11 hemos desarrollado de manera más completa los criterios de convergencia para series. También incluimos, al final del capítulo, una breve sección para presentar las series de Fourier (cuyo estudio puede omitirse, según convenga).

- **Vectores** Para evitar la repetición de los conceptos algebraicos y geométricos fundamentales, hemos combinado el tratamiento de vectores en dos y tres dimensiones en un solo capítulo, el 12. A esta presentación le sigue el capítulo de funciones de valores vectoriales en el plano y en el espacio.
- **Los números reales** Hemos escrito un nuevo apéndice para analizar brevemente la teoría de los números reales y su aplicación en el cálculo.

ARTE Sabemos que las figuras y las ilustraciones representan un componente de gran importancia en el aprendizaje del cálculo, por lo que hemos mejorado todas las figuras de este libro, buscando mayor claridad en la relación entre éstas y los conceptos a que hacen referencia. Esto resulta especialmente evidente en las gráficas tridimensionales, en las que podemos indicar mejor la profundidad, las capas y la rotación (vea las figuras siguientes).

FIGURA 6.11, página 402
Determinación del volumen del sólido generado al hacer girar la región (a) alrededor del eje y.



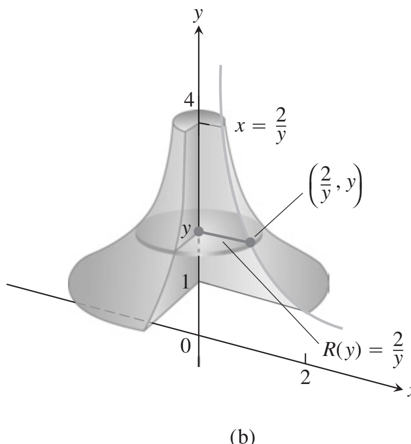
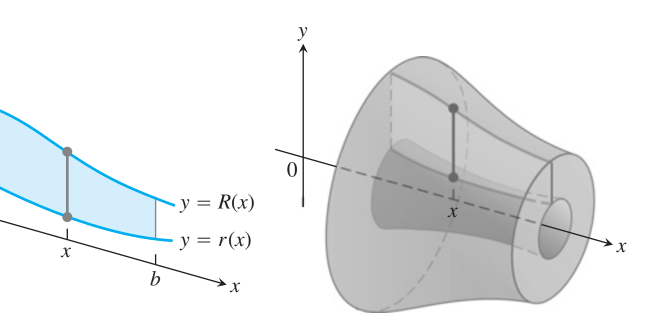
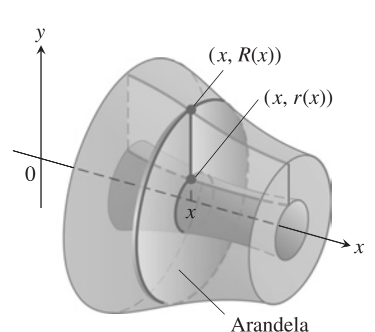


FIGURA 6.13, página 403
Las secciones transversales del sólido de rotación generado aquí son arandelas, no discos.





Otras características

PROYECTOS Y RESUMEN DE FINAL DE CAPÍTULO Además de los problemas que aparecen después de cada sección, los capítulos terminan con preguntas de repaso, ejercicios prácticos que cubren todo el contenido analizado, y una serie de ejercicios adicionales y avanzados en donde se plantean problemas sintetizados o que plantean retos de mayor envergadura. Asimismo, casi todos los capítulos incluyen la descripción de varios proyectos para que los estudiantes trabajen en ellos, ya sea individualmente o en equipo, en periodos más largos. Estos proyectos requieren el uso de una computadora y de material adicional, disponible en **www.pearsoneducacion.net/thomas.**

EJERCICIOS DE DESARROLLO TEÓRICO Los ejercicios de desarrollo teórico que aparecen a lo largo de todo el libro, solicitan a los alumnos que exploren y expliquen una variedad de conceptos y aplicaciones del cálculo. Además, al final de cada capítulo se halla una lista de preguntas para que los estudiantes repasen y resuman lo que han aprendido. Muchos de estos ejercicios pueden servir para que el profesor asigne tareas de contenido teórico.

RESPUESTAS Se proporcionan todas las respuestas de los ejercicios impares cuando es adecuado; la corrección de tales respuestas ha sido revisada cuidadosamente.

EXACTITUD MATEMÁTICA Como en las ediciones anteriores, hemos tenido gran cuidado en afirmar solamente aquello que sea correcto desde el punto de vista matemático. Cada definición, teorema, corolario y demostración han sido revisados para garantizar su claridad y exactitud matemática.

LEGIBILIDAD Y APLICACIÓN EN PROBLEMAS REALES Como siempre, este texto busca ser fácil de leer, interactivo y matemáticamente rico. Cada tema nuevo ha sido abordado con claridad, ilustrado con ejemplos de fácil comprensión y reforzado con aplicaciones a problemas reales que involucran el cálculo en ciencias e ingeniería, y que resultan de interés para los estudiantes. Estos problemas de aplicación se han actualizado, mejorado y ampliado a lo largo de las últimas ediciones.

TECNOLOGÍA Aunque seguimos proporcionando apoyo para las aplicaciones tecnológicas del cálculo, a partir de la décima edición esto resulta menos evidente dentro de los capítulos. Sin embargo, el uso de este texto puede incorporar fácilmente la tecnología según los propósitos del profesor. Para ello, cada sección contiene ejercicios que requieren el uso de la tecnología, identificados de cualquiera de las siguientes maneras:

- Con una **T** si se requiere una calculadora o computadora para su resolución.
- Con el texto EXPLORACIÓN CON COMPUTADORA si se necesita un software matemático (como *Maple* o *Mathematica*) para contestarlos.

Complementos multimedia y soporte en línea (en inglés)

MANUALES DE RECURSOS TECNOLÓGICOS

Maple Manual, escrito por Donald Hartig, de la California Polytechnic State University
Mathematica Manual, preparado por Marie Vanisko, de la California State University Stanislaus, y por Lyle Cochran, del Whitworth College
TI-Graphing Calculator Manual, por Luz DeAlba, de la Drake University.
Estos manuales cubren los programas *Maple* 9 y *Mathematica* 5, y las calculadoras TI-83 Plus, TI-84 Plus, TI-85/TI-86 y TI-89/TI-92 Plus, respectivamente. Cada uno de ellos ofrece guía detallada para la integración de un paquete de software o una calculadora graficadora a lo largo del curso, incluyendo sintaxis y comandos.

COURSECOMPASS

CourseCompass es una plataforma para cursos en línea que Pearson Educación ofrece de manera exclusiva como apoyo para sus libros de texto. Este libro cuenta con un curso precargado en CourseCompass, que incluye ejercicios y recursos en MyMathLab y en MathXL, el sistema de tutoriales, tareas y evaluación en línea de Addison Wesley. MyMathLab proporciona un amplio conjunto de materiales relacionados con el curso, así como ejercicios generados algorítmicamente para repasar tanto como se desee un tema. Los alumnos pueden utilizar también herramientas en línea, como clases en vídeo, animaciones, una versión electrónica del libro y proyectos de Maple/Mathematica para mejorar su comprensión y desempeño. Además, los estudiantes pueden responder exámenes por capítulo y obtener un plan de estudio personalizado de acuerdo con sus resultados. Por su parte, los profesores pueden emplear los administradores de tareas y exámenes que proporciona CourseCompass para seleccionar y asignar ejercicios en línea relacionados directamente con el libro, así como importar exámenes de TestGen para obtener más flexibilidad. El libro de notas de MyMathLab —diseñado específicamente para matemáticas y estadística— lleva un registro automático de las tareas y los resultados de los exámenes de los alumnos, y da control al profesor para calcular las notas de fin de curso. CourseCompass está disponible para quienes adopten el libro. Para obtener más información, visite nuestro sitio Web en **www.coursecompass.com**, o pida una demostración del producto al representante de ventas de Pearson Educación que lo atiende.

TESTGEN CON QUIZMASTER

TestGen permite a los profesores crear, editar, imprimir y administrar exámenes mediante un banco de preguntas computarizado, desarrollado para cubrir todos los objetivos del texto. TestGen se basa en algoritmos, gracias a lo cual los profesores pueden crear múltiples versiones de la misma pregunta o del mismo examen con sólo hacer clic en un botón. Los maestros pueden también modificar las preguntas del banco de exámenes o agregar nuevos reactivos utilizando además el editor integrado para crear o importar gráficas, insertar notación matemática, números variables o texto. Los exámenes pueden imprimirse o distribuirse por Internet o en una red local, o pueden ser importados en CourseCompass o Blackboard. TestGen incluye QuizMaster, que permite a los estudiantes realizar las pruebas en una red de área local. El software está disponible en un CD-ROM para las plataformas Windows y Macintosh.

SITIO WEB **www. pearsoneducacion.net/thomas**

El sitio Web del libro *Cálculo* de Thomas proporciona al alumno biografías más amplias de los personajes históricos referidos en el libro, así como artículos relacionados. Asimismo, pone a su disposición un conjunto de módulos de *Maple* y *Mathematica* que puede utilizar como proyectos individuales o en grupo. Este sitio también ofrece al profesor un vínculo hacia el sitio de descarga de materiales (en inglés) de este libro.

Agradecimientos

Deseamos expresar nuestra gratitud a quienes hicieron muchas y muy valiosas contribuciones durante las distintas etapas de desarrollo de esta edición.

Editores de desarrollo

Elka Block
David Chelton
Frank Purcell

Correctores

William Ardis
Karl Kattchee
Douglas B. Meade
Robert Pierce
Frank Purcell
Marie Vanisko
Thomas Wegleitner

Jefatura de revisión

Harry Allen, *Ohio State University*
Rebecca Goldin, *George Mason University*
Christopher Heil, *Georgia Institute of Technology*
Dominic Naughton, *Purdue University*
Maria Terrell, *Cornell University*
Clifford Weil, *Michigan State University*

Revisión técnica

Robert Anderson, *University of Wisconsin–Milwaukee*
Charles Ashley, *Villanova University*
David Bachman, *California Polytechnic State University*
Elizabeth Bator, *University of North Texas*
William Bogley, *Oregon State University*
Kaddour Boukaabar, *California University of Pennsylvania*
Deborah Brandon, *Carnegie Mellon University*
Mark Bridger, *Northeastern University*
Sean Cleary, *The City College of New York*
Edward Crotty, *University of Pennsylvania*
Mark Davidson, *Louisiana State University*
Richard Davitt, *University of Louisville*
Elias Deeba, *University of Houston, Downtown Campus*
Anne Dougherty, *University of Colorado*
Rafael Espericueta, *Bakersfield College*
Klaus Fischer, *George Mason University*
William Fitzgibbon, *University of Houston*
Carol Flakus, *Lower Columbia College*
Tim Flood, *Pittsburg State University*
Robert Gardner, *East Tennessee State University*
John Gilbert, *The University of Texas at Austin*
Mark Hanish, *Calvin College*
Zahid Hasan, *California State University, San Bernardino*
Jo W. Heath, *Auburn University*
Ken Holladay, *University of New Orleans*
Hugh Howards, *Wake Forest University*
Dwanye Jennings, *Union University*
Matthias Kawaski, *Arizona State University*
Bill Kincaid, *Wilmington College*
Mark M. Maxwell, *Robert Morris University*
Jack Mealy, *Austin College*
Richard Mercer, *Wright State University*
Victor Nestor, *Pennsylvania State University*
Michael O'Leary, *Towson University*
Bogdan Oporowski, *Louisiana State University*
Troy Riggs, *Union University*
Ferinand Rivera, *San Jose State University*
Mohammed Saleem, *San Jose State University*
Tatiana Shubin, *San Jose State University*
Alex Smith, *University of Wisconsin-Eau Claire*
Donald Solomon, *University of Wisconsin-Milwaukee*
Chia Chi Tung, *Minnesota State University*
William L. VanAlstine, *Aiken Technology College*
Bobby Winters, *Pittsburg State University*
Dennis Wortman, *University of Massachusetts at Boston*

Participantes en encuestas

Omar Adawi, *Parkland College*
Siham Alfred, *Raritan Valley Community College*
Donna J. Bailey, *Truman State University*
Rajesh K. Barnwal, *Middle Tennessee State University*
Robert C. Brigham, *University of Central Florida* (retired)
Thomas A. Carnevale, *Valdosta State University*
Lenny Chastkofsky, *The University of Georgia*
Richard Dalrymple, *Minnesota West Community & Technical College*
Lloyd Davis, *College of San Mateo*
Will-Matthis Dunn III, *Montgomery College*
George F. Feissner, *SUNY College at Cortland*
Bruno Harris, *Brown University*
Celeste Hernandez, *Richland College*
Wei-Min Huang, *Lehigh University*
Herbert E. Kasube, *Bradley University*
Frederick W. Keene, *Pasadena City College*
Michael Kent, *Borough of Manhattan Community College*
Robert Levine, *Community College of Allegheny County, Boyce Campus*
John Martin, *Santa Rosa Junior College*
Michael Scott McClendon, *University of Central Oklahoma*
Ching-Tsuan Pan, *Northern Illinois University*
Emma Previato, *Boston University*
S.S. Ravindran, *University of Alabama*
Dan Rothe, *Alpena Community College*
John T. Saccoman, *Seton Hall University*
Mansour Samimi, *Winston-Salem State University*
Ned W. Schillow, *Lehigh Carbon Community College*
W.R. Schrank, *Angelina College*
Mark R. Woodard, *Furman University*

Agradecimientos a los profesores

Agradecemos a todos los profesores que han sido leales usuarios y han impartido la materia de Cálculo en los países de habla hispana con el apoyo del reconocido libro de Thomas. Sus valiosos comentarios han servido para enriquecer el desarrollo de la actual edición. Esperamos que con el uso de este texto cumplan satisfactoriamente los objetivos del programa del curso y preparen a sus alumnos para enfrentar los retos actuales dentro del ámbito de las Matemáticas. En especial deseamos agradecer el apoyo y retroalimentación que nos han dado los siguientes profesores:

COLOMBIA

Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito

Ana Alicia Guzmán
Benjamín Rafael Sarmiento
Bernarda Aldana
Boris Mauricio Pulido
Campo Elías Velosa
Carlos Abel Álvarez
Carlos Enrique Frasser
Carmenza Moreno
Clara Teresa Triviño
Claudia Castro
Diego Parada
Edgar Obonaga
Edith Zoraida Pinzón
Eduardo Brieva
Ernesto Acosta
Gloria Inés Bernal
Guiomar Lleras
Guiomar Mora
Gustavo Erazo
Herbert Alonso Dueñas
Isabel Carlota López
Jaime Alonso Castillo
Jaime Arango
Jairo Scarpeta
Jorge Augusto Pérez
Jorge Bateman
José Francisco Amador
Juan Manuel Bedoya
Juan Manuel Cordero
Juan Manuel Ospina
Juan Manuel Sarmiento
Luis Alejandro Fonseca
Luis Miguel Acosta
Manuel Casabianca
Manuel Díaz
Margarita Mónica Rey
María Consuelo Cortés
María Viviana Bernal
Néstor Raúl Pachón
Olga Maritza Camacho
Óscar Antonio Pulido
Óscar Darío Zárate
Rafael Guzmán
Ricardo Mancipe
Ricardo Quintana
Sandra Isabel Gutiérrez
Víctor Ardila
William Estrada

Fundación del Área Andina

Mario Duarte
Rosario Granados

INPAHU

Edgar Borras

Pontificia Universidad Javeriana

Abrahan Jiménez
Antonio Merchan
Diego Guerrero
Eddy Herrera
Eduardo Estrada
Fabio Molina
Fernando Suárez
Francisco Soler
Gerardo Tole
Guillermo Arias
Gustavo Nieto
Harold Noriega
Héctor Orlando Linares
Irina Reyes
Ismael García
Iván Castro
Jesús Fernando Novoa
José Humberto Serrano
José Severino Niño
Juan Carlos Quintero
Julio César Melo
Lennin Reyes
Liliana Ángel
Liliana Barreto
Luis Alejandro Bello
Luis Alfonso Mejía
Luz Marina Moya
Luz Mary Ariza
María C. Rodríguez
Martha Alvarado
Martha Moreno
Matilde Páez
Nelson Urrego
Nicolás Civetta
Rafael Castro
Vladimir Moreno

Universidad Antonio Nariño

Orlando Vanegas

Universidad Autónoma

Gladys Villamarín
Marco Tulio Millán

Universidad Católica de Colombia

Ana Mercedes Márquez
Carlos Daza
Carlos Hernando Pinzón
Felipe Lara
Gerardo Ardila
Germán Beltrán
Javier Manotas
Libardo Ortegón
Lorenzo Zubieta
Miguel Ángel Martínez
Régulo Miguel Hernández
Rubén Darío Castañeda

Universidad de América

Edgar Rodríguez
Héctor Lozano
Jaime Bolaños
Margarita Ruiz

Universidad de la Sabana

Héctor López
María Lilia Perilla

Universidad de San Buenaventura

Elmer Villegas
Hernán Pineda
Patricia Mateus
Wilson Soto

Universidad de San Martín

Jaime Preciado

Universidad del Bosque

Libardo Munevar

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Abrahan Jiménez
Adrián Ricardo Gómez
Carmen Leonor Pulido
Claudia Vela
Clemencia Garavito
Gloria Neira
Ignacio Rodríguez
Janeth Galeano
José María Pino
José Villada
Luis Martín
María Astrid Cuida
María del Pilar Bohórquez
Nayive Nieves
Pablo Acosta
Rodrigo Javier Herrera
Zulima Ortiz

Universidad INCCA de Colombia

Jorge Eliécer Rodríguez

Universidad Militar Nueva Granada
Arturo Ramírez
Felipe A. Riaño
José Farid Patiño
Luis Antonio Meza

Universidad Nacional
Héctor Useche
Herbert Dueñas

Universidad Piloto
Carlos Garzón
William Arley Rincón

Universidad Santo Tomás
Eunice Chara
Gloria Torres
Marlene Garzón

GUATEMALA

Universidad de San Carlos
Arturo Samayoa

MÉXICO

Instituto Tecnológico Autónomo de México (ITAM)
Beatriz Rumbos Pellicer
Claudia Gómez Wulschner
Lorena Zogaib
María del Carmen López Laiseca

Unidad Profesional Interdisciplinaria de Ingeniería y Tecnologías Avanzadas
Carlos Cruz
Prisciliano Aguilar Viveros

Universidad Anáhuac del Sur
Vicente Rivera

Universidad Iberoamericana
Humberto Mondragón Suárez

Universidad La Salle
Gustavo Velázquez Garduño

Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Ecatepec
Francisco Javier Vargas Mancilla
Gabriel Ramírez Dámaso

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, campus Estado de México
Faustino Yescas Martínez
Rubén Darío Santiago Acosta

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, campus Toluca
José Arturo Tar Ortiz Peralta

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, campus Sinaloa
José Benigno Valdez Torres

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, campus Guadalajara
Abel Vázquez Pérez
Abelardo Ernesto Damy Solís
Guillermo Rodríguez López
Humberto Hipólito García Díaz
Jesús Cuauhtémoc Ruvalcaba Álvarez
Luis Eduardo Falcón Morales
Luz María González Ureña
María Elisa Barrón García

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, campus León
Enrique Garibay Ruiz

Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Occidente (ITESO), Guadalajara
César Espinosa Abundis
Enrique Rodríguez Ruiz
Héctor Vidaurri Aguirre
Roberto Núñez Malherbe

Centro de Enseñanza Técnica Industrial, Guadalajara
Michael Vollger Zaepfel

Universidad de Guadalajara
Francisco Javier González Piña
Guadalupe Isabel Rodríguez Medina
Jorge Mario Arellano Hernández
José de Jesús Uribe Madrigal
Lucía González Rendón
María de Lourdes Martínez Silva
María Esther Mejía Marín
Tomás Ignacio Villaseñor Saavedra

Universidad Autónoma de Nuevo León
Alejandro García García
Angélica Tovar Gómez
Bertha Arellano Silva
Gloria Pedroza Cantú
María Magdalena de la Rosa Reséndiz
Santiago Neyra Rosales
Sergio Elizondo Arroyave
Yenny Valenzuela Murillo

Universidad Regiomontana
Luis Alberto Rodríguez Escamilla
Ma. Teresa Narváez Flores
Neyda Eliza López Leal

Universidad Autónoma de San Luis Potosí
José César Hernández García
María Guadalupe Silva Esparza

Universidad Autónoma de Tamaulipas
Ramiro Garza Molina

Instituto Tecnológico de Veracruz
Mario Martínez Cano

Universidad Veracruzana
Dolores Vera Dector
Uriel García Ortiz

PERÚ

Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas
Agustín Curo

REPÚBLICA DOMINICANA

Instituto Tecnológico de Santo Domingo
Coride Pérez
Máximo A. Campuzano

Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra
Masako Saito

Universidad Autónoma de Santo Domingo
Carlos Feliz Sánchez
Carlos Mayobanet Cabral
David Torrez

Universidad Apec
Justo Báez

Universidad Católica Tecnológica del Cibao
Cristian Mercedes Cruz

Universidad Iberoamericana
Máximo Santana

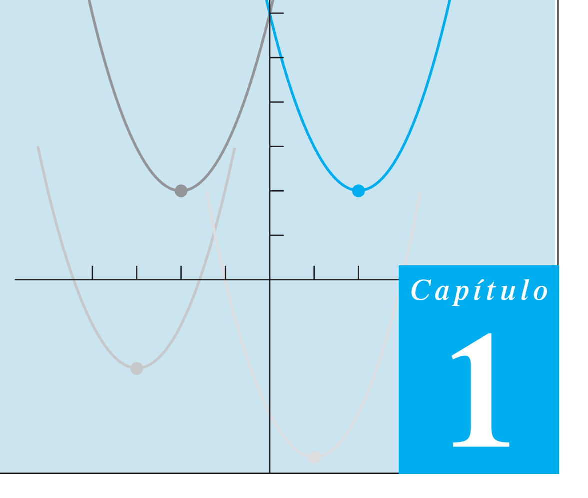
VENEZUELA

Universidad Central de Venezuela
María de Armas
Martha Zerpa

Universidad Metropolitana
Antonio Syers
Lida Niño

Universidad Simón Bolívar
María Rosa Brito

Universidad del Zulia
Daniel Duque



Capítulo 1

PRELIMINARES

INTRODUCCIÓN En este capítulo se presenta un repaso de las ideas básicas necesarias para iniciar el estudio del cálculo. Entre los temas se incluyen el sistema de números reales, las coordenadas en el plano cartesiano, las líneas rectas, las parábolas, los círculos, las funciones y la trigonometría. También se analiza el uso de calculadoras graficadoras y de programas para graficación por computadora.

1.1 Los números reales y la recta real

Esta sección trata de los números reales, las desigualdades, los intervalos y las propiedades del valor absoluto.

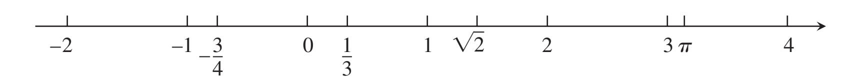
Números reales

Gran parte del cálculo se basa en las propiedades del sistema de números reales. Los **números reales** son aquellos que pueden expresarse como decimales, por ejemplo

$$-\frac{3}{4} = -0.75000\ldots$$
$$\frac{1}{3} = 0.33333\ldots$$
$$\sqrt{2} = 1.4142\ldots$$

En cada caso, los puntos suspensivos … indican que la sucesión de dígitos decimales continúa indefinidamente. Cualquier expansión decimal posible representa un número real, aunque algunos números tienen dos representaciones. Por ejemplo, los decimales infinitos .999… y 1.000… representan el mismo número real, 1. Una afirmación similar es válida para cualquier número con una infinita fila de nueves.

Los números reales pueden representarse geométricamente como puntos sobre una recta numérica, llamada **recta real**.



El símbolo $\mathbb{R}$ denota tanto al sistema de números reales como a la recta real.

Las propiedades del sistema de números reales se clasifican en tres categorías: propiedades algebraicas, propiedades de orden y propiedad de completez. Las **propiedades algebraicas** establecen que los números reales pueden sumarse, restarse, multiplicarse y dividirse (excepto entre 0) para obtener más números reales bajo las reglas usuales de la aritmética. *No es posible dividir entre* 0.

En el apéndice 4 se dan las **propiedades de orden** de los números reales. A partir de ellas pueden obtenerse las siguientes reglas útiles, donde el símbolo $\Rightarrow$ significa "implica".

Reglas para desigualdades

Si a, b y c son números reales, entonces:

1. $a < b \Rightarrow a + c < b + c$
2. $a < b \Rightarrow a - c < b - c$
3. $a < b$ y $c > 0 \Rightarrow ac < bc$
4. $a < b$ y $c < 0 \Rightarrow bc < ac$
   Caso especial: $a < b \Rightarrow -b < -a$
5. $a > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{a} > 0$
6. Si tanto a como b son ambos positivos o ambos negativos, entonces
   $a < b \Rightarrow \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$

Tenga en cuenta las reglas para multiplicar una desigualdad por un número. Al multiplicar por un número positivo se conserva el sentido de desigualdad; cuando se multiplica por un número negativo el sentido de desigualdad cambia. Por otro lado, tomar recíprocos invierte el sentido de desigualdad cuando los números son del mismo signo. Por ejemplo, $2 < 5$ pero $-2 > -5$ y $1/2 > 1/5$.

En el caso del sistema de números reales, la **propiedad de completez*** es compleja y difícil de definir con precisión; sin embargo, es esencial para comprender el concepto de límite (capítulo 2). A grandes rasgos, la propiedad de completez afirma que hay suficientes números reales para "completar" la recta real, en el sentido que no haya "vacíos" o "faltantes" o huecos en ella. Si el sistema de números reales no cumpliera con esta propiedad, muchos teoremas de cálculo carecerían de validez. Por conveniencia, el tema se deja para un curso más avanzado, pero el apéndice 4 da una idea de sus implicaciones y de cómo se construyen los números reales.

Entre los números reales pueden distinguirse tres subconjuntos especiales.

1. Los **números naturales**, digamos 1, 2, 3, 4, . . .
2. Los **números enteros**, como $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$
3. Los **números racionales**, es decir, aquellos que pueden expresarse como una fracción m/n, donde m y n son enteros y $n \neq 0$. Por ejemplo

$$\frac{1}{3}, \quad -\frac{4}{9} = \frac{-4}{9} = \frac{4}{-9}, \quad \frac{200}{13}, \quad \text{y} \quad 57 = \frac{57}{1}.$$

Los números racionales son precisamente los números reales con expansiones decimales, que son

(a) finitas (terminan con una secuencia infinita de ceros), por ejemplo

$$\frac{3}{4} = 0.75000\ldots = 0.75 \qquad \text{o}$$

(b) periódicas (terminan con un bloque de dígitos que se repite una y otra vez), por ejemplo,

$$\frac{23}{11} = 2.090909\ldots = 2.\overline{09}$$

La barra indica el bloque de dígitos que se repite.

* A este término también se le conoce como propiedad de densidad o de completitud.

Las expansiones decimales finitas representan un tipo especial de repetición decimal de final de ceros repetidos.

El conjunto de números racionales tiene todas las propiedades algebraicas y de orden de los números reales, pero carece de la propiedad de completez. Por ejemplo, no existe un número racional cuyo cuadrado sea 2; esto quiere decir que hay un "vacío" en la recta racional, donde debería estar $\sqrt{2}$.

Los números reales que no son racionales se llaman **números irracionales**, y se caracterizan por tener expansiones decimales no finitas y no periódicas. Por ejemplo, π, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, y $\log_{10} 3$. Como cada expansión decimal representa un número real, resulta evidente que la cantidad de números irracionales es infinita. Podemos encontrar tanto números racionales como irracionales arbitrariamente cercanos a cualquier punto de la recta real.

La notación de conjuntos es muy útil para especificar un subconjunto de números reales. Un **conjunto** es una colección de objetos, los mismos que constituyen los **elementos** del conjunto. Si S es un conjunto, la notación $a \in S$ significa que a es un elemento de S, y $a \notin S$ significa que a no es un elemento de S. Si S y T son conjuntos, $S \cup T$ es su **unión**, y ésta consiste de todos los elementos que pertenecen a S o a T (o tanto a S como a T). La **intersección** $S \cap T$ consiste de todos los elementos que pertenecen a ambos conjuntos, S y T. El **conjunto vacío** $\varnothing$ es aquel que no tiene elementos. Por ejemplo, la intersección de los números racionales y los números irracionales es el conjunto vacío.

Algunos conjuntos pueden describirse al *listar* sus elementos separados por comas entre llaves. Por ejemplo, el conjunto A, conformado por los números naturales (o enteros positivos) menores que 6, puede expresarse como

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

El conjunto de todos los números enteros se escribe como

$$\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}.$$

Otra manera de describir un conjunto, consiste en encerrar entre llaves una regla que genere todos los elementos del conjunto. Por ejemplo, el conjunto

$$A = \{x | x \text{ es un entero y } 0 < x < 6\}$$

es el conjunto de los enteros positivos menores que 6.

Intervalos

Un subconjunto de la recta real recibe el nombre de **intervalo** si contiene por lo menos dos números y todos los números reales que están entre cualquier par de sus elementos. Por ejemplo, el conjunto de todos los números reales x tales que $x > 6$ es un intervalo, así como el conjunto de todos los x tales que $-2 \leq x \leq 5$. El conjunto de todos los números reales distintos de cero no es un intervalo; como el 0 no se incluye, el conjunto no cumple con la condición de contener todos los números reales entre -1 y 1 (por ejemplo).

Geométricamente, los intervalos corresponden a rayos y segmentos de recta sobre la recta real o a lo largo de la misma. Los intervalos de números que corresponden a segmentos de recta son **intervalos finitos**; los intervalos que corresponden a rayos y a la recta real son **intervalos infinitos**.

Decimos que un intervalo finito es **cerrado** si incluye sus dos extremos, **semiabierto** si incluye uno de sus extremos pero no el otro, y **abierto** si no incluye ninguno de sus extremos. Los extremos también se llaman **puntos frontera**, ya que conforman precisamente la **frontera** del intervalo. El resto de los puntos del intervalo son **puntos interiores**, y constituyen el **interior** del intervalo. Los intervalos infinitos, que corresponden a rayos, son cerrados si contienen su extremo finito, de lo contrario son abiertos. La recta real completa $\mathbb{R}$ es un intervalo infinito que es tanto abierto como cerrado.

Resolución de desigualdades

Al proceso de encontrar el intervalo o intervalos de números que satisfacen una desigualdad en x se le llama **resolver** la desigualdad.

TABLA 1.1 Tipos de intervalos

	Notación	Descripción del conjunto	Tipo	Figura
Finito:	(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$	Abierto	
	$[a, b]$	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	Cerrado	
	$[a, b)$	$\{x \mid a \leq x < b\}$	Semiabierto	
	$(a, b]$	$\{x \mid a < x \leq b\}$	Semiabierto	
Infinito:	(a, ∞)	$\{x \mid x > a\}$	Abierto	
	$[a, \infty)$	$\{x \mid x \geq a\}$	Cerrado	
	$(-\infty, b)$	$\{x \mid x < b\}$	Abierto	
	$(-\infty, b]$	$\{x \mid x \leq b\}$	Cerrado	
	$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$ (conjunto de todos los números reales)	Ambos abierto y cerrado	

EJEMPLO 1 Resolver las siguientes desigualdades y mostrar su solución en forma de desigualdad, en forma de intervalo y en forma gráfica.

(a) $2x - 1 < x + 3$ **(b)** $-\frac{x}{3} < 2x + 1$ **(c)** $\frac{6}{x - 1} \geq 5$

Solución

(a)

$$2x - 1 < x + 3$$

$$2x < x + 4 \quad \text{Sumar 1 en ambos lados.}$$

$$x < 4 \quad \text{Restar } x \text{ en ambos lados.}$$

El conjunto solución es el intervalo abierto $(-\infty, 4)$ (figura 1.1a).

(b)

$$-\frac{x}{3} < 2x + 1$$

$$-x < 6x + 3 \quad \text{Multiplicar por 3 ambos lados.}$$

$$0 < 7x + 3 \quad \text{Sumar } x \text{ en ambos lados.}$$

$$-3 < 7x \quad \text{Restar 3 en ambos lados.}$$

$$-\frac{3}{7} < x \quad \text{Dividir entre 7.}$$

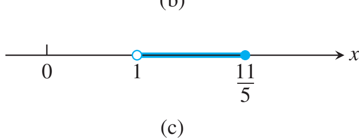


FIGURA 1.1 Conjuntos solución para las desigualdades del ejemplo 1.

El conjunto solución es el intervalo abierto $(-3/7, \infty)$ (figura 1.1b).

(c) La desigualdad $6/(x-1) \geq 5$ puede satisfacerse solamente si $x > 1$, ya que en cualquier otro caso $6/(x-1)$ no está definido o es negativo. Así, $(x-1)$ es positivo y la desigualdad no se altera si multiplicamos ambos lados por $(x-1)$, y tenemos que

$$\frac{6}{x-1} \geq 5$$

$$6 \geq 5x - 5 \qquad \text{Multiplicar ambos lados por } (x-1).$$

$$11 \geq 5x \qquad \text{Sumar 5 en ambos lados.}$$

$$\frac{11}{5} \geq x. \qquad \text{O } x \leq \frac{11}{5}.$$

El conjunto solución es el intervalo semiabierto $(1, 11/5]$ (figura 1.1c). ■

Valor absoluto

El **valor absoluto** de un número x, denotado por $|x|$, se define como

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

EJEMPLO 2 Encontrar los valores absolutos

$$|3| = 3, \quad |0| = 0, \quad |-5| = -(-5) = 5, \quad |-|a|| = |a|$$ ■

Geométricamente, el valor absoluto de x es la distancia de x a 0 sobre la recta real. Como las distancias siempre son positivas o 0, si vemos que $|x| \geq 0$ para todo número real x, y $|x| = 0$ si y sólo si $x = 0$. También

$$|x - y| = \text{es igual a la distancia entre } x \text{ y } y$$

la distancia entre x y y sobre la recta real (figura 1.2).

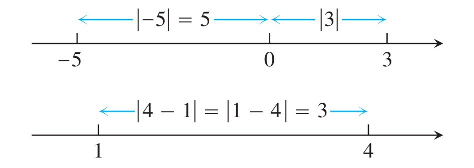


FIGURA 1.2 Los valores absolutos indican las distancias entre los puntos de la recta numérica.

Como el símbolo $\sqrt{a}$ denota siempre la raíz cuadrada *no negativa* de a, una definición alternativa de $|x|$ es

$$|x| = \sqrt{x^2}.$$

Es importante recordar que $\sqrt{a^2} = |a|$. No se puede escribir $\sqrt{a^2} = a$ a menos que sepamos de antemano que $a \geq 0$.

El valor absoluto tiene las propiedades siguientes. (Se le pedirá que pruebe estas propiedades en los ejercicios).

Propiedades del valor absoluto

1.	$\|-a\| = \|a\|$	Un número y su inverso aditivo o negativo tienen el mismo valor absoluto.
2.	$\|ab\| = \|a\|\|b\|$	El valor absoluto de un producto es el producto de los valores absolutos.
3.	$\left\|\frac{a}{b}\right\| = \frac{\|a\|}{\|b\|}$	El valor absoluto de un cociente es el cociente de los valores absolutos.
4.	$\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$	La **desigualdad triangular**. El valor absoluto de la suma de dos números es menor o igual que la suma de sus valores absolutos.

Observe que $|-a| \neq -|a|$. Por ejemplo, $|-3| = 3$, mientras que $-|3| = -3$. Si a y b tienen distinto signo, entonces $|a + b|$ en cualquier otro caso, $|a| + |b|$. En expresiones como $|a + b|$ es igual a $|a| + |b|$. Las barras que denotan valor absoluto $|-3 + 5|$ funcionan como los paréntesis: deben realizarse las operaciones aritméticas del interior *antes* de tomar el valor absoluto.

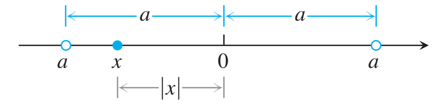


FIGURA 1.3 $|x| < a$ significa que x está entre $-a$ y a.

EJEMPLO 3 Ilustrar la desigualdad triangular

$$|-3 + 5| = |2| = 2 < |-3| + |5| = 8$$
$$|3 + 5| = |8| = |3| + |5|$$
$$|-3 - 5| = |-8| = 8 = |-3| + |-5|$$ ■

La desigualdad $|x| < a$ indica que la distancia de x a 0 es menor que el número positivo a. Esto significa que x debe estar entre $-a$ y a, como puede verse en la figura 1.3.

Todos los siguientes enunciados son consecuencia de la definición de valor absoluto, y suelen ser útiles en la resolución de ecuaciones o desigualdades con valor absoluto.

Valores absolutos e intervalos

Si a es cualquier número positivo, entonces

5. $|x| = a$ si y sólo si $x = \pm a$

6. $|x| < a$ si y sólo si $-a < x < a$

7. $|x| > a$ si y sólo si $x > a$ o $x < -a$

8. $|x| \leq a$ si y sólo si $-a \leq x \leq a$

9. $|x| \geq a$ si y sólo si $x \geq a$ o $x \leq -a$

En matemática, el símbolo $\Leftrightarrow$ denota con frecuencia la relación lógica "si y sólo si". También significa "implica y es implicado por".

EJEMPLO 4 Resolver una ecuación con valores absolutos

Resolver la ecuación $|2x - 3| = 7$.

Solución De acuerdo con la propiedad 5, $2x - 3 = \pm 7$, así que hay dos posibilidades:

$$2x - 3 = 7 \qquad 2x - 3 = -7$$ Ecuaciones equivalentes sin valores abolutos.

$$2x = 10 \qquad 2x = -4$$ Resolver como de costumbre.

$$x = 5 \qquad x = -2$$

Las soluciones de $|2x - 3| = 7$ son $x = 5$ y $x = -2$. ■

EJEMPLO 5 Resolver una desigualdad con valor absoluto

Resolver la desigualdad $\left|5 - \frac{2}{x}\right| < 1$.

Solución Tenemos

$$\left|5-\frac{2}{x}\right|<1 \Leftrightarrow -1<5-\frac{2}{x}<1 \qquad \text{Propiedad 6}$$

$$\Leftrightarrow -6<-\frac{2}{x}<-4 \qquad \text{Restar 5.}$$

$$\Leftrightarrow 3>\frac{1}{x}>2 \qquad \text{Multiplicar por } -\frac{1}{2}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}. \qquad \text{Tomar recíprocos.}$$

Observe cómo se emplearon aquí las distintas reglas para las desigualdades. Multiplicar por un número negativo cambia el sentido de la desigualdad. Sucede lo mismo al tomar recíprocos en una desigualdad cuyos dos lados son positivos. La desigualdad original se satisface si y sólo si $(1/3)<x<(1/2)$. El conjunto solución es el intervalo abierto $(1/3, 1/2)$. ■

EJEMPLO 6 Resolver la desigualdad y mostrar el conjunto solución en la recta real:

(a) $|2x-3|\leq 1$ **(b)** $|2x-3|\geq 1$

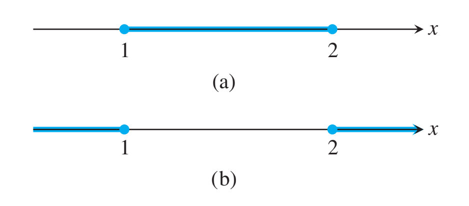


FIGURA 1.4 Los conjuntos solución (a) $[1, 2]$ y (b) $(-\infty, 1]\cup[2,\infty)$ del ejemplo 6.

Solución

(a)

$$|2x-3|\leq 1$$

$$-1\leq 2x-3\leq 1 \qquad \text{Propiedad 8}$$

$$2\leq 2x\leq 4 \qquad \text{Restar 3.}$$

$$1\leq x\leq 2 \qquad \text{Dividir entre 2.}$$

El conjunto solución es el intervalo cerrado $[1, 2]$ (figura 1.4a).

(b)

$$|2x-3|\geq 1$$

$$2x-3\geq 1 \quad \text{o} \quad 2x-3\leq -1 \qquad \text{Propiedad 9}$$

$$x-\frac{3}{2}\geq\frac{1}{2} \quad \text{o} \quad x-\frac{3}{2}\leq -\frac{1}{2} \qquad \text{Dividir entre 2.}$$

$$x\geq 2 \quad \text{o} \quad x\leq 1 \qquad \text{Sumar } \frac{3}{2}.$$

El conjunto solución es $(-\infty, 1]\cup[2,\infty)$ (figura 1.4b). ■

EJERCICIOS 1.1

Representación decimal

1. Exprese 1/9 como un decimal periódico, usando una barra para indicar los dígitos que se repiten. ¿Cuáles son las expansiones decimales de las siguientes fracciones: 2/9, 3/9, 8/9 y 9/9?
2. Exprese 1/11 como un decimal periódico, usando una barra para indicar los dígitos que se repiten. ¿Cuáles son las expansiones decimales de las siguientes fracciones: 2/11, 3/11, 9/11 y 11/11?

Desigualdades

3. Si $2<x<6$, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones acerca de x son necesariamente ciertas y cuáles no son necesariamente ciertas?
   a. $0<x<4$
   b. $0<x-2<4$
   c. $1<\frac{x}{2}<3$
   d. $\frac{1}{6}<\frac{1}{x}<\frac{1}{2}$
   e. $1<\frac{6}{x}<3$
   f. $|x-4|<2$
   g. $-6<-x<2$
   h. $-6<-x<-2$

4. Si $-1 < y - 5 < 1$, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones acerca de y son necesariamente ciertas y cuáles no son necesariamente ciertas?

a. $4 < y < 6$ **b.** $-6 < y < -4$

c. $y > 4$ **d.** $y < 6$

e. $0 < y - 4 < 2$ **f.** $2 < \frac{y}{2} < 3$

g. $\frac{1}{6} < \frac{1}{y} < \frac{1}{4}$ **h.** $|y - 5| < 1$

En los ejercicios 5-12, resuelva las desigualdades y muestre su conjunto solución en forma gráfica (sobre la recta real).

5. $-2x > 4$ **6.** $8 - 3x \geq 5$

7. $5x - 3 \leq 7 - 3x$ **8.** $3(2 - x) > 2(3 + x)$

9. $2x - \frac{1}{2} \geq 7x + \frac{7}{6}$ **10.** $\frac{6 - x}{4} < \frac{3x - 4}{2}$

11. $\frac{4}{5}(x - 2) < \frac{1}{3}(x - 6)$ **12.** $-\frac{x + 5}{2} \leq \frac{12 + 3x}{4}$

Valor absoluto

Resuelva las ecuaciones en los ejercicios 13-18.

13. $|y| = 3$ **14.** $|y - 3| = 7$ **15.** $|2t + 5| = 4$

16. $|1 - t| = 1$ **17.** $|8 - 3s| = \frac{9}{2}$ **18.** $\left|\frac{s}{2} - 1\right| = 1$

Resuelva las desigualdades en los ejercicios 19-34, expresando los conjuntos solución como intervalos o uniones de intervalos. Asimismo, muestre el conjunto solución en forma gráfica (sobre la recta real).

19. $|x| < 2$ **20.** $|x| \leq 2$ **21.** $|t - 1| \leq 3$

22. $|t + 2| < 1$ **23.** $|3y - 7| < 4$ **24.** $|2y + 5| < 1$

25. $\left|\frac{z}{5} - 1\right| \leq 1$ **26.** $\left|\frac{3}{2}z - 1\right| \leq 2$ **27.** $\left|3 - \frac{1}{x}\right| < \frac{1}{2}$

28. $\left|\frac{2}{x} - 4\right| < 3$ **29.** $|2s| \geq 4$ **30.** $|s + 3| \geq \frac{1}{2}$

31. $|1 - x| > 1$ **32.** $|2 - 3x| > 5$ **33.** $\left|\frac{r + 1}{2}\right| \geq 1$

34. $\left|\frac{3r}{5} - 1\right| > \frac{2}{5}$

Desigualdades cuadráticas

Resuelva las desigualdades en los ejercicios 35-42. Exprese el conjunto solución en forma de intervalos o uniones de intervalos, y en forma gráfica (en la recta real). Use el resultado $\sqrt{a^2} = |a|$ según convenga.

35. $x^2 < 2$ **36.** $4 \leq x^2$ **37.** $4 < x^2 < 9$

38. $\frac{1}{9} < x^2 < \frac{1}{4}$ **39.** $(x - 1)^2 < 4$ **40.** $(x + 3)^2 < 2$

41. $x^2 - x < 0$ **42.** $x^2 - x - 2 \geq 0$

Teoría y ejemplos

43. Evite caer en el error de que $|-a| = a$. ¿Para cuáles números reales a es verdadera esta ecuación? ¿Para cuáles números reales es falsa?

44. Resuelva la ecuación $|x - 1| = 1 - x$.

45. Una demostración de la desigualdad triangular Dé una razón que justifique cada uno de los pasos numerados en la siguiente demostración de la desigualdad triangular.

$$\begin{aligned}
|a + b|^2 &= (a + b)^2 && (1)\\
&= a^2 + 2ab + b^2 \\
&\leq a^2 + 2|a||b| + b^2 && (2)\\
&= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 && (3)\\
&= (|a| + |b|)^2 \\
|a + b| &\leq |a| + |b| && (4)
\end{aligned}$$

46. Demuestre que $|ab| = |a||b|$ para cualesquiera números a y b.

47. Si $|x| \leq 3$ y $x > -1/2$, ¿qué se puede decir acerca de x?

48. Trace la gráfica de la desigualdad $|x| + |y| \leq 1$.

49. Sea $f(x) = 2x + 1$ y sea $\delta > 0$ cualquier número positivo. Demuestre que $|x - 1| < \delta$ implica $|f(x) - f(1)| < 2\delta$. Aquí la notación $f(a)$ se refiere al valor de la expresión $2x + 1$ cuando $x = a$. Esta *notación de función* se explica en la sección 1.3.

50. Sea $f(x) = 2x + 3$ y sea $\epsilon > 0$ cualquier número positivo. Demuestre que $|f(x) - f(0)| < \epsilon$ siempre que $|x - 0| < \frac{\epsilon}{2}$. Aquí la notación $f(a)$ se refiere al valor de la expresión $2x + 3$ cuando $x = a$. (Vea la sección 1.3).

51. Demuestre que $|-a| = |a|$. para cualquier número a.

52. Sea a cualquier número positivo. Demuestre que $|x| > a$ si y sólo si $x > a$ o $x < -a$.

53. a. Si b es cualquier número real distinto de cero, demuestre que $|1/b| = 1/|b|$.

b. Demuestre que $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ para cualesquiera números a y $b \neq 0$.

54. Usando inducción matemática (vea el apéndice 1), demuestre que $|a^n| = |a|^n$ para cualquier número a y n un entero positivo.

1.2 Rectas, círculos y parábolas

En esta sección hablaremos de coordenadas cartesianas, rectas, distancia, círculos y parábolas en el plano. También se discutirá el concepto de incremento.

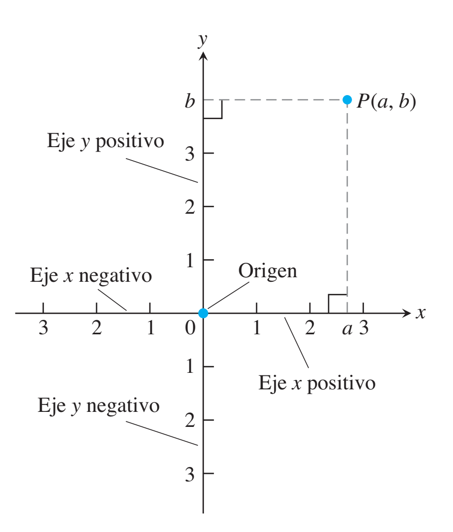


FIGURA 1.5 Las coordenadas cartesianas del plano se basan en dos ejes perpendiculares que se intersecan en el origen.

Coordenadas cartesianas en el plano

En la sección anterior identificamos puntos sobre la recta con números reales asignándoles coordenadas. Los puntos que están en el plano pueden identificarse como pares ordenados de números reales. Para empezar, trazamos dos rectas coordenadas perpendiculares que se intersecan en el punto 0 de cada recta. Estas rectas se llaman **ejes coordenados** en el plano. En el eje horizontal x, los números se denotan mediante x y se incrementan hacia la derecha. En el eje vertical y, los números se denotan mediante y y se incrementan hacia arriba (figura 1.5). En consecuencia, "hacia arriba" y "hacia la derecha" son direcciones positivas, mientras que "hacia abajo" y "hacia la izquierda" son consideradas como negativas. El **origen** O —también identificado con un 0— del sistema de coordenadas es el punto del plano donde x y y son cero.

Si P es cualquier punto en el plano, puede ser localizado mediante, exactamente, un par ordenado de números reales de la siguiente manera. Se trazan rectas que pasen por P y sean perpendiculares a los dos ejes coordenados. Si estas rectas intersecan los ejes x y y en puntos con coordenadas a y b, respectivamente (figura 1.5), entonces el par ordenado (a, b) se asigna al punto P, y se llama **par coordenado**. El primer número, a, es la **coordenada** x (o **abscisa**) de P; el segundo número, b, es la **coordenada** y (u **ordenada**) de P. La coordenada x de cualquier punto en el eje y es 0. La coordenada y de cualquier punto en el eje x es 0. El origen es el punto $(0, 0)$.

Empezando con un par ordenado (a, b), podemos invertir el proceso y llegar al punto P correspondiente en el plano. Frecuentemente identificamos P con el par ordenado y escribimos $P(a, b)$. Algunas veces también nos referimos al "punto (a, b)" y el contexto nos permitirá saber cuando (a, b) se refiere a un punto en el plano y no a un intervalo abierto en la recta real. En la figura 1.6 se muestran varios puntos identificados por sus coordenadas.

Este sistema de coordenadas se denomina **sistema rectangular de coordenadas** o **sistema de coordenadas cartesianas** (en honor de René Descartes, matemático francés del siglo XVI). Los ejes coordenados de este plano coordenado o cartesiano dividen el plano en cuatro regiones llamadas **cuadrantes**, numerados en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, como se muestra en la figura 1.6.

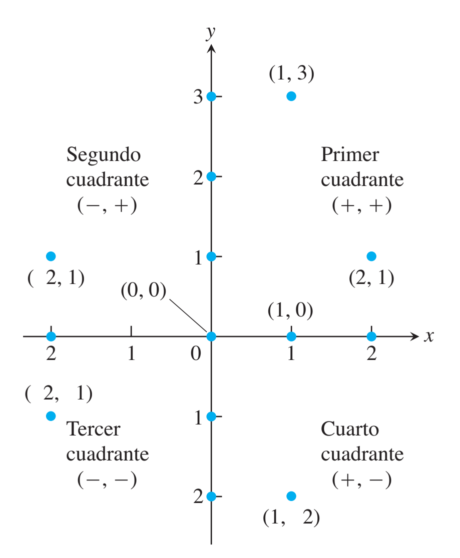


FIGURA 1.6 Identificación de puntos en el plano xy o plano cartesiano. Todos los puntos sobre los ejes tienen un par coordenado, pero usualmente están marcados con un solo número real (de manera que $(1, 0)$ en el eje x se identifica con 1). Observe los patrones de los signos de las coordenadas en los cuadrantes.

La **gráfica** de una ecuación o desigualdad en las variables x y y es el conjunto de todos los puntos $P(x, y)$ en el plano, cuyas coordenadas satisfacen la ecuación o desigualdad. Cuando se grafican datos en el plano cartesiano o se traza la gráfica de fórmulas con variables que tienen distintas unidades de medida, no es necesario usar la misma escala en los dos ejes. Si graficamos, por ejemplo, tiempo contra fuerza de propulsión al analizar el comportamiento del motor de un cohete, no hay razón para colocar la marca que muestra 1 segundo a la misma distancia del origen sobre el eje del tiempo, que la marca que identifica 1 libra sobre el eje de la fuerza de propulsión.

En general, cuando se grafican funciones cuyas variables no representan medidas físicas y cuando se trazan figuras en el plano cartesiano para estudiar su geometría y trigonometría, se intenta que las marcas de las escalas sean idénticas en ambos ejes. Así, una unidad vertical de distancia se ve igual que una unidad horizontal. Como en un mapa topográfico o en un dibujo a escala, los segmentos de recta que supuestamente tengan la misma longitud se verán de un largo equivalente, y los ángulos que supuestamente sean congruentes se verán congruentes.

Las pantallas de calculadoras o computadoras son otro asunto. Las escalas vertical y horizontal de las gráficas generadas por computadora suelen diferir, y existen distorsiones en distancias, pendientes y ángulos. Los círculos se pueden ver como elipses, los rectángulos pueden verse como cuadrados, los ángulos rectos como agudos u obtusos, etcétera. En la sección 1.7 estudiaremos con más detalle estas imágenes y distorsiones.

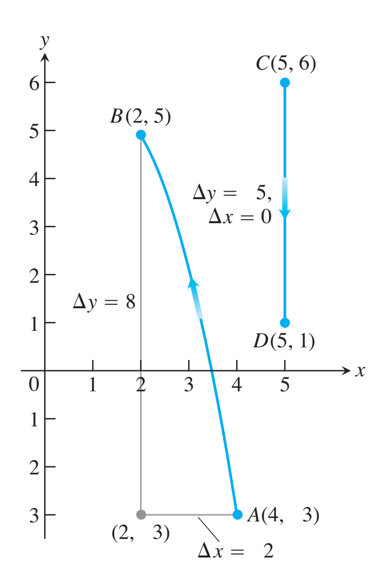


FIGURA 1.7 Los incrementos de las coordenadas pueden ser positivos, negativos o nulos (ejemplo 1).

BIOGRAFÍA HISTÓRICA*

René Descartes
(1596–1650)

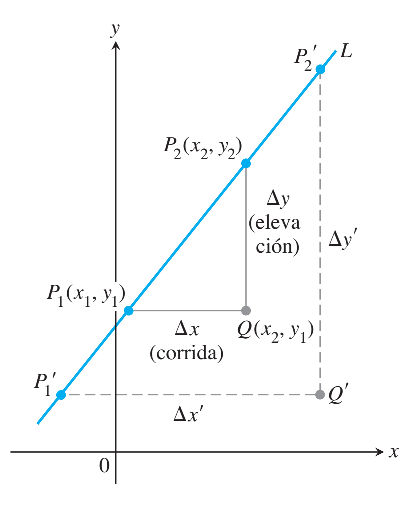


FIGURA 1.8 Los triángulos P_1QP_2 y $P_1'Q'P_2'$ son semejantes, de manera que la razón de sus lados tiene el mismo valor para cualesquiera dos puntos sobre la recta. Este valor común es la pendiente de la recta.

Incrementos y rectas

Cuando una partícula se mueve de un punto del plano a otro, los cambios netos en sus coordenadas reciben el nombre de *incrementos*. Tales incrementos se calculan restando las coordenadas del punto inicial de las coordenadas del punto final. Si x cambia de x_1 a x_2, el **incremento** en x es

$$\Delta x = x_2 - x_1.$$

EJEMPLO 1 Si vamos del punto $A(4, -3)$ al punto $B(2, 5)$, los incrementos en las coordenadas x y y son

$$\Delta x = 2 - 4 = -2, \qquad \Delta y = 5 - (-3) = 8.$$

De $C(5, 6)$ a $D(5, 1)$, los incrementos de las coordenadas son

$$\Delta x = 5 - 5 = 0, \qquad \Delta y = 1 - 6 = -5.$$

Vea la figura 1.7. ■

Dados dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ en el plano, llamamos a los incrementos $\Delta x = x_2 - x_1$ y $\Delta y = y_2 - y_1$ el **avance** y la **elevación**, respectivamente, entre P_1 y P_2. Dos puntos determinan siempre una única línea recta (por lo general denominada simplemente recta) que pasa por ambos. La llamamos recta P_1P_2.

Cualquier recta no vertical en el plano tiene la propiedad de que la razón

$$m = \frac{\text{elevación}}{\text{corrida}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Es la fórmula dados dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ en la recta (figura 1.8). Esto se debe a que las razones de los lados correspondientes de dos triángulos semejantes son iguales.

DEFINICIÓN **Pendiente**
La constante

$$m = \frac{\text{elevación}}{\text{corrida}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

es la **pendiente** de la recta no vertical P_1P_2.

La pendiente nos indica la dirección (hacia arriba, hacia abajo) a la derecha y la inclinación de una recta. Una recta con pendiente positiva va hacia arriba a la derecha; una recta con pendiente negativa va hacia abajo a la derecha (figura 1.9). A medida que aumenta el valor absoluto de la pendiente, más rápido es el ascenso o el descenso de la recta, es decir, mayor es su inclinación. Una recta con pendiente cero tiene dirección horizontal y no tiene inclinación. La pendiente de una recta vertical es *indefinida*. Como el avance Δx es cero en el caso de una recta vertical, resulta imposible evaluar la razón de la pendiente m.

La dirección y la inclinación de una recta también pueden medirse con un ángulo. El **ángulo de inclinación** de una recta que cruza el eje x es el menor ángulo medido en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj del eje x a la recta (figura 1.10). La inclinación de una recta horizontal es 0º. La inclinación de una recta vertical es 90º. Si ϕ (la letra griega phi, o fi) es la inclinación de una recta, entonces $0 \le \phi < 180°$.

*Para aprender más acerca de las figuras históricas y del desarrollo de los elementos y temas principales del cálculo, visite **www.aw-bc.com/thomas**.

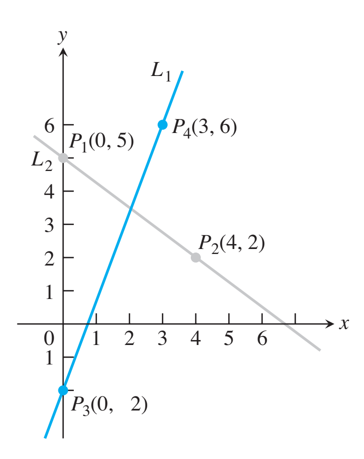


FIGURA 1.9 La pendiente de L_1 es

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6-(-2)}{3-0} = \frac{8}{3}.$$

Esto es, y aumenta 8 unidades cada vez que x se incrementa 3 unidades. La pendiente de L_2 es

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-5}{4-0} = \frac{-3}{4}.$$

Esto es, y disminuye 3 unidades cada vez que x se reduce 4 unidades.

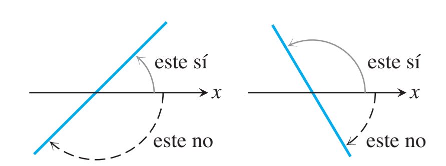


FIGURA 1.10 Los ángulos de inclinación se miden en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, a partir del eje x.

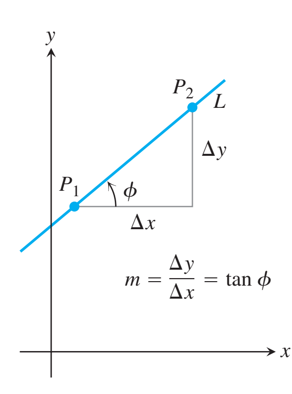


FIGURA 1.11 La pendiente de una recta no vertical es la tangente de su ángulo de inclinación.

En la figura 1.11 se muestra la relación entre la pendiente m de una recta no vertical y el ángulo de inclinación ϕ de la misma:

$$m = \tan \phi.$$

Las rectas tienen ecuaciones relativamente sencillas. Todos los puntos sobre la *recta vertical* que pasa por el punto a, en el eje x tienen coordenadas x iguales a a. Por lo tanto, $x = a$ es una ecuación para la recta vertical. De manera similar, $y = b$ es una ecuación para la *recta horizontal* que interseca el eje y en b. (Vea la figura 1.12).

Podemos escribir una ecuación para una recta no vertical L si conocemos su pendiente m y las coordenadas, $P_1(x_1, y_1)$ de uno de sus puntos. Si $P(x, y)$ es *cualquier* otro punto en L, podemos usar los dos puntos P_1 y P para calcular la pendiente:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

de manera que

$$y - y_1 = m(x - x_1) \qquad \text{o} \qquad y = y_1 + m(x - x_1).$$

La ecuación

$$y = y_1 + m(x - x_1)$$

es la **ecuación punto-pendiente** de la recta que pasa por el punto (x_1, y_1) y tiene pendiente m.

EJEMPLO 2 Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto (2, 3) y tiene pendiente –3/2.

Solución Sustituimos $x_1 = 2, y_1 = 3$, y $m = -3/2$ en la ecuación punto-pendiente para obtener

$$y = 3 - \frac{3}{2}\left(x - 2\right), \qquad \text{o} \qquad y = -\frac{3}{2}x + 6.$$

Cuando $x = 0, y = 6$ así la recta interseca el eje y en $y = 6$. ■

EJEMPLO 3 Una recta que pasa por dos puntos

Encontrar la ecuación de la recta que pasa por $(-2, -1)$ y (3, 4).

Solución La pendiente de la recta es

$$m = \frac{-1-4}{-2-3} = \frac{-5}{-5} = 1.$$

Podemos usar esta pendiente con cualquiera de los dos puntos dados en la ecuación punto-pendiente:

Con $(x_1, y_1) = (-2, -1)$	**Con $(x_1, y_1) = (3, 4)$**
$y = -1 + 1 \cdot (x - (-2))$	$y = 4 + 1 \cdot (x - 3)$
$y = -1 + x + 2$	$y = 4 + x - 3$
$y = x + 1$	$y = x + 1$

Algunos resultados

Esto es, $y = x + 1$ es la ecuación de la recta (figura 1.13). ■

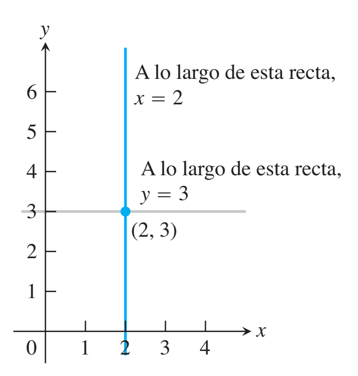


FIGURA 1.12 Las ecuaciones estándar para las rectas vertical y horizontal que pasan por (2, 3) son $x = 2$ y $y = 3$.

La coordenada y del punto donde una recta no vertical interseca el eje y se llama **ordenada al origen** de la recta. De forma similar, la **abscisa al origen** de una recta no horizontal es la coordenada x del punto donde interseca el eje x (figura 1.14). Una recta con pendiente m y ordenada al origen b en y pasa por el punto $(0, b)$, tiene la ecuación

$$y = b + m(x - 0), \qquad \text{o, simplemente,} \qquad y = mx + b.$$

> La ecuación
>
> $$y = mx + b$$
>
> se denomina **ecuación pendiente-ordenada al origen** de la recta con pendiente m e intersección con el eje y, u ordenada al origen, b.

Las rectas con ecuaciones de la forma $y = mx$ tienen intersección con el eje y 0 y, por lo tanto, pasan por el origen. Las ecuaciones de esas rectas reciben el nombre de ecuaciones **lineales**.

La ecuación

$$Ax + By = C \qquad (A \text{ o } B \text{ distintas de cero})$$

se conoce como **ecuación general lineal** en x y y, ya que su gráfica siempre representa una recta y toda recta tiene una ecuación con esta forma (incluyendo las rectas con pendiente indefinida).

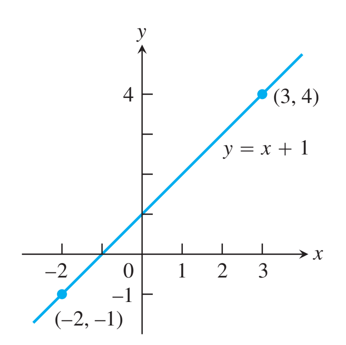


FIGURA 1.13 La recta del ejemplo 3.

EJEMPLO 4 Encontrar la pendiente y la ordenada al origen

Encontrar la pendiente y la ordenada al origen de la recta y $8x + 5y = 20$.

Solución Se despeja y de la ecuación a fin de ponerla en la forma pendiente-ordenada al origen:

$$\begin{aligned} 8x + 5y &= 20 \\ 5y &= -8x + 20 \\ y &= -\frac{8}{5}x + 4. \end{aligned}$$

La pendiente es $m = -8/5$. La ordenada y al origen es $b = 4$. ■

Rectas paralelas y perpendiculares

Las rectas paralelas tienen el mismo ángulo de inclinación, de manera que tienen la misma pendiente (si no son verticales). Recíprocamente, las rectas con pendientes iguales tienen el mismo ángulo de inclinación y son, por lo tanto, paralelas.

Si dos rectas no verticales L_1 y L_2 son perpendiculares, sus pendientes m_1 y m_2 satisfacen $m_1 m_2 = -1$, de manera que cada pendiente es el *recíproco negativo* de la otra:

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}, \qquad m_2 = -\frac{1}{m_1}.$$

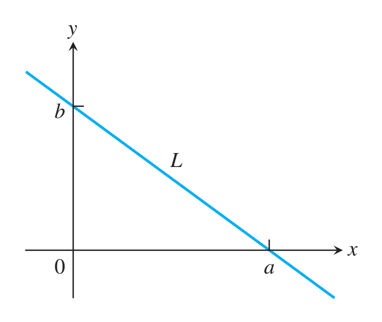


FIGURA 1.14 La recta L tiene una intersección x a y una intersección y b.

Para comprobarlo, observe que, de acuerdo con los triángulos semejantes de la figura 1.15, $m_1 = a/h$, y $m_2 = -h/a$. Por lo tanto, $m_1 m_2 = (a/h)(-h/a) = -1$.

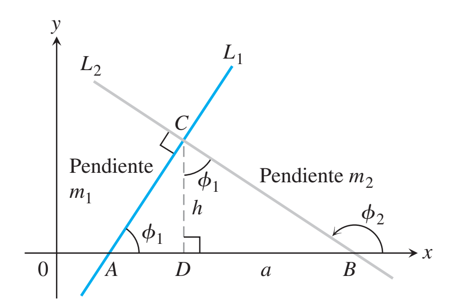


FIGURA 1.15 ΔADC es semejante a ΔCDB. En consecuencia, ϕ_1 también es el ángulo superior en ΔCDB. A partir de los lados de ΔCDB, vemos que $\tan \phi_1 = a/h$.

Distancia y círculos en el plano

La distancia entre puntos en el plano se calcula a partir de la fórmula del teorema de Pitágoras (figura 1.16).

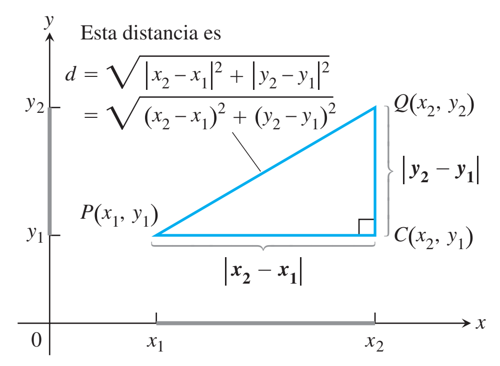


FIGURA 1.16 Para calcular la distancia entre $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo *PCQ*.

Fórmula de distancia para puntos en el plano

La distancia entre $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ es

$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

EJEMPLO 5 Calcular la distancia entre dos puntos

(a) La distancia del origen al punto $P(-1, 2)$ y $Q(3, 4)$ es

$$\sqrt{(3 - (-1))^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{(4)^2 + (2)^2} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}.$$

(b) La distancia entre el origen y $P(x, y)$ es

$$\sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

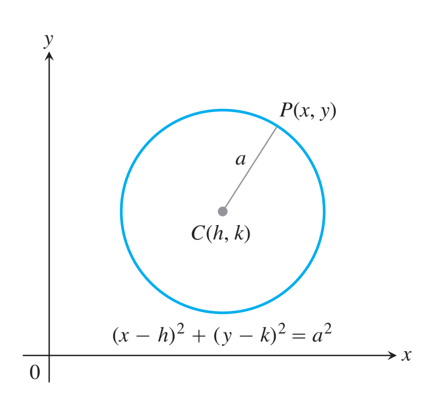


FIGURA 1.17 Un círculo con radio a en el plano xy y centro en (h, k).

Por definición, un **círculo** de radio a es el conjunto de todos los puntos $P(x, y)$ cuya distancia desde algún punto fijo, llamado centro del círculo, $C(h, k)$ es igual a a (figura 1.17). De acuerdo con la fórmula de la distancia, P está en el círculo si y sólo si

$$\sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = a,$$

de manera que

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2. \qquad (1)$$

La ecuación (1) es la **ecuación estándar** de un círculo con centro en (h, k) y radio a. El círculo de radio $a = 1$ y centro en el origen es el **círculo unitario**, con ecuación

$$x^2 + y^2 = 1.$$

EJEMPLO 6

(a) La ecuación estándar del círculo de radio 2 y centro en (3, 4) es

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 2^2 = 4.$$

(b) El círculo

$$(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = 3$$

tiene $h = 1$, $k = -5$, y $a = \sqrt{3}$. El centro es el punto $(h, k) = (1, -5)$ y el radio es $a = \sqrt{3}$. ■

Si la ecuación de un círculo no está en la forma estándar, para encontrar su centro y su radio primero deberá convertirse la ecuación a dicha forma. La técnica algebraica para hacerlo consiste en *completar los cuadrados* (vea el apéndice 9).

EJEMPLO 7 Encontrar el centro y el radio de un círculo

Encontrar el centro y el radio del círculo

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0.$$

Solución Convertimos la ecuación a la forma estándar, completando los cuadrados en x y en y.

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$$

Empezamos con la ecuación dada.

$$(x^2 + 4x \quad) + (y^2 - 6y \quad) = 3$$

Agrupamos términos. Pasamos la constante al lado derecho.

$$\left(x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2\right) + \left(y^2 - 6y + \left(\frac{-6}{2}\right)^2\right) = 3 + \left(\frac{4}{2}\right)^2 + \left(\frac{-6}{2}\right)^2$$

Sumamos el cuadrado de la mitad del coeficiente de x en ambos lados de la ecuación. Hacemos lo mismo con y. Las expresiones que están dentro de los paréntesis en el lado izquierdo son ahora cuadrados perfectos.

$$(x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) = 3 + 4 + 9$$

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$$

Factorizamos los trinomios cuadrados perfectos, como binomios cuadrados.

El centro es $(-2, 3)$ y el radio es $a = 4$. ■

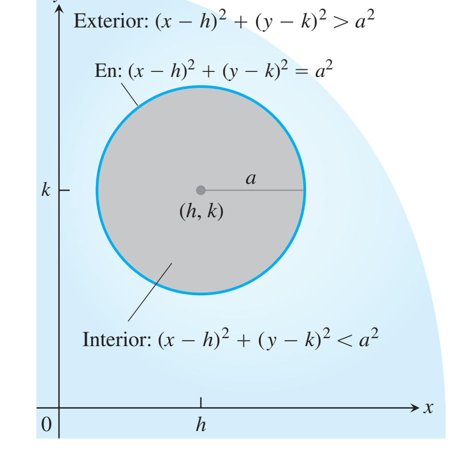


FIGURA 1.18 El interior y el exterior del círculo $(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2$.

Los puntos (x, y) que satisfacen la desigualdad

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 < a^2$$

forman la región **interior** del círculo con centro en (h, k) y radio a (figura 1.18). El **exterior** del círculo consiste de los puntos (x, y) que satisfacen

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 > a^2.$$

Parábolas

La definición geométrica y las propiedades generales de las parábolas se abordan en la sección 10.1. Aquí hablaremos de las parábolas que surgen al graficar las ecuaciones de la forma $y = ax^2 + bx + c$.

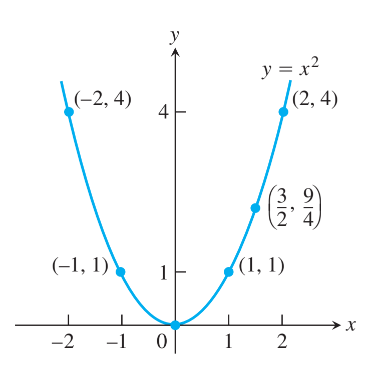


FIGURA 1.19 La parábola $y = x^2$ (ejemplo 8).

EJEMPLO 8 La parábola $y = x^2$

Considere la ecuación $y = x^2$. Algunos de los puntos que satisfacen esta ecuación son $(0, 0)$, $(1, 1)$, $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$, $(-1, 1)$, $(2, 4)$, y $(-2, 4)$. Estos puntos (y todos los demás que satisfacen la ecuación), forman una curva suave llamada parábola (figura 1.19). ■

La gráfica de una ecuación de la forma

$$y = ax^2$$

es una **parábola** cuyo **eje** de simetría es el eje y. El **vértice** de la parábola (el punto donde la parábola interseca su eje de simetría) está en el origen. La parábola abre hacia arriba si $a > 0$ y hacia abajo si $a < 0$. Entre más grande sea el valor de $|a|$, la parábola será más angosta (figura 1.20).

Generalmente, la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$ es una parábola desplazada en forma horizontal y vertical de la parábola $y = x^2$. En la sección 1.5 discutiremos con más detalle el desplazamiento horizontal y vertical de las gráficas de las funciones cuadráticas.

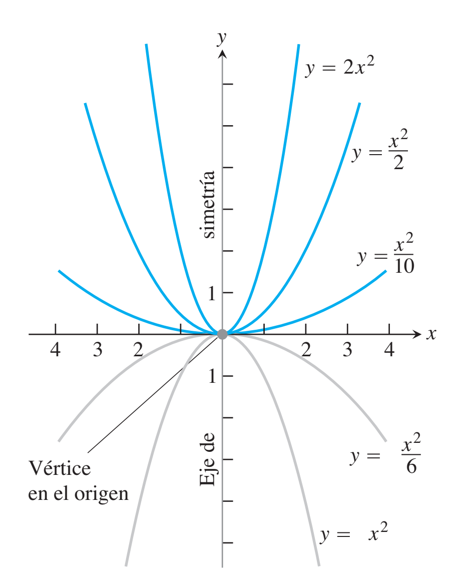


FIGURA 1.20 Además de determinar la dirección en la que abre la parábola $y = ax^2$, el número a es un factor de escalamiento. La parábola se ensancha conforme a se acerca a cero, y se estrecha conforme $|a|$ aumenta.

La gráfica de $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

La gráfica de la ecuación $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, es una parábola. La parábola abre hacia arriba si $a > 0$ y hacia abajo si $a < 0$. El **eje x** es la recta

$$x = -\frac{b}{2a}. \qquad (2)$$

El **vértice** de la parábola es el punto donde el eje y la parábola se intersecan. Su coordenada x es $x = -b/2a$; su coordenada y se encuentra sustituyendo $x = -b/2a$ en la ecuación de la parábola.

Observe que si $a = 0$, tenemos $y = bx + c$ la cual es la ecuación de una recta. El eje, dado por la ecuación (2), puede encontrarse completando el cuadrado o usando una técnica que estudiaremos en la sección 4.1.

EJEMPLO 9 Trazar la gráfica de una parábola

Trazar la gráfica de la ecuación $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 4$.

Solución Comparando la ecuación con $y = ax^2 + bx + c$ vemos que

$$a = -\frac{1}{2}, \qquad b = -1, \qquad c = 4.$$

Dado que $a < 0$, la parábola abre hacia abajo. De acuerdo con la ecuación (2), su eje es la recta vertical

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-1)}{2(-1/2)} = -1.$$

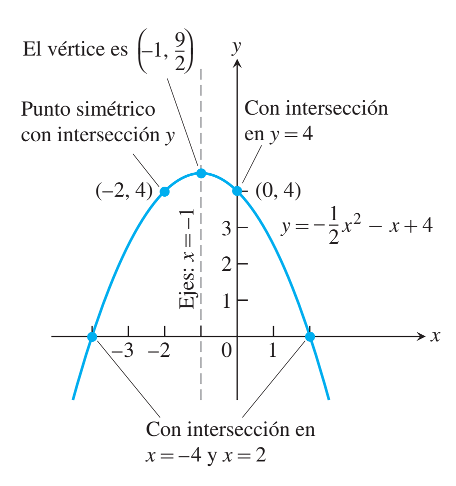


FIGURA 1.21 La parábola del ejemplo 9.

Cuando $x = -1$, tenemos

$$y = -\frac{1}{2}(-1)^2 - (-1) + 4 = \frac{9}{2}.$$

El vértice es $(-1, 9/2)$.

Las intersecciones con el eje x se dan en los puntos donde $y = 0$:

$$-\frac{1}{2}x^2 - x + 4 = 0$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$(x - 2)(x + 4) = 0$$

$$x = 2, \qquad x = -4$$

Graficamos algunos puntos, trazamos el eje y usamos las reglas de dirección de la apertura de la parábola para completar la gráfica de la figura 1.21. ■

EJERCICIOS 1.2

Incrementos y distancia

En los ejercicios 1-4, una partícula se mueve de A a B en el plano coordenado. Encuentre los incrementos Δx y Δy en las coordenadas de la partícula. Determine también la distancia de A a B.

1. $A(-3, 2)$, $B(-1, -2)$ **2.** $A(-1, -2)$, $B(-3, 2)$

3. $A(-3.2, -2)$, $B(-8.1, -2)$ **4.** $A(\sqrt{2}, 4)$, $B(0, 1.5)$

Describa las gráficas de las ecuaciones de los ejercicios 5-8.

5. $x^2 + y^2 = 1$ **6.** $x^2 + y^2 = 2$

7. $x^2 + y^2 \leq 3$ **8.** $x^2 + y^2 = 0$

Pendientes, rectas e intersecciones

En los ejercicios 9-12, grafique los puntos y encuentre la pendiente (si existe) de la recta que éstos determinan. Encuentre también la pendiente común (si existe) de las rectas perpendiculares a la recta AB.

9. $A(-1, 2)$, $B(-2, -1)$ **10.** $A(-2, 1)$, $B(2, -2)$

11. $A(2, 3)$, $B(-1, 3)$ **12.** $A(-2, 0)$, $B(-2, -2)$

En los ejercicios 13-16, encuentre la ecuación para (a) la recta vertical, y (b) la recta horizontal que pasa por el punto dado.

13. $(-1, 4/3)$ **14.** $\left(\sqrt{2}, -1.3\right)$

15. $\left(0, -\sqrt{2}\right)$ **16.** $(-\pi, 0)$

En los ejercicios 17-30, encuentre la ecuación de la recta, dados los datos siguientes.

17. Pasa por $(-1, 1)$ con pendiente -1

18. Pasa por (2, –3) con pendiente 1/2

19. Pasa por (3, 4) y (–2, 5)

20. Pasa por (–8, 0) y (–1, 3)

21. Tiene pendiente –5/4 y ordenada al origen 6

22. Tiene pendiente 1/2 y ordenada al origen –3

23. Pasa por (–12, –9) y tiene pendiente 0

24. Pasa por (1/3, 4) y la recta es vertical

25. Tiene y abscisa al origen 4 y abscisa al origen –1

26. Tiene y abscisa al origen –6 y abscisa al origen 2

27. Pasa por (5, –1) y es paralela a la recta $2x + 5y = 15$

28. Pasa por $\left(-\sqrt{2}, 2\right)$ y es paralela a la recta $\sqrt{2}x + 5y = \sqrt{3}$

29. Pasa por (4, 10) y es perpendicular a la recta $6x - 3y = 5$

30. Pasa por (0, 1) y es perpendicular a la recta $8x - 13y = 13$

En los ejercicios 31-34, encuentre las intersecciones con los ejes x y y, y utilice esta información para trazar la gráfica de la recta.

31. $3x + 4y = 12$ **32.** $x + 2y = -4$

33. $\sqrt{2}x - \sqrt{3}y = \sqrt{6}$ **34.** $1.5x - y = -3$

35. ¿Encuentra algo especial en la relación entre las rectas $Ax + By = C_1$ y $Bx - Ay = C_2$ $(A \neq 0, B \neq 0)$? Justifique su respuesta.

36. ¿Encuentra algo especial en la relación entre las rectas $Ax + By = C_1$ y $Ax + By = C_2$ $(A \neq 0, B \neq 0)$? Justifique su respuesta.

Incrementos y movimiento

37. Una partícula empieza en $A(-2, 3)$ y sus coordenadas cambian con incrementos $\Delta x = 5$, $\Delta y = -6$. Determine su nueva posición.

38. Una partícula empieza en $A(6, 0)$ y sus coordenadas cambian con incrementos $\Delta x = -6$, $\Delta y = 0$. Encuentre su nueva posición.

39. Las coordenadas de una partícula cambian con $\Delta x = 5$ y $\Delta y = 6$ conforme se mueve de $A(x, y)$ a $B(3, -3)$. Determine *su nueva posición*.

40. Una partícula empieza en $A(1, 0)$, da una vuelta alrededor del origen, en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, y regresa a $A(1, 0)$. ¿Cuáles fueron los cambios netos en sus coordenadas?

Círculos

En los ejercicios 41-46, encuentre la ecuación para el círculo con el centro $C(h, k)$ y el radio a. Después, trace el círculo en el plano xy. Incluya el centro del círculo en su gráfica, e identifique, de existir, las intersecciones del círculo con los ejes x y y. Etiquete estos puntos con sus pares coordenados.

41. $C(0, 2), \quad a = 2$

42. $C(-3, 0), \quad a = 3$

43. $C(-1, 5), \quad a = \sqrt{10}$

44. $C(1, 1), \quad a = \sqrt{2}$

45. $C\left(-\sqrt{3}, -2\right), \quad a = 2$

46. $C(3, 1/2), \quad a = 5$

Grafique los círculos cuyas ecuaciones se dan en los ejercicios 47-52. Determine el centro de cada círculo y las intersecciones con los ejes (si existen) con sus pares coordenados.

47. $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0$

48. $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 16 = 0$

49. $x^2 + y^2 - 3y - 4 = 0$

50. $x^2 + y^2 - 4x - (9/4) = 0$

51. $x^2 + y^2 - 4x + 4y = 0$

52. $x^2 + y^2 + 2x = 3$

Parábolas

Grafique las parábolas de los ejercicios 53-60. Determine, en cada caso, las coordenadas del vértice, el eje de simetría y las intersecciones con los ejes si existen.

53. $y = x^2 - 2x - 3$

54. $y = x^2 + 4x + 3$

55. $y = -x^2 + 4x$

56. $y = -x^2 + 4x - 5$

57. $y = -x^2 - 6x - 5$

58. $y = 2x^2 - x + 3$

59. $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 4$

60. $y = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 4$

Desigualdades

En los ejercicios 61-68, describa las regiones definidas por las desigualdades o pares de desigualdades.

61. $x^2 + y^2 > 7$

62. $x^2 + y^2 < 5$

63. $(x - 1)^2 + y^2 \leq 4$

64. $x^2 + (y - 2)^2 \geq 4$

65. $x^2 + y^2 > 1, \quad x^2 + y^2 < 4$

66. $x^2 + y^2 \leq 4, \quad (x + 2)^2 + y^2 \leq 4$

67. $x^2 + y^2 + 6y < 0, \quad y > -3$

68. $x^2 + y^2 - 4x + 2y > 4, \quad x > 2$

69. Determine una desigualdad que describa los puntos que están dentro del círculo con centro en (–2, 1) y radio $\sqrt{6}$.

70. Determine una desigualdad que describa los puntos que están fuera del círculo con centro en (–4, 2) y radio 4.

71. Determine un par de desigualdades que describan los puntos que están dentro o sobre el círculo con centro en (0, 0) y radio $\sqrt{2}$, y sobre o a la derecha de la recta vertical que pasa por (1, 0).

72. Determine un par de desigualdades que describan los puntos que están fuera del círculo con centro en (0, 0) y radio 2, y dentro del círculo que tiene centro en (1, 3) y pasa por el origen.

Intersección de rectas, círculos y parábolas

En los ejercicios 73-80, grafique las dos ecuaciones y encuentre los puntos en donde se intersecan las gráficas.

73. $y = 2x, \quad x^2 + y^2 = 1$

74. $x + y = 1, \quad (x - 1)^2 + y^2 = 1$

75. $y - x = 1, \quad y = x^2$

76. $x + y = 0, \quad y = -(x - 1)^2$

77. $y = -x^2, \quad y = 2x^2 - 1$

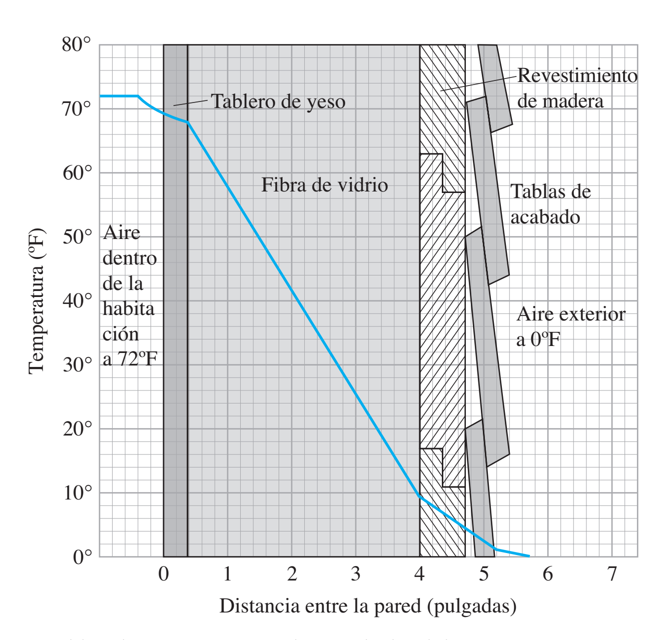
78. $y = \frac{1}{4}x^2, \quad y = (x - 1)^2$

79. $x^2 + y^2 = 1, \quad (x - 1)^2 + y^2 = 1$

80. $x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + y = 1$

Aplicaciones

81. Aislantes Mida las pendientes de la siguiente figura para estimar el cambio de temperatura, en grados por pulgada, para estos aislantes: (a) tablero de yeso; (b) fibra de vidrio; (c) revestimiento de madera.

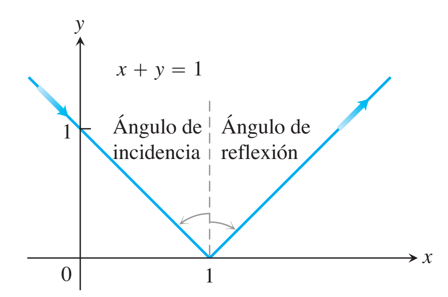


Cambios de temperatura en la pared, ejercicios 81 y 82.

82. Aislantes De acuerdo con la figura del ejercicio 81, ¿cuál de los materiales es mejor aislante? ¿Cuál es el peor? Explique.

83. Presión bajo el agua De acuerdo con la fórmula $p = kd + 1$ (k constante), la presión p que experimenta un buzo bajo el agua está relacionada con la profundidad d a la que se encuentra. La presión es de 1 atmósfera en la superficie; a 100 metros es, aproximadamente, 10.94 atmósferas. Determine la presión a 50 metros.

84. Reflexión de la luz Un rayo de luz viaja a lo largo de la recta $x + y = 1$ desde el segundo cuadrante, y se refleja sobre el eje x (vea la siguiente figura). El ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión. Escriba la ecuación de la recta por la que viaja la luz.



La trayectoria del rayo de luz del ejercicio 84. Los ángulos de incidencia y de reflexión se miden desde la perpendicular.

85. Grados Fahrenheit y grados Celsius Trace la gráfica de la ecuación

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

en el plano FC, que relaciona las temperaturas de grados Fahrenheit y Celsius. Trace en el mismo plano la gráfica de la recta $C = F$. ¿Hay alguna temperatura en la que el termómetro Celsius dé la misma lectura numérica que el termómetro Fahrenheit? Si la respuesta es afirmativa, determínela.

86. Vía férrea Los ingenieros civiles calculan la pendiente del firme para una vía férrea como la razón de la distancia que se sube o baja entre la distancia horizontal que se recorre. Los especialistas denominan esta razón **inclinación** del firme de la vía, y casi siempre la escriben como porcentaje. A lo largo de la costa, la inclinación de las vías comerciales suele ser inferior a 2%. En las montañas puede llegar hasta 4%. Las inclinaciones de las autopistas son, por lo general, menores que 5%.

La parte más empinada de la vía férrea metropolitana Washington Cog, en New Hampshire, tiene una inclinación excepcional, de 37.1%. A lo largo de esta parte del trayecto, los asientos delanteros de los vagones del tren están 14 pies arriba de los traseros. ¿Qué tan apartadas están las filas de asientos delanteros y traseros?

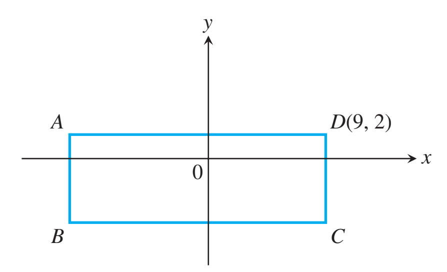
Teoría y ejemplos

87. Para probar que el triángulo con vértices en los puntos $A(1, 2)$, $B(5, 5)$, y $C(4, -2)$ es isósceles y no equilátero, calcule las longitudes de sus lados.

88. Demuestre que el triángulo con vértices en $A(0, 0)$, $B\left(1, \sqrt{3}\right)$, y $C(2, 0)$ es equilátero.

89. Pruebe que los puntos $A(2, -1)$, $B(1, 3)$ y $C(-3, 2)$ son vértices de un cuadrado, y encuentre el cuarto vértice.

90. El rectángulo que se muestra enseguida tiene lados paralelos a los ejes, es tres veces más largo que ancho y tiene un perímetro de 56 unidades. Encuentre las coordenadas de los vértices A, B y C.



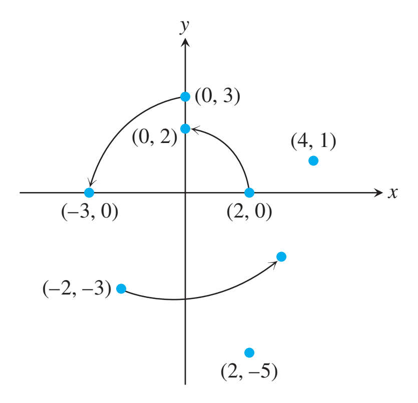
91. Tres paralelogramos diferentes tienen vértices en $(-1, 1)$, $(2, 0)$ y $(2, 3)$. Trácelos y encuentre las coordenadas del cuarto vértice de cada uno.

92. Como se muestra en la figura, una rotación de 90º alrededor del origen en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, manda el punto $(2, 0)$ a $(0, 2)$ y $(0, 3)$ a $(-3, 0)$, ¿A dónde manda cada uno de siguientes pares?

a. $(4, 1)$ **b.** $(-2, -3)$ **c.** $(2, -5)$

d. $(x, 0)$ **e.** $(0, y)$ **f.** (x, y)

g. ¿De qué punto proviene $(10, 3)$?



93. ¿Para qué valor de k la recta $2x + ky = 3$ es perpendicular a la recta $4x + y = 1$? ¿Para qué valor de k estas rectas son paralelas?

94. Encuentre la recta que pasa por el punto $(1, 2)$ y por el punto en donde se intersectan las dos rectas $x + 2y = 3$ y $2x - 3y = -1$.

95. Punto medio de un segmento de recta Demuestre que el punto con coordenadas

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

es el punto medio del segmento de recta que une $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$.

96. La distancia entre un punto y una recta Podemos encontrar la distancia entre un punto $P(x_0, y_0)$ y la recta L: $Ax + By = C$ siguiendo los pasos que se describen a continuación (en la sección 12.5 veremos un método más rápido):

1. Encuentre la ecuación de la recta M que pasa por P y es perpendicular a L.
2. Determine las coordenadas del punto Q en donde se intersecan M y L.
3. Encuentre la distancia entre P y Q.

Emplee estos pasos para encontrar la distancia entre P y L en cada uno de los siguientes casos.

a. $P(2, 1), \quad L: y = x + 2$

b. $P(4, 6), \quad L: 4x + 3y = 12$

c. $P(a, b), \quad L: x = -1$

d. $P(x_0, y_0), \quad L: Ax + By = C$

1.3 Funciones y sus gráficas

Las funciones representan el principal objeto de análisis en el cálculo, ya que constituyen la clave para describir el mundo real en términos matemáticos. En esta sección se repasa el concepto de función, su graficación y las maneras de representarla.

Funciones, dominio y rango

La temperatura a la que hierve el agua depende de la altura sobre el nivel del mar (el punto de ebullición disminuye conforme se asciende). La tasa de interés que se paga por una inversión monetaria depende de cuánto tiempo dure invertido el dinero. El área del círculo depende de su radio. La distancia que viaja un objeto desde un punto inicial a lo largo de una trayectoria recta depende de su velocidad.

En cada uno de estos casos, el valor de una cantidad variable, que podemos llamar y, depende del valor de otra variable, que podemos llamar x. Debido a que el valor de y está totalmente determinado por el valor de x, decimos que y es una función de x. Frecuentemente el valor de y está dado por una *regla* o fórmula que nos indica cómo calcularlo a partir de la variable x. Por ejemplo, la ecuación $A = \pi r^2$ es una regla para calcular el área A de un círculo a partir de su radio r.

En cálculo, es posible que en algún momento queramos referirnos a una función no específica sin contar con una fórmula determinada. Una manera simbólica de decir "y es una función de x", consiste en escribir

$$y = f(x) \qquad (\text{"}y \text{ es igual a } f \text{ de } x\text{"})$$

En esta notación, el símbolo f representa la función. La letra x, denominada **variable independiente**, representa el valor de entrada de f, y y, la **variable dependiente**, representa el **valor** resultante de f en x.

DEFINICIÓN Función

Una **función** de un conjunto D a un conjunto Y es una regla que asigna un elemento *único* $f(x) \in Y$ a cada elemento $x \in D$.

El conjunto D de todos los valores de entrada posibles se llama **dominio** de la función. El conjunto de todos los valores de $f(x)$ a medida que x varía en todo D se denomina **rango** de la función. El rango puede no incluir todos los elementos del conjunto Y.

El dominio y el rango de una función pueden ser cualesquiera conjuntos de objetos, pero en cálculo suelen ser conjuntos de números reales. (En los capítulos 13 a 16 veremos que pueden involucrarse muchas variables).

Pensemos en una función f como una especie de máquina que produce un valor $f(x)$ en su rango siempre que la "alimentemos" con un valor de entrada x de su dominio (figura 1.22).

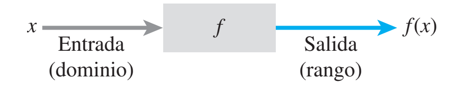


FIGURA 1.22 Diagrama mostrando una función como una especie de máquina.

Un ejemplo de esta analogía está representada por las teclas de función de las calculadoras: la tecla $\sqrt{x}$ produce un valor (la raíz cuadrada) cuando se le oprime después de escribir un número no negativo $\sqrt{x}$. El valor resultante que aparece en la pantalla casi siempre es una aproximación decimal de la raíz cuadrada de x. Si escribimos un número $x < 0$, la calculadora indicará un error, porque $x < 0$ no forma parte del dominio de la función y, por lo tanto, no es un valor de entrada aceptable. La tecla $\sqrt{x}$ de una calculadora no da el mismo resultado que la función matemática exacta f, definida por $f(x) = \sqrt{x}$, ya que su operación se limita a producir resultados decimales y acepta únicamente un número finito de entradas.

Una función también puede ilustrarse como un **diagrama de flechas** (figura 1.23). Cada flecha asocia un elemento del dominio D con un único elemento del conjunto Y. En la figura 1.23, las flechas indican que $f(a)$ está asociada con a, $f(x)$ está asociada con x, y así sucesivamente.

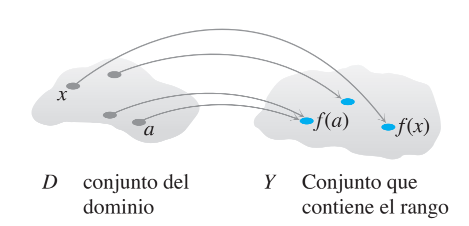


FIGURA 1.23 Una función del conjunto D al conjunto Y asigna un único elemento de Y a cada elemento de D.

El dominio de una función puede restringirse según el contexto. Por ejemplo, el dominio de la función de área dado por $A = \pi r^2$ solamente permite que los radios r sean positivos (ya que es una distancia). Cuando definimos una función $y = f(x)$ con una fórmula y el dominio no se da explícitamente o está restringido por el contexto, se supone que es el máximo conjunto de valores de x reales para los que la fórmula da valores reales de y; este dominio se llama **dominio natural**. Si queremos restringir el dominio de alguna manera, debemos especificarlo. El dominio de $y = x^2$ es todo el conjunto completo de números reales. Para restringir el dominio de una función, digamos, a los valores positivos de x, debemos escribir "$y = x^2, x > 0$."

Si cambiamos el dominio donde aplicamos una fórmula, por lo general también cambia el rango. El rango de $y = x^2$ es $[0, \infty)$. El rango de $y = x^2, x \geq 2$, es el conjunto de números obtenidos al elevar al cuadrado los números mayores que o iguales a 2. En notación de conjuntos, el rango es $\{x^2 | x \geq 2\}$ o $\{y | y \geq 4\}$ o $[4, \infty)$.

Cuando el rango de una función es un conjunto de números reales, se dice que la función es de **valor real**. Los dominios y rangos de muchas funciones reales de una variable real son intervalos o uniones de intervalos. Los intervalos pueden ser abiertos, cerrados o semiabiertos, y finitos o infinitos.

EJEMPLO 1 Identificar el dominio y el rango

Verifique los dominios y rangos de estas funciones.

Función	Dominio (x)	Rango (y)
$y = x^2$	$(-\infty, \infty)$	$[0, \infty)$
$y = 1/x$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$y = \sqrt{x}$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$
$y = \sqrt{4 - x}$	$(-\infty, 4]$	$[0, \infty)$
$y = \sqrt{1 - x^2}$	$[-1, 1]$	$[0, 1]$

Solución La función $y = x^2$ a valores reales en y para cualquier número real x, de manera que el dominio es $(-\infty, \infty)$. El rango de $y = x^2$ es $[0, \infty)$ ya que el cuadrado de cualquier número real es no negativo, y cualquier número y no negativo es el cuadrado de su propia raíz cuadrada, $y = \left(\sqrt{y}\right)^2$ para $y \geq 0$.

La función $y = 1/x$ da valores reales en y para toda x, excepto $x = 0$. *No se puede dividir ningún número entre cero*. El rango de $y = 1/x$, el conjunto de recíprocos de todo número real distinto de cero, es el conjunto de todos los reales distintos de cero, ya que $y = 1/(1/y)$.

La función $y = \sqrt{x}$ da valores reales en y sólo si $x \geq 0$. El rango de $y = \sqrt{x}$ es $[0, \infty)$, ya que todo número no negativo es la raíz cuadrada de algún número (es decir, es la raíz cuadrada de su propio cuadrado).

En $y = \sqrt{4 - x}$, el término $4 - x$ no puede ser negativo, por estar dentro de una raíz. Esto es, $4 - x \geq 0$, o $x \leq 4$. La función da valores reales en y para todo $x \leq 4$. El rango de $\sqrt{4 - x}$ es $[0, \infty)$, es decir, el conjunto de todos los números no negativos.

La función $y = \sqrt{1 - x^2}$ da valores reales en y para toda x en el intervalo cerrado de –1 a 1. Fuera de este dominio, $1 - x^2$ los valores dentro de la raíz son negativos y por lo tanto su raíz cuadrada no es un número real. Los valores de $1 - x^2$ varían de 0 a 1 en el dominio dado, lo mismo que las raíces cuadradas de estos valores. El rango de $\sqrt{1 - x^2}$ es [0, 1]. ■

Graficación de funciones

Otra manera de visualizar una función es mediante su gráfica. Si f es una función con dominio D, su **gráfica** consiste en el conjunto de todos los puntos en el plano cartesiano cuyas coordenadas son los pares (ordenados) entrada-salida de f. En notación de conjuntos, la gráfica es

$$\{(x, f(x)) \mid x \in D\}.$$

La gráfica de la función $f(x) = x + 2$ es el conjunto de todos los puntos en el plano cartesiano con coordenadas (x, y) para los que $y = x + 2$. La gráfica se ha trazado en la figura 1.24.

La gráfica de una función f es una representación visual de su comportamiento. Si (x, y) es un punto de la gráfica, entonces $y = f(x)$ es la altura de la gráfica justo arriba del punto x. La altura puede ser positiva o negativa, dependiendo del signo de $f(x)$ (figura 1.25).

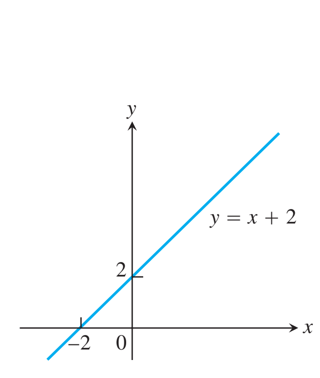


FIGURA 1.24 La gráfica de $f(x) = x + 2$ es el conjunto de puntos (x, y) para los que y tiene el valor $x + 2$.

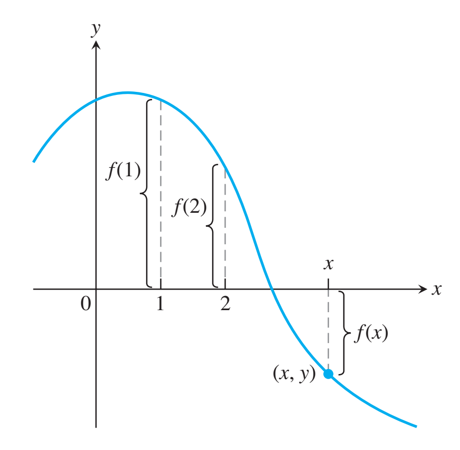


FIGURA 1.25 Si (x, y) está en la gráfica de f, el valor $y = f(x)$ es la altura de la gráfica por encima del punto x (o por debajo de x si $f(x)$ es negativa).

x	$y = x^2$
-2	4
-1	1
0	0
1	1
$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$
2	4

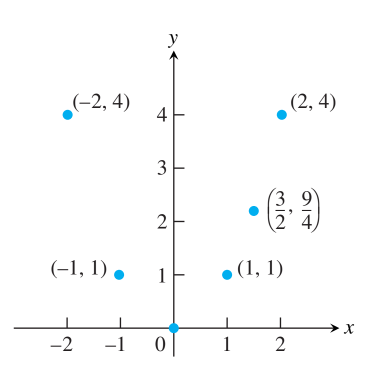
EJEMPLO 2 Trazar una gráfica

Trazar la gráfica de la función $y = x^2$ en el intervalo $[-2, 2]$.

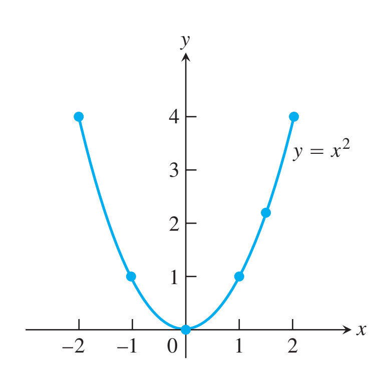
Solución

1. Haga una tabla de los pares (x,y) que satisfacen la regla de correspondencia de la función $y = x^2$.

2. Grafique los puntos (x, y) cuyas coordenadas aparecen en la tabla. Puede usar fracciones cuando sea conveniente para los cálculos

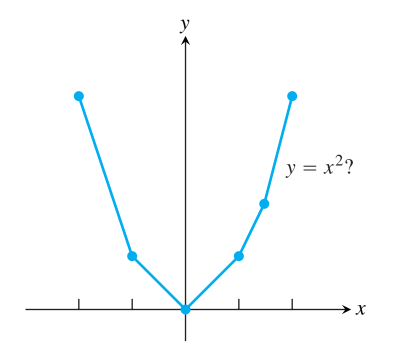


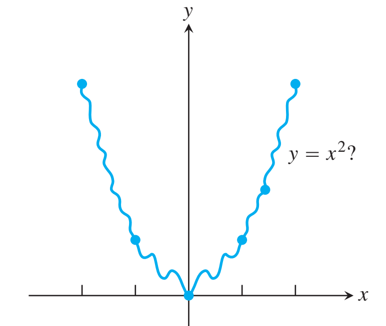
3. Dibuje una curva suave que una los puntos marcados Etiquételo con el nombre de su función



¿Cómo sabemos que la gráfica de $y = x^2$ no se parece a una de estas curvas?

Las computadoras y las calculadoras graficadoras funcionan de esta manera en gran medida —encadenando los puntos marcados—, dando lugar al mismo cuestionamiento.





Para averiguarlo podemos marcar más puntos. Pero, ¿cómo debemos *conectarlos*? La pregunta básica no ha sido respondida aún: ¿de qué manera se puede prever con seguridad la apariencia que tendrá la gráfica al unir los puntos que marcamos? Como veremos en el capítulo 4, el cálculo puede darnos la respuesta. Ahí usaremos la *derivada* para determinar la forma que tendrá la curva aun sin conectar los puntos marcados. Mientras tanto, nos conformaremos con localizar tales puntos y unirlos de la mejor manera posible.

EJEMPLO 3 Evaluar una función a partir de su gráfica

En la figura 1.26 se muestra la gráfica de una población p del insecto conocido como "mosca de la fruta".

(a) Determine la población que habrá de este insecto dentro de 20 y 45 días.

(b) ¿Cuál es el rango (aproximado) de la función de población en el intervalo $0 \leq t \leq 50$?

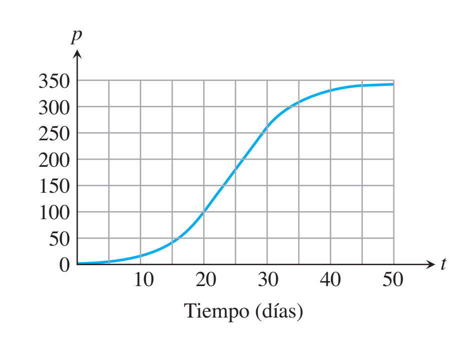


FIGURA 1.26 Gráfica de la mosca de la fruta contra el tiempo (ejemplo 3).

Solución

(a) En la figura 1.26 observamos que el punto (20, 100) se ubica sobre la gráfica, de manera que el valor de la población p en 20 es $p(20) = 100$. De la misma forma, el valor de $p(45)$ es de más o menos 340.

(b) El rango de la función población en $0 \leq t \leq 50$ es aproximadamente [0, 345]. También observamos que, conforme pasa el tiempo, la población se acerca cada vez más al valor $p = 350$.

Representación numérica de una función

Hemos visto cómo una función puede representarse algebraicamente mediante una fórmula (por ejemplo: la función área), o visualmente mediante una gráfica (ejemplos 2 y 3). Otra manera de representar una función es **numéricamente**, mediante una tabla de valores. Los ingenieros y los profesionales en ciencias aplicadas suelen utilizar este tipo de representaciones. Por ejemplo, es posible —tal vez con ayuda de una computadora— obtener una gráfica de la función a partir de una tabla de valores apropiada y utilizando el método ilustrado en el ejemplo 2. La gráfica que se obtiene empleando únicamente los puntos determinados en una tabla se conoce como **diagrama de dispersión**.

EJEMPLO 4 Una función definida por una tabla de valores

Las notas musicales son ondas de presión en el aire y son susceptibles de registrarse. Los datos de la tabla 1.2 corresponden a los registros del desplazamiento de presión generado por una nota musical producida por un diapasón, en relación con el tiempo —en segundos— que dura el sonido. La tabla nos ofrece una representación de la función presión contra el tiempo. Si hacemos primero un diagrama de dispersión y después conectamos los puntos (t, p) determinados con ayuda de la tabla, obtenemos la gráfica de la figura 1.27.

TABLA 1.2 Datos del diapasón

Tiempo	Presión	Tiempo	Presión
0.00091	−0.080	0.00362	0.217
0.00108	0.200	0.00379	0.480
0.00125	0.480	0.00398	0.681
0.00144	0.693	0.00416	0.810
0.00162	0.816	0.00435	0.827
0.00180	0.844	0.00453	0.749
0.00198	0.771	0.00471	0.581
0.00216	0.603	0.00489	0.346
0.00234	0.368	0.00507	0.077
0.00253	0.099	0.00525	−0.164
0.00271	−0.141	0.00543	−0.320
0.00289	−0.309	0.00562	−0.354
0.00307	−0.348	0.00579	−0.248
0.00325	−0.248	0.00598	−0.035
0.00344	−0.041		

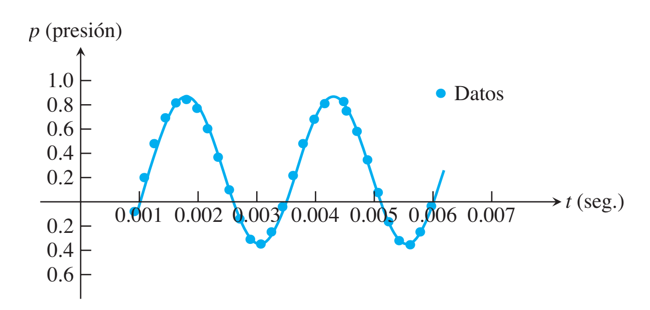


FIGURA 1.27 Curva suave que pasa por los puntos trazados da una gráfica de la función presión representada por la tabla 1.2.

■

La prueba de la recta vertical

No todas las curvas son gráficas de funciones. Una función f sólo puede tener un valor $f(x)$ para cada x en su dominio, de manera que ninguna *recta vertical* puede intersecar más de una vez la gráfica de una función. De acuerdo con ello, un círculo no puede ser la gráfica de una función, ya que al trazar una recta vertical ésta intersecará al círculo dos veces (figura 1.28a). Si a está en el dominio de una función f, la recta vertical $x = a$ intersecará a la gráfica de la función f en un solo punto $(a, f(a))$.

El círculo de la figura 1.28a, sin embargo, contiene la gráfica de *dos* funciones de x; el semicírculo superior, definido por la función $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ y el semicírculo inferior, definido por la función $g(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ (figuras 1.28b y 1.28c).

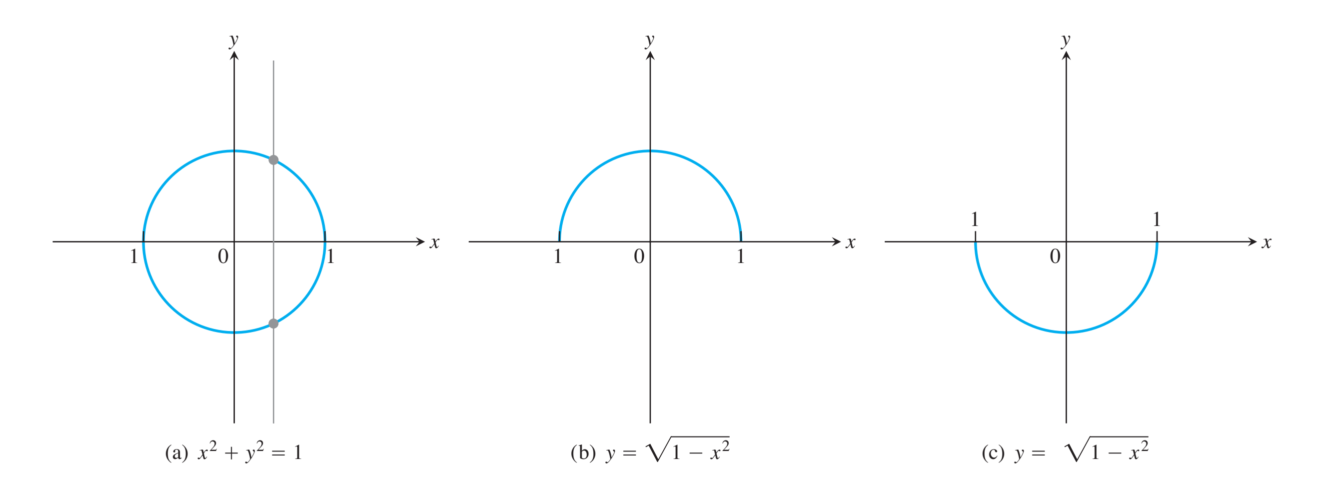


FIGURA 1.28 El círculo no es la gráfica de una función, ya que no cumple la prueba de la recta vertical. (b) El semicírculo superior es la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. (c) El semicírculo inferior es la gráfica de la función $g(x) = -\sqrt{1 - x^2}$.

Funciones definidas por partes

En ocasiones, una función se describe usando distintas fórmulas en diferentes partes de su dominio. Un ejemplo de esto es la **función valor absoluto**

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0, \end{cases}$$

cuya gráfica se da en la figura 1.29. A continuación se ofrecen otros ejemplos.

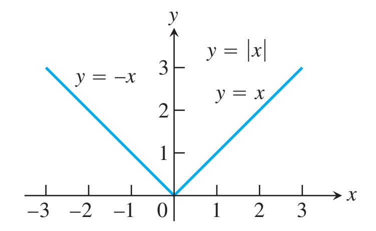


FIGURA 1.29 La función valor absoluto tiene el dominio $(-\infty, \infty)$ y el rango $[0, \infty)$.

EJEMPLO 5 Trazar la gráfica de la función definida por partes

La función es

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

Está definida para todo número real, pero tiene valores dados por diferentes fórmulas, dependiendo de la posición de x. Los valores de f están dados por: $y = -x$ cuando $x < 0$, $y = x^2$ cuando $0 \leq x \leq 1$ y $y = 1$ cuando $x > 1$. Sin embargo, se trata de *una sola función* cuyo dominio es todo el conjunto de los números reales (figura 1.30). ■

FIGURA 1.30 Para trazar la gráfica de la función $y = f(x)$, ilustrada aquí, aplicamos diferentes fórmulas para distintas partes del dominio (ejemplo 5).

EJEMPLO 6 La función mayor entero

La función cuyo valor en cualquier número x es el *mayor entero menor que o igual a* x se llama **función mayor entero**, o **función piso entero**. Esta función se denota mediante $\lfloor x \rfloor$, o, en algunos libros, con $[x]$ o $[[x]]$ o int x. En la figura 1.31 se muestra la gráfica. Observe que

$$\lfloor 2.4 \rfloor = 2, \quad \lfloor 1.9 \rfloor = 1, \quad \lfloor 0 \rfloor = 0, \quad \lfloor -1.2 \rfloor = -2,$$
$$\lfloor 2 \rfloor = 2, \quad \lfloor 0.2 \rfloor = 0, \quad \lfloor -0.3 \rfloor = -1 \quad \lfloor -2 \rfloor = -2.$$
■

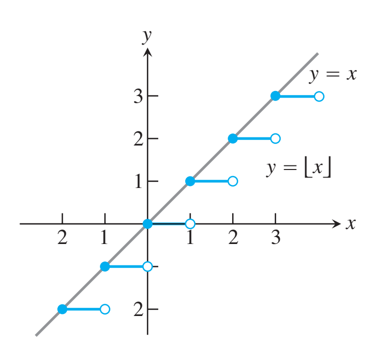


FIGURA 1.31 La gráfica de la función mayor entero $y = \lfloor x \rfloor$ está sobre o por debajo de la recta $y = x$, de manera que ofrece un piso entero para x (ejemplo 6).

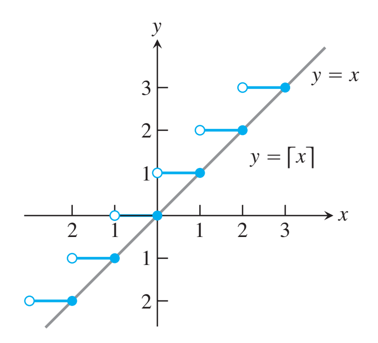


FIGURA 1.32 La gráfica de la función menor entero $y = \lceil x \rceil$ está sobre o por encima de la recta $y = x$, así que proporciona un techo completo para x (ejemplo 7).

EJEMPLO 7 La función menor entero

La función cuyo valor en cualquier número x es el *menor entero mayor que o igual a x* se llama **función menor entero**, o **función techo entero**. Esta función se denota mediante $\lceil x \rceil$. La figura 1.32 muestra la gráfica. Para valores positivos de x, esta función puede representar, por ejemplo, el costo de utilizar x horas un lugar de estacionamiento, pagando $1 por cada hora o fracción de hora. ■

EJEMPLO 8 Encontrar fórmulas para funciones definidas por partes

Encuentre una fórmula para la función $y = f(x)$, cuya gráfica se ilustra en la figura 1.33 y consiste de dos segmentos de recta.

Solución Primero encontramos las fórmulas para los segmentos de (0, 0) a (1, 1) y (1, 0) a (2, 1) y luego unimos ambas partes, como en el ejemplo 5.

Segmento de (0, 0) a (1, 1) La recta que pasa por (0, 0) y (1, 1) tiene pendiente $m = (1 - 0)/(1 - 0) = 1$ y ordenada al origen $b = 0$. Su ecuación punto-pendiente es $y = x$. El segmento que pasa por (0, 0) a (1, 1) que incluye el punto (0, 0) pero no el punto (1, 1) es la gráfica de la función $y = x$ restringida al intervalo semiabierto $0 \leq x < 1$, es decir,

$$y = x, \qquad 0 \leq x < 1.$$

El segmento de (1, 0) a (2, 1) La recta que pasa por (1, 0) y (2, 1) tiene pendiente $m = (1 - 0)/(2 - 1) = 1$ y pasa por el punto (1, 0). La ecuación punto pendiente correspondiente a esta recta es

$$y = 0 + 1(x - 1), \qquad \text{o} \qquad y = x - 1.$$

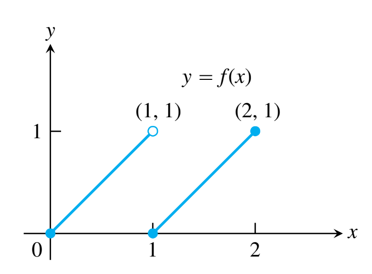


FIGURA 1.33 El segmento de la izquierda contiene a (0, 0) pero no a (1, 1). El segmento de la derecha contiene ambos puntos extremos (ejemplo 8).

El segmento de (1, 0) a (2, 1), que incluye ambos extremos, es la gráfica de $y = x - 1$, restringida al intervalo cerrado $1 \leq x \leq 2$, es decir,

$$y = x - 1, \qquad 1 \leq x \leq 2.$$

La función por partes Al combinar las fórmulas para las dos partes de la gráfica, obtenemos

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ x - 1, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$ ■

EJERCICIOS 1.3

Funciones

En los ejercicios 1-6, encuentre el dominio y el rango de cada función.

1. $f(x) = 1 + x^2$

2. $f(x) = 1 - \sqrt{x}$

3. $F(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$

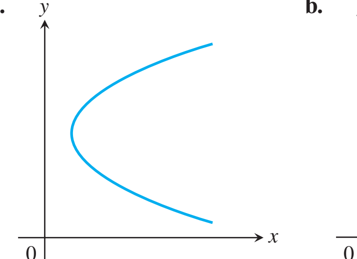
4. $F(t) = \dfrac{1}{1 + \sqrt{t}}$

5. $g(z) = \sqrt{4 - z^2}$

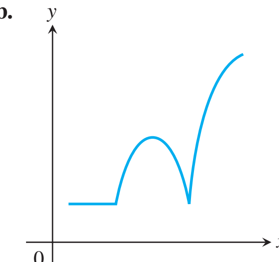
6. $g(z) = \dfrac{1}{\sqrt{4 - z^2}}$

De las gráficas que se muestran en los ejercicios 7 y 8, determine cuáles de ellas corresponden a funciones de x así como cuáles de ellas no lo son. Justifique sus respuestas.

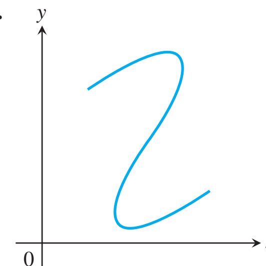
7. a.



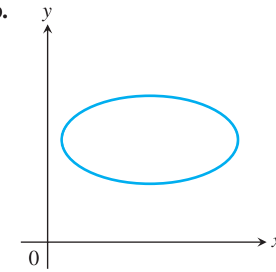
b.



8. a.



b.



9. Considere la función $y = \sqrt{(1/x) - 1}$.

a. ¿x puede ser negativa?

b. ¿x puede ser igual a 0?

c. ¿x puede ser mayor que 1?

d. ¿Cuál es el dominio de la función?

10. Considere la función $y = \sqrt{2 - \sqrt{x}}$.

a. ¿x puede ser negativa?

b. ¿$\sqrt{x}$ puede ser mayor que 2?

c. ¿Cuál es el dominio de la función?

Determinación de fórmulas para funciones

11. Exprese el área y el perímetro de un triángulo equilátero como una función de la longitud x del lado del triángulo.

12. Exprese la longitud del lado de un cuadrado como una función de la longitud d de su diagonal. Después, exprese el área del cuadrado como una función de la longitud de su diagonal.

13. Exprese la longitud de la arista de un cubo como una función de la longitud d de su diagonal. Después, exprese el área y el volumen del cubo como una función de la longitud de su diagonal.

14. Un punto P del primer cuadrante se ubica en la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}$. Exprese las coordenadas de P como función de la pendiente de la recta que une P con el origen.

Funciones y gráficas

Encuentre el dominio y grafique cada función de los ejercicios 15-20.

15. $f(x) = 5 - 2x$

16. $f(x) = 1 - 2x - x^2$

17. $g(x) = \sqrt{|x|}$

18. $g(x) = \sqrt{-x}$

19. $F(t) = t/|t|$

20. $G(t) = 1/|t|$

21. Trace la gráfica de las siguientes ecuaciones, y explique por qué no son las gráficas de funciones de x.

a. $|y| = x$

b. $y^2 = x^2$

22. Trace la gráfica de las siguientes ecuaciones, y explique por qué no son las gráficas de funciones de x.

a. $|x| + |y| = 1$

b. $|x + y| = 1$

Funciones definidas por partes

Trace la gráfica de las funciones de los ejercicios 23-26.

23. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, & 1 < x \le 2 \end{cases}$

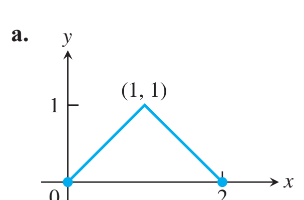
24. $g(x) = \begin{cases} 1 - x, & 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, & 1 < x \le 2 \end{cases}$

25. $F(x) = \begin{cases} 3 - x, & x \le 1 \\ 2x, & x > 1 \end{cases}$

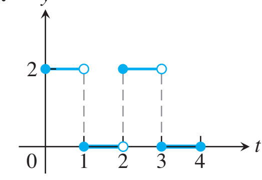
26. $G(x) = \begin{cases} 1/x, & x < 0 \\ x, & 0 \le x \end{cases}$

27. Encuentre una fórmula para cada función graficada.

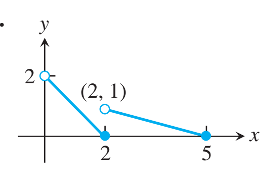
a.



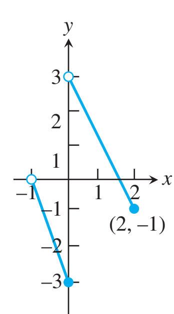
b.



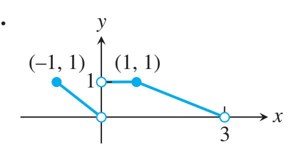
28. **a.**



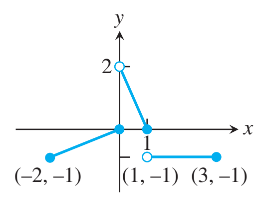
b.



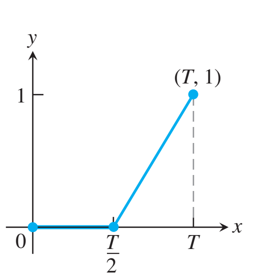
29. **a.**



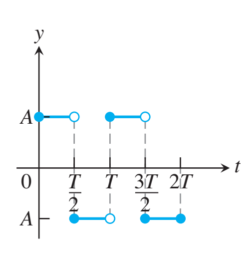
b.



30. **a.**



b.



T **31.** **a.** Grafique juntas, en el mismo sistema de coordenadas (o plano cartesiano), las funciones $f(x) = x/2$ y $g(x) = 1 + (4/x)$ e identifique los valores de x para los cuales se cumple que

$$\frac{x}{2} > 1 + \frac{4}{x}.$$

b. Confirme algebraicamente que sus valores encontrados para x cumplen con el inciso (a).

T **32.** **a.** Grafique juntas, en el mismo sistema de coordenadas, las funciones $f(x) = 3/(x - 1)$ y $g(x) = 2/(x + 1)$ e identifique los valores de x para los cuales se cumple que

$$\frac{3}{x - 1} < \frac{2}{x + 1}.$$

b. Confirme algebraicamente que sus valores encontrados para x cumplen con el inciso (a).

Las funciones mayor y menor entero

33. ¿Para qué valores de x?

a. $\lfloor x \rfloor = 0$? **b.** $\lceil x \rceil = 0$?

34. ¿Qué números reales x satisfacen la ecuación $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$?

35. ¿$\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$ para toda x real? Justifique su respuesta.

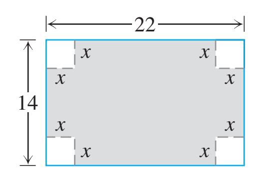
36. ¿Para qué valores de x?

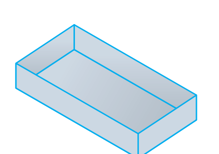
$$f(x) = \begin{cases} \lfloor x \rfloor, & x \geq 0 \\ \lceil x \rceil, & x < 0 \end{cases}$$

¿Por qué a $f(x)$ se le denomina *parte entera de x*?

Teoría y ejemplos

37. Se construye una caja sin tapa con una pieza rectangular de cartón que mide 14 por 22 pulgadas, cortando en cada esquina cuadrados del mismo tamaño de lado x, y doblando después los cuatro extremos hacia arriba, como se ilustra en la figura. Exprese el volumen V que admite la caja, o capacidad de la caja, como una función de x.

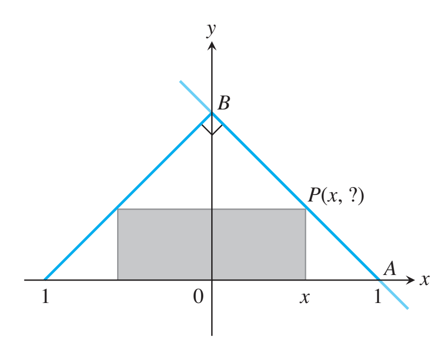




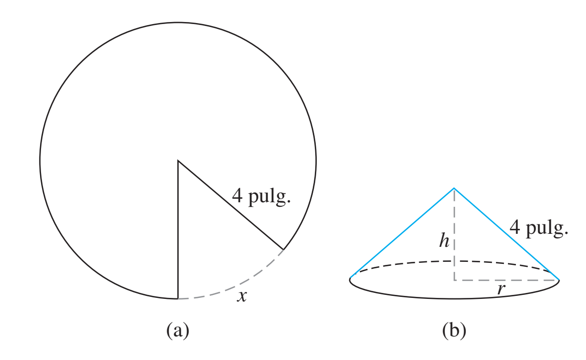
38. En la siguiente figura se muestra un rectángulo inscrito en un triángulo rectángulo isósceles cuya hipotenusa mide 2 unidades de largo.

a. Exprese la coordenada y del punto P en términos de x. (Podría empezar por escribir una ecuación para la recta AB).

b. Exprese el área del rectángulo en términos de x.



39. **Problema acerca de un cono** Comience este ejercicio con una pieza circular de papel con un radio de 4 pulgadas, como se muestra en la figura de la parte (a). Corte un sector con una longitud de arco x. Junte las dos aristas de la parte restante para formar la superficie de un cono con radio r y altura h, como se ilustra en la parte (b) de la figura.



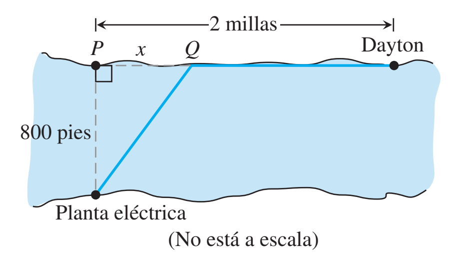
a. Explique por qué la circunferencia de la base del cono es $8\pi - x$.

b. Exprese el radio r como una función de x.

c. Exprese la altura h como una función de x.

d. Exprese el volumen V del cono como una función de x.

40. Costo industrial La compañía Dayton Power and Light tiene una planta eléctrica en el río Miami, en un sector donde el torrente tiene un ancho de 800 pies. Tender un nuevo cable de la planta hasta un lugar de la ciudad que se encuentra a 2 millas río abajo en el lado opuesto cuesta \$180 por pie a través del río y \$100 por pie en tierra.



a. Supongamos que el cable va de la planta a un punto Q en el lado opuesto del río, lugar que se ubica a x pies del punto P directamente opuesto a la planta. Escriba una función $C(x)$ para determinar cuánto costaría tender el cable en términos de la distancia x.

b. Genere una tabla de valores para determinar si la posición del punto Q menos costosa está a menos de 2000 pies o a más de 2000 pies del punto P.

41. Una curva es *simétrica con respecto al eje x*, si cada vez que el punto (x, y) está sobre la curva el punto $(x, -y)$ también lo está y viceversa. Explique por qué una curva simétrica con respecto al eje x no es la gráfica de una función, a menos que esta última sea $y = 0$.

42. Un truco de magia Quizás haya oído hablar acerca de este truco de magia: piense en un número cualquiera; luego súmele 5 y duplique el resultado; reste 6 y divida el resultado entre 2; por último, reste 2. Al terminar, se dice la respuesta y el mago adivina el número con el que se empezó. Elija un número e inténtelo.

Para comprender cuál es el truco, deje que x sea el número original y siga los pasos para hacer una fórmula, respecto de x $f(x)$ y encontrar el número con el que se concluye.

1.4 Identificación de funciones: modelos matemáticos

En el cálculo existen diversos tipos de funciones. A continuación las identificaremos y haremos un breve resumen de cada una de ellas.

Funciones lineales Las funciones de la forma $f(x) = mx + b$, para constantes m y b, reciben el nombre de **funciones lineales**. En la figura 1.34 se muestra un conjunto de rectas $f(x) = mx$ donde $b = 0$, de manera que estas rectas pasan por el origen. Las funciones constantes se presentan cuando la pendiente $m = 0$ (figura 1.35).

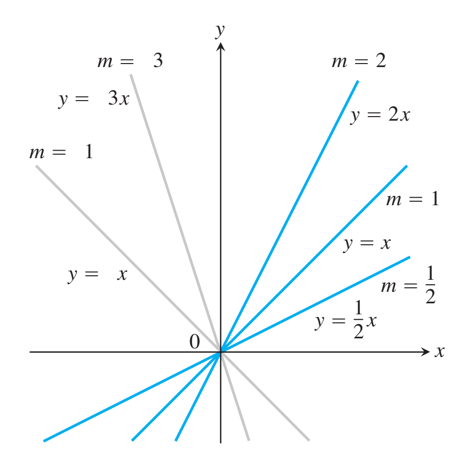


FIGURA 1.34 El grupo de rectas $y = mx$ tiene pendiente m y todas las rectas pasan por el origen.

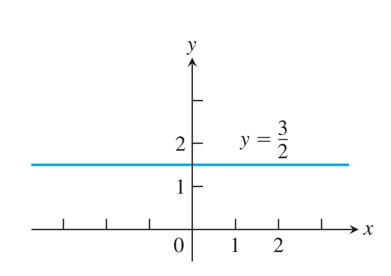


FIGURA 1.35 Una función constante tiene pendiente $m = 0$.

Funciones de potencias Las funciones $f(x) = x^a$, donde a es una constante, se llaman **funciones de potencia**. Dentro de esta categoría hay varios casos importantes a considerar.

(a) $a = n$, un entero positivo.

En la figura 1.36 se muestran las gráficas de $f(x) = x^n$, para $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Estas funciones están definidas para todos los valores reales de x. Observe que, a medida que aumenta la potencia n, las curvas tienden a ensancharse hacia el eje x en el intervalo $(-1, 1)$, y también que se elevan con una inclinación mayor para $|x| > 1$. Cada curva pasa por el punto (1, 1) y por el origen.

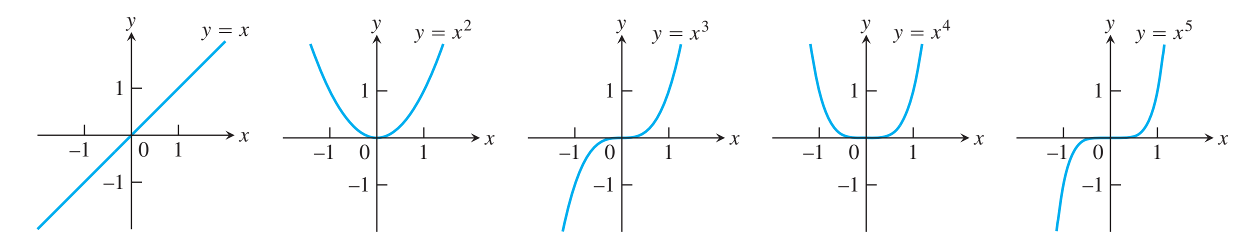


FIGURA 1.36 Gráficas de $f(x) = x^n, n = 1, 2, 3, 4, 5$ definidas para $-\infty < x < \infty$.

(b) $a = -1$ o $a = -2$.

En la figura 1.37 se muestran las gráficas de las funciones $f(x) = x^{-1} = 1/x$ y $g(x) = x^{-2} = 1/x^2$. Ambas funciones están definidas para todo $x \neq 0$ (en ningún caso es posible dividir entre cero). La gráfica de $y = 1/x$ es la hipérbola $xy = 1$ que se aproxima a los ejes coordenados lejos del origen. La gráfica de $y = 1/x^2$ también se aproxima a los ejes coordenados.

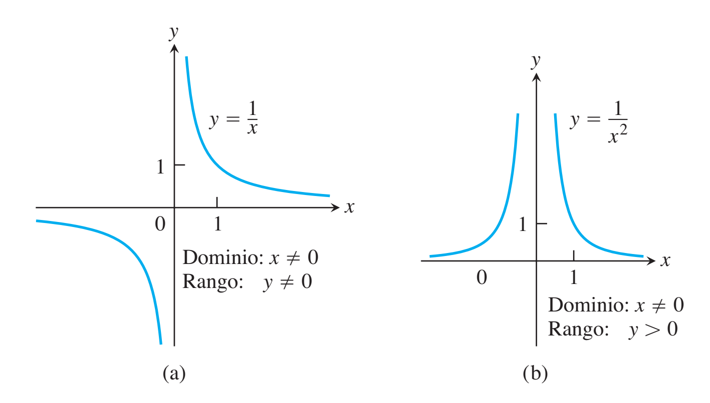


FIGURA 1.37 Gráficas de las funciones de potencia $f(x) = x^a$ para el inciso (a) $a = -1$ y para el inciso (b) $a = -2$.

(c) $a = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}$ y $\frac{2}{3}$.

Las funciones $f(x) = x^{1/2} = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$ son las funciones **raíz cuadrada** y **raíz cúbica**, respectivamente. El dominio de la función raíz cuadrada es $[0, \infty)$, pero la función raíz cúbica está definida para todo x real. En la figura 1.38 se muestran sus gráficas, junto con las gráficas de $y = x^{3/2}$ y $y = x^{2/3}$. (Recuerde que $x^{3/2} = (x^{1/2})^3$ y $x^{2/3} = (x^{1/3})^2$).

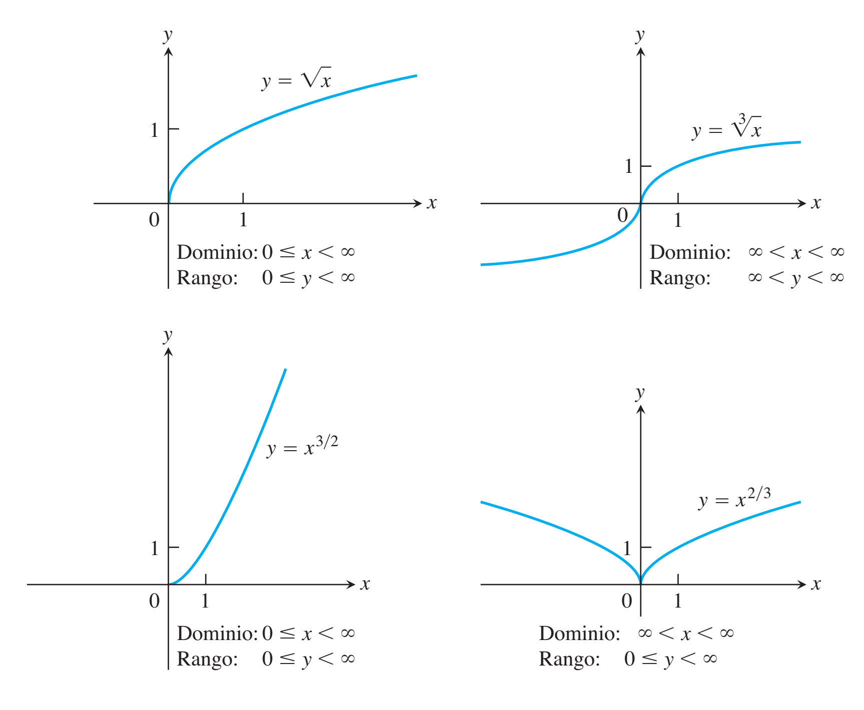


FIGURA 1.38 Gráficas de funciones de potencia $f(x) = x^a$ para $a = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}$, y $\frac{2}{3}$.

Polinomios Una función p es un **polinomio** o **función polinomial** si

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

En donde n es un entero no negativo y los números $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ son constantes reales (llamados **coeficientes** del polinomio). Todas las funciones polinomiales tienen como dominio $(-\infty, \infty)$. Si el coeficiente del término dominante es $a_n \neq 0$ y $n > 0$, entonces n es el **grado** del polinomio. Las funciones lineales con $m \neq 0$ son polinomios de grado 1. Usualmente los polinomios de grado 2 se escriben como $p(x) = ax^2 + bx + c$, y se llaman **funciones cuadráticas**. De manera similar, las **funciones cúbicas** son polinomios $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ de grado 3. En la figura 1.39 se muestran las gráficas de tres funciones polinomiales. En el capítulo 4 aprenderemos a graficar funciones polinomiales.

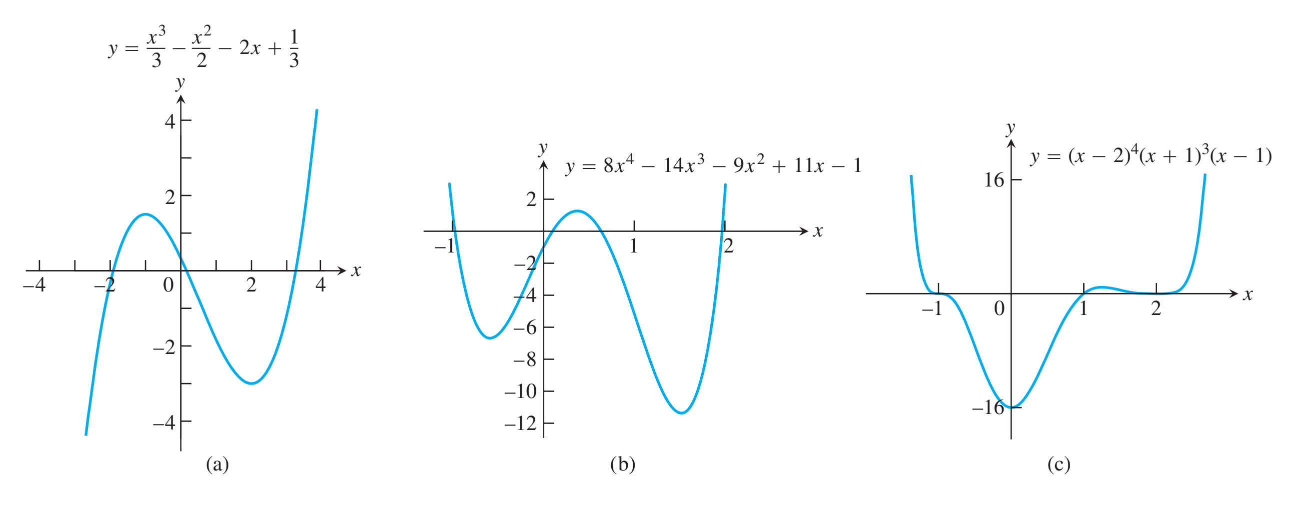


FIGURA 1.39 Gráficas de tres funciones polinomiales.

Funciones racionales Una **función racional** es un cociente o razón de dos polinomios de la forma:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

en donde p y q son polinomios. El dominio de una función racional es el conjunto de todos los números reales x para los que $q(x) \neq 0$. Por ejemplo,

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3}{7x + 4}$$

es una función racional con el dominio $\{x|\ x \neq -4/7\}$. Su gráfica se muestra en la figura 1.40a, junto con las de otras dos funciones racionales (1.40b y 1.40c).

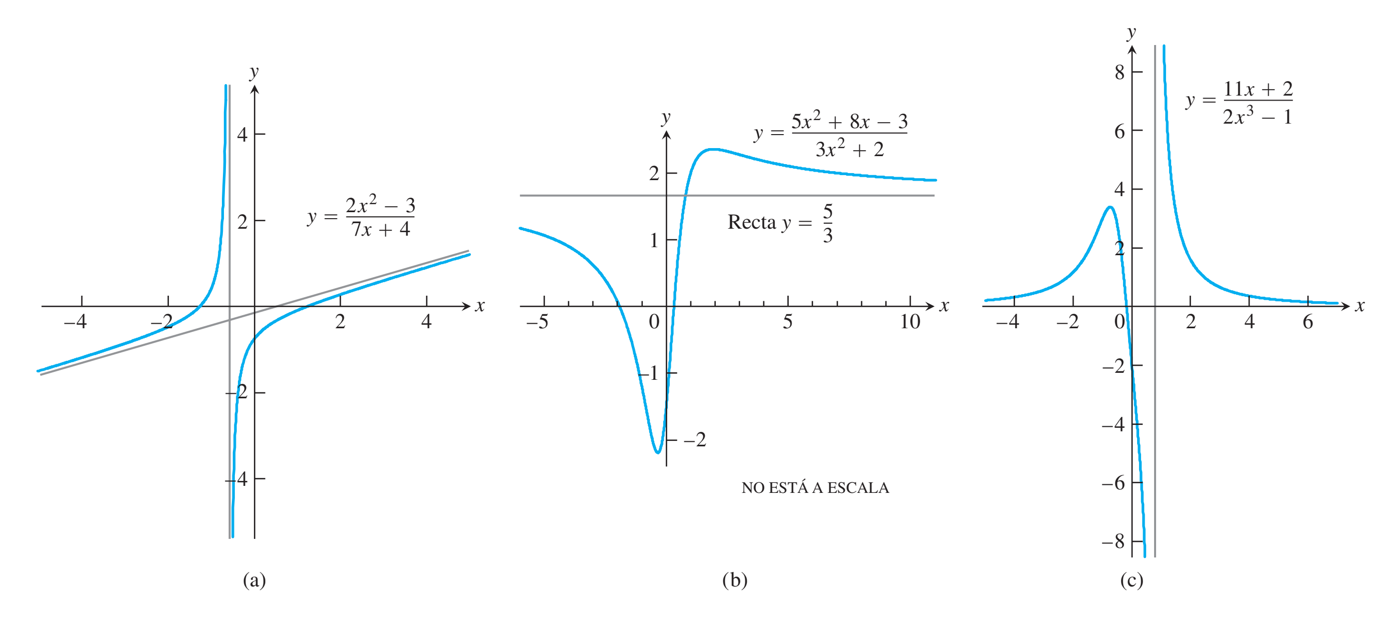


FIGURA 1.40 Gráficas de tres funciones racionales.

Funciones algebraicas Una **función algebraica** es la que se construye a partir de polinomios usando operaciones algebraicas (suma, resta, multiplicación, división y con raíces). Las funciones racionales son casos especiales de las funciones algebraicas. En la figura 1.41 se muestran tres gráficas de funciones algebraicas.

Funciones trigonométricas En la sección 1.6 repasaremos las funciones trigonométricas. En la figura 1.42 se muestran las gráficas de las funciones seno y coseno.

Funciones exponenciales Las funciones de la forma $f(x) = a^x$, donde la base $a > 0$ es una constante positiva y $a \neq 1$, se llaman **funciones exponenciales**. Todas las funciones exponenciales tienen dominio $(-\infty, \infty)$ y rango $(0, \infty)$. Así, una función exponencial nunca vale cero. En la figura 1.43 se muestran las gráficas de algunas funciones exponenciales; su estudio desde el punto de vista del cálculo se abordará en el capítulo 7.

Funciones logarítmicas Son las funciones $f(x) = \log_a x$, donde la base $a \neq 1$ es una constante positiva. Se trata de las *funciones inversas* de las funciones exponenciales, y su

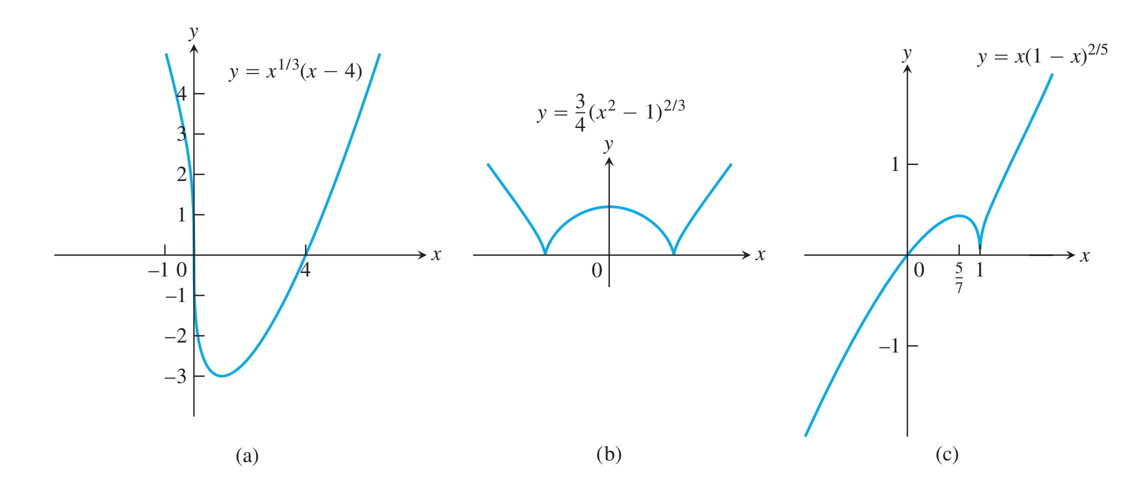


FIGURA 1.41 Gráficas de tres funciones algebraicas.

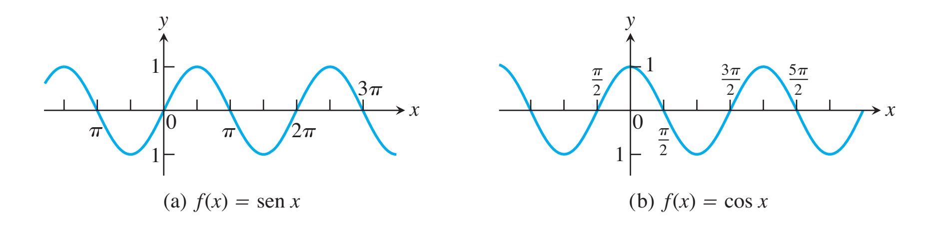


FIGURA 1.42 Gráficas de las funciones seno y coseno.

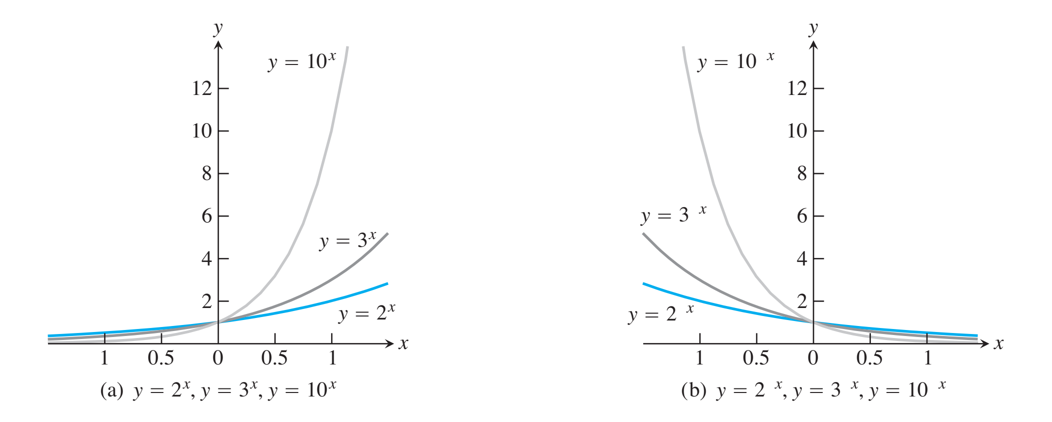


FIGURA 1.43 Gráficas de funciones exponenciales.

estudio se abordará en el capítulo 7. En la figura 1.44 se muestran las gráficas de cuatro funciones logarítmicas con distintas bases. En cada caso el dominio es $(0, \infty)$ y el rango es $(-\infty, \infty)$.

Funciones trascendentes Son funciones no algebraicas. Entre ellas están las funciones trigonométricas, las inversas trigonométricas, las exponenciales, las logarítmicas y muchas

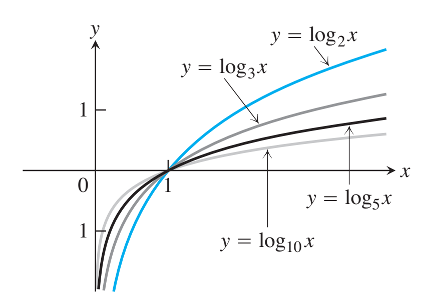


FIGURA 1.44 Gráficas de cuatro funciones logarítmicas.

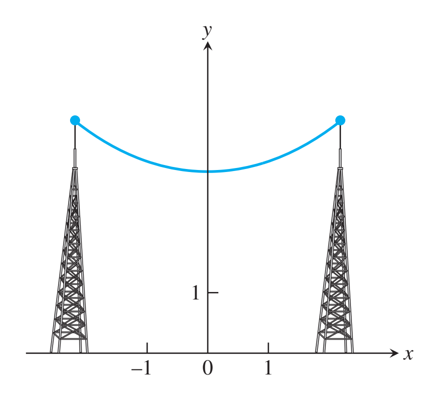


FIGURA 1.45 Gráfica de una catenaria (del latín *catena*, que significa "cadena") o cable colgante.

otras (tales como las funciones hiperbólicas que analizaremos en el capítulo 7). Un ejemplo de una función trascendente es la **catenaria**. Su gráfica toma la forma de un cable, como el del teléfono o el televisor, cuyos extremos están sujetos por dos soportes, y que cuelga libremente por su propio peso (figura 1.45).

EJEMPLO 1 Identificar el tipo de función

De acuerdo con la descripción de la sección precedente, identifique a qué tipo pertenece cada una de las funciones dadas a continuación. Tenga en cuenta que algunas funciones pueden pertenecer a más de una categoría. Por ejemplo, $f(x) = x^2$ es, al mismo tiempo, una función potencia y una función polinomial de segundo grado.

(a) $f(x) = 1 + x - \frac{1}{2}x^5$ **(b)** $g(x) = 7^x$ **(c)** $h(z) = z^7$

(d) $y(t) = \operatorname{sen}\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$

Solución

(a) $f(x) = 1 + x - \frac{1}{2}x^5$ es una función polinomial de grado 5.

(b) $g(x) = 7^x$ es una función exponencial de base 7. Observe que la variable x es el exponente.

(c) $h(z) = z^7$ es una función potencia. (La variable z es la base).

(d) $y(t) = \operatorname{sen}\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$ es una función trigonométrica. ■

Funciones crecientes y decrecientes

Si la gráfica de una función *sube* o *se eleva* conforme nos movemos de izquierda a derecha (por el eje x), decimos que la función es *creciente*; si *desciende* o *baja* a medida que nos movemos de izquierda a derecha, decimos que es *decreciente*. En la sección 4.3 se dan las definiciones formales de funciones crecientes y funciones decrecientes, y se explica cómo encontrar los intervalos en los que una función es creciente y en los que es decreciente. Los siguientes son ejemplos que se ilustran en las figuras 1.36, 1.37 y 1.38.

Función	Donde crece	Donde decrece
$y = x^2$	$0 \le x < \infty$	$-\infty < x \le 0$
$y = x^3$	$-\infty < x < \infty$	Ningún punto
$y = 1/x$	Ningún punto	$-\infty < x < 0$ y $0 < x < \infty$
$y = 1/x^2$	$-\infty < x < 0$	$0 < x < \infty$
$y = \sqrt{x}$	$0 \le x < \infty$	Ningún punto
$y = x^{2/3}$	$0 \le x < \infty$	$-\infty < x \le 0$

Funciones pares y funciones impares: simetría

Las gráficas de funciones *pares* e *impares* se caracterizan por sus propiedades de simetría.

DEFINICIONES **Función par, función impar**

Una función $y = f(x)$ es una

función par de $\boldsymbol{x}$ si $f(-x) = f(x)$,
función impar de $\boldsymbol{x}$ si $f(-x) = -f(x)$,

para toda x en el dominio de la función.

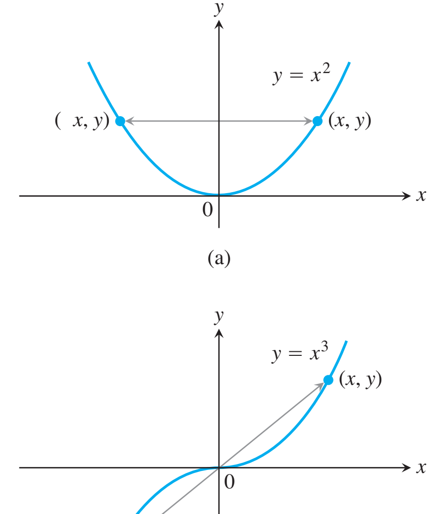


FIGURA 1.46 En la parte (a), la gráfica de $y = x^2$ (una función par) es simétrica respecto del eje y. En la parte (b), la gráfica de $y = x^3$ (una función impar) es simétrica respecto del origen.

Los nombres de par e impar para las funciones se deben a las potencias de x. Si y es una potencia par de x como en $y = x^2$ o $y = x^4$, constituye una función par de x (ya que $(-x)^2 = x^2$ y $(-x)^4 = x^4$). Si y es una potencia impar de x, como en $y = x$ o $y = x^3$, representa una función impar de x (ya que $(-x)^1 = -x$ y $(-x)^3 = -x^3$).

La gráfica de una función par es **simétrica respecto al eje** $\boldsymbol{y}$. Como $f(-x) = f(x)$, un punto (x, y) está sobre la gráfica si y sólo si el punto $(-x, y)$ también lo está (figura 1.46a). Una reflexión sobre del eje y deja la gráfica igual.

La gráfica de una función impar es **simétrica respecto al origen**. Como $f(-x) = -f(x)$, un punto (x, y) está sobre la gráfica si y sólo si el punto $(-x, -y)$ también lo está (figura 1.46b). De manera equivalente, una gráfica es simétrica respecto al origen si una rotación de 180º alrededor del mismo deja la gráfica igual. Observe que las definiciones implican que tanto $-x$ deben estar en el dominio de f.



EJEMPLO 2 Reconocer funciones pares e impares

$f(x) = x^2$	Función par: $(-x)^2 = x^2$ para todo x; es simetría respecto al eje y
$f(x) = x^2 + 1$	Función par: $(-x)^2 + 1 = x^2 + 1$ para todo x; es simetría respecto al eje y (figura 1.47a).
$f(x) = x$	Función impar: $(-x) = -x$ para todo x; es simetría respecto al origen

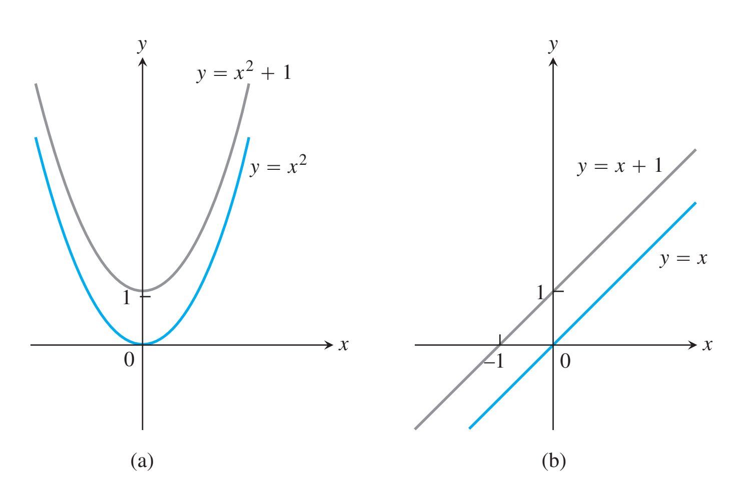


FIGURA 1.47 (a) Cuando sumamos el término constante 1 a la función $y = x^2$, la función resultante $y = x^2 + 1$ sigue siendo par y su gráfica sigue siendo simétrica respecto del eje y (b) Cuando sumamos el término constante 1 a la función $y = x$, la función resultante $y = x + 1$ ya no es impar. La simetría respecto del origen se pierde (ejemplo 2).

$f(x) = x + 1$ No es impar: $f(-x) = -x + 1$, pero $-f(x) = -x - 1$. Las dos son diferentes.
No es par: $(-x) + 1 \neq x + 1$ para toda $x \neq 0$ (figura 1.47b).
Ninguna de las dos. ■

Modelos matemáticos

Para ayudarnos a entender mejor nuestro mundo, es frecuente que recurramos a descripciones matemáticas de fenómenos particulares, por ejemplo, utilizando una función o una ecuación. Tales descripciones son llamados **modelos matemáticos** que constituyen una idealización de los fenómenos del mundo real, y rara vez son representaciones completamente exactas. A pesar de que todos los modelos tienen limitaciones, uno bueno puede proveer valiosos resultados y conclusiones, tal como se ilustra en la figura 1.48.

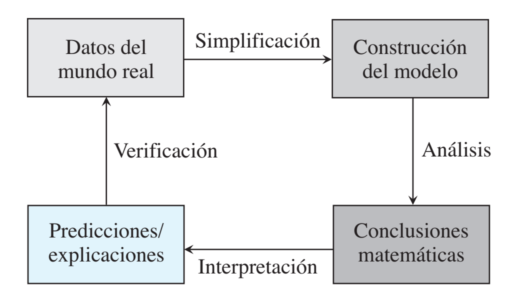


FIGURA 1.48 Flujo del proceso de modelado, empezando con un análisis de los datos del mundo real.

Casi todos los modelos simplifican la realidad, y sólo son capaces de imitar el comportamiento del mundo real de forma *aproximada*. Una relación que permite este tipo de simplificación es la *proporcionalidad*.

DEFINICIÓN Proporcionalidad
Dos variables y y x son **proporcionales** (una respecto a la otra) si una siempre es una constante multiplicada por la otra; es decir, si

$$y = kx$$

para alguna constante k distinta de cero.

La definición anterior implica que la gráfica de y contra x es de una recta que pasa por el origen. Esta observación gráfica es útil para probar si una colección de datos determinada da por resultado una relación razonable de proporcionalidad. Si una proporcionalidad es razonable, la graficación de una variable contra la otra debe aproximarse a una recta que pasa por el origen.

EJEMPLO 3 La Tercera Ley de Kepler

La Tercera Ley de Kepler es una famosa proporcionalidad, postulada por el astrónomo alemán Johannes Kepler a principios del siglo XVII. Si T es el periodo, en días, que transcurre para que un planeta describa una órbita completa alrededor del Sol, y R es la distancia media entre el planeta y el Sol, de acuerdo con Kepler T es proporcional a R elevado a la potencia 3/2. Esto es, para alguna constante k,

$$T = kR^{3/2}.$$

Comparemos la ley de Kepler con los datos de la tabla 1.3, tomados de un almanaque mundial publicado en 1993.

TABLA 1.3 Periodos orbitales y distancias medias de los planetas al Sol

Planeta	***T*** **Periodo (días)**	***R*** **Distancia media (miles de millones)**
Mercurio	88.0	36
Venus	224.7	67.25
Tierra	365.3	93
Marte	687.0	141.75
Júpiter	4,331.8	483.80
Saturno	10,760.0	887.97
Urano	30,684.0	1,764.50
Neptuno	60,188.3	2,791.05
Plutón	90,466.8	3,653.90

El principio gráfico de este ejemplo puede ser nuevo para usted. Para trazar la gráfica de T contra $R^{3/2}$ primero calculamos el valor de $R^{3/2}$ para cada valor de la tabla 1.3. Por ejemplo, $3653.90^{3/2} \approx 220{,}869.1$ y $36^{3/2} = 216$. El eje horizontal representa $R^{3/2}$ (no los valores de R) y graficamos los pares ordenados $(R^{3/2}, T)$ en el plano cartesiano como se muestra en la figura 1.49. La graficación de los pares ordenados, o diagrama de dispersión, nos da una representación gráfica del periodo contra la distancia media elevada a la potencia 3/2. Observe que el diagrama de dispersión ilustrado en la figura está, aproximadamente, a lo largo de la recta que pasa por el origen. Tomando dos puntos que estén en dicha recta podemos estimar con facilidad la pendiente, que es la constante de proporcionalidad (en días por millas $\times 10^{-4}$).

$$k = pendiente = \frac{90,466.8 - 88}{220{,}869.1 - 216} \approx 0.410$$

Estimamos que el modelo de la Tercera Ley de Kepler es $T = 0.410R^{3/2}$ (el resultado depende de las unidades que decidamos utilizar). Es preciso que seamos cautos y puntualicemos que ésta *no es una prueba* de la Tercera Ley de Kepler. No podemos probar o verificar

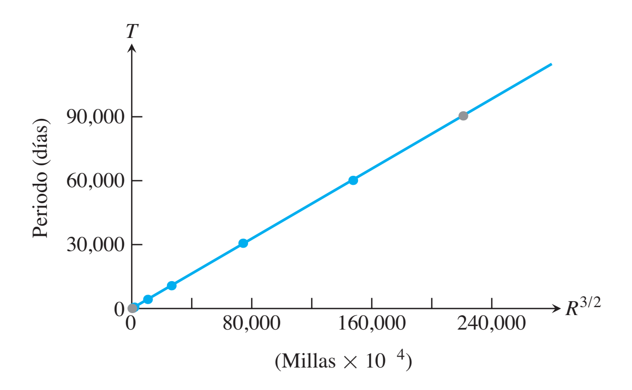


FIGURA 1.49 Gráfica de la tercera ley de Kepler como una proporcionalidad: $T = 0.410R^{3/2}$ (ejemplo 3).

un teorema a partir de sólo unos cuantos ejemplos. Sin embargo, la figura 1.49 sugiere que la Tercera Ley de Kepler es razonable. ■

El concepto de proporcionalidad es una manera de verificar qué tan razonable es la relación que se ha supuesto entre dos variables, como en el ejemplo 3. También puede darnos la base para construir íntegramente un **modelo empírico** a partir de una tabla de datos recopilados, para el modelo.

EJERCICIOS 1.4

Reconocimiento de funciones

En los ejercicios 1-4, identifique de qué tipo de función se trata en cada caso: constante, lineal, de potencia, polinomial (establezca el grado), racional, algebraica, trigonométrica, exponencial o logarítmica. Recuerde que algunas funciones pueden corresponder a más de una categoría.

1. **a.** $f(x) = 7 - 3x$ **b.** $g(x) = \sqrt[5]{x}$

c. $h(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ **d.** $r(x) = 8^x$

2. **a.** $F(t) = t^4 - t$ **b.** $G(t) = 5^t$

c. $H(z) = \sqrt{z^3 + 1}$ **d.** $R(z) = \sqrt[3]{z^7}$

3. **a.** $y = \dfrac{3 + 2x}{x - 1}$ **b.** $y = x^{5/2} - 2x + 1$

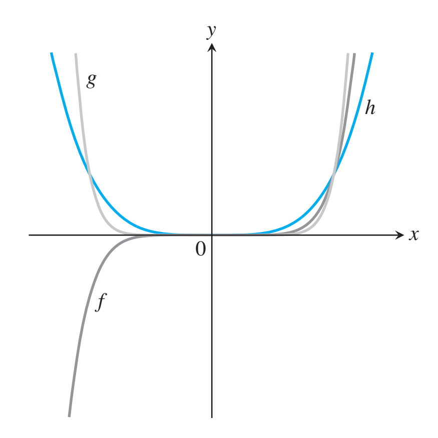
c. $y = \tan \pi x$ **d.** $y = \log_7 x$

4. **a.** $y = \log_5 \left(\dfrac{1}{t}\right)$ **b.** $f(z) = \dfrac{z^5}{\sqrt{z} + 1}$

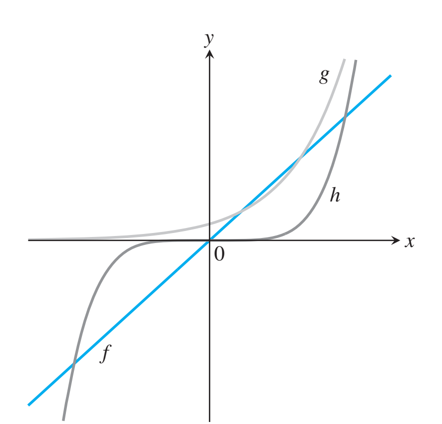
c. $g(x) = 2^{1/x}$ **d.** $w = 5 \cos \left(\dfrac{t}{2} + \dfrac{\pi}{6}\right)$

En los ejercicios 5 y 6, relacione cada función con su gráfica. No utilice calculadora graficadora ni computadora, y justifique sus respuestas.

5. **a.** $y = x^4$ **b.** $y = x^7$ **c.** $y = x^{10}$



6. **a.** $y = 5x$ **b.** $y = 5^x$ **c.** $y = x^5$



Funciones crecientes y decrecientes

Trace las gráficas de las funciones de los ejercicios 7-18. ¿Qué simetrías (si las hay) tienen las gráficas? Especifique los intervalos en donde la función es creciente y los intervalos donde es decreciente.

7. $y = -x^3$

8. $y = -\dfrac{1}{x^2}$

9. $y = -\dfrac{1}{x}$

10. $y = \dfrac{1}{|x|}$

11. $y = \sqrt{|x|}$

12. $y = \sqrt{-x}$

13. $y = x^3/8$

14. $y = -4\sqrt{x}$

15. $y = -x^{3/2}$

16. $y = (-x)^{3/2}$

17. $y = (-x)^{2/3}$

18. $y = -x^{2/3}$

Funciones pares e impares

En los ejercicios 19-30, determine si la función es par, impar o ninguna de las dos. Justifique sus respuestas usando la definición.

19. $f(x) = 3$

20. $f(x) = x^{-5}$

21. $f(x) = x^2 + 1$

22. $f(x) = x^2 + x$

23. $g(x) = x^3 + x$

24. $g(x) = x^4 + 3x^2 - 1$

25. $g(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$

26. $g(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

27. $h(t) = \frac{1}{t - 1}$

28. $h(t) = |t^3|$

29. $h(t) = 2t + 1$

30. $h(t) = 2|t| + 1$

Proporcionalidad

En los ejercicios 31 y 32, evalúe si el conjunto de datos dados satisfacen razonablemente la suposición de proporcionalidad señalada. Trace un diagrama de dispersión apropiado para su investigación y, si la hipótesis de proporcionalidad parece razonable, estime la constante de proporcionalidad.

31. **a.** y es proporcional respecto a x

y	1	2	3	4	5	6	7	8
x	5.9	12.1	17.9	23.9	29.9	36.2	41.8	48.2

b. y es proporcional respecto a $x^{1/2}$

y	3.5	5	6	7	8
x	3	6	9	12	15

32. **a.** y es proporcional respecto a 3^x

y	5	15	45	135	405	1215	3645	10,935
x	0	1	2	3	4	5	6	7

b. y es proporcional respecto a x

y	2	4.8	5.3	6.5	8.0	10.5	14.4	15.0
x	2.0	5.0	6.0	9.0	14.0	35.0	120.0	150.0

T **33.** La siguiente tabla muestra la distancia recorrida por un automóvil durante el tiempo que pasa entre la reacción del conductor y el uso de los frenos (distancia de reacción), y la distancia que recorre el auto entre el uso de los frenos y el frenado completo (distancia de frenado). Las distancias (en pies) dependen de la velocidad a la que esté circulando el auto (en millas por hora). Determine si las siguientes suposiciones de proporcionalidad son razonables, y estime las constantes de proporcionalidad.

a. la distancia de reacción es proporcional a la velocidad.

b. la distancia de frenado es proporcional al cuadrado de la velocidad.

Rapidez (mph)	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80
Distancia de reacción (pies)	22	28	33	39	44	50	55	61	66	72	77	83	88
Distancia de frenado (pies)	20	28	41	53	72	93	118	149	182	221	266	318	376

34. En octubre de 2002 los astrónomos descubrieron, más allá de Neptuno, un pequeño planeta congelado y rocoso al que llamaron tentativamente "Quaoar". El planeta "nuevo" está aproximadamente a 4000 millones de millas de la Tierra, en el extremo del sistema solar conocido como Cinturón de Kuiper. Usando la Tercera Ley de Kepler, estime el tiempo T que requiere Quaoar para describir una órbita completa alrededor del Sol.

T **35.** **Alargamiento de un resorte** Es necesario crear un modelo para determinar la respuesta de un resorte con diferentes cargas, con el propósito de diseñar un vehículo que responda apropiadamente a las condiciones de un camino, sin importar que se trate de un camión de volteo, un vehículo utilitario o un auto de lujo. Se realizó un experimento para medir el estiramiento y de un resorte, en pulgadas, como una función del número x de unidades de masa colocadas como carga en él.

x (núm. de unidades de masa)	0	1	2	3	4	5
y (alargamiento en pulgadas)	0	0.875	1.721	2.641	3.531	4.391

x (núm. de unidades de masa)	6	7	8	9	10
y (alargamiento en pulgadas)	5.241	6.120	6.992	7.869	8.741

a. Trace un diagrama de dispersión a partir de los datos, para comprobar qué tan razonable es la hipótesis de que el estiramiento y es proporcional respecto a la masa x.

b. Estime la constante de proporcionalidad mediante la gráfica que obtuvo en el inciso (a).

c. Prediga el estiramiento del resorte con una carga de 13 unidades de masa.

36. **Pinos de La Ponderosa** En la tabla siguiente, x representa la cincha (circunferencia), medida en pulgadas (in.), que tiene un pino a una altura determinada, y y representa el número de pies de tabla (pt) de la madera que se obtiene de él finalmente.

x (pulg.)	17	19	20	23	25	28	32	38	39	41
y (pt)	19	25	32	57	71	113	123	252	259	294

Formule y compruebe estos dos modelos: que el número de pies de tabla utilizables es proporcional **(a)** al cuadrado de la cincha, y **(b)** al cubo de la cincha. ¿Cuál de estos modelos ofrece una "explicación" más apropiada que el otro?

1.5 Combinación de funciones; traslaciones y cambio de escala en gráficas

En esta sección se analizarán las principales métodos para combinar funciones y transformarlas en nuevas funciones.

Sumas, restas, productos y cocientes

Como los números, las funciones reales pueden sumarse, restarse, multiplicarse y dividirse (excepto cuando el denominador es cero) para obtener nuevas funciones. Si f y g son funciones reales, definidas para toda x que pertenezca al dominio tanto de f como de g (esto es, para $x \in D(f) \cap D(g)$), definimos las funciones $f + g$, $f - g$, y fg mediante las fórmulas

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$
$$(f - g)(x) = f(x) - g(x).$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x).$$

Observe que el signo + en el lado izquierdo de la primera función representa la operación de suma de *funciones*, mientras que el signo + en el lado derecho de la misma significa la suma de los números reales $f(x)$ y $g(x)$.

Para cualquier punto de $D(f) \cap D(g)$ en el que $g(x) \neq 0$, también podemos definir la función f/g mediante la fórmula

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad (\text{donde } g(x) \neq 0).$$

Las funciones también pueden multiplicarse por constantes: si c es un número real, la función cf está definida para toda x real en el dominio de f mediante

$$(cf)(x) = cf(x).$$

EJEMPLO 1 Combinación de funciones algebraicamente

Las funciones definidas por las fórmulas

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \sqrt{1 - x},$$

tienen los dominios $D(f) = [0, \infty)$ y $D(g) = (-\infty, 1]$. Los puntos comunes de estos dominios son

$$[0, \infty) \cap (-\infty, 1] = [0, 1].$$

La tabla siguiente resume las fórmulas y dominios para diversas combinaciones algebraicas de las dos funciones. También escribimos $f \cdot g$ para la función producto fg.

Función	Fórmula	Dominio
$f + g$	$(f + g)(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1 - x}$	$[0, 1] = D(f) \cap D(g)$
$f - g$	$(f - g)(x) = \sqrt{x} - \sqrt{1 - x}$	$[0, 1]$
$g - f$	$(g - f)(x) = \sqrt{1 - x} - \sqrt{x}$	$[0, 1]$
$f \cdot g$	$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x) = \sqrt{x(1 - x)}$	$[0, 1]$
f/g	$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \sqrt{\frac{x}{1 - x}}$	$[0, 1)$ ($x = 1$ excluido)
g/f	$\frac{g}{f}(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \sqrt{\frac{1 - x}{x}}$	$(0, 1]$ ($x = 0$ excluido) ■

La gráfica de la función $f + g$ se obtiene a partir de las gráficas de f y g, sumando las coordenadas y correspondientes de $f(x)$ y $g(x)$ para cada punto $x \in D(f) \cap D(g)$, como en la figura 1.50. En la figura 1.51 se muestran las gráficas de $f + g$ y $f \cdot g$ a partir del ejemplo 1.

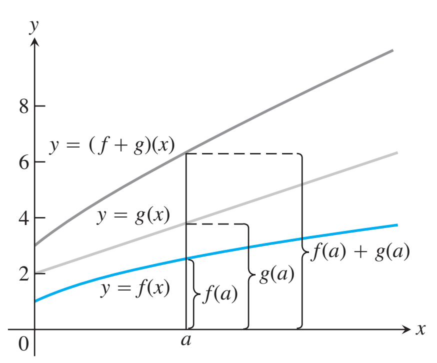


FIGURA 1.50 Suma gráfica de dos funciones.

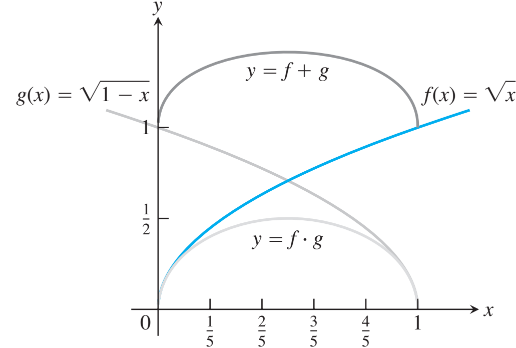


FIGURA 1.51 El dominio de la función $f + g$ es la intersección de los dominios de f y g, el intervalo [0, 1] en el eje x, donde estos dominios se traslapan. El intervalo también es el dominio de la función $f \cdot g$ (ejemplo 1).

Composición de funciones

La composición es otra manera de combinar funciones.

DEFINICIÓN Composición de funciones

Dadas f y g dos funciones, **composición** $f \circ g$ ("f composición g") está definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

El dominio de $f \circ g$ consiste en los números x del dominio de g para los que $g(x)$ está definida en el dominio de f.

La definición afirma que $f \circ g$ puede formarse cuando el rango de g está en el dominio de f. Para encontrar $(f \circ g)(x)$, *primero* determinamos $g(x)$ y *luego* encontramos $f(g(x))$. En la figura 1.52 se ilustra $f \circ g$ acomo un diagrama de máquina, y en la figura 1.53 se muestra la composición como un diagrama de flechas.

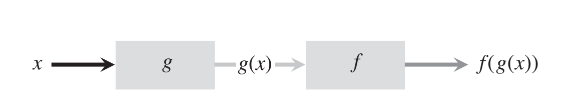


FIGURA 1.52 Dos funciones pueden componerse en x siempre que el valor de una función en x esté en el dominio de la otra. La composición se denota mediante $f \circ g$.

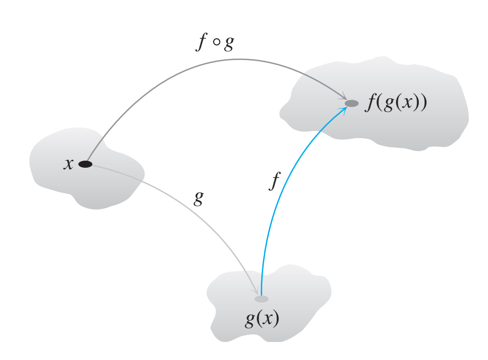


FIGURA 1.53 Diagrama de flechas para $f \circ g$.

EJEMPLO 2 Mostrar una función como una composición de funciones

La función $y = \sqrt{1 - x^2}$ puede pensarse como un procedimiento en donde primero se calcula $1 - x^2$ y después se saca la raíz cuadrada del resultado. La función y es la composición de la función $g(x) = 1 - x^2$ y la función $f(x) = \sqrt{x}$. Observe que $1 - x^2$ no puede ser negativo (el interior de la raíz). El dominio de la composición es $[-1, 1]$. ■

Para evaluar la composición $g \circ f$ (cuando esté definida) invertimos el orden, encontrando primero $f(x)$ y después $g(f(x))$. El dominio de $g \circ f$ es el conjunto de números x en el dominio de *f(x)*, tales que está en el dominio de g.

Por lo general, las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$ son bastante distintas.

EJEMPLO 3 Determinar las siguientes composiciones

Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x + 1$, encuentre

(a) $(f \circ g)(x)$ **(b)** $(g \circ f)(x)$ **(c)** $(f \circ f)(x)$ **(d)** $(g \circ g)(x)$.

Solución

	Composición	**Dominio**
(a)	$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x + 1}$	$[-1, \infty)$
(b)	$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x) + 1 = \sqrt{x} + 1$	$[0, \infty)$
(c)	$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{\sqrt{x}} = x^{1/4}$	$[0, \infty)$
(d)	$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(x) + 1 = (x + 1) + 1 = x + 2$	$(-\infty, \infty)$

Para comprender por qué el dominio de $f \circ g$ es $[-1, \infty)$, observe que $g(x) = x + 1$ está definida para todo número real x, pero pertenece al dominio de f solamente si $x + 1 \geq 0$, por estar dentro de la raíz $x \geq -1$. ■

Observe que si $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$, entonces $(f \circ g)(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2 = x$. Sin embargo, el dominio de $f \circ g$ es $[0, \infty)$, y no $(-\infty, \infty)$.

Traslación de la gráfica de una función

Para trasladar hacia arriba la gráfica de una función $y = f(x)$ se suma una constante positiva al lado derecho de la fórmula $y = f(x)$.

Para trasladar hacia abajo la gráfica de una función $y = f(x)$ se suma una constante negativa al lado derecho de la fórmula $y = f(x)$.

Para trasladar hacia la izquierda la gráfica de $y = f(x)$ se suma una constante positiva a x. Para trasladar hacia la derecha la gráfica de $y = f(x)$ se suma una constante negativa a x.

Reglas de traducción

Traslaciones verticales

$y = f(x) + k$	Desplaza *hacia arriba* la gráfica de f k unidades si $k > 0$
	La desplaza *hacia abajo* $\lvert k \rvert$ unidades si $k < 0$

Traslaciones horizontales

$y = f(x + h)$	Desplaza *hacia la izquierda* la gráfica de f, h unidades si $h > 0$
	La desplaza *hacia la derecha* $\lvert h \rvert$ unidades si $h < 0$

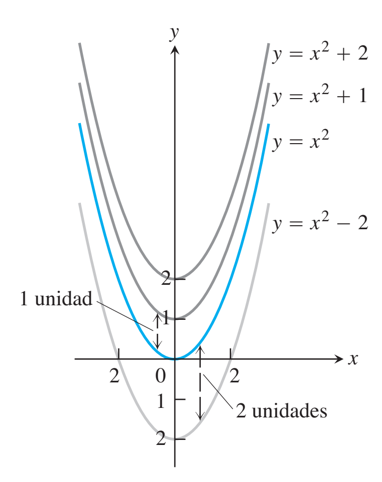


FIGURA 1.54 Para desplazar la gráfica de $f(x) = x^2$ hacia arriba (o hacia abajo), sumamos a la fórmula de f constantes positivas (o negativas) (ejemplos 4a y 4b).

EJEMPLO 4 Trasladar una gráfica

(a) Si sumamos 1 en el lado derecho de la fórmula $y = x^2$ para obtener $y = x^2 + 1$, la gráfica se traslada 1 unidad hacia arriba (figura 1.54).

(b) Si sumamos –2 en el lado derecho de la fórmula $y = x^2$ para obtener $y = x^2 - 2$, la gráfica se traslada 2 unidades hacia abajo, la gráfica no se voltea (figura 1.54).

(c) Si sumamos 3 a x en $y = x^2$ para obtener $y = (x + 3)^2$, la gráfica se traslada 3 unidades hacia la izquierda (figura 1.55).

(d) Si sumamos –2 a x en $y = |x|$, y después sumamos –1 al resultado, obtenemos $y = |x - 2| - 1$ y la gráfica se desplaza 2 unidades hacia la derecha y 1 unidad hacia abajo (figura 1.56).

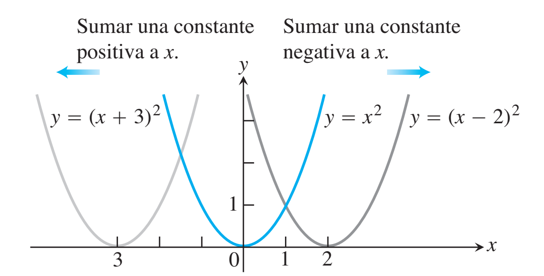


FIGURA 1.55 Para desplazar la gráfica de $y = x^2$ hacia la izquierda, sumamos una constante positiva a x. Para desplazar la gráfica hacia la derecha, sumamos una constante negativa a x.

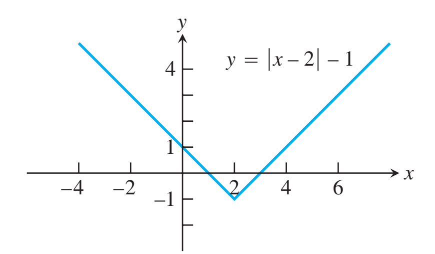


FIGURA 1.56 Desplazamiento de la gráfica de $y = |x|$ 2 2 unidades hacia la derecha y 1 unidad hacia abajo (ejemplo 4d). ■

Cambio de tamaño y reflexión de la gráfica de una función

Cambiar el tamaño de la gráfica de una función $y = f(x)$ significa estirar la gráfica o comprimirla, ya sea vertical u horizontalmente. Esto se logra multiplicando la función f o la variable independiente x por una constante apropiada c. Las reflexiones a través de los ejes coordenados son casos especiales cuando $c = -1$.

Fórmulas para cambio de tamaño vertical u horizontal, y para reflexión

Para $c > 1$,

$y = cf(x)$	Dilata o estira verticalmente la gráfica de f por un factor de c.
$y = \frac{1}{c} f(x)$	Comprime verticalmente la gráfica de f por un factor de c.
$y = f(cx)$	Comprime horizontalmente la gráfica de f por un factor de c.
$y = f(x/c)$	Dilata o estira horizontalmente la gráfica de f por un factor de c.

Para $c = -1$,

$y = -f(x)$	Refleja la gráfica de f a través del eje x.
$y = f(-x)$	Refleja la gráfica de f a través del eje y.

EJEMPLO 5 Reflejar una gráfica y cambiar su tamaño

(a) **Cambio vertical:** Multiplicar el lado derecho de $y = \sqrt{x}$ por 3 para obtener $y = 3\sqrt{x}$ dilata o estira la gráfica verticalmente por un factor de 3, mientras que multiplicarlo por 1/3 comprime la gráfica por un factor de 3 (figura 1.57).

(b) **Cambio horizontal:** La gráfica de $y = \sqrt{3x}$ es una compresión horizontal de la gráfica de $y = \sqrt{x}$ por un factor de 3, y la gráfica de $y = \sqrt{x/3}$ es una dilatación horizontal por un factor de 3 (figura 1.58). Observe que $y = \sqrt{3x} = \sqrt{3}\sqrt{x}$, de manera que una compresión horizontal *podría* corresponder a una dilatación vertical por un factor de escala diferente. De la misma manera, una dilatación horizontal podría corresponder a una compresión vertical por un factor de escala diferente.

(c) **Reflexión:** La gráfica de $y = -\sqrt{x}$ es una reflexión de $y = \sqrt{x}$ a través del eje x, y $y = \sqrt{-x}$ es una reflexión a través del eje y (figura 1.59).

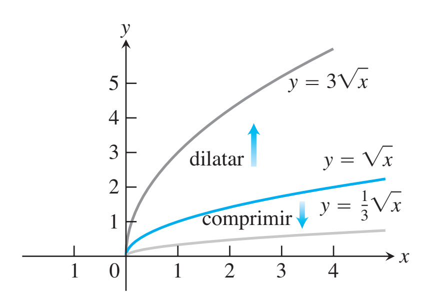


FIGURA 1.57 Dilatación y compresión vertical de la gráfica $y = \sqrt{x}$ por un factor de 3 (ejemplo 5a).

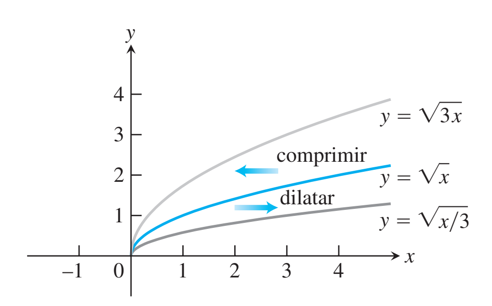


FIGURA 1.58 Dilatación y compresión horizontal de la gráfica $y = \sqrt{x}$ por un factor de 3 (ejemplo 5a).

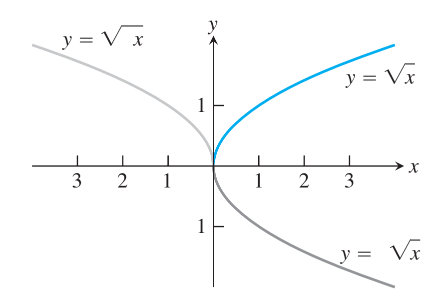


FIGURA 1.59 Reflexiones de la gráfica $y = \sqrt{x}$ a lo largo de los ejes coordenados (ejemplo 5c). ■

EJEMPLO 6 Combinar cambios de tamaño y reflexiones

Dada la función $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$ (figura 1.60a), encuentre las fórmulas para

(a) comprimir la gráfica horizontalmente por un factor de 2, seguido por una reflexión a través del eje y (figura 1.60b).

(b) comprimir la gráfica verticalmente por un factor de 2, seguido por una reflexión a través del eje x (figura 1.60c).

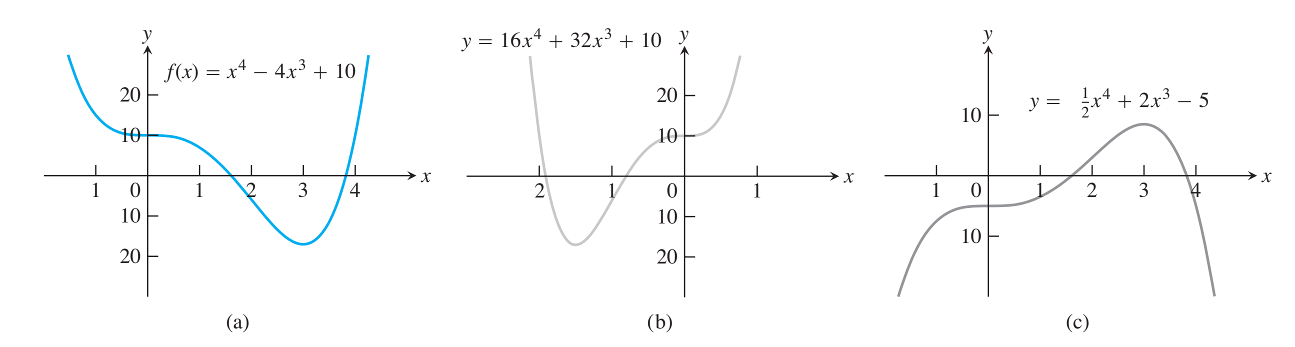


FIGURA 1.60 (a) La gráfica original de f. (b) La compresión horizontal de $y = f(x)$ en la parte (a) por un factor de 2, seguida por una reflexión a lo largo del eje y. (c) La compresión vertical de $y = f(x)$ en la parte (a) por un factor de 2, seguida por una reflexión a lo largo del eje x (ejemplo 6).

Solución

(a) La fórmula se obtiene al sustituir x por $-2x$ en el lado derecho de la ecuación para f

$$\begin{aligned} y = f(-2x) &= (-2x)^4 - 4(-2x)^3 + 10 \\ &= 16x^4 + 32x^3 + 10. \end{aligned}$$

(b) La fórmula es

$$y = -\frac{1}{2}f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 - 5.$$

Elipses

Al sustituir x por cx en la ecuación estándar del círculo con radio r y centro en el origen, se obtiene

$$c^2x^2 + y^2 = r^2. \tag{1}$$

Si $0 < c < 1$, la gráfica de la ecuación (1) estira al círculo horizontalmente; si $c > 1$ el círculo se comprime horizontalmente. En cualquier caso, la gráfica de la ecuación (1) es una elipse (figura 1.61). Observe, en la figura 1.61, que las intersecciones con el eje y en las tres gráficas siempre son $-r$ y r. En la figura 1.61b, el segmento de recta que une los puntos $(\pm r/c, 0)$ se conoce como **eje mayor** de la elipse; el **eje menor** es el segmento de recta que une $(0, \pm r)$. En la figura 1.61c, los ejes de la elipse están invertidos: el eje mayor es el segmento de recta que une los puntos $(0, \pm r)$ y el eje menor es el segmento de recta que une los puntos $(\pm r/c, 0)$. En ambos casos, el eje mayor es el segmento de recta de longitud mayor.

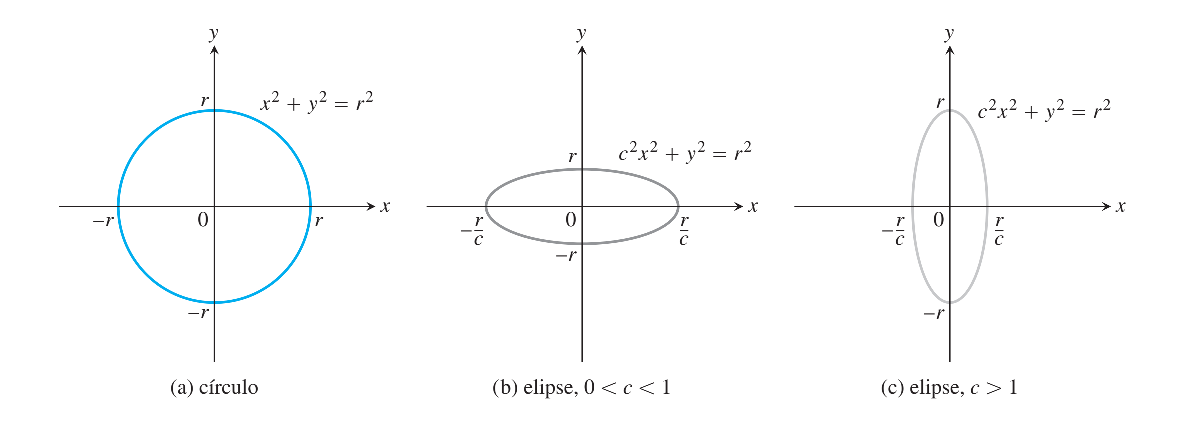


FIGURA 1.61 La dilatación horizontal o compresión de un círculo produce gráficas de elipses.

Si dividimos ambos lados de la ecuación (1) entre r^2, obtenemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{2}$$

En donde $a = r/c$ y $b = r$. Si $a > b$, el eje mayor es horizontal; si $a < b$, el eje mayor es vertical. El **centro** de la elipse dada por la ecuación (2) es el origen (figura 1.62).

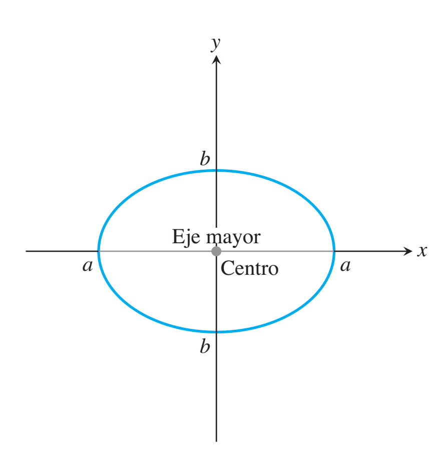


FIGURA 1.62 Gráfica de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b$, donde el eje mayor es horizontal.

Si sustituimos x por $x - h$ y y por $y - k$ en la ecuación (2), resulta

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1. \qquad (3)$$

La ecuación (3) es la **ecuación estándar de una elipse** con centro en (h, k). En la sección 10.1 se revisará la definición geométrica y las propiedades de la elipse.

EJERCICIOS 1.5

Sumas, restas, productos y cocientes

En los ejercicios 1 y 2, encuentre el dominio y el rango de $f, g, f + g$, y $f \cdot g$.

1. $f(x) = x, \quad g(x) = \sqrt{x - 1}$
2. $f(x) = \sqrt{x + 1}, \quad g(x) = \sqrt{x - 1}$

En los ejercicios 3 y 4, encuentre el dominio y el rango de f/g, y g/f.

3. $f(x) = 2, \quad g(x) = x^2 + 1$
4. $f(x) = 1, \quad g(x) = 1 + \sqrt{x}$

Composición de funciones

5. Si $f(x) = x + 5$ y $g(x) = x^2 - 3$, encuentre lo siguiente.
   a. $f(g(0))$ **b.** $g(f(0))$
   c. $f(g(x))$ **d.** $g(f(x))$
   e. $f(f(-5))$ **f.** $g(g(2))$
   g. $f(f(x))$ **h.** $g(g(x))$
6. Si $f(x) = x - 1$ y $g(x) = 1/(x + 1)$, encuentre lo siguiente.
   a. $f(g(1/2))$ **b.** $g(f(1/2))$
   c. $f(g(x))$ **d.** $g(f(x))$
   e. $f(f(2))$ **f.** $g(g(2))$
   g. $f(f(x))$ **h.** $g(g(x))$
7. Si $u(x) = 4x - 5$, $v(x) = x^2$, y $f(x) = 1/x$, encuentre las siguientes composiciones.
   a. $u(v(f(x)))$ **b.** $u(f(v(x)))$
   c. $v(u(f(x)))$ **d.** $v(f(u(x)))$
   e. $f(u(v(x)))$ **f.** $f(v(u(x)))$
8. Si $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x/4$, y $h(x) = 4x - 8$, encuentre las siguientes composiciones.
   a. $h(g(f(x)))$ **b.** $h(f(g(x)))$
   c. $g(h(f(x)))$ **d.** $g(f(h(x)))$
   e. $f(g(h(x)))$ **f.** $f(h(g(x)))$

Sean $f(x) = x - 3, \quad g(x) = \sqrt{x}, \quad h(x) = x^3$, y $j(x) = 2x$. Exprese cada una de las funciones de los ejercicios 9 y 10 como una composición donde están involucradas una o más funciones f, g, h, y j.

9. **a.** $y = \sqrt{x} - 3$ **b.** $y = 2\sqrt{x}$
   c. $y = x^{1/4}$ **d.** $y = 4x$
   e. $y = \sqrt{(x - 3)^3}$ **f.** $y = (2x - 6)^3$
10. **a.** $y = 2x - 3$ **b.** $y = x^{3/2}$
   c. $y = x^9$ **d.** $y = x - 6$
   e. $y = 2\sqrt{x - 3}$ **f.** $y = \sqrt{x^3 - 3}$

11. Copie y complete la tabla siguiente.

	$g(x)$	$f(x)$	$(f \circ g)(x)$
a.	$x - 7$	$\sqrt{x}$	
b.	$x + 2$	$3x$	
c.		$\sqrt{x - 5}$	$\sqrt{x^2 - 5}$
d.	$\dfrac{x}{x - 1}$	$\dfrac{x}{x - 1}$	
e.		$1 + \dfrac{1}{x}$	x
f.	$\dfrac{1}{x}$		x

12. Copie y complete la tabla siguiente.

	$g(x)$	$f(x)$	$(f \circ g)(x)$
a.	$\dfrac{1}{x - 1}$	$\lvert x \rvert$	?
b.	?	$\dfrac{x - 1}{x}$	$\dfrac{x}{x + 1}$
c.	?	$\sqrt{x}$	$\lvert x \rvert$
d.	$\sqrt{x}$	?	$\lvert x \rvert$

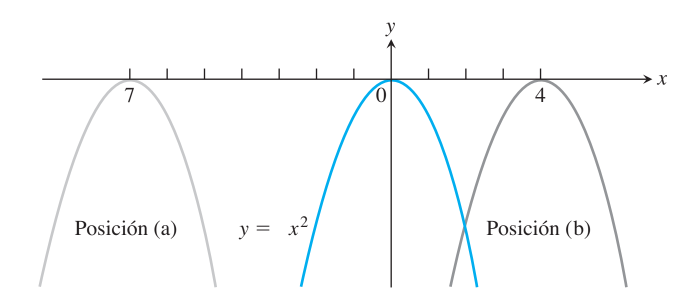
En los ejercicios 13 y 14, **(a)** escriba una fórmula para $f \circ g$ y $g \circ f$ y encuentre **(b)** el dominio y **(c)** el rango de cada función.

13. $f(x) = \sqrt{x + 1}, \quad g(x) = \dfrac{1}{x}$

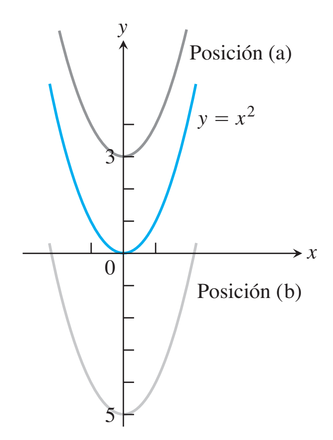
14. $f(x) = x^2, \quad g(x) = 1 - \sqrt{x}$

Traslación de gráficas

15. La figura siguiente muestra la gráfica de $y = -x^2$ desplazada a dos posiciones nuevas. Determine las funciones para las gráficas nuevas.



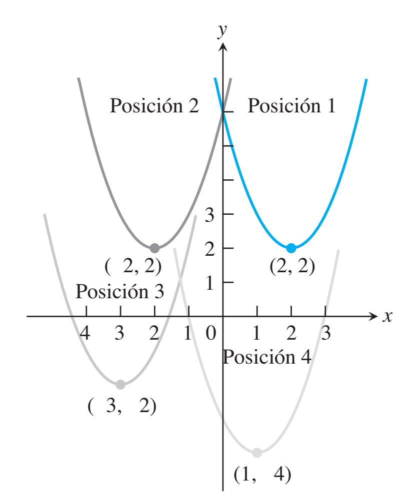
16. La figura siguiente muestra la gráfica de $y = x^2$ desplazada a dos posiciones nuevas. Determine las funciones para las gráficas nuevas.



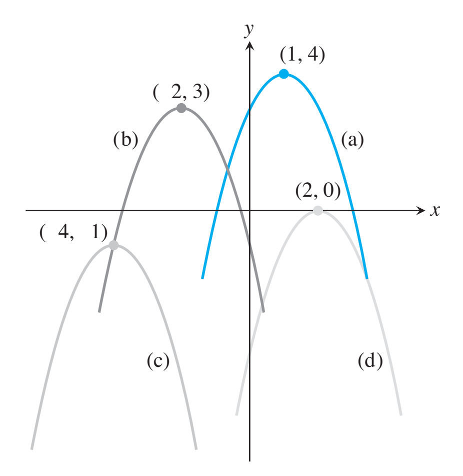
17. Relacione las funciones listadas en los incisos (a)-(d) con las gráficas de la figura.

a. $y = (x - 1)^2 - 4$ **b.** $y = (x - 2)^2 + 2$

c. $y = (x + 2)^2 + 2$ **d.** $y = (x + 3)^2 - 2$



18. La figura siguiente muestra la gráfica de $y = -x^2$ desplazada a cuatro posiciones nuevas. Determine la función para cada nueva gráfica.



En los ejercicios 19-28 se establece cuántas unidades y en qué direcciones se trasladarán las gráficas de las ecuaciones dadas, y determine una ecuación para la gráfica desplazada; después trace, en un mismo plano cartesiano, la gráfica de la función original y la gráfica de la ecuación desplazada, etiquetando cada gráfica con la ecuación que le corresponda.

19. $x^2 + y^2 = 49$ Abajo 3, izquierda 2

20. $x^2 + y^2 = 25$ Arriba 3, izquierda 4

21. $y = x^3$ Izquierda 1, abajo 1

22. $y = x^{2/3}$ Derecha 1, abajo 1

23. $y = \sqrt{x}$ Izquierda 0.81

24. $y = -\sqrt{x}$ Derecha 3

25. $y = 2x - 7$ Arriba 7

26. $y = \frac{1}{2}(x + 1) + 5$ Abajo 5, derecha 1

27. $y = 1/x$ Arriba 1, derecha 1

28. $y = 1/x^2$ Izquierda 2, abajo 1

Grafique las funciones de los ejercicios 29-48.

29. $y = \sqrt{x + 4}$

30. $y = \sqrt{9 - x}$

31. $y = |x - 2|$

32. $y = |1 - x| - 1$

33. $y = 1 + \sqrt{x - 1}$

34. $y = 1 - \sqrt{x}$

35. $y = (x + 1)^{2/3}$

36. $y = (x - 8)^{2/3}$

37. $y = 1 - x^{2/3}$

38. $y + 4 = x^{2/3}$

39. $y = \sqrt[3]{x - 1} - 1$

40. $y = (x + 2)^{3/2} + 1$

41. $y = \frac{1}{x - 2}$

42. $y = \frac{1}{x} - 2$

43. $y = \frac{1}{x} + 2$

44. $y = \frac{1}{x + 2}$

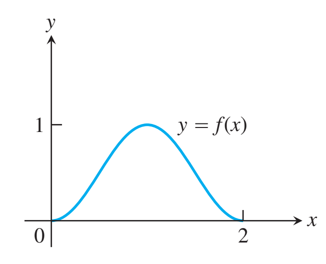
45. $y = \frac{1}{(x - 1)^2}$

46. $y = \frac{1}{x^2} - 1$

47. $y = \frac{1}{x^2} + 1$

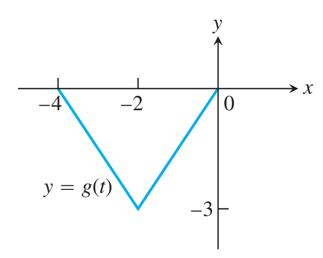
48. $y = \frac{1}{(x + 1)^2}$

49. La siguiente figura muestra la gráfica de una función $f(x)$ con dominio $[0, 2]$ y rango $[0, 1]$. Encuentre los dominios y los rangos de las funciones siguientes, y trace sus gráficas.



a. $f(x) + 2$
b. $f(x) - 1$
c. $2f(x)$
d. $-f(x)$
e. $f(x + 2)$
f. $f(x - 1)$
g. $f(-x)$
h. $-f(x + 1) + 1$

50. La figura siguiente muestra la gráfica de una función $g(t)$ con dominio $[-4, 0]$ y rango $[-3, 0]$. Encuentre el dominio y el rango de las funciones siguientes, y trace sus gráficas.



a. $g(-t)$
b. $-g(t)$
c. $g(t) + 3$
d. $1 - g(t)$
e. $g(-t + 2)$
f. $g(t - 2)$
g. $g(1 - t)$
h. $-g(t - 4)$

Cambio de tamaño, vertical y horizontal

En los ejercicios 51-60, se establece por qué factor y en qué dirección se estirarán o comprimirán las gráficas de las funciones dadas. Encuentre una ecuación para cada gráfica estirada o comprimida

51. $y = x^2 - 1$, estirada verticalmente por un factor de 3.

52. $y = x^2 - 1$, comprimida horizontalmente por un factor de 2.

53. $y = 1 + \frac{1}{x^2}$, comprimida verticalmente por un factor de 2.

54. $y = 1 + \frac{1}{x^2}$, estirada horizontalmente por un factor de 3.

55. $y = \sqrt{x + 1}$, comprimida horizontalmente por un factor de 4.

56. $y = \sqrt{x + 1}$, estirada verticalmente por un factor de 3.

57. $y = \sqrt{4 - x^2}$, estirada horizontalmente por un factor de 2.

58. $y = \sqrt{4 - x^2}$, comprimida verticalmente por un factor de 3.

59. $y = 1 - x^3$, comprimida horizontalmente por un factor de 3.

60. $y = 1 - x^3$, estirada horizontalmente por un factor de 2.

Graficación

En los ejercicios 61-68, trace la gráfica de cada función, sin graficar puntos (es decir sin tabular), sino a partir de la gráfica de una de las funciones estándar presentadas en las figuras 1.36-1.38, y aplicando la transformación apropiada.

61. $y = -\sqrt{2x + 1}$

62. $y = \sqrt{1 - \frac{x}{2}}$

63. $y = (x - 1)^3 + 2$

64. $y = (1 - x)^3 + 2$

65. $y = \frac{1}{2x} - 1$

66. $y = \frac{2}{x^2} + 1$

67. $y = -\sqrt[3]{x}$

68. $y = (-2x)^{2/3}$

69. Trace la gráfica de la función $y = |x^2 - 1|$.

70. Trace la gráfica de la función $y = \sqrt{|x|}$.

Elipses

En los ejercicios 71-76 se dan las ecuaciones de elipses en forma general; cambie cada ecuación a la forma estándar y trace la gráfica de la elipse.

71. $9x^2 + 25y^2 = 225$

72. $16x^2 + 7y^2 = 112$

73. $3x^2 + (y - 2)^2 = 3$

74. $(x + 1)^2 + 2y^2 = 4$

75. $3(x - 1)^2 + 2(y + 2)^2 = 6$

76. $6\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + 9\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 54$

77. Escriba una ecuación para la elipse $(x^2/16) + (y^2/9) = 1$ desplazada 4 unidades hacia la izquierda y 3 unidades hacia arriba. Trace la gráfica de la elipse e identifique su centro y su eje mayor.

78. Escriba una ecuación para la elipse $(x^2/4) + (y^2/25) = 1$ desplazada 3 unidades hacia la derecha y 2 unidades hacia abajo. Trace la gráfica de la elipse e identifique su centro y su eje mayor.

Funciones pares e impares

79. Suponga que f es una función par, g es una función impar y ambas, f y g están definidas para todo número real $\mathbb{R}$. ¿Cuáles de las siguientes funciones (de estar definidas) son pares? ¿Cuáles son impares?

a. fg **b.** f/g **c.** g/f

d. $f^2 = ff$ **e.** $g^2 = gg$ **f.** $f \circ g$

g. $g \circ f$ **h.** $f \circ f$ **i.** $g \circ g$

80. ¿Una función puede ser par e impar al mismo tiempo? Justifique su respuesta.

T **81.** (*Continuación del ejemplo 1*) Trace las gráficas de las funciones $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \sqrt{1 - x}$ junto con su (a) suma, (b) producto, (c) sus dos restas, (d) sus dos cocientes, en el mismo plano cartesiano.

T **82.** Sean $f(x) = x - 7$ y $g(x) = x^2$. Trace las gráficas de f y g junto con $f \circ g$ y $g \circ f$.

1.6 Funciones trigonométricas

En esta sección se revisan las funciones trigonométricas básicas. Las funciones trigonométricas son importantes, porque son periódicas o se repiten y, por lo tanto, éstas modelan muchos procesos naturales periódicos.

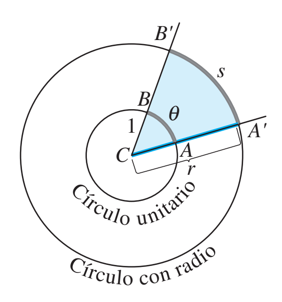


FIGURA 1.63 La medida en radianes de un ángulo ACB del arco θ es la longitud AB en el círculo unitario con centro en C. El valor de θ se puede encontrar a partir de cualquier otro círculo, como la razón s/r. Así, $s = r\theta$ es la longitud de arco en un círculo con radio r cuando θ está medido en radianes.

Medida en radianes

En navegación y astronomía los ángulos se miden en grados, pero en el cálculo es mejor usar las unidades llamadas *radianes*, debido a que simplifican los cálculos.

La **medida en radianes** del ángulo ACB en el centro del círculo unitario (figura 1.63), es igual a la longitud del arco que corta ACB del círculo unitario. En la figura 1.63 se muestra que $s = r\theta$ es la **longitud del arco** de un círculo con radio r cuando el ángulo subtendido θ que produce el arco se mide en radianes.

Como la circunferencia del círculo es 2π y una revolución completa del círculo equivale a 360º, la relación entre radianes y grados está dada por

$$\pi \text{ radianes} = 180°.$$

Por ejemplo, en radianes, 45º equivalen a

$$45 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{4} \text{ rad},$$

y $\pi/6$ radianes es

$$\frac{\pi}{6} \cdot \frac{180}{\pi} = 30°.$$

Fórmulas de conversión

1 grado $= \frac{\pi}{180}$ ($\approx$0.02) radianes

Para convertir grados a radianes: multiplicar por $\frac{\pi}{180}$

1 radianes $= \frac{180}{\pi}$ ($\approx$57) grados

Para convertir radianes a grados: multiplicar por $\frac{180}{\pi}$

En la figura 1.64 se muestran los ángulos de dos triángulos muy usuales en ambas medidas.

Se dice que un ángulo en el plano xy está en **posición estándar** o canónica si su vértice se ubica en el origen y su rayo (lado) inicial está a lo largo del eje x positivo (figura 1.65). A los ángulos medidos en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj desde el eje x positivo, se les asignan medidas positivas; a los ángulos medidos en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj se les asignan medidas negativas.

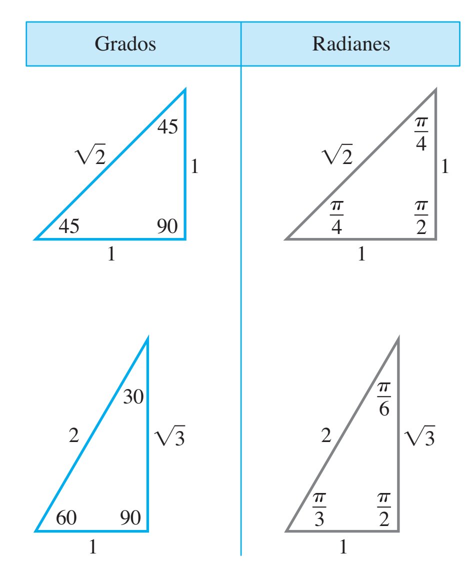


FIGURA 1.64 Los ángulos de dos triángulos cualesquiera, en grados y en radianes.

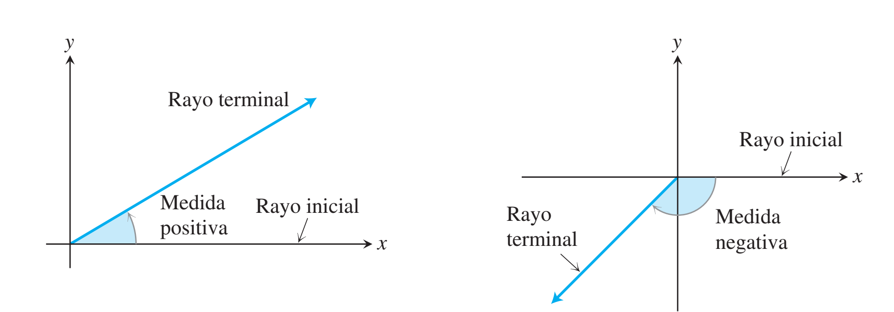


FIGURA 1.65 Ángulos en la posición estándar en el plano xy.

Cuando se usan ángulos para describir rotaciones en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, nuestras medidas pueden ser arbitrariamente mayores que 2π radianes o 360º. De manera similar, los ángulos que describen rotaciones en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj pueden tener medidas negativas de cualquier tamaño (figura 1.66).

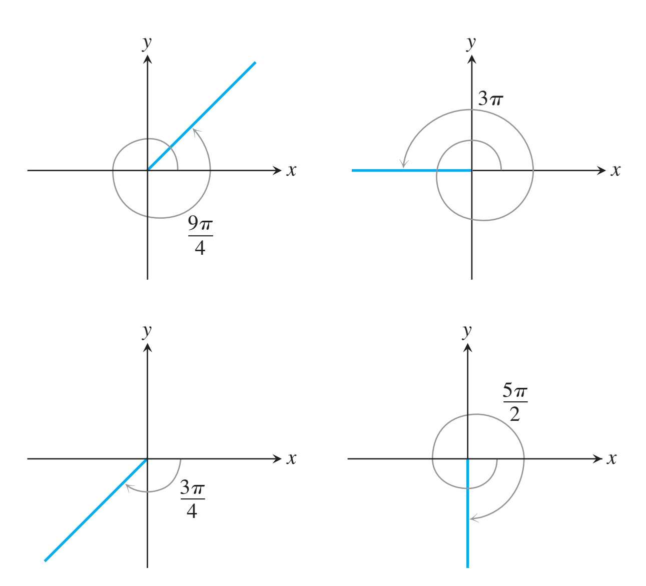
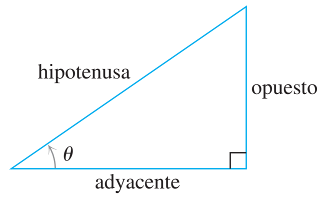


FIGURA 1.66 Medidas en radianes distintas de cero; pueden ser positivas o negativas, y pueden ir más allá de 2π .



$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} \qquad \csc\theta = \frac{\text{hip}}{\text{op}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hip}}{\text{ady}}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{op}}{\text{ady}} \qquad \cot\theta = \frac{\text{ady}}{\text{op}}$$

FIGURA 1.67 Razones trigonométricas de un ángulo agudo.

> **Convención para ángulos: uso de radianes**
> A partir de este momento, en este libro se dará por sentado que todos los ángulos están medidos en radianes, a menos que se indique explícitamente que se trata de grados o alguna otra unidad. Cuando hablemos del ángulo $\pi/3$, nos estaremos refiriendo a $\pi/3$ radianes (que equivalen a 60º), y no a $\pi/3$ grados. Cuando resuelva sus ejercicios de cálculo, mantenga la calculadora en modo de radianes.

Las seis funciones trigonométricas básicas

Probablemente usted conoce la definición de las funciones trigonométricas de un ángulo agudo en términos de los lados de un triángulo rectángulo (figura 1.67). A continuación ampliaremos esta definición a ángulos obtusos y negativos. Para ello, colocaremos primero el ángulo en posición estándar (canónica) en un círculo con radio r; después definiremos las funciones trigonométricas en términos de las coordenadas del punto $P(x, y)$ donde el lado terminal del ángulo interseca el círculo (figura 1.68).

$$\textbf{seno:}\quad \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} \qquad \textbf{cosecante:}\quad \csc\theta = \frac{r}{y}$$

$$\textbf{coseno:}\quad \cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \textbf{secante:}\quad \sec\theta = \frac{r}{x}$$

$$\textbf{tangente:}\quad \tan\theta = \frac{y}{x} \qquad \textbf{cotangente:}\quad \cot\theta = \frac{x}{y}$$

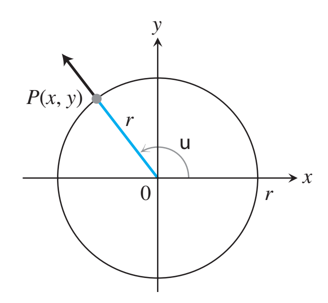


FIGURA 1.68 Las funciones trigonométricas de un ángulo general θ se definen en términos de x, y y r.

Estas definiciones ampliadas coinciden con las definiciones del triángulo rectángulo cuando el ángulo es agudo (figura 1.69).

Tenga en cuenta también las definiciones siguientes, siempre que los cocientes estén definidos.

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$$

Como puede ver, $\tan\theta$ y $\sec\theta$ no están definidas si $x = 0$. Esto significa que no están definidas si θ es $\pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \ldots$. De forma análoga, $\cot\theta$ y $\csc\theta$ no están definidos para valores de θ para los que $y = 0$, es decir, $\theta = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$.

Los valores exactos de estas razones trigonométricas para algunos ángulos pueden deducirse de los triángulos de la figura 1.64. Por ejemplo,

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \qquad \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{\pi}{4} = 1 \qquad \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

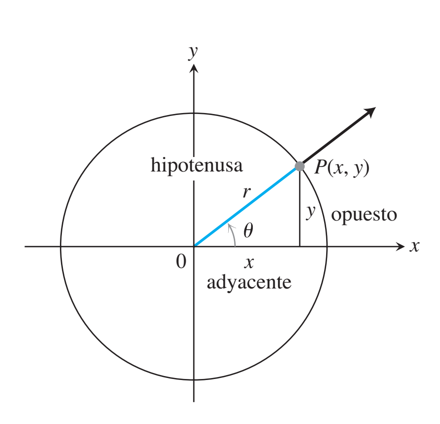


FIGURA 1.69 Las definiciones nueva y anterior coinciden para ángulos agudos.

La regla TOSE TACO (figura 1.70) es útil para recordar cuáles de las funciones trigonométricas son positivas o negativas. Por ejemplo, en el triángulo en la figura 1.71 vemos que

$$\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \qquad \tan\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}.$$

Usando un método similar, determinamos los valores de $\operatorname{sen}\theta$, $\cos\theta$, y $\tan\theta$ que se muestran en la tabla 1.4.

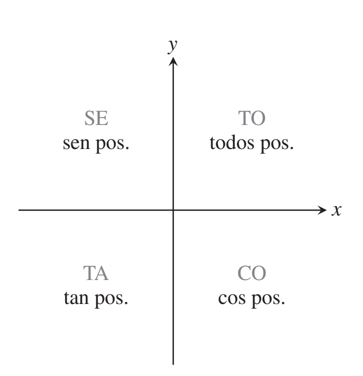


FIGURA 1.70 La regla TOSE TACO nos permite recordar qué funciones trigonométricas son positivas en cada cuadrante.

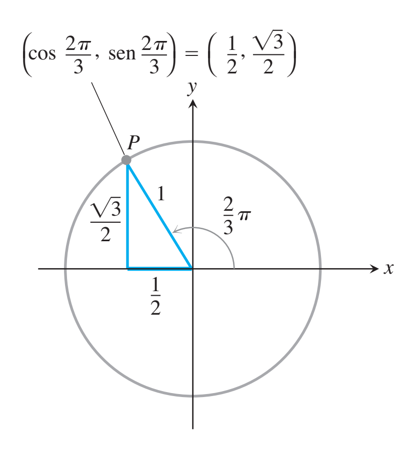


FIGURA 1.71 El triángulo para calcular el seno y el coseno de $2\pi/3$ radianes. La longitud de los lados se deriva de la geometría de triángulos rectángulos.

Casi todas las calculadoras y computadoras están listas para proporcionar los valores de las funciones trigonométricas de ángulos dados, ya sea en radianes o en grados.

TABLA 1.4 Valores de sen θ, cos θ y tan θ para valores seleccionados de θ

Grados	**−180**	**−135**	**−90**	**−45**	**0**	**30**	**45**	**60**	**90**	**120**	**135**	**150**	**180**	**270**	**360**
θ (radianes)	$-\pi$	$\frac{-3\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sen θ	0	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	-1	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
cos θ	-1	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
tan θ	0	1		-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	0		0

EJEMPLO 1 Encontrar los valores de las funciones trigonométricas

Si $\tan\theta = 3/2$ y $0 < \theta < \pi/2$, encuentre los valores de las otras cinco funciones trigonométricas de θ.

Solución A partir de $\tan\theta = 3/2$, construimos el triángulo rectángulo de la figura 1.72, con altura 3 (cateto opuesto) y base 2 (cateto adyacente). El teorema de Pitágoras nos da la longitud de la hipotenusa, $\sqrt{4+9} = \sqrt{13}$. Una vez que encontramos los valores de cada lado del triángulo, escribimos los valores de las otras cinco funciones trigonométricas:

$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{13}}, \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{3}{\sqrt{13}}, \qquad \sec\theta = \frac{\sqrt{13}}{2}, \qquad \csc\theta = \frac{\sqrt{13}}{3}, \qquad \cot\theta = \frac{2}{3}$$

■

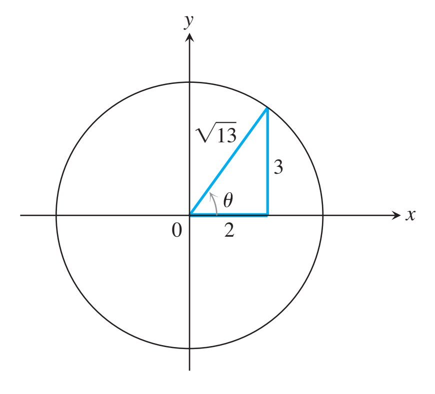


FIGURA 1.72 El triángulo para calcular las funciones trigonométricas del ejemplo 1.

Periodicidad y gráficas de las funciones trigonométricas

Cuando un ángulo de medida θ y un ángulo que mide $\theta + 2\pi$ están en posición estándar, sus lados terminales coinciden. Por lo tanto, las funciones trigonométricas de los dos ángulos tienen los mismos valores:

$$\cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta \qquad \operatorname{sen}(\theta + 2\pi) = \operatorname{sen}\theta \qquad \tan(\theta + 2\pi) = \tan\theta$$
$$\sec(\theta + 2\pi) = \sec\theta \qquad \csc(\theta + 2\pi) = \csc\theta \qquad \cot(\theta + 2\pi) = \cot\theta$$

De manera similar, $\cos(\theta - 2\pi) = \cos\theta$, $\operatorname{sen}(\theta - 2\pi) = \operatorname{sen}\theta$, y así sucesivamente. Para describir este comportamiento repetitivo, decimos que las seis funciones trigonométricas básicas son *periódicas*.

> **DEFINICIÓN Función periódica**
>
> Una función $f(x)$ es **periódica** si existe un número positivo p tal que $f(x + p) = f(x)$ para todo valor de x. El menor de los posibles valores de p es el **periodo** de f.

Cuando graficamos funciones trigonométricas en el plano cartesiano, por lo general denotamos la variable independiente mediante x en lugar de hacerlo con θ. Vea la figura 1.73.

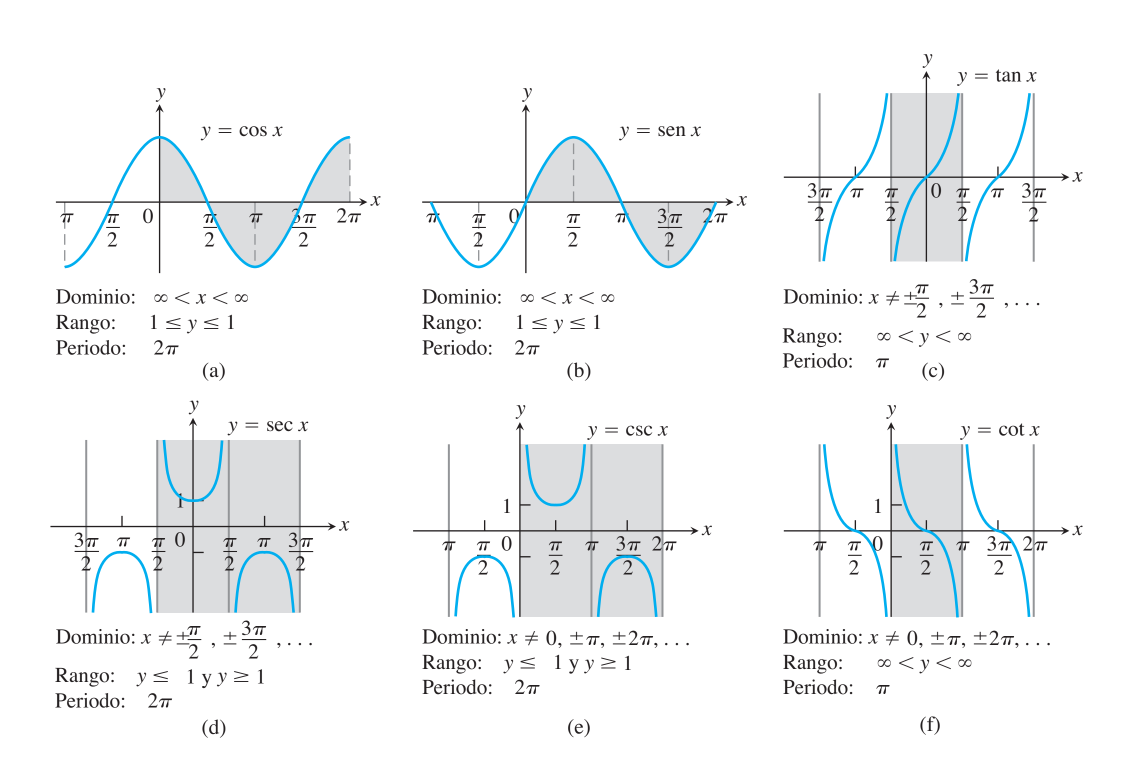


FIGURA 1.73 Las gráficas de las funciones (a) coseno, (b) seno, (c) tangente, (d) secante, (e) cosecante, y (f) cotangente, medidas en radianes. El sombreado en cada función trigonométrica indica su periodicidad.

Periodos de las funciones trigonométricas

Periodo π: $\tan(x + \pi) = \tan x$
$\cot(x + \pi) = \cot x$

Periodo 2π: $\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x$
$\cos(x + 2\pi) = \cos x$
$\sec(x + 2\pi) = \sec x$
$\csc(x + 2\pi) = \csc x$

Como podemos ver en la figura 1.73, las funciones tangente y cotangente tienen periodo $p = \pi$. Las otras cuatro funciones tienen periodo 2π. Las funciones periódicas son importantes, ya que muchos de los comportamientos que se estudian en ciencias son casi periódicos. Uno de los teoremas de cálculo avanzado afirma que todas las funciones periódicas que se usan en la creación de modelos matemáticos pueden escribirse como una combinación algebraica de senos y cosenos. En la sección 11.11 se muestra cómo hacer esto.

En la figura 1.73, las simetrías de las gráficas revelan que las funciones coseno y secante son pares y las otras cuatro funciones son impares:

Pares	**Impares**
$\cos(-x) = \cos x$	$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$
$\sec(-x) = \sec x$	$\tan(-x) = -\tan x$
	$\csc(-x) = -\csc x$
	$\cot(-x) = -\cot x$

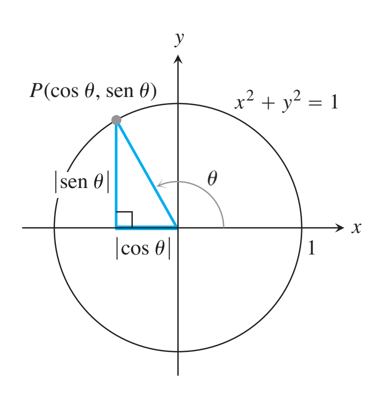


FIGURA 1.74 El triángulo de referencia para un ángulo general θ.

Identidades Trigonométricas

Las coordenadas de cualquier punto $P(x, y)$ en el plano pueden expresarse en términos de la distancia entre el punto y origen, y el ángulo que hace el rayo OP con el eje x positivo (figura 1.69). Como $x/r = \cos\theta$ y $y/r = \operatorname{sen}\theta$, tenemos

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\operatorname{sen}\theta.$$

Cuando $r = 1$ podemos aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo de referencia en la figura 1.74, y obtener la ecuación

$$\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1. \qquad (1)$$

Esta identidad, la más usada en trigonometría, es válida para todos los valores de θ, y es llamada identidad pitagórica. Dividiendo por turnos esta identidad entre $\cos^2\theta$ y $\operatorname{sen}^2\theta$ da por resultado

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta.$$
$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta.$$

Las fórmulas siguientes se satisfacen para todos los ángulos A y B (ejercicios 53 y 54).

Fórmulas para la suma de ángulos

$$\cos(A + B) = \cos A\cos B - \operatorname{sen} A\operatorname{sen} B$$
$$\operatorname{sen}(A + B) = \operatorname{sen} A\cos B + \cos A\operatorname{sen} B \qquad (2)$$

Existen fórmulas similares para $\cos(A - B)$ y $\operatorname{sen}(A - B)$ (ejercicios 35 y 36). Todas las identidades trigonométricas que se necesitan en este libro se deducen de las ecuaciones (1) y (2). Por ejemplo, sustituir A y B por θ en las fórmulas de suma da por resultado

Fórmulas para el doble de un ángulo

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta \qquad (3)$$
$$\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

Estas fórmulas se obtienen al combinar las identidades

$$\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1, \qquad \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = \cos 2\theta.$$

Sumamos las dos identidades para obtener $2\cos^2\theta = 1 + \cos 2\theta$ y restamos la segunda de la primera para obtener $2\operatorname{sen}^2\theta = 1 - \cos 2\theta$. Esto da por resultado las identidades siguientes, que son muy útiles en cálculo integral.

Más fórmulas para el doble de un ángulo

$$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \qquad (4)$$

$$\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \qquad (5)$$

La ley de los cosenos

Si a, b y c son los lados de un triángulo ABC, y si θ es el ángulo opuesto a c, entonces

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta. \qquad (6)$$

Esta ecuación se conoce como **ley de los cosenos**.

Para comprender la validez de la ley, podemos introducir ejes coordenados con el origen en C y el eje x positivo a lo largo de un lado del triángulo, como en la figura 1.75. Las coordenadas de A son $(b, 0)$; las coordenadas de B son $(a\cos\theta, a\operatorname{sen}\theta)$. El cuadrado de la distancia entre A y B es, por lo tanto,

$$\begin{aligned} c^2 &= (a\cos\theta - b)^2 + (a\operatorname{sen}\theta)^2 \\ &= a^2\underbrace{(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)}_{1} + b^2 - 2ab\cos\theta \\ &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta. \end{aligned}$$

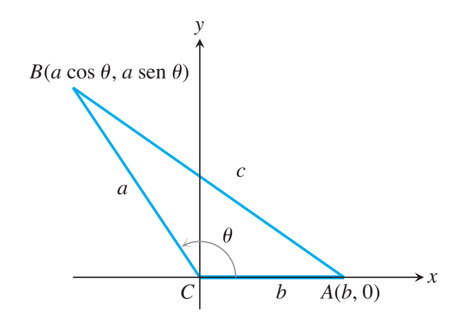
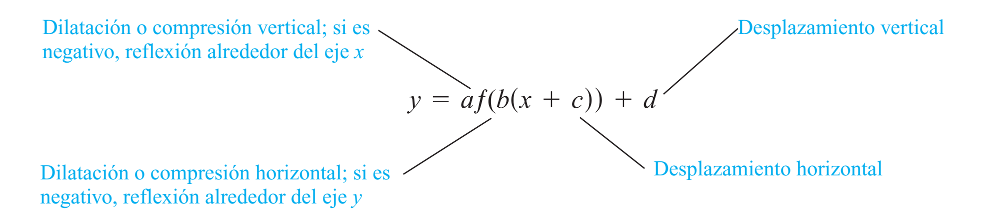


FIGURA 1.75 El cuadrado de la distancia entre A y B da la ley de los cosenos.

La ley de los cosenos generaliza el teorema de Pitágoras. Si $\theta = \pi/2$, entonces, $\cos\theta = 0$ y $c^2 = a^2 + b^2$.

Transformaciones de las gráficas trigonométricas

Las reglas de desplazamiento, dilatación, compresión y reflexión de la gráfica de una función se aplican también a las funciones trigonométricas. El diagrama siguiente le recordará los parámetros de control.



EJEMPLO 2 Modelo de la temperatura en Alaska

Los constructores de un oleoducto en Alaska usaron un forro aislante para evitar que el calor de la tubería derritiera el suelo congelado permanentemente debajo de él. Para diseñar el forro fue necesario tomar en cuenta la variación de la temperatura del aire durante el año. La variación fue representada en los cálculos mediante una **función senoidal** o **senusoide** de la forma

$$f(x) = A \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{B}(x - C)\right] + D,$$

En donde $|A|$ es la *amplitud*, $|B|$ es el *periodo*, C es el *desplazamiento horizontal*, y D es el *desplazamiento vertical* (figura 1.76).

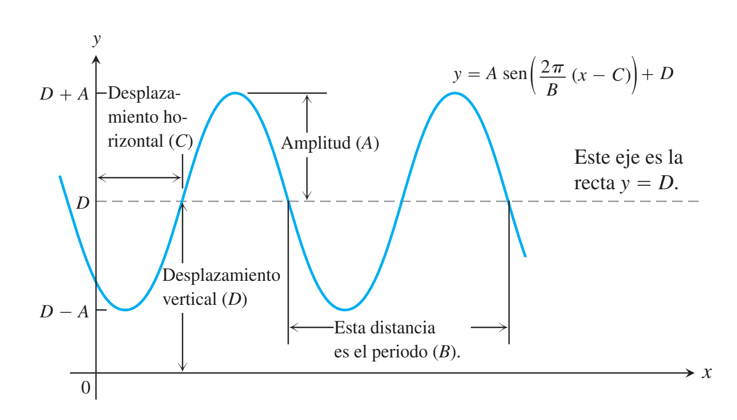


FIGURA 1.76 La curva seno $y = A \operatorname{sen}[(2\pi/B)(x - C)] + D$, con A, B, C y D positivos (ejemplo 2).

En la figura 1.77 se muestra cómo usar esta función para representar los datos sobre la temperatura. En ella se han graficado las temperaturas medias diarias del aire en Fairbanks, Alaska, de acuerdo con los registros del Servicio Nacional Meteorológico de 1941 a 1970. La función senoidal que se usó para ajustar los datos es

$$f(x) = 37 \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{365}(x - 101)\right] + 25,$$

En donde f es la temperatura en grados Fahrenheit, y x es el número de días transcurridos desde el inicio del año. Como veremos en la sección siguiente, el ajuste, obtenido mediante la regresión senoidal en una calculadora o computadora, logra reflejar muy bien la tendencia de los datos.

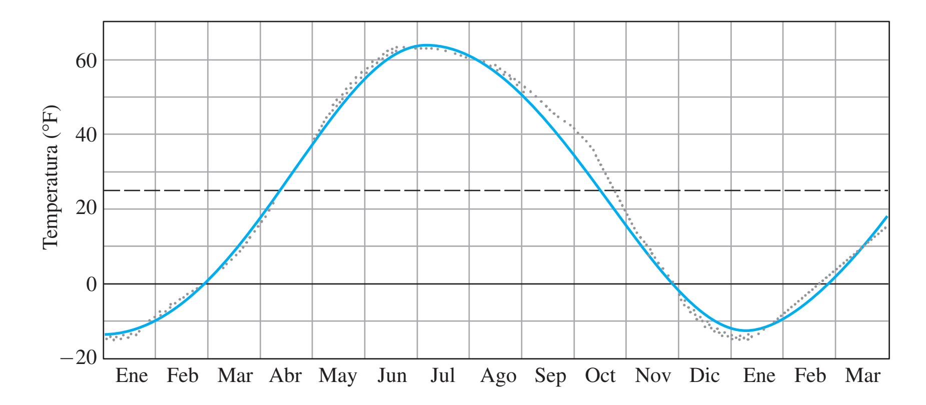


FIGURA 1.77 Media normal de las temperaturas del aire para Fairbanks, Alaska, trazados como puntos de datos (en color gris). La función seno (en color azul) que los aproxima es

$$f(x) = 37 \operatorname{sen}[(2\pi/365)(x - 101)] + 25.$$

EJERCICIOS 1.6

Radianes, grados y arcos circulares

1. En un círculo con radio de 10 m, ¿cuál es la longitud de un arco que subtiende un ángulo central de (a) $4\pi/5$ radianes? ¿Cuál es su longitud si el ángulo central es de (b) 110º?
2. Un ángulo central en un círculo con radio de 8 está subtendido por un arco cuya longitud es de 10π. Determine la medida del ángulo en radianes y en grados.
3. Se quiere construir un ángulo de 80º haciendo un arco en el perímetro de un disco de 12 pulgadas de diámetro, y dibujando rectas de los extremos del arco al centro del disco. ¿De qué longitud debe ser el arco, redondeando a décimos de pulgada?
4. Si una llanta de 1 m de diámetro se rueda hacia delante 30 cm sobre el piso, ¿ qué ángulo girará la llanta? Dé su respuesta en radianes (redondeando al décimo más cercano) y en grados (redondeando al grado más cercano).

Evaluación de funciones trigonométricas

5. Copie la siguiente tabla de valores para θ en radianes y complete los valores para cada función trigonométrica. Si la función no está definida en un ángulo dado, escriba "IND". No utilice calculadora ni tablas.

θ	$-\pi$	$-2\pi/3$	0	$\pi/2$	$3\pi/4$
$\operatorname{sen}\theta$					
$\cos\theta$					
$\tan\theta$					
$\cot\theta$					
$\sec\theta$					
$\csc\theta$					

6. Copie la siguiente tabla de valores para θ en radianes y complete los valores para cada función trigonométrica. Si la función no está definida en un ángulo dado, escriba "IND". No utilice calculadora ni tablas.

θ	$-3\pi/2$	$-\pi/3$	$-\pi/6$	$\pi/4$	$5\pi/6$
$\operatorname{sen}\theta$					
$\cos\theta$					
$\tan\theta$					
$\cot\theta$					
$\sec\theta$					
$\csc\theta$					

En los ejercicios 7-12, una de las funciones sen x, cos x y tan x está dada. Encuentre las otras dos si x está en el intervalo indicado.

7. $\operatorname{sen} x = \frac{3}{5}, \quad x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$
8. $\tan x = 2, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
9. $\cos x = \frac{1}{3}, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$
10. $\cos x = -\frac{5}{13}, \quad x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$
11. $\tan x = \frac{1}{2}, \quad x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$
12. $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}, \quad x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$

Gráficas de funciones trigonométricas

Trace las gráficas de las funciones trigonométricas dadas de los ejercicios del 13-22. ¿Cuál es el periodo de cada función?

13. sen $2x$
14. sen $(x/2)$

15. $\cos \pi x$

16. $\cos \dfrac{\pi x}{2}$

17. $-\operatorname{sen} \dfrac{\pi x}{3}$

18. $-\cos 2\pi x$

19. $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

20. $\operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

21. $\operatorname{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + 1$

22. $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) - 1$

Trace las gráficas de las funciones trigonométricas dadas de los ejercicios del 23-26 en el plano *ts* (*t* eje horizontal, *s* eje vertical). ¿Cuál es el periodo de cada función? ¿Qué tipo de simetrías tienen las gráficas?

23. $s = \cot 2t$

24. $s = -\tan \pi t$

25. $s = \sec\left(\dfrac{\pi t}{2}\right)$

26. $s = \csc\left(\dfrac{t}{2}\right)$

T **27.** **a.** Grafique $y = \cos x$ y $y = \sec x$ en el mismo plano cartesiano para $-3\pi/2 \leq x \leq 3\pi/2$. Comente el comportamiento de sec *x* en relación con los signos y valores de cos *x*.

b. Grafique $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \csc x$ en el mismo plano cartesiano para $-\pi \leq x \leq 2\pi$. Comente el comportamiento de csc *x* en relación con los signos y valores de sen *x*.

T **28.** Grafique $y = \tan x$ y $y = \cot x$ en el mismo plano cartesiano para $-7 \leq x \leq 7$. Comente el comportamiento de cot *x* en relación con los signos y valores de tan *x*.

29. Grafique $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \lfloor \operatorname{sen} x \rfloor$ en el mismo plano cartesiano. ¿Cuáles son el dominio y el rango de $\lfloor \operatorname{sen} x \rfloor$?

30. Grafique $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \lceil \operatorname{sen} x \rceil$ en el mismo plano cartesiano. ¿Cuáles son el dominio y el rango de $\lceil \operatorname{sen} x \rceil$?

Identidades trigonométricas adicionales

Use las fórmulas de suma de ángulos para deducir las identidades de los ejercicios 31-36.

31. $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} x$

32. $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen} x$

33. $\operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos x$

34. $\operatorname{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = -\cos x$

35. $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$ (En el ejercicio 53 se muestra un proceso distinto para obtenerlas).

36. $\operatorname{sen}(A - B) = \operatorname{sen} A \cos B - \cos A \operatorname{sen} B$

37. ¿Qué pasa si tomamos $B = A$ en la identidad $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$? ¿El resultado concuerda con algo que ya conoce?

38. ¿Qué pasa si tomamos $B = 2\pi$ en las fórmulas de suma? ¿El resultado concuerda con algo que ya conoce?

Uso de las fórmulas de suma

En los ejercicios 39-42, exprese la cantidad dada en términos de sen *x* y cos *x*.

39. $\cos(\pi + x)$

40. $\operatorname{sen}(2\pi - x)$

41. $\operatorname{sen}\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right)$

42. $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right)$

43. Evaluar $\operatorname{sen} \dfrac{7\pi}{12}$ como $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

44. Evaluar $\cos \dfrac{11\pi}{12}$ como $\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2\pi}{3}\right)$.

45. Evaluar $\cos \dfrac{\pi}{12}$.

46. Evaluar $\operatorname{sen} \dfrac{5\pi}{12}$.

Uso de las fórmulas para el doble de un ángulo

Encuentre los valores en el ángulo indicado de las siguientes funciones trigonométricas de los ejercicios 47-50.

47. $\cos^2 \dfrac{\pi}{8}$

48. $\cos^2 \dfrac{\pi}{12}$

49. $\operatorname{sen}^2 \dfrac{\pi}{12}$

50. $\operatorname{sen}^2 \dfrac{\pi}{8}$

Teoría y ejemplos

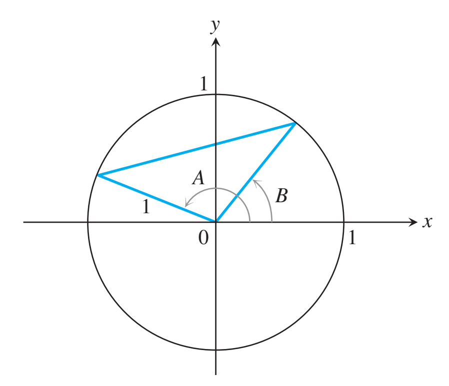
51. **La fórmula de la tangente de una suma** La fórmula estándar para la tangente de la suma de dos ángulos es

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}.$$

Aplicando las identidades de senos y cosenos encuentre esta identidad trigonométrica para la tangente.

52. (*Continuación del ejercicio 51*). Aplique la identidad trigonométrica dada en el ejercicio 51 para encontrar $\tan(A - B)$.

53. Aplique la ley de los cosenos al triángulo de la figura siguiente a fin de obtener la fórmula para $\cos(A - B)$.



54. **a.** Aplique la fórmula para $\cos(A - B)$ a la identidad $\operatorname{sen} \theta = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$ a fin de obtener la fórmula de suma para $\operatorname{sen}(A + B)$.

b. Use la identidad $\cos(A + B)$ sustituyendo $-B$ por *B* en la identidad para obtener $\cos(A - B)$ de manera diferente a como se obtuvo en el ejercicio 35.

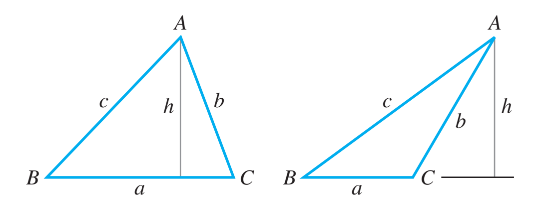
55. Un triángulo tiene lados $a = 2$ y $b = 3$ y el ángulo $C = 60°$. Encuentre la longitud del lado *c*.

56. Un triángulo tiene lados $a = 2$ y $b = 3$ y el ángulo $C = 40°$. Encuentre la longitud del lado c.

57. La ley de los senos La *ley de los senos* afirma que si a, b, y c son los lados opuestos a los ángulos A, B y C en un triángulo, entonces

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}.$$

Use las siguientes figuras y, si lo requiere, la identidad $\operatorname{sen}(\pi - \theta) = \operatorname{sen}\theta$, para obtener la ley de senos.



58. Un triángulo tiene lados $a = 2$ y $b = 3$ y el ángulo $C = 60°$ (como en el ejercicio 55). Encuentre el seno del ángulo B usando la ley de los senos.

T **59.** Un triángulo tiene lados $c = 2$ y el ángulo $A = \pi/4$ y $B = \pi/3$. Encuentre la longitud del lado a opuesto a A.

60. La aproximación sen $x \approx x$ Siempre es útil saber que, cuando x se mide en radianes, $\operatorname{sen} x \approx x$ para valores numéricamente pequeños de x. En la sección 3.8 veremos por qué es válida esta aproximación. El error de aproximación es menor que 1 en 5000 si $|x| < 0.1$.

a. Con su calculadora graficadora en modo de radianes, trace juntas las gráficas de $y = \operatorname{sen} x$ y $y = x$ en una ventana alrededor del origen. ¿Explique qué observa conforme x se acerca al origen?

b. Con su calculadora graficadora en modo de grados, trace juntas las gráficas de $y =$ sen y $y = x$ en una ventana alrededor del origen. ¿Qué tan diferente es la figura obtenida en el modo de radianes?

c. Una verificación rápida para modo de radianes. Si su calculadora está en modo de radianes, evalúe sen x en un valor de x cercano al origen, para verificar digamos $x = 0.1$. Si $\operatorname{sen} x \approx x$, significa que su calculadora está en modo de radianes; si no obtiene tal aproximación, no lo está. Inténtelo.

Curvas senoidales generales

Para

$$f(x) = A \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{B}(x - C)\right) + D,$$

identifique A, B, C y D para las funciones seno de los ejercicios 61-64, y trace sus gráficas (vea la figura 1.76).

61. $y = 2\operatorname{sen}(x + \pi) - 1$

62. $y = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(\pi x - \pi) + \frac{1}{2}$

63. $y = -\frac{2}{\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \frac{1}{\pi}$

64. $y = \frac{L}{2\pi}\operatorname{sen}\frac{2\pi t}{L}, \quad L > 0$

65. Temperatura en Fairbanks, Alaska Encuentre **(a)** la amplitud, **(b)** el periodo, **(c)** el desplazamiento horizontal, y **(d)** el desplazamiento vertical de la función seno dada en forma estándar

$$f(x) = 37\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{365}(x - 101)\right) + 25.$$

66. Temperatura en Fairbanks, Alaska Use la ecuación del ejercicio 65 para calcular las respuestas de las siguientes preguntas acerca de las temperaturas en Fairbanks, Alaska, cuya gráfica se muestra en la figura 1.77. Suponga que el año tiene 365 días exactos.

a. ¿Cuáles son las temperaturas medias más alta y más baja que se muestran?

b. ¿Cuál es el promedio de las temperaturas medias más alta y más baja que se muestran? ¿Explique por qué este promedio representa un desplazamiento vertical de la función?

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

En los ejercicios 67-70, usted investigará que pasa gráficamente con la función seno dada en forma estándar

$$f(x) = A\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{B}(x - C)\right) + D$$

a medida que cambia los valores de las constantes A, B, C y D. Use un software matemático o una calculadora graficadora a fin de realizar los procedimientos correctos para responder los siguientes ejercicios.

67. El periodo B Fije las constantes $A = 3$, $C = D = 0$.

a. Grafique $f(x)$ para los valores $B = 1, 3, 2\pi, 5\pi$ en el intervalo $-4\pi \le x \le 4\pi$. Describa qué le sucede a la gráfica de la función seno dada en forma estándar conforme aumenta el periodo.

b. Explique, ¿qué le pasa a la gráfica para valores negativos de B? Inténtelo con $B = -3$ y $B = -2\pi$.

68. El desplazamiento horizontal C Fije las constantes $A = 3$, $B = 6$, $D = 0$.

a. Grafique $f(x)$ para los valores $C = 0, 1$, sobre el intervalo $-4\pi \le x \le 4\pi$. Describa qué le sucede a la gráfica de la función seno dada en forma estándar conforme C aumenta dándole valores positivos.

b. ¿Explique qué le pasa a la gráfica para valores negativos de C?

c. ¿Cuál es el menor valor positivo que debemos asignar a C, de manera que la gráfica no presente desplazamiento horizontal? Confirme su respuesta graficándola.

69. El desplazamiento vertical D Fije las constantes $A = 3$, $B = 6$, $C = 0$.

a. Grafique $f(x)$ para los valores $D = 0$, 1 y 3 sobre el intervalo $-4\pi \le x \le 4\pi$. Describa qué le sucede a la gráfica de la función seno dada conforme D aumenta para valores positivos.

b. ¿Explique qué le sucede a la gráfica para valores negativos de D?

70. La amplitud A Fije las constantes $B = 6$, $C = D = 0$.

a. Describa qué le sucede a la gráfica de la función seno dada conforme A aumenta para valores positivos. Confirme su respuesta graficando $f(x)$ para los valores $A = 1, 5$, y 9.

b. ¿Explique qué le sucede a la gráfica para valores negativos de A?

1.7 Graficación con calculadoras y computadoras

Las calculadoras graficadoras y las computadoras con software para graficación nos permiten trazar con gran precisión las gráficas de funciones muy complicadas. Muchas de estas funciones no pueden graficarse fácilmente de otra manera. Sin embargo, hay que tener cuidado cuando usamos tales dispositivos para graficación, debido a los problemas que abordaremos en esta sección. En el capítulo 4 veremos de qué manera el cálculo puede ayudarnos a tener la certeza de que estamos tomando en consideración todas las características importantes de la gráfica de una función.

Ventanas de graficación

Cuando se utiliza una calculadora graficadora o una computadora como herramienta de graficación, una parte de la gráfica se despliega en la **pantalla** o **ventana** rectangular de estos dispositivos. Muchas veces, esta ventana predeterminada ofrece una imagen incompleta o distorsionada de la gráfica. Se usa el término *ventana cuadrada* cuando las unidades o escalas en ambos ejes son iguales. Este término no implica que la ventana en sí tenga forma cuadrada (en general, las pantallas de visualización son rectangulares); lo que significa en realidad es que las unidades x son iguales a las unidades y.

Al desplegarse en la ventana predeterminada, es posible que la escala de las unidades x de la gráfica sea diferente al de las unidades y para que ésta se ajuste al tamaño de la pantalla. Las características de la ventana de visualización que se empleará se determinan especificando los valores mínimo y máximo de las variables independiente y dependiente. Esto es, se especifica un intervalo para x $a \leq x \leq b$ y un rango para y $c \leq y \leq d$. La computadora elige cierto número de valores equidistantes entre a y b. El procedimiento comienza con el primer valor para x; si dicho valor está dentro del dominio de la función f que se está graficando, y si $f(x)$ está dentro del rango $[c, d]$, se grafica el punto $(x, f(x))$. Si x está fuera del dominio de f o $f(x)$ está fuera del rango especificado $[c, d]$, la máquina cambia al siguiente valor para x, ya que no puede graficar el punto $(x, f(x))$ si ese es el caso. La calculadora o computadora grafica de esta manera una gran cantidad de puntos $(x, f(x))$ y calcula la curva que representa la gráfica dibujando un pequeño segmento entre cada par de puntos graficado, tal como lo haríamos a mano. Por lo general, los puntos adyacentes están tan cercanos entre sí que la representación gráfica tiene la apariencia de una curva suave. Sin embargo, las gráficas podrían no salir muy bien mediante este procedimiento debido a varios problemas comunes que ilustraremos con los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 1 Elegir las características de la ventana de visualización

Grafique la función $f(x) = x^3 - 7x^2 + 28$ en cada uno de las siguientes tipos de ventanas de pantalla:

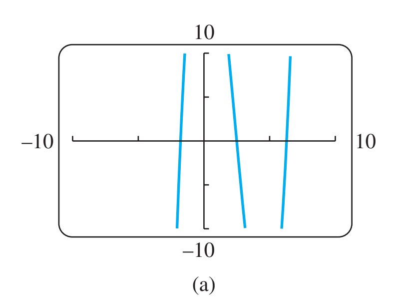
(a) $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$ **(b)** $[-4, 4]$ por $[-50, 10]$ **(c)** $[-4, 10]$ por $[-60, 60]$

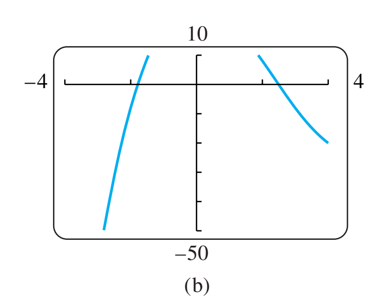
Solución

(a) Seleccionamos $a = -10$, $b = 10$, $c = -10$, y $d = 10$ para especificar el intervalo del dominio de los valores de x y el rango de los valores de y con el fin de determinar el tipo de ventana. La gráfica resultante se muestra en la figura 1.78a. Parece que la ventana corta las partes inferior y superior de la gráfica, y que el intervalo de valores de x es demasiado grande. Intentemos con el siguiente tipo de ventana.

(b) Ahora vemos más rasgos de la gráfica (figura 1.78b), pero falta la parte superior de la misma y necesitamos tener una imagen más completa hacia la derecha de $x = 4$. Tal vez el siguiente tipo de ventana nos ayude a lograrlo.

(c) En la figura 1.78c se muestra la gráfica en esta nueva ventana. Observe que tenemos una imagen más completa de la gráfica en esta ventana, lo que nos permite decir que





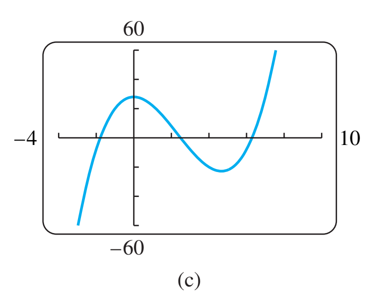


FIGURA 1.78 La gráfica de $f(x) = x^3 - 7x^2 + 28$ ilustrada en ventanas de visualización de diferentes tamaños (ejemplo 1).

se trata de una gráfica razonable de un polinomio de tercer grado. La elección correcta de las características de la ventana o pantalla es un proceso de prueba y error, en el que se hace necesario resolver las dificultades que vayan surgiendo.

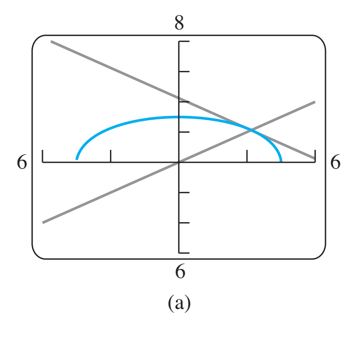
EJEMPLO 2 Ventana cuadrada

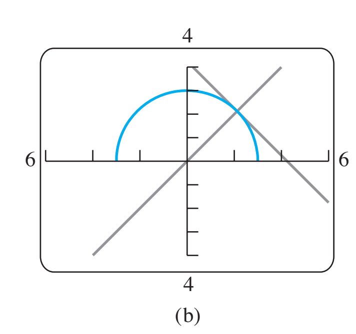
Cuando se despliega una gráfica, la escala de las unidades x puede diferir de la escala de las unidades y, como en las gráficas que se muestran en las figuras 1.78b y 1.78c. La imagen resultante está distorsionada y puede ser engañosa. Para evitarlo, es posible hacer que la ventana tome una forma cuadrada comprimiendo o estirando las unidades en un eje para igualar la escala en el otro, con lo cual se obtendría la gráfica correcta. Muchos sistemas tienen funciones integradas que permiten lograr la ventana "cuadrada". Si el que usted utiliza no las incluye, tendrá que hacer algunos cálculos y especificar manualmente el tamaño de la pantalla para obtener una ventana cuadrada, o pronosticar de alguna forma cómo se vería la imagen real.

En la figura 1.79a se muestran las gráficas de dos rectas perpendiculares $y = x$ y $y = -x + 3\sqrt{2}$, junto con el semicírculo y una de ellas tangente a un punto del semicírculo $y = \sqrt{9 - x^2}$, en una ventana con medidas $[-6, 6]$ por $[-6, 8]$ y que, por lo tanto, no es cuadrada. Observe la distorsión. Las rectas no se ven perpendiculares y el semicírculo tiene forma elíptica.

En la figura 1.79b se muestran las gráficas de las mismas funciones en una ventana cuadrada, en donde la escala de las unidades x es igual a la de las unidades y. Observe que la ventana, que ahora mide $[-6, 6]$ por $[-4, 4]$ tiene el mismo eje x en ambas figuras, pero en la última la escala de dicho eje fue comprimida para lograr la ventana cuadrada. La figura 1.79c ofrece una imagen más grande, gracias a la ventana cuadrada de $[-3, 3]$ por $[0, 4]$.

Si el denominador de una función racional es cero en algún valor de x dentro de la ventana, en una calculadora graficadora o un software para graficación por computadora





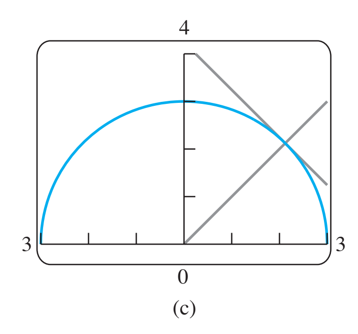


FIGURA 1.79 Gráficas de las rectas perpendiculares $y = x$ y $y = -x + 3\sqrt{2}$, y el semicírculo $y = \sqrt{9 - x^2}$, en (a) una ventana no cuadrada, y (b) y (c) pantallas cuadradas (ejemplo 2).

podría producir un segmento de recta con inclinación casi vertical de arriba a abajo de la pantalla, como en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3 Graficar una función racional

Grafique la función de $y = \dfrac{1}{2 - x}$.

Solución La figura 1.80a muestra la gráfica en la ventana cuadrada predeterminada de un software para graficación, cuyas medidas son $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$. Observe la línea recta vertical en $x = 2$. En realidad, este segmento no pertenece a la gráfica, ya que $x = 2$ no está en el dominio de la función. Utilizando un procedimiento de prueba y error podemos eliminar la recta cambiando la escala para lograr una ventana de visualización más pequeña, de $[-6, 6]$ por $[-4, 4]$, con lo cual obtendremos una gráfica más confiable (figura 1.80b).

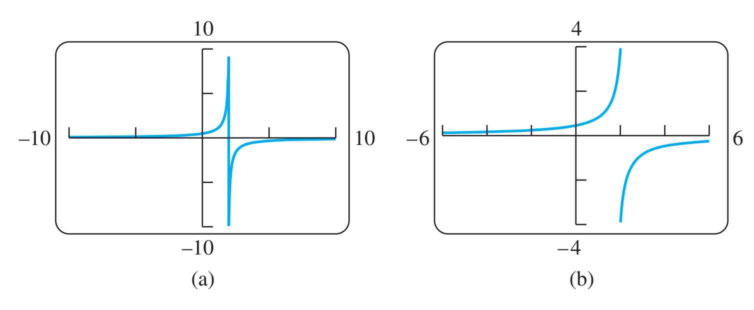


FIGURA 1.80 Gráficas de la función $y = \dfrac{1}{2 - x}$ (ejemplo 3).

Algunas veces la gráfica de una función trigonométrica oscila muy rápido. Cuando una calculadora graficadora o un software de computadora gráfica traza y conecta los puntos de la gráfica, muchos de los puntos máximos y mínimos se pueden perder de hecho se pierden, con lo cual la gráfica resultante es muy engañosa.

EJEMPLO 4 Graficar una función que oscila con rapidez

Grafique la función de $f(x) = \operatorname{sen} 100x$.

Solución En la figura 1.81a se muestra la gráfica de f en una ventana de $[-12, 12]$ por $[-1, 1]$. Cómo vemos, la gráfica luce muy extraña, porque la curva seno debe oscilar periódicamente entre –1 y 1. Este comportamiento no es notorio en la figura 1.81a. Para solucionar este problema podríamos probar con una ventana más pequeña, digamos de $[-6, 6]$ por $[-1, 1]$, pero, como se observa en la figura 1.81b, la gráfica no mejora mucho en realidad. La dificultad está en que el periodo de la función trigonométrica $y = \operatorname{sen} 100x$ es muy pequeño, $(2\pi/100 \approx 0.063)$. Si elegimos una ventana mucho más pequeña, de

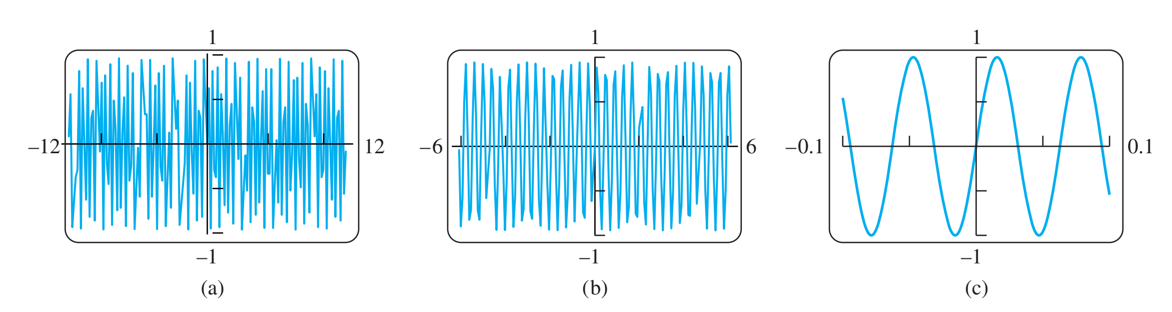


FIGURA 1.81 Gráficas de la función $y = \operatorname{sen} 100x$ en tres ventanas de visualización. Debido a que el periodo es $2\pi/100 \approx 0.063$, la ventana pequeña en (c) muestra mejor el verdadero aspecto de esta función rápidamente oscilante (ejemplo 4).

$[-0.1, 0.1]$ por $[-1, 1]$ obtenemos la gráfica que se muestra en la figura 1.81c. Esta gráfica revela las oscilaciones esperadas de una curva seno dentro de un intervalo pequeño.

EJEMPLO 5 Otra función que oscila con rapidez

Grafique la función de $y = \cos x + \frac{1}{50} \operatorname{sen} 50x$.

Solución En una ventana de $[-6, 6]$ por $[-1, 1]$ la gráfica se parece más a la función coseno, con sólo algunos picos suaves en ella (figura 1.82a). Se obtiene una mejor imagen cuando el tamaño de la ventana se reduce significativamente, a $[-0.6, 0.6]$ por $[0.8, 1.02]$, como se ilustra en la figura 1.82b. Ahora vemos las pequeñas pero rápidas oscilaciones del segundo término, $1/50 \operatorname{sen} 50x$, sumadas con los valores comparativamente grandes de la curva coseno.

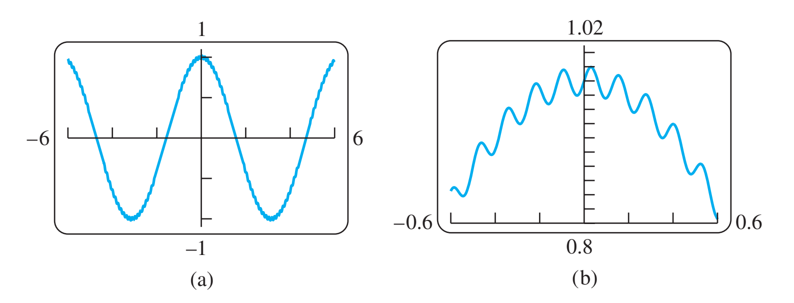


FIGURA 1.82 En (b) vemos un acercamiento de la función $y = \cos x + \frac{1}{50} \operatorname{sen} 50x$ graficada en (a). Resulta claro que el término $\cos x$ domina el segundo término $\frac{1}{50} \operatorname{sen} 50x$, que produce las rápidas oscilaciones a lo largo de la curva coseno (ejemplo 5). ■

EJEMPLO 6 Graficar una función impar con potencia fraccionaria

Grafique la función de $y = x^{1/3}$.

Solución Muchos dispositivos para graficación muestran la gráfica que se ilustra en la figura 1.83a. Cuando la comparamos con la gráfica de $y = x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$ de la figura 1.38, vemos que falta la parte izquierda para $x < 0$. La razón por la que las gráficas difieren,

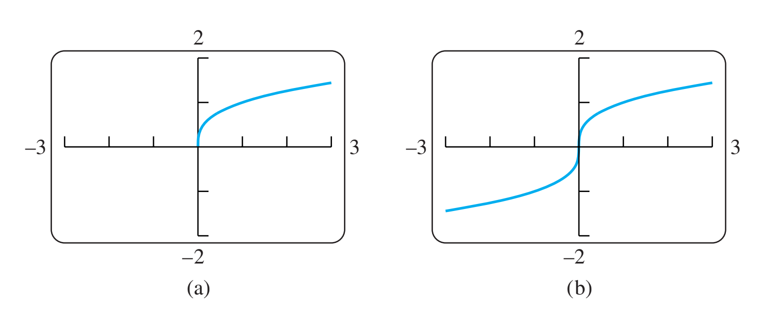


FIGURA 1.83 En (a) se pierde la rama izquierda de la gráfica de $y = x^{1/3}$. En (b) trazamos la gráfica de la función $f(x) = \frac{x}{|x|} \cdot |x|^{1/3}$ obteniendo ambas ramas. (Vea el ejemplo 6).

radica en que muchas calculadoras graficadoras y software para graficación calculan $x^{1/3}$ como $e^{(1/3)\ln x}$. (En el capítulo 7 se estudiarán las funciones exponencial y logarítmica). Y como la función logarítmica no está definida para valores negativos de x, los dispositivos para graficación sólo pueden producir la parte derecha, donde $x > 0$.

Para obtener la imagen completa, que muestre las dos partes, podemos graficar la función

$$f(x) = \frac{x}{|x|} \cdot |x|^{1/3}.$$

Esta función es igual que $x^{1/3}$ excepto en $x = 0$ (donde f no está definida, aunque $0^{1/3} = 0$). En la figura 1.83b se muestra la gráfica de f. ■

Modelado empírico: cómo reflejar la tendencia de los datos recopilados

En el ejemplo 3 de la sección 1.4 verificamos la validez de la hipótesis de Kepler, según la cual el periodo de la órbita planetaria es proporcional a la distancia media entre los planetas y el Sol, elevada a la potencia 3/2. Cuando resulta imposible plantear la hipótesis de una relación entre una variable dependiente y una variable independiente, podemos recopilar datos y tratar de encontrar una curva que se "ajuste" a ellos de manera que se refleje la tendencia del diagrama de dispersión. El procedimiento mediante el cual se trata de encontrar una curva que se ajuste a los datos se conoce como **análisis de regresión**, y a la curva resultante se le llama **curva de regresión**. Una calculadora graficadora o un software para graficación realizan el análisis de regresión buscando una curva que minimice la suma de los cuadrados de las distancias verticales entre los puntos determinados por los datos y la curva. Este método de **mínimos cuadrados** se revisará en la sección de ejercicios 14.7.

Hay varios tipos útiles de curvas de regresión, tales como rectas, potencias, polinomios, exponenciales, logarítmicas y curvas senoidales. Muchas calculadoras graficadoras y programas para graficación por computadora incluyen funciones de análisis de regresión para ajustar una variedad de curvas de regresión típicas. El ejemplo siguiente ilustra el uso de la función de regresión lineal de una calculadora graficadora para ajustar los datos de la tabla 1.5 a una ecuación lineal.

TABLA 1.5 Precio de una estampilla postal

Año x	Costo y
1968	0.06
1971	0.08
1974	0.10
1975	0.13
1977	0.15
1981	0.18
1981	0.20
1985	0.22
1987	0.25
1991	0.29
1995	0.32
1998	0.33
2002	0.37

EJEMPLO 7 Ajustar una recta de regresión

Construya, a partir de los datos de la tabla 1.5, un modelo para determinar el precio de una estampilla postal como función del tiempo. Después de verificar la "validez" del modelo, utilícelo para predecir el precio que tendrá la estampilla en el 2010.

Solución Queremos construir un modelo para determinar el precio de una estampilla postal desde 1968. Hubo dos aumentos en 1981: uno de tres centavos y luego otro de dos centavos. Para poder comparar 1981 con los demás años en la lista, sumamos ambos incrementos para un aumento total de cinco centavos, y obtenemos los datos de la tabla 1.6. En la figura 1.84a se muestra el diagrama de dispersión resultante.

TABLA 1.6 Precio de una estampilla postal desde 1968

x	0	3	6	7	9	13	17	19	23	27	30	34
y	6	8	10	13	15	20	22	25	29	32	33	37

Como el diagrama de dispersión es bastante lineal, intentamos el uso de un modelo lineal. Después de introducir los datos en una calculadora graficadora (o software para graficación) y seleccionar la opción de regresión lineal, encontramos que la recta de regresión es

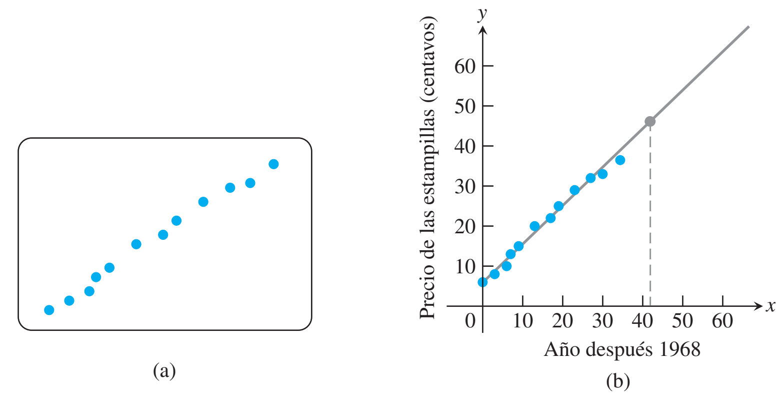


FIGURA 1.84 (a) Gráfica de dispersión de los datos (x, y) de la tabla 1.6. (b) Uso de la recta de regresión para estimar el precio de una estampilla en 2010. (Ejemplo 7).

$$y = 0.94x + 6.10.$$

La figura 1.84b muestra simultáneamente el diagrama de dispersión y la recta a la que se aproximó. La calidad del ajuste es notable, así que el modelo parece razonable.

Al evaluar la recta de regresión, concluimos que en 2010 $(x = 42)$, el precio de la estampilla será

$$y = 0.94(42) + 6.10 \approx 46 \text{ cents}.$$

El punto rojo que aparece sobre la recta de regresión de la figura 1.84b representa este pronóstico.

EJEMPLO 8 Encontrar una curva para predecir niveles de población.

Queremos predecir el tamaño de una población a futuro, por ejemplo, el número de truchas o barbos en una granja de peces. La figura 1.85 muestra el diagrama de dispersión de los datos recolectados por R. Pearl para una población de células de levadura (medida en **biomasa**) que crece con el paso del tiempo (medido en horas) en un nutriente.

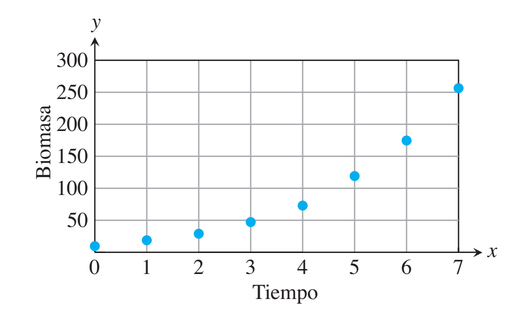


FIGURA 1.85 Biomasa del cultivo de levadura contra tiempo transcurrido (ejemplo 8).
(Los datos se obtuvieron de "The Growth of Population", *Quart. Rev. Biol.*, Vol. 2(1927), pp. 532-548).

Los puntos de la gráfica parecen describir una curva razonablemente suave que tiende hacia arriba (tiende a ser creciente). Podríamos tratar de reflejar esta tendencia ajustando a una función polinomial (por ejemplo, una cuadrática $y = ax^2 + bx + c$), a una función de potencia $(y = ax^b)$, o a una función exponencial $(y = ae^{bx})$. En la figura 1.86 se muestra el resultado obtenido con una calculadora al ajustar a un modelo cuadrático.

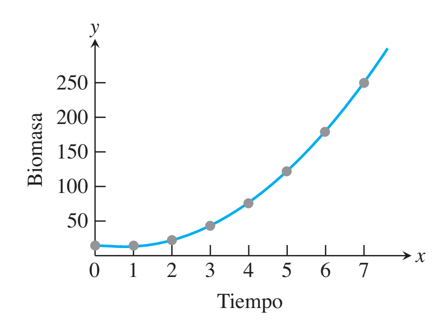


FIGURA 1.86 Ajuste de una función cuadrática a los datos dados en la ecuación $y = 6.10x^2 - 9.28x + 16.43$ y la predicción $y(17) = 1622.65$ (ejemplo 8).

El modelo cuadrático $y = 6.10x^2 - 9.28x + 16.43$ parece ajustarse razonablemente bien los datos recopilados (figura 1.86). Usando este modelo, podemos predecir que, después de 17 horas, la población será $y(17) = 1622.65$. Examinemos más a fondo los datos obtenidos para ver si nuestro modelo cuadrático sigue siendo válido.

En la figura 1.87 se ilustra una gráfica que incluye todos los datos. Vemos ahora que la predicción de $y(17) = 1622.65$ sobreestimó en gran medida el crecimiento de la población observada, que es de 659.6. ¿A qué se debe que el modelo cuadrático no pudiera predecir un valor más exacto?

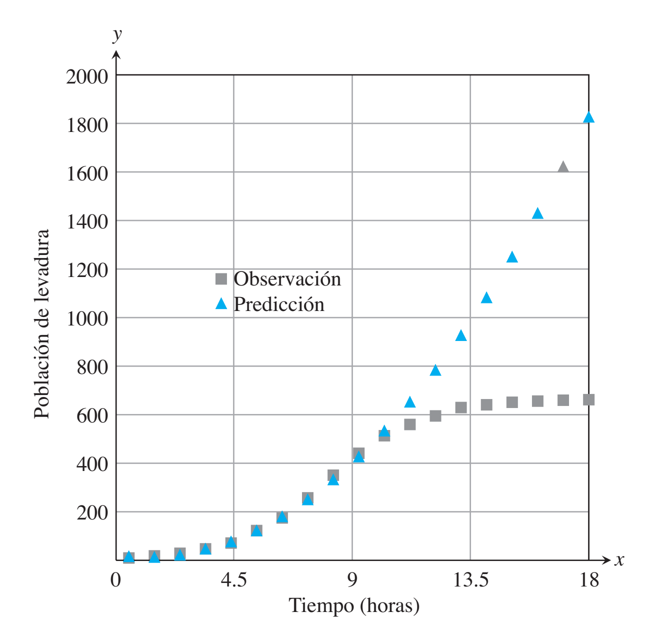


FIGURA 1.87 El resto de los datos de Pearl (ejemplo 8).

El problema radica en el riesgo de predecir más allá del rango de los datos usados para construir el modelo empírico. (El rango de datos utilizado para crear nuestro modelo fue $0 \leq x \leq 7$.) Tal *extrapolación* es especialmente peligrosa cuando el modelo elegido no está sustentado por alguna razón fundamental que sugiera cuáles serían sus características más apropiadas. ¿Qué nos llevó a decidir, en nuestro ejemplo de la levadura, que una función cuadrática nos ayudaría a predecir el crecimiento poblacional? ¿Por qué no elegimos una función exponencial? ¿Cómo predecir valores futuros cuando nos enfrentamos a este tipo de disyuntiva? Como veremos al modelar el crecimiento poblacional en el capítulo 9, muchas veces el cálculo puede ayudarnos. ■

Análisis de regresión

El análisis de regresión consta de cuatro pasos:

1. Trazar los datos (en un diagrama de dispersión).
2. Encontrar una función de regresión. Por ejemplo: para una recta, dicha función tiene la forma $y = mx + b$, y, en el caso de una función cuadrática, la forma $y = ax^2 + bx + c$.
3. Superponer la gráfica de la función de regresión al diagrama de dispersión para ver que tan bien se ajustan.
4. Si el ajuste es satisfactorio, usar la función de regresión para predecir el valor de y dando valores de x que no estén en la tabla.

EJERCICIOS 1.7

Elección del tamaño de la ventana de visualización

En los ejercicios 1-4, use una calculadora graficadora o una computadora con un software para graficación para que determine cuál de las escalas de tamaño de las ventanas de visualización que se dan muestra la gráfica más apropiada de la función especificada.

1. $f(x) = x^4 - 7x^2 + 6x$

a. $[-1, 1]$ por $[-1, 1]$ **b.** $[-2, 2]$ por $[-5, 5]$

c. $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$ **d.** $[-5, 5]$ por $[-25, 15]$

2. $f(x) = x^3 - 4x^2 - 4x + 16$

a. $[-1, 1]$ por $[-5, 5]$ **b.** $[-3, 3]$ por $[-10, 10]$

c. $[-5, 5]$ por $[-10, 20]$ **d.** $[-20, 20]$ por $[-100, 100]$

3. $f(x) = 5 + 12x - x^3$

a. $[-1, 1]$ por $[-1, 1]$ **b.** $[-5, 5]$ por $[-10, 10]$

c. $[-4, 4]$ por $[-20, 20]$ **d.** $[-4, 5]$ por $[-15, 25]$

4. $f(x) = \sqrt{5 + 4x - x^2}$

a. $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$ **b.** $[-2, 6]$ por $[-1, 4]$

c. $[-3, 7]$ por $[0, 10]$ **d.** $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$

Determinación de los parámetros de la ventana de visualización

En los ejercicios 5-30, determine la escala apropiada de la ventana para la función dada, y úsela para mostrar su gráfica.

5. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 15$ **6.** $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} - 2x + 1$

7. $f(x) = x^5 - 5x^4 + 10$ **8.** $f(x) = 4x^3 - x^4$

9. $f(x) = x\sqrt{9 - x^2}$ **10.** $f(x) = x^2(6 - x^3)$

11. $y = 2x - 3x^{2/3}$ **12.** $y = x^{1/3}(x^2 - 8)$

13. $y = 5x^{2/5} - 2x$ **14.** $y = x^{2/3}(5 - x)$

15. $y = |x^2 - 1|$ **16.** $y = |x^2 - x|$

17. $y = \dfrac{x + 3}{x + 2}$ **18.** $y = 1 - \dfrac{1}{x + 3}$

19. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 + 1}$ **20.** $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

21. $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 - x - 6}$ **22.** $f(x) = \dfrac{8}{x^2 - 9}$

23. $f(x) = \dfrac{6x^2 - 15x + 6}{4x^2 - 10x}$ **24.** $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x - 2}$

25. $y = \text{sen}\, 250x$ **26.** $y = 3\cos 60x$

27. $y = \cos\left(\dfrac{x}{50}\right)$ **28.** $y = \dfrac{1}{10}\,\text{sen}\left(\dfrac{x}{10}\right)$

29. $y = x + \dfrac{1}{10}\,\text{sen}\, 30x$ **30.** $y = x^2 + \dfrac{1}{50}\cos 100x$

31. Grafique la mitad inferior del círculo definido por la ecuación $x^2 + 2x = 4 + 4y - y^2$.

32. Grafique la rama superior de la hipérbola $y^2 - 16x^2 = 1$.

33. Grafique cuatro periodos de la función $f(x) = -\tan 2x$.

34. Grafique dos periodos de la función $f(x) = 3\cot\dfrac{x}{2} + 1$.

35. Grafique la función $f(x) = \text{sen}\, 2x + \cos 3x$.

36. Grafique la función $f(x) = \text{sen}^3 x$.

Graficación en modo de puntos

Otra forma de evitar las conexiones incorrectas cuando se usa un dispositivo para graficación, consiste en utilizar el "modo de puntos" que, como indica su nombre, sólo grafica puntos. Si el dispositivo que usted utiliza cuenta con esta función, empléela para graficar las funciones de los ejercicios 37-40.

37. $y = \dfrac{1}{x - 3}$ **38.** $y = \text{sen}\dfrac{1}{x}$

39. $y = x\lfloor x \rfloor$ **40.** $y = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

Análisis de regresión

T **41.** En la tabla 1.7 se muestra el salario medio anual de los trabajadores de la industria de la construcción.

TABLA 1.7 Promedio de la compensación anual de los trabajadores de la construcción

Año	Compensación anual (dólares)
1980	22,033
1985	27,581
1988	30,466
1990	32,836
1992	34,815
1995	37,996
1999	42,236
2002	45,413

Fuente: Oficina de análisis económico de EUA.

a. Encuentre una función de regresión lineal para los datos.

b. Encuentre la pendiente de la recta de regresión. Explique ¿qué representa la pendiente?

c. Superponga la gráfica de la ecuación de regresión lineal al diagrama de dispersión de los datos.

d. Use la ecuación de regresión para predecir el promedio salarial anual de los trabajadores de la industria de la construcción en el 2010.

T **42.** El precio medio de las casas unifamiliares se ha incrementado de manera continua desde 1970. Sin embargo, los datos de la tabla 1.8 indican que tal aumento ha sido diferente en distintas partes del país.

a. Encuentre una ecuación de regresión lineal para el costo de las casas en el noreste del país.

b. ¿Qué representa la pendiente de la recta de regresión?

c. Encuentre una ecuación de regresión lineal para el costo de las casas en el medio oeste de la nación.

d. ¿En qué región del país se está incrementando más rápidamente el precio medio, en el noreste o en el medio oeste?

TABLA 1.8 Precio medio de las casas unifamiliares

Año	Noreste (dólares)	Medio oeste (dólares)
1970	25,200	20,100
1975	39,300	30,100
1980	60,800	51,900
1985	88,900	58,900
1990	141,200	74,000
1995	197,100	88,300
2000	264,700	97,000

Fuente: Asociación Nacional de Bienes Raíces®.

T **43. Distancia de frenado de un vehículo** La tabla 1.9 muestra la distancia de frenado total de un automóvil como una función de su velocidad.

a. Encuentre una ecuación de regresión cuadrática para los datos de la tabla 1.9.

b. Superponga la gráfica de la ecuación de regresión en forma cuadrática al diagrama de dispersión de los datos.

c. Use la gráfica de la ecuación de regresión cuadrática para predecir el promedio de la distancia total de frenado para las velocidades de 72 y 85 mph. Confirme algebraicamente.

d. Ahora use una de regresión *lineal* para predecir el promedio de la distancia total de frenado para las velocidades de 72 y 85 mph. Superponga la recta de regresión al diagrama de dispersión de los datos. ¿Cuál gráfica ofrece el mejor ajuste, la de regresión lineal o la de regresión cuadrática del inciso (b)?

T **44. Ola de popa** Las observaciones de las olas de popa que siguen a un barco en ángulo recto a lo largo de su curso han revelado que la distancia entre las crestas de estas olas (su *longitud de onda*) aumenta según la velocidad del barco. La tabla 1.10 muestra la relación entre la longitud de onda y la velocidad del barco.

a. Encuentre una función de regresión potencia $y = ax^b$ para los datos de la tabla 1.10, donde x es la longitud de onda y y es la velocidad del barco.

b. Superponga la gráfica de la ecuación de regresión potencia al diagrama de dispersión de los datos.

TABLA 1.9 Distancia de frenado de un vehículo

Rapidez (mph)	Promedio de la distancia de frenado total (pies)
20	42
25	56
30	73.5
35	91.5
40	116
45	142.5
50	173
55	209.5
60	248
65	292.5
70	343
75	401
80	464

Fuente: Oficina de carreteras públicas de EUA.

TABLA 1.10 Longitud de onda

Longitud de onda (m)	Rapidez (km/h)
0.20	1.8
0.65	3.6
1.13	5.4
2.55	7.2
4.00	9.0
5.75	10.8
7.80	12.6
10.20	14.4
12.90	16.2
16.00	18.0
18.40	19.8

c. Use la gráfica de la ecuación de regresión potencia para predecir la velocidad del barco cuando la longitud de onda es de 11 m. Confirme algebraicamente.

d. Emplee ahora una regresión *lineal* para predecir la velocidad del barco cuando la longitud de onda es de 11 m. Superponga la regresión lineal al diagrama de dispersión de los datos. ¿Cuál de las gráficas ofrece el mejor ajuste, la de la regresión lineal o la de la regresión potencia del inciso (b)?

Capítulo 1 Preguntas de repaso

1. ¿Cómo se representan los números reales? ¿Cuáles son las principales categorías que caracterizan las propiedades del conjunto de los números reales? ¿Cuál son los principales subconjuntos de los números reales?
2. ¿Cómo se describen los números racionales en términos de expansiones decimales? ¿Qué son los números irracionales? Proporcione ejemplos.
3. ¿Cuáles son las propiedades de orden de los números reales? ¿Cómo se les utiliza en la resolución de problemas y ecuaciones?
4. ¿Qué es el valor absoluto de un número? Proporcione ejemplos. ¿Cómo están relacionados $|-a|$, $|ab|$, $|a/b|$ y $|a+b|$ con $|a|$ y $|b|$?
5. ¿Cómo se usan los valores absolutos para describir intervalos o uniones de intervalos? Proporcione ejemplos.
6. ¿Cómo identificamos puntos en el plano usando el sistema de coordenadas cartesianas? ¿Qué es la gráfica de una ecuación en las variables x y y?
7. ¿Cómo podemos encontrar una ecuación para una recta si conocemos las coordenadas de dos puntos en la misma? ¿Cómo hacerlo si conocemos la pendiente de la recta y las coordenadas de un punto en la recta? ¿Y si conocemos la pendiente de la recta y, y su ordenada al origen? Proporcione, ejemplos.
8. ¿Cuáles son las ecuaciones estándar para las rectas perpendiculares a los ejes coordenados?
9. ¿Cómo se relacionan entre sí las pendientes de rectas mutuamente perpendiculares? ¿Cómo se relacionan entre sí las pendientes de dos rectas paralelas? Explique y proporcione ejemplos.
10. ¿Cuál es la relación entre la pendiente de una recta no vertical y su ángulo de inclinación?
11. ¿Cómo se determina la distancia entre dos puntos en el plano cartesiano?
12. ¿Cuál es la ecuación estándar de un círculo con centro en (h, k) y radio a? ¿Qué es un círculo unitario y cuál es su ecuación?
13. Describa los pasos que deben seguirse para graficar el círculo $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 12 = 0$.
14. ¿Cuáles desigualdades describen los puntos del plano cartesiano que están dentro de un círculo con radio a y centro en el punto (h, k)? ¿Cuáles describen los puntos que están dentro o sobre el círculo? ¿Cuáles los que están fuera del círculo? ¿Cuáles los que están fuera o sobre el círculo?
15. Si a, b y c son constantes y $a \neq 0$, ¿qué se puede decir acerca de la gráfica de la ecuación $y = ax^2 + bx + c$? En particular, ¿cómo graficaría la curva $y = 2x^2 + 4x$?
16. ¿Qué es una función? ¿Qué es el dominio de una función? ¿Qué es el rango? ¿Qué es un diagrama de flechas de una función? Dé ejemplos.
17. ¿Qué es una función de valor real de variable real? ¿Qué es la prueba de la recta vertical?
18. ¿Qué es una función definida por partes? Proporcione ejemplos.
19. ¿Cuáles son los tipos de funciones más importantes que suelen encontrarse en cálculo? Dé un ejemplo de cada tipo.
20. ¿Qué se entiende por función creciente, en términos de su gráfica?¿Y por función decreciente? Dé un ejemplo de cada una.
21. ¿Qué es una función par? ¿Qué es una función impar? ¿Qué propiedades de simetría tienen las gráficas de dichas funciones? ¿Qué ventaja podemos sacar de esto? Dé un ejemplo de una función que no sea par ni impar.
22. ¿Qué significa que y es proporcional a x? ¿Qué significa que y es proporcional a $x^{3/2}$? ¿Cuál es la interpretación geométrica de proporcionalidad? ¿Cómo se puede usar esta interpretación para probar una proporcionalidad propuesta?
23. Si f y g son funciones de valor real, ¿cómo se relacionan los dominios de $f + g$, $f - g$, fg y f/g con los dominios de f y g? Dé ejemplos.
24. ¿Cuándo es posible realizar una composición de una función con otra? Dé ejemplos de composiciones y sus valores en varios puntos. ¿Tiene importancia el orden en el que se componen las funciones?
25. ¿Cómo cambiaría la ecuación $y = f(x)$ para desplazar su gráfica verticalmente hacia arriba o hacia abajo por un factor de $k > 0$? ¿Cómo lo haría para desplazar su gráfica horizontalmente hacia la izquierda o hacia la derecha? Dé ejemplos.
26. ¿Cómo cambiaría la ecuación $y = f(x)$ para comprimir o estirar la gráfica por $c > 1$? ¿Cómo lo haría para reflejar la gráfica a lo largo de los ejes coordenados? Dé ejemplos.
27. ¿Cuál es la ecuación estándar de una elipse con centro en (h, k)? ¿Cuál es su eje mayor? ¿Cuál su eje menor? Dé ejemplos.
28. ¿Qué es la medición en radianes? ¿Cómo se hace la conversión de radianes a grados? ¿Cómo se hace la conversión de grados a radianes?
29. Grafique las seis funciones trigonométricas básicas. ¿Qué simetrías tienen las gráficas?
30. ¿Qué es una función periódica? Dé ejemplos. ¿Cuáles son los periodos de las seis funciones trigonométricas básicas?

31. Comenzando con la identidad $\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ y las fórmulas para $\cos(A + B)$ y $\operatorname{sen}(A + B)$, muestre de qué manera pueden obtenerse otras funciones trigonométricas.

32. ¿Cómo puede relacionarse la fórmula de la función seno dada en forma estándar $f(x) = A \operatorname{sen}((2\pi/B)(x - C)) +$ con el desplazamiento, dilatación, compresión y reflexión de su gráfica? Dé ejemplos. Trace la gráfica de la función seno dada en forma estándar e identifique las constantes A, B, C y D.

33. Mencione tres problemas que pueden surgir al graficar funciones con una calculadora graficadora o con un software de graficación por computadora.

Capítulo 1 Ejercicios de práctica

Desigualdades

En los ejercicios 1-4, resuelva las desigualdades y muestre el conjunto solución en forma gráfica (sobre la recta real).

1. $7 + 2x \geq 3$
2. $-3x < 10$
3. $\frac{1}{5}(x - 1) < \frac{1}{4}(x - 2)$
4. $\frac{x - 3}{2} \geq -\frac{4 + x}{3}$

Valor absoluto

Resuelva las ecuaciones o las desigualdades de los ejercicios 5-8.

5. $|x + 1| = 7$
6. $|y - 3| < 4$
7. $\left|1 - \frac{x}{2}\right| > \frac{3}{2}$
8. $\left|\frac{2x + 7}{3}\right| \leq 5$

Coordenadas

9. Una partícula se mueve en el plano, del punto $A(-2, 5)$ al eje y, de manera que Δy iguala a $3\Delta x$. ¿Cuáles son las nuevas coordenadas de la partícula?

10. **a.** Grafique los puntos $A(8, 1)$, $B(2, 10)$, $C(-4, 6)$, $D(2, -3)$ y $E(14/3, 6)$.
    b. Encuentre las pendientes de las rectas AB, BC, CD, DA, CE y BD.
    c. ¿Alguna combinación de cuatro de estos cinco puntos A, B, C, D y E forma un paralelogramo?
    d. ¿Alguna combinación de tres de los cinco puntos es colineal? ¿Cómo lo sabe? Explique
    e. ¿Cuáles de las rectas determinadas por los cinco puntos pasan por el origen?

11. ¿Los puntos $A(6, 4)$, $B(4, -3)$ y $C(-2, 3)$ forman un triángulo isósceles? ¿Un triángulo rectángulo? ¿Cómo lo sabe? Explique

12. Encuentre las coordenadas del punto de la recta $y = 3x + 1$ que sea equidistante de $(0, 0)$ y $(-3, 4)$.

Rectas

En los ejercicios 13-24, escriba la ecuación de la recta, dados los datos siguientes.

13. Pasa por el punto $(1, -6)$ con pendiente 3
14. Pasa por el punto $(-1, 2)$ con pendiente $-1/2$
15. La recta es vertical y pasa por el punto $(0, -3)$
16. Pasa por los puntos $(-3, 6)$ y $(1, -2)$
17. La recta horizontal que pasa por $(0, 2)$
18. Pasa por $(3, 3)$ y $(-2, 5)$
19. Con pendiente -3 y ordenada al origen 3
20. Pasa por el punto $(3, 1)$ y es paralela a la recta $2x - y = -2$
21. Pasa por el punto $(4, -12)$ y es paralela a la recta $4x + 3y = 12$
22. Pasa por el punto $(-2, -3)$ y es perpendicular a la recta $3x - 5y = 1$
23. Pasa por el punto $(-1, 2)$ y es perpendicular a la recta $(1/2)x + (1/3)y = 1$
24. Con abscisa al origen 3 y ordenada al origen -5

Funciones y gráficas

25. Exprese el área y la circunferencia de un círculo como funciones de su radio. Después, exprese el área del círculo como una función de su circunferencia.

26. Exprese el radio de una esfera como una función de su área superficial. Después, exprese el área superficial de la esfera como una función de su volumen.

27. Un punto P en el primer cuadrante está sobre la parábola $y = x^2$. Exprese las coordenadas de P como funciones del ángulo de inclinación de la recta que une P con el origen.

28. Un globo de aire caliente se eleva en línea recta desde el nivel del suelo, y es rastreado desde una estación que está localizada a 500 pies del lugar del lanzamiento. Exprese la altura del globo como función del ángulo que forma la recta que va desde la estación hasta el globo en relación con el piso.

En los ejercicios 29-32, determine si la gráfica de la función es simétrica respecto al eje y, al origen, o a ninguno de los dos.

29. $y = x^{1/5}$
30. $y = x^{2/5}$
31. $y = x^2 - 2x - 1$
32. $y = e^{-x^2}$

En los ejercicios 33-40, determine si la función es par, impar o ninguna de las dos.

33. $y = x^2 + 1$
34. $y = x^5 - x^3 - x$
35. $y = 1 - \cos x$
36. $y = \sec x \tan x$
37. $y = \frac{x^4 + 1}{x^3 - 2x}$
38. $y = 1 - \operatorname{sen} x$
39. $y = x + \cos x$
40. $y = \sqrt{x^4 - 1}$

En los ejercicios 41-50, encuentre **(a)** el dominio, y **(b)** el rango.

41. $y = |x| - 2$

42. $y = -2 + \sqrt{1-x}$

43. $y = \sqrt{16 - x^2}$

44. $y = 3^{2-x} + 1$

45. $y = 2e^{-x} - 3$

46. $y = \tan(2x - \pi)$

47. $y = 2 \operatorname{sen}(3x + \pi) - 1$

48. $y = x^{2/5}$

49. $y = \ln(x - 3) + 1$

50. $y = -1 + \sqrt[3]{2 - x}$

Funciones definidas por partes

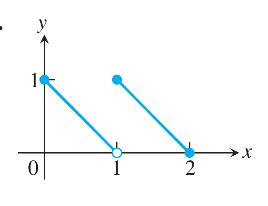
En los ejercicios 51 y 52, encuentre **(a)** el dominio, y **(b)** el rango.

51. $y = \begin{cases} \sqrt{-x}, & -4 \leq x \leq 0 \\ \sqrt{x}, & 0 < x \leq 4 \end{cases}$

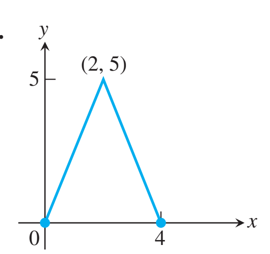
52. $y = \begin{cases} -x - 2, & -2 \leq x \leq -1 \\ x, & -1 < x \leq 1 \\ -x + 2, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$

En los ejercicios 53 y 54, escriba una fórmula para definir por partes cada función.

53.



54.



Composición de funciones

En los ejercicios 55 y 56, encuentre

a. $(f \circ g)(-1)$.

b. $(g \circ f)(2)$.

c. $(f \circ f)(x)$.

d. $(g \circ g)(x)$.

55. $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$

56. $f(x) = 2 - x, \quad g(x) = \sqrt[3]{x+1}$

En los ejercicios 57 y 58, **(a)** escriba la composición resultante para $f \circ g$ y $g \circ f$, y encuentre **(b)** el dominio y **(c)** el rango de cada una.

57. $f(x) = 2 - x^2, \quad g(x) = \sqrt{x+2}$

58. $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = \sqrt{1-x}$

Composición con valores absolutos En los ejercicios 59-64, grafique juntas f_1 y f_2. Después, explique cómo se ve afectada la gráfica al aplicar la función valor absoluto antes de aplicar f_1

	$f_1(x)$	$f_2(x) = f_1(\lvert x\rvert)$
59.	x	$\lvert x\rvert$
60.	x^3	$\lvert x\rvert^3$
61.	x^2	$\lvert x\rvert^2$
62.	$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{1}{\lvert x\rvert}$
63.	$\sqrt{x}$	$\sqrt{\lvert x\rvert}$
64.	$\operatorname{sen} x$	$\operatorname{sen}\lvert x\rvert$

Composición con valores absolutos En los ejercicios 65-68, grafique juntas g_2. Después, explique cómo se ve afectada la gráfica al tomar valores absolutos después de aplicar g_1.

	$g_1(x)$	$g_2(x) = \lvert g_1(x)\rvert$
65.	x^3	$\lvert x^3\rvert$
66.	$\sqrt{x}$	$\lvert\sqrt{x}\rvert$
67.	$4 - x^2$	$\lvert 4 - x^2\rvert$
68.	$x^2 + x$	$\lvert x^2 + x\rvert$

Trigonometría

En los ejercicios 69-72, grafique la función dada. ¿Cuál es el periodo de la función?

69. $y = \cos 2x$

70. $y = \operatorname{sen} \dfrac{x}{2}$

71. $y = \operatorname{sen} \pi x$

72. $y = \cos \dfrac{\pi x}{2}$

73. Grafique $y = 2\cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

74. Grafique $y = 1 + \operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

En los ejercicios 75-78, ABC es un triángulo rectángulo con el ángulo recto en C. Los ángulos A, B y C son opuestos a los lados a, b y c, respectivamente.

75. **a.** Encuentre a y b si $c = 2$, $B = \pi/3$.

b. Encuentre a y c si $b = 2$, $B = \pi/3$.

76. **a.** Exprese a en términos de A y c.

b. Exprese a en términos de A y b.

77. **a.** Exprese a en términos de B y b.

b. Exprese c en términos de A y a.

78. **a.** Exprese seno A en términos de a y c.

b. Exprese seno A en términos de b y c.

79. **Altura de un poste** Dos cables van de la parte superior T de un poste vertical, a dos puntos, B y C, colocados en el piso, donde C está 10 m más cerca de la base del poste que B. Si el cable BT forma un ángulo de 35° con la horizontal y el cable CT forma un ángulo de 50° con la horizontal, ¿cuál es la altura del poste?

80. **Altura de un globo meteorológico** Dos observadores colocados en las posiciones A y B y separados entre sí 2 km, miden simultáneamente el ángulo de elevación de un globo meteorológico, siendo las medidas de 40° y 70°, respectivamente. Determine la altura del globo si éste se ubica justo sobre un punto del segmento de recta entre A y B.

T **81.** **a.** Grafique la función $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos(x/2)$.

b. ¿Cuál es el periodo de la función?

c. Confirme algebraicamente la respuesta que dio en el inciso (b).

T **82.** **a.** Grafique la función $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$.

b. ¿Cuáles son el dominio y el rango de f?

c. La gráfica de f está dada. Grafique cada función.

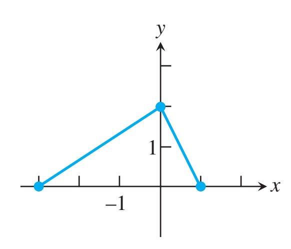
Capítulo 1 Ejercicios adicionales y avanzados

Funciones y gráficas

1. La gráfica de f está dada. Grafique cada función.

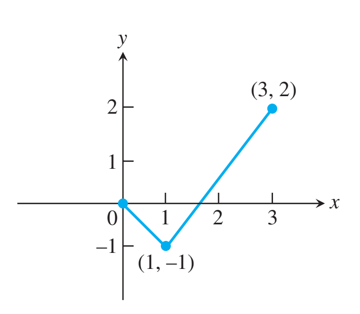
   a. $y = f(-x)$ **b.** $y = -f(x)$

   c. $y = -2f(x + 1) + 1$ **d.** $y = 3f(x - 2) - 2$



2. A continuación se muestra una parte de la gráfica de una función definida en $[-3, 3]$. Complete la gráfica suponiendo que la función es

   a. par. **b.** impar.



3. ¿Explique si existen dos funciones f y g tales que $f \circ g = g \circ f$? Justifique su respuesta.
4. ¿Existen dos funciones f y g con la propiedad siguiente? Las gráficas de f y g no son rectas, pero la gráfica de $f \circ g$ sí lo es. Justifique su respuesta.
5. Si $f(x)$ es impar, ¿se puede decir algo de $g(x) = f(x) - 2$? ¿Qué ocurriría si f fuera par? Justifique su respuesta.
6. Si $g(x)$ es una función impar definida para todos los valores de x, ¿se puede decir algo acerca de $g(0)$? Justifique su respuesta.
7. Grafique la ecuación $|x| + |y| = 1 + x$.
8. Grafique la ecuación $y + |y| = x + |x|$.

Trigonometría

En los ejercicios 9-14, ABC es un triángulo arbitrario con lados a, b y c y ángulos opuestos A, B y C, respectivamente.

9. Encuentre b si $a = \sqrt{3}, A = \pi/3, B = \pi/4$.
10. Encuentre sen B si $a = 4, b = 3, A = \pi/4$.
11. Encuentre cos A si $a = 2, b = 2, c = 3$.
12. Encuentre c si $a = 2, b = 3, C = \pi/4$.
13. Encuentre sen B si $a = 2, b = 3, c = 4$.
14. Encuentre sen C si $a = 2, b = 4, c = 5$.

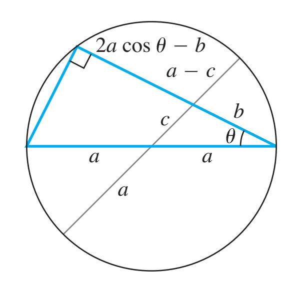
Deducciones y pruebas

15. Demuestre las siguientes identidades trigonométricas.

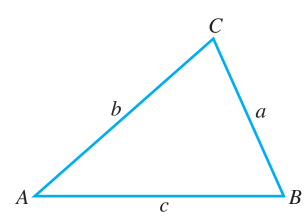
    a. $\dfrac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}$

    b. $\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \tan^2 \dfrac{x}{2}$

16. Explique la siguiente "prueba sin palabras" de la ley de los cosenos. (*Fuente:* "Proof without Words: The Law of Cosines", Sidney H. Kung, *Mathematics Magazine,* Vol. 63, No. 5, dic. 1990, p. 342).



17. Demuestre que el área del triángulo ABC está dada por $(1/2)ab \operatorname{sen} C = (1/2)bc \operatorname{sen} A = (1/2)ca \operatorname{sen} B$.



18. Demuestre que el área del triángulo ABC está dada por $\sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$ donde $s = (a + b + c)/2$ es el semiperímetro del triángulo.
19. **Propiedades de las desigualdades** Si a y b son números reales, decimos que ***a* es menor que *b***, y escribimos $a < b$ si (y sólo si) $b - a$ es positivo. Use esta definición para probar las siguientes propiedades de las desigualdades.

    Si a, b y c son números reales, entonces:

    1. $a < b \Rightarrow a + c < b + c$
    2. $a < b \Rightarrow a - c < b - c$
    3. $a < b$ y $c > 0 \Rightarrow ac < bc$
    4. $a < b$ y $c < 0 \Rightarrow bc < ac$
       (Caso especial: $a < b \Rightarrow -b < -a$)

5. $a > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > 0$

6. $0 < a < b \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

7. $a < b < 0 \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

20. Pruebe que las siguientes desigualdades se cumplen para cualquier número real a y b.

a. $|a| < |b|$ si y sólo si $a^2 < b$

b. $|a - b| \geq ||a| - |b||$

Generalización de la desigualdad triangular Demuestre, mediante inducción matemática, que las desigualdades de los ejercicios 21 y 22 se satisfacen para cualesquiera n números reales $a_1, a_2, \ldots, a_n$. (El apéndice 1 revisa la inducción matemática).

21. $|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$

22. $|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \geq |a_1| - |a_2| - \cdots - |a_n|$

23. Demuestre que si f es tanto par como impar, entonces $f(x) = 0$ para toda x en el dominio de f.

24. a. Descomposiciones par-impar Sea f una función cuyo dominio es simétrico respecto al origen, esto es, que $-x$ pertenece al dominio siempre que x también pertenezca a él. Pruebe que f es la suma de una función par y una función impar:

$$f(x) = E(x) + O(x),$$

donde E es una función par y O es una función impar. (*Sugerencia:* Sea $E(x) = (f(x) + f(-x))/2$ demuestre que $E(-x) = E(x)$, de manera que E es par. Después demuestre que $O(x) = f(x) - E(x)$ es impar).

b. Unicidad Demuestre que existe sólo una manera de escribir f como la suma de una función par y una impar. (*Sugerencia:* Una manera se mencionó en el inciso (a). Si también $f(x) = E_1(x) + O_1(x)$ donde E_1 es par y O_1 es impar, demuestre que $E - E_1 = O_1 - O$. Después use el ejercicio 23 para probar que $E = E_1$ y $O = O_1$).

Exploraciones con calculadoras graficadoras o computadoras con algún software para graficar. Efectos de los parámetros

25. ¿Qué le pasa a la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$ conforme

a. a cambia mientras b y c permanecen fijos?

b. b cambia (a y c fijos, $a \neq 0$)?

c. c cambia (a y b fijos, $a \neq 0$)?

26. ¿Qué le pasa a la gráfica de $y = a(x + b)^3 + c$ conforme

a. a cambia mientras b y c permanecen fijos?

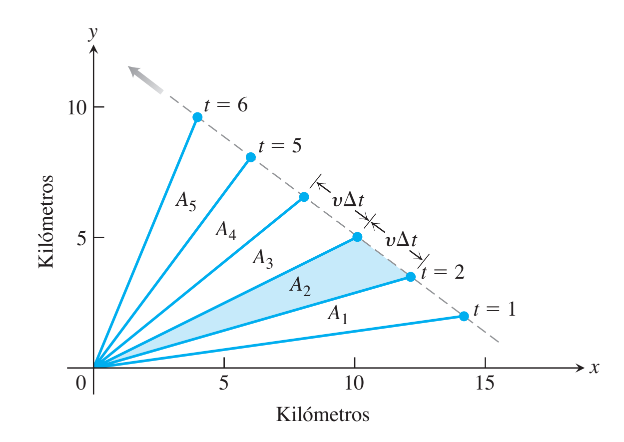
b. b cambia (a y c fijos, $a \neq 0$)?

c. c cambia (a y b fijos, $a \neq 0$)?

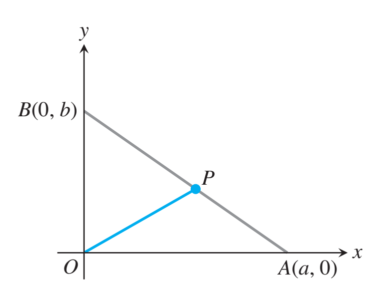
27. Encuentre todos los valores de la pendiente de la recta $y = mx + 2$ para los que la intersección con el eje x excede $1/2$.

Geometría

28. El centro de masa de un objeto se mueve a una velocidad constante v a lo largo de una recta que pasa por el origen. La figura siguiente muestra el sistema coordenado y la recta de movimiento. Los puntos indican las posiciones del objeto en cada segundo. ¿Por qué todas las áreas $A_1, A_2, \ldots, A_5$ de la figura son iguales? Como en la ley de áreas iguales de Kepler (vea la sección 13.6), la recta que une el centro de masa del objeto recorre áreas iguales en tiempos iguales.



29. a. Encuentre la pendiente de la recta desde el origen al punto medio P del lado AB del triángulo ilustrado en la figura siguiente $(a, b > 0)$.



b. ¿Cuándo OP es perpendicular a AB?

Capítulo 1 Proyectos de aplicación tecnológica

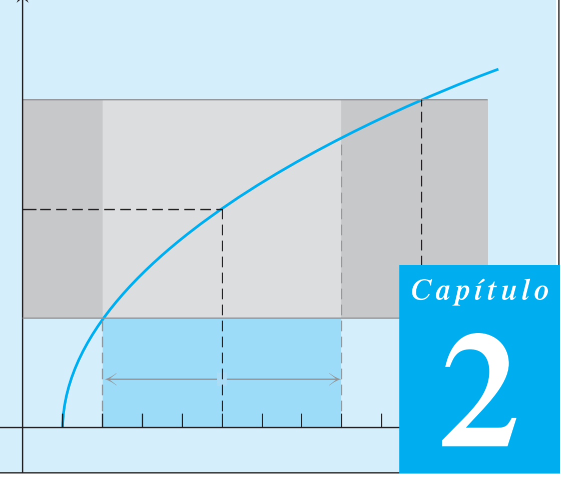
Un vistazo

Una revisión de *Mathematica* es suficiente para completar los módulos de *Mathematica* que aparecen en el sitio Web.

Módulo Mathematica/Maple

Trabajo con modelos matemáticos: Resortes, conducción automovilística segura, radioactividad, árboles, peces y mamíferos.

Construya e interprete modelos matemáticos; analícelos y mejórelos, y haga predicciones a partir de ellos.



Capítulo 2

LÍMITES Y CONTINUIDAD

INTRODUCCIÓN El concepto que marca la diferencia entre el cálculo y el álgebra y la trigonometría, es el de límite. El límite es fundamental para determinar la tangente a una curva o la velocidad de un objeto.

En este capítulo se desarrolla dicho concepto, primero de manera intuitiva y luego formalmente. Usaremos límites para describir la forma en que varía una función f. Algunas funciones varían continuamente; los cambios pequeños en x producen ligeras modificaciones en $f(x)$. Otras funciones pueden tener valores que saltan o que cambian con brusquedad. El concepto de límite nos proporciona un método preciso para distinguir entre estos comportamientos. La aplicación geométrica del límite para definir la tangente a una curva, conduce directamente al importante concepto de la derivada de una función. La derivada, que analizaremos a fondo en el capítulo 3, cuantifica la manera en que cambian los valores de una función.

2.1 Razón de cambio y límites

En esta sección hablaremos de las razones de cambio promedio e instantáneo. A partir de ellas abordaremos nuestro concepto principal: la idea de límite.

Velocidad promedio y velocidad instantánea

La **velocidad promedio** que tiene un cuerpo en movimiento durante un intervalo de tiempo, se encuentra al dividir la distancia recorrida entre el lapso de tiempo. La unidad de medida es longitud por unidad de tiempo: kilómetros por hora, pies por segundo o cualquiera otra que sea adecuada para el problema en cuestión.

EJEMPLO 1 Determinación de la velocidad promedio

Una piedra cae de un acantilado desde el reposo. ¿Cuál es su velocidad promedio

(a) durante los primeros dos segundos de la caída?

(b) durante el intervalo de un segundo entre el segundo 1 y el segundo 2?

Solución Para resolver este problema usamos el hecho, descubierto por Galileo a finales del siglo XVI, de que un objeto sólido que se deja caer desde el reposo (sin moverse), de manera que descienda libremente cerca de la superficie de la tierra, recorrerá una distancia proporcional al cuadrado del tiempo que dura la caída. (Esto supone despreciar la resistencia que ejerce el aire y frena el objeto, y descartar la influencia de fuerzas distintas a la gravedad sobre el objeto en caída. A este tipo de movimiento se le denomina **caída libre**).

BIOGRAFÍA HISTÓRICA*

Galileo Galilei
(1564-1642)

Si y denota la distancia recorrida en pies después de t segundos, de acuerdo con la ley de Galileo

$$y = 16t^2,$$

donde 16 es la constante de proporcionalidad.

La velocidad promedio de la piedra durante un intervalo de tiempo dado, es igual al cambio en la distancia, Δy, dividido entre el intervalo de tiempo, Δt.

(a) Para los primeros 2 segundos: $\dfrac{\Delta y}{\Delta t} = \dfrac{16(2)^2 - 16(0)^2}{2 - 0} = 32 \dfrac{\text{pies}}{\text{seg}}$

(b) Del segundo 1 al segundo 2: $\dfrac{\Delta y}{\Delta t} = \dfrac{16(2)^2 - 16(1)^2}{2 - 1} = 48 \dfrac{\text{pies}}{\text{seg}}$ ■

En el ejemplo siguiente se examina qué pasa cuando se busca la velocidad promedio de un objeto que cae, en intervalos de tiempo cada vez más cortos.

EJEMPLO 2 Determinación de la velocidad instantánea

Encontrar la velocidad de la piedra que cae en $t = 1$ y $t = 2$ seg.

Solución Podemos calcular la velocidad promedio de la piedra en el intervalo de tiempo $[t_0, t_0 + h]$, cuya longitud $\Delta t = h$, como

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{16(t_0 + h)^2 - 16{t_0}^2}{h}. \qquad (1)$$

No es posible usar esta fórmula para calcular la velocidad "instantánea" en t_0 sustituyendo $h = 0$, ya que la división por cero no está definida. Sin embargo, sí *podemos* emplearla para calcular la velocidad promedio en lapsos cada vez más cortos, empezando en $t_0 = 1$ y $t_0 = 2$. Cuando lo hacemos así, vemos un patrón (tabla 2.1).

TABLA 2.1 Velocidad promedio en intervalos de tiempo pequeños

Velocidad promedio: $\dfrac{\Delta y}{\Delta t} = \dfrac{16(t_0 + h)^2 - 16{t_0}^2}{h}$

Longitud del intervalo de tiempo h	Velocidad promedio en intervalo de longitud h empezando en $t_0 = 1$	Velocidad promedio en intervalo de longitud h empezando en $t_0 = 2$
1	48	80
0.1	33.6	65.6
0.01	32.16	64.16
0.001	32.016	64.016
0.0001	32.0016	64.0016

La velocidad promedio a medida que disminuye la longitud del intervalo que empieza en $t_0 = 1$, aparentemente se aproxima a un valor límite igual a 32 a medida que disminuye la longitud del intervalo. Esto sugiere que la piedra está cayendo a una velocidad de 32 pies/seg en $t_0 = 1$ seg. Confirmemos esto algebraicamente.

*Para aprender más acerca de estos personajes históricos y sobre el desarrollo de los principales temas y elementos relacionados con el cálculo, visite **www.aw-bc.com/thomas.**

Si fijamos $t_0 = 1$, y luego desarrollamos el numerador de la ecuación (1) y simplificamos, encontramos que

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{16(1 + h)^2 - 16(1)^2}{h} = \frac{16(1 + 2h + h^2) - 16}{h}$$

$$= \frac{32h + 16h^2}{h} = 32 + 16h.$$

Para valores de h distintos de 0, las expresiones de la derecha y la izquierda son equivalentes, y la velocidad promedio es $32 + 16h$ pies/seg. Ahora podemos ver por qué la velocidad promedio tiene el valor límite $32 + 16(0) = 32$ pies/seg a medida que h tiende a 0.

De manera similar, al fijar $t_0 = 2$ en la ecuación (1), el procedimiento da por resultado

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = 64 + 16h$$

para valores de h distintos de 0. Conforme h se acerca cada vez más a 0, la velocidad promedio en $t_0 = 2$ seg tiene el valor límite de 64 pies/seg. ■

Razones de cambio promedio y rectas secantes

Dada una función arbitraria $y = f(x)$, calculamos la razón de cambio promedio de y respecto de x en el intervalo $[x_1, x_2]$ dividiendo el cambio en el valor de y, $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$, entre la longitud $\Delta x = x_2 - x_1 = h$ del intervalo donde ocurre el cambio.

DEFINICIÓN Razón de cambio promedio en un intervalo

La **razón de cambio promedio** de $y = f(x)$ respecto de x en el intervalo $[x_1, x_2]$ es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}, \qquad h \neq 0.$$

Geométricamente, la razón de cambio de f en $[x_1, x_2]$ es la pendiente de la recta que pasa por los puntos $P(x_1, f(x_1))$ y $Q(x_2, f(x_2))$ (figura 2.1). En geometría, la recta que une dos puntos de una curva es una **secante** de la misma. En consecuencia, la razón de cambio promedio de f desde x_1 a x_2 es idéntica a la pendiente de la secante PQ.

Muchas veces, los biólogos experimentales quieren saber la razón a la que crecen las poblaciones bajo condiciones controladas en el laboratorio.

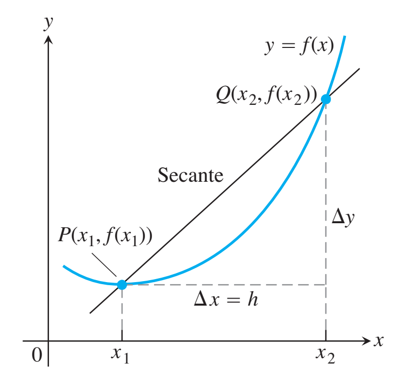


FIGURA 2.1 Una secante de la gráfica $y = f(x)$. Su pendiente es $\Delta y/\Delta x$, la razón de cambio promedio de f en el intervalo $[x_1, x_2]$.

EJEMPLO 3 La razón promedio de crecimiento en una población analizada en laboratorio

En la figura 2.2 se muestra el crecimiento poblacional de la mosca de la fruta (*Drosophila*) durante un experimento de 50 días. El número de moscas se contó en intervalos regulares de tiempo, y los valores se graficaron en relación con el tiempo; los puntos resultantes fueron unidos mediante una curva suave (de color azul en la figura 2.2). Encontrar la razón promedio de crecimiento entre los días 23 y 45.

Solución El día 23 había 150 moscas, y 340 el día 45. Por lo tanto, el número de moscas se incrementó $340 - 150 = 190$ en $45 - 23 = 22$ días. La razón de cambio promedio de la población entre los días 23 y 45 fue

$$\text{Razón de cambio promedio: } \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{340 - 150}{45 - 23} = \frac{190}{22} \approx 8.6 \text{ moscas/día.}$$

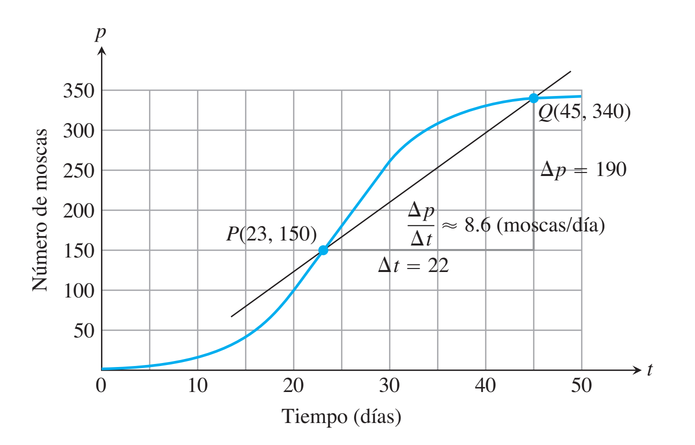


FIGURA 2.2 Crecimiento de la población de la mosca de la fruta en un experimento controlado. La razón de cambio promedio en 22 días es la pendiente $\Delta y/\Delta x$ de la recta secante.

Este promedio es la pendiente de la secante que pasa por los puntos P y Q en la gráfica de la figura 2.2. ■

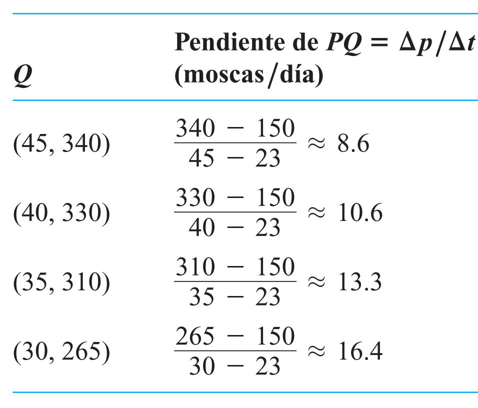
Sin embargo, la razón de cambio promedio entre los días 23 y 45 calculada en el ejemplo 3 no nos indica qué tan rápido se modificó la población tan sólo el día 23. Para conocer ese dato necesitamos examinar intervalos de tiempo más cercanos al día en cuestión.

EJEMPLO 4 La razón de crecimiento en el día 23

¿Qué tan rápido aumentó la población de moscas del ejemplo 3 el día 23?

Solución Para contestar esta pregunta, examinamos las razones de cambio promedio en intervalos de tiempo cada vez más pequeños a partir del día 23. En términos geométricos, para encontrar estas razones debemos calcular las pendientes de las secantes de P a Q, para una serie de puntos Q que se acercan a P a lo largo de la curva (figura 2.3).

Los valores de la tabla muestran que las pendientes de las secantes aumentan de 8.6 a 16.4 a medida que la coordenada t de Q decrece de 45 a 30, lo que nos permitiría suponer que las pendientes se incrementarán ligeramente a medida que t siga su camino hacia 23.



Q	Pendiente de $PQ = \Delta p/\Delta t$ (moscas/día)
(45, 340)	$\frac{340 - 150}{45 - 23} \approx 8.6$
(40, 330)	$\frac{330 - 150}{40 - 23} \approx 10.6$
(35, 310)	$\frac{310 - 150}{35 - 23} \approx 13.3$
(30, 265)	$\frac{265 - 150}{30 - 23} \approx 16.4$

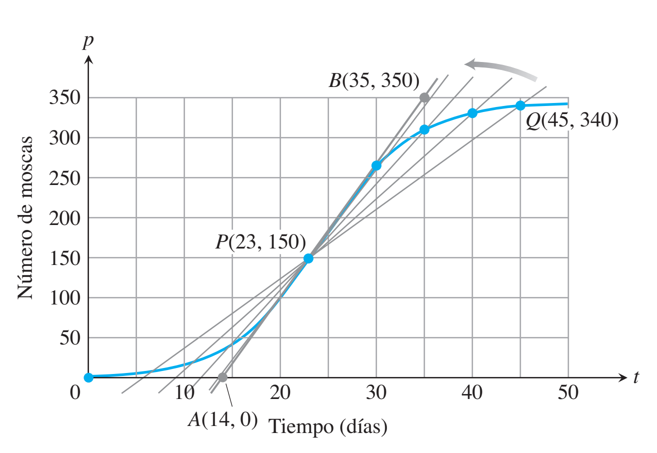


FIGURA 2.3 Las posiciones y las pendientes de cuatro secantes por el punto P en la gráfica de las moscas de la fruta (ejemplo 4).

Desde el punto de vista geométrico, las secantes giran alrededor de P y parecen acercarse a la recta de color más sólido de la figura, que pasa por P siguiendo la misma dirección que la curva que atraviesa en el punto P. Como veremos, esta recta se denomina *tangente* de la curva en P. En vista de que aparentemente la recta pasa por los puntos (14, 0) y (35, 350), tiene una pendiente

$$\frac{350 - 0}{35 - 14} = 16.7 \text{ moscas/día (aproximadamente).}$$

El día 23, la población se incrementó a una razón de más o menos 16.7 moscas/día. ■

Las razones a las que cayó la piedra del ejemplo 2 en los instantes $t = 1$ y $t = 2$, y la razón a la que se modificó la población del ejemplo 4 el día $t = 23$, se denominan *razones de cambio instantáneas*. Como sugieren los ejemplos, para encontrar las razones instantáneas debemos determinar los valores límite de razones promedio. En el ejemplo 4 también se explicó que la recta tangente a la curva de población en el día 23 representa una posición límite de las rectas secantes. Las razones instantáneas y las rectas tangentes, conceptos íntimamente relacionados, aparecen en muchos otros contextos. Para hablar de forma constructiva acerca de ellas y entender mejor su conexión, es necesario investigar el proceso por medio del cual se determinan los valores límite, o simplemente *límites*, como los llamaremos de aquí en adelante.

Límites de valores de funciones

Aunque nuestros ejemplos han sugerido la idea de límite, es necesario dar una definición informal de dicho concepto. Sin embargo, pospondremos la definición formal hasta contar con más información.

Sea $f(x)$ definida en un intervalo abierto alrededor de x_0, *excepto, posiblemente, en el mismo punto* x_0. Si $f(x)$ se acerca tanto como queramos a L (tanto como queramos) para toda x lo suficientemente cerca de x_0, decimos que f se aproxima al **límite** L cuando x se acerca a x_0, y escribimos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

el cual se lee como "el límite de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 es L". En esencia, la definición afirma que los valores de $f(x)$ están cerca del número L siempre que x está cerca de x_0 (por cualesquiera de los lados de x_0). Esta definición es "informal" ya que frases como *tanto como queramos* y *suficientemente cerca* son imprecisas; su significado depende del contexto. Para un mecánico que fabrica un pistón, *cerca* significa *milésimas de pulgada*. Para un astrónomo que estudia las galaxias distantes, *cerca* significa *algunos miles de años luz.* A pesar de ello, la definición es lo bastante clara para permitirnos reconocer y evaluar límites de funciones específicas; no obstante, cuando probemos teoremas relacionados con límites —en la sección 2.3—, necesitaremos una definición más precisa.

EJEMPLO 5 Comportamiento de una función cerca de un punto

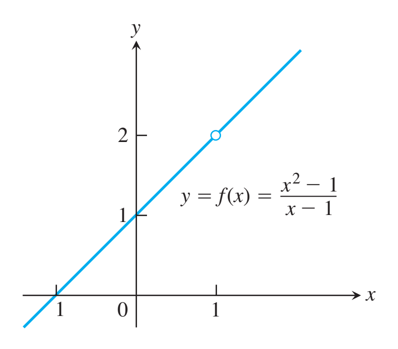
¿Cómo se comporta la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

al estar cerca de $x = 1$?

Solución La fórmula dada define a f para todos los números reales x, excepto $x = 1$ (no es posible dividir entre cero). Para cualquier $x \neq 1$, podemos simplificar la fórmula factorizando el numerador y eliminando los factores comunes:

$$f(x) = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1 \qquad \text{para} \qquad x \neq 1.$$



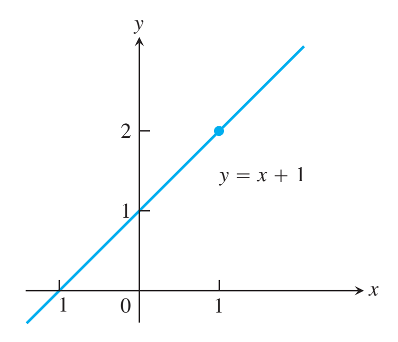


FIGURA 2.4 La gráfica de f es idéntica a la recta $y = x + 1$ excepto en el punto $x = 1$, donde f no está definida (ejemplo 5).

Por lo tanto, la gráfica de f es la recta $y = x + 1$ *sin* el punto (1, 2). En la figura 2.4 se indica dicho punto eliminado mediante un círculo vacio o "hueco". Aun cuando $f(1)$ no está definida, es claro que podemos determinar el valor de $f(x)$ *tan cerca como queramos de* 2, eligiendo un valor de x lo *suficientemente cercano* a 1 (tabla 2.2).

TABLA 2.2 Cuando x está más cerca de 1, $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$ parece estar más cerca de 2

Valores de x arriba y debajo de 1	$f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1, \quad x \neq 1$
0.9	1.9
1.1	2.1
0.99	1.99
1.01	2.01
0.999	1.999
1.001	2.001
0.999999	1.999999
1.000001	2.000001

Decimos que el *límite* de $f(x)$ se acerca a 2 a medida que x se aproxima a 1, y escribimos

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2, \qquad \text{o} \qquad \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2. \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 6 El valor límite no depende de cómo se define la función en x_0

En la figura 2.5, la función f tiene límite 2 cuando $x \to 1$ a pesar de que f no está definida en $x = 1$. La función g tiene límite 2 a medida que $x \to 1$ aun cuando $2 \neq g(1)$. La función h es la única cuyo límite es $x \to 1$ igual a su valor en $x = 1$. Tenemos que para h,

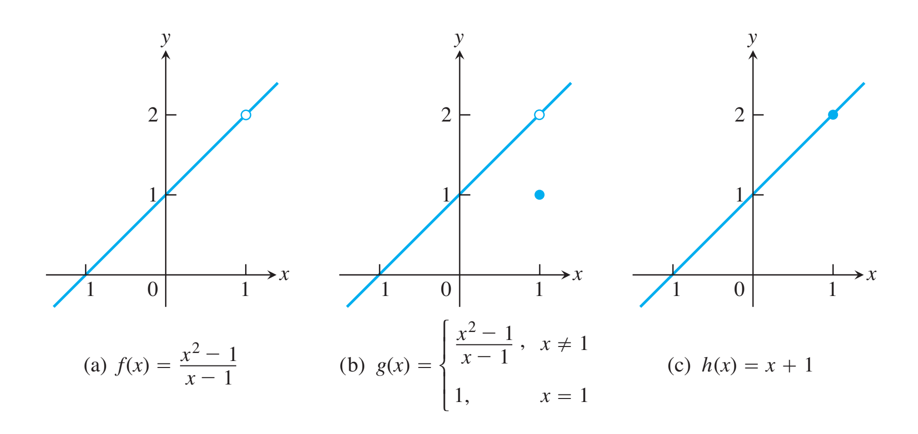
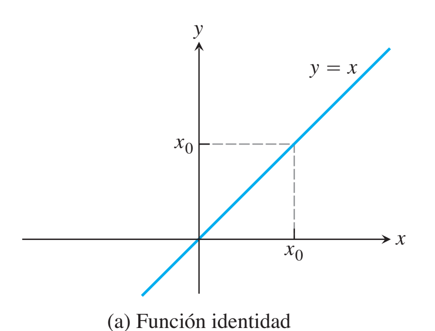
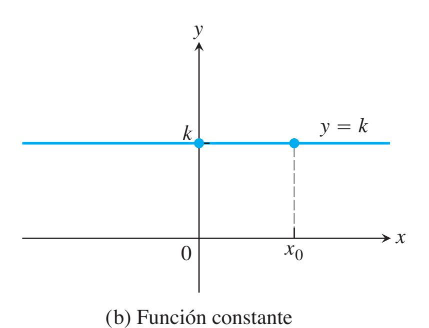


FIGURA 2.5 Los límites de $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ son iguales a 2 conforme x se acerca a 1. Sin embargo, solamente $h(x)$ tiene el mismo valor de la función que su límite en el punto $x = 1$ (ejemplo 6).



(a) Función identidad



(b) Función constante

FIGURA 2.6 Las funciones del ejemplo 8.

$\lim_{x\to 1} h(x) = h(1)$. Esta igualdad del límite y el valor de la función es especial; volveremos a hablar de ella en la sección 2.6. ■

Algunas veces se puede evaluar $\lim_{x\to x_0} f(x)$ calculando $f(x_0)$. Esta afirmación es válida, por ejemplo, siempre que $f(x)$ es una combinación algebraica de funciones polinomiales y trigonométricas para la que $f(x_0)$ está definida. (En las secciones 2.2 y 2.6 veremos más acerca de esto).

EJEMPLO 7 Determinación de límites calculando $f(x_0)$

(a) $\lim_{x\to 2}(4) = 4$

(b) $\lim_{x\to -13}(4) = 4$

(c) $\lim_{x\to 3} x = 3$

(d) $\lim_{x\to 2}(5x - 3) = 10 - 3 = 7$

(e) $\lim_{x\to -2} \dfrac{3x + 4}{x + 5} = \dfrac{-6 + 4}{-2 + 5} = -\dfrac{2}{3}$ ■

EJEMPLO 8 Las funciones identidad y constante tienen límites en cualquier punto

(a) Si f es la **función identidad** $f(x) = x$, para cualquier valor de x_0 (figura 2.6a)

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} x = x_0.$$

(b) Si f es la **función constante** $f(x) = k$ (una función con el valor k constante), para cualquier valor de x_0 (figura 2.6b),

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} k = k.$$

Por ejemplo,

$$\lim_{x\to 3} x = 3 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to -7}(4) = \lim_{x\to 2}(4) = 4.$$

Estos resultados se comprueban en el ejemplo 3 de la sección 2.3. ■

En la figura 2.7 se ilustran algunas formas en las que los límites podrían ser inexistentes; en el siguiente ejemplo describiremos estos casos.

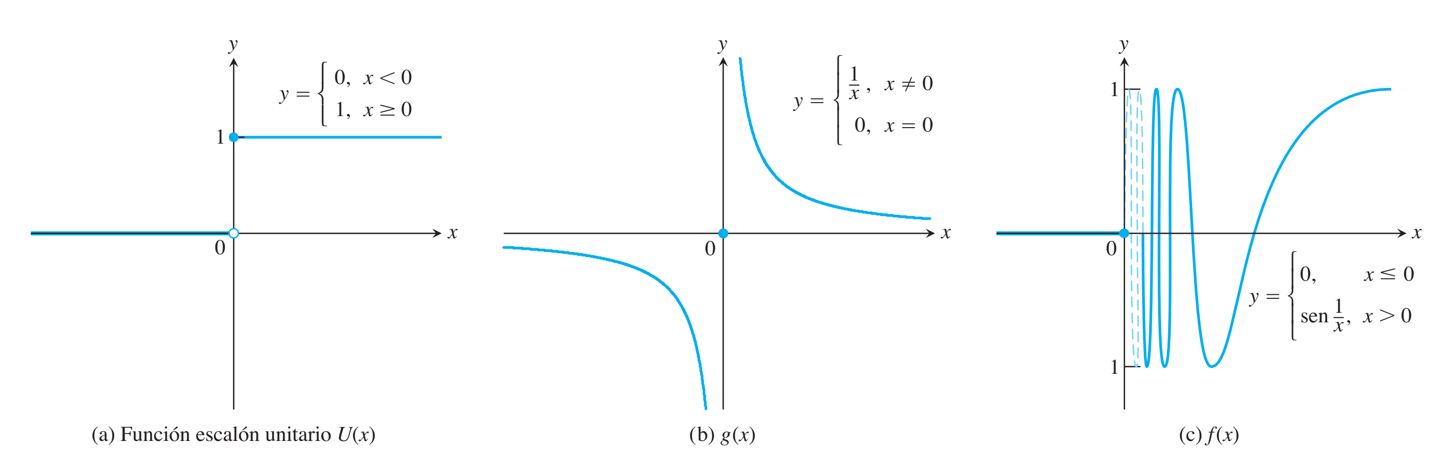


FIGURA 2.7 Ninguna de estas funciones tiene límite conforme x se acerca a 0 (ejemplo 9).

EJEMPLO 9 Una función podría carecer de límite en un punto de su dominio

Analicemos el comportamiento de las funciones siguientes cuando $x \to 0$.

(a) $U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$

(b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$

Solución

(a) La función presentada en (a) tiene un *salto*: La **función escalón unitario** $U(x)$ no tiene límite a medida que $x \to 0$ ya que sus valores saltan en $x = 0$. Para valores negativos de x arbitrariamente cercanos a cero, $U(x) = 0$. Para valores positivos de x arbitrariamente cercanos a cero, $U(x) = 1$. No hay un único valor de L al que $U(x)$ se acerque cuando $U(x)$ como $x \to 0$ (figura 2.7a).

(b) La función presentada en (b) *crece demasiado*: $g(x)$ no tiene límite a medida que $x \to 0$ ya que los valores de g aumentan arbitrariamente en valor absoluto cuando $x \to 0$ y no permanecen cerca de *ningún* número real (figura 2.7b).

(c) La función presentada en (c) *oscila demasiado*: $f(x)$ no tiene límite a medida que $x \to 0$ ya que sus valores oscilan entre +1 y –1 en todo intervalo abierto que contenga a 0. Los valores no permanecen cerca de ningún número cuando $x \to 0$ (figura 2.7c). ■

Uso de calculadoras y computadoras para estimar límites

Las tablas 2.1 y 2.2 ilustran el uso de calculadoras o computadoras para calcular numéricamente un límite a medida que x se acerca cada vez más a x_0. Este procedimiento también podría ser útil para determinar los límites de funciones como los que se presentaron en el ejemplo 7 (llamadas funciones *continuas*; analizaremos este tipo de funciones en la sección 2.6). Sin embargo, las calculadoras y computadoras pueden dar *valores falsos y provocar impresiones engañosas* para funciones que no están definidas en un punto, o en los casos en los que no existe límite. El cálculo diferencial nos ayudará a determinar los valores reales cuando una calculadora o computadora provea información extraña o ambigua en relación con el comportamiento de una función cerca de algún punto (vea las secciones 4.4 y 4.6). Por el momento, lo único que hace falta es tener presente la posibilidad de que el uso de calculadoras o computadoras para aproximar el valor de un límite dé resultados erróneos. He aquí un ejemplo.

EJEMPLO 10 Adivinando un límite

Calcular el valor de $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2 + 100} - 10}{x^2}$.

Solución En la tabla 2.3 se listan los valores de la función para varios valores cercanos a $x = 0$. Cuando x se aproxima a 0 pasando por los valores ± 1, ± 0.5, ± 0.10 y ± 0.01, parece que la función se aproxima al número 0.05.

Al tomar valores aún más pequeños de x, ± 0.0005, ± 0.0001, ± 0.00001 y ± 0.000001, parece que la función se aproxima al número 0.

Entonces, ¿cuál es la respuesta? ¿Es 0.05, 0 o algún otro valor? Los valores obtenidos mediante calculadora o computadora son ambiguos, pero los teoremas de límites que se presentan en la siguiente sección nos confirmarán que el valor correcto del límite es

TABLA 2.3 Valores de la computadora de $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 100} - 10}{x^2}$ cerca de $x = 0$

x	$f(x)$	
± 1	0.049876	¿se aproxima a 0.05?
± 0.5	0.049969	
± 0.1	0.049999	
± 0.01	0.050000	
± 0.0005	0.080000	¿se aproxima a 0?
± 0.0001	0.000000	
± 0.00001	0.000000	
± 0.000001	0.000000	

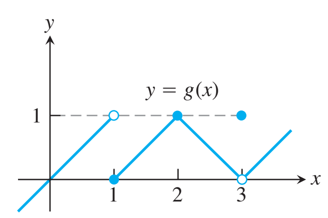
$0.05(= 1/20)$. Problemas de este tipo demuestran el poder que tiene el razonamiento matemático —una vez que se ha cultivado— sobre las conclusiones a las que podemos llegar a partir de unas cuantas observaciones. Ambos enfoques tienen ventajas y desventajas al momento de tratar de desentrañar la naturaleza de la realidad. ■

EJERCICIOS 2.1

Límites a partir de gráficas

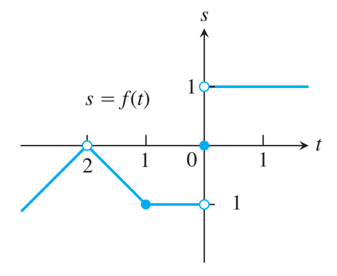
1. Determine los límites que se piden para la función $g(x)$, cuya gráfica se muestra a continuación, o explique por qué no existen.

a. $\lim_{x\to 1} g(x)$ **b.** $\lim_{x\to 2} g(x)$ **c.** $\lim_{x\to 3} g(x)$



2. Encuentre los límites que se piden para la función $f(t)$, cuya gráfica se muestra a continuación, o explique por qué no existen.

a. $\lim_{t\to -2} f(t)$ **b.** $\lim_{t\to -1} f(t)$ **c.** $\lim_{t\to 0} f(t)$



3. ¿Cuáles de las afirmaciones siguientes acerca de la función $y = f(x)$, cuya gráfica se muestra a continuación, son ciertas y cuáles son falsas?

a. $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe.

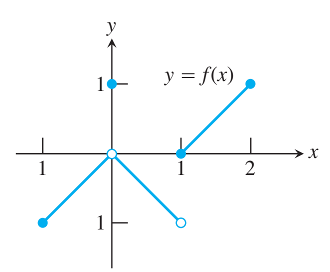
b. $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

c. $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.

d. $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$.

e. $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$.

f. $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existe en cualquier punto x_0 en $(-1, 1)$.



4. ¿Cuáles de las afirmaciones siguientes acerca de la función $y = f(x)$, cuya gráfica se muestra a continuación, son ciertas y cuáles son falsas?

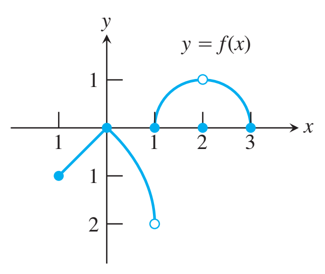
a. $\lim_{x\to 2} f(x)$ no existe.

b. $\lim_{x\to 2} f(x) = 2$.

c. $\lim_{x \to 1} f(x)$ no existe.

d. $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe en cualquier punto x_0 en (–1, 1).

e. $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe en cualquier punto x_0 en (1, 3).



Existencia de límites

En los ejercicios 5 y 6, explique por qué no existen los límites.

5. $\lim_{x \to 0} \frac{x}{|x|}$

6. $\lim_{x \to 1} \frac{1}{x - 1}$

7. Suponga que una función $f(x)$ está definida para todos los valores reales de x, excepto para $x = x_0$. ¿Qué puede decirse respecto de la existencia del $\lim_{x \to x_0} f(x)$? Justifique su respuesta.

8. Suponga que una función $f(x)$ está definida para toda x en [–1, 1]. ¿Qué puede decirse respecto de la existencia del $\lim_{x \to 0} f(x)$? Justifique su respuesta.

9. Si $\lim_{x \to 1} f(x) = 5$, ¿debe estar definida f en $x = 1$? De ser así, ¿debe $f(1) = 5$? ¿Es posible concluir *algo* respecto de los valores de f en $x = 1$? Explique.

10. Si $f(1) = 5$, ¿debe existir el $\lim_{x \to 1} f(x)$? De ser así, ¿debe el $\lim_{x \to 1} f(x)$? ¿Es posible concluir *algo* respecto del $\lim_{x \to 1} f(x) = 5$? Explique.

Estimación de límites

T Una calculadora gráfica podría serle útil para resolver los ejercicios 11 a 20.

11. Sea $f(x) = (x^2 - 9)/(x + 3)$.

a. Haga una tabla con los valores de f en los puntos $x = –3.1$, $–3.01$, $–3.001$ y así sucesivamente hasta donde lo permita su calculadora. Después estime $\lim_{x \to -3} f(x)$. ¿Qué estimaciones obtendría si evalúa f en $x = –2.9, –2.99, –2.999$...?

b. Apoye las conclusiones a las que llegó en el inciso (a) graficando f cerca de $x_0 = –3$, y emplee las funciones *Zoom* y *Trace* de su calculadora para estimar los valores de y en la gráfica cuando $x \to -3$.

c. Encuentre $\lim_{x \to -3} f(x)$ algebraicamente, como en el ejemplo 5.

12. Sea $g(x) = (x^2 - 2)/\left(x - \sqrt{2}\right)$.

a. Haga una tabla con los valores de g en los puntos $x = 1.4$, 1.41, 1.414 y así sucesivamente con todas las aproximaciones decimales de $\sqrt{2}$. Estime $\lim_{x \to \sqrt{2}} g(x)$.

b. Apoye las conclusiones a las que llegó en el inciso (a) graficando g cerca de $x_0 = \sqrt{2}$ y emplee las funciones *Zoom* y *Trace* de su calculadora para estimar los valores de y en la gráfica conforme $x \to \sqrt{2}$.

c. Encuentre $\lim_{x \to \sqrt{2}} g(x)$ algebraicamente.

13. Sea $G(x) = (x + 6)/(x^2 + 4x - 12)$.

a. Haga una tabla de los valores de G en $x = –5.9, –5.99, –5.999$ y así sucesivamente. Después estime $\lim_{x \to -6} G(x)$. ¿Qué resultados obtendría si en lugar de utilizar dichos puntos evaluara G en $x = –6.1, –6.01, –6.001$...?

b. Apoye las conclusiones a que llegó en el inciso (a) graficando G, y use las funciones *Zoom* y *Trace* de su calculadora para estimar los valores de y cuando $x \to -6$.

c. Encontrar algebraicamente $\lim_{x \to -6} G(x)$.

14. Sea $h(x) = (x^2 - 2x - 3)/(x^2 - 4x + 3)$.

a. Haga una tabla con los valores de h en $x = 2.9, 2.99, 2.999$ y así sucesivamente. Después estime $\lim_{x \to 3} h(x)$. ¿Qué resultados obtendría si evalúa h en $x = 3.1, 3.01, 3.001$...?

b. Apoye las conclusiones a las que llegó en el inciso (a) graficando h cerca de $x_0 = 3$, y emplee las funciones *Zoom* y *Trace* de su calculadora para estimar los valores de y cuando $x \to 3$.

c. Encuentre $\lim_{x \to 3} h(x)$ algebraicamente.

15. Sea $f(x) = (x^2 - 1)/(|x| - 1)$.

a. Haga una tabla para consignar los valores de f en los valores de x que se acercan a $x_0 = —1$, por abajo y por arriba. Después estime $\lim_{x \to -1} f(x)$.

b. Apoye las conclusiones a que llegó en el inciso (a) graficando f cerca de $x_0 = –1$, y use las funciones *Zoom* y *Trace* de su calculadora para estimar los valores de y cuando $x \to -1$.

c. Encuentre $\lim_{x \to -1} f(x)$ algebraicamente.

16. Sea $F(x) = (x^2 + 3x + 2)/(2 - |x|)$.

a. Haga una tabla para consignar los valores de F en los valores de x que se acercan a $x_0 = –2$ por abajo y por arriba. Después estime $\lim_{x \to -2} F(x)$.

b. Apoye las conclusiones a que llegó en el inciso (a) graficando F cerca de $x_0 = –2$, y emplee las funciones *Zoom* y *Trace* de su calculadora para estimar los valores de y cuando $x \to -2$.

c. Encuentre $\lim_{x \to -2} F(x)$ algebraicamente.

17. Sea $g(\theta) = (\text{sen}\,\theta)/\theta$.

a. Haga una tabla de los valores de g en los valores de θ que se acercan $\theta_0 = 0$ por abajo y por arriba. Después estime $\lim_{\theta \to 0} g(\theta)$.

b. Apoye las conclusiones a que llegó en el inciso (a) graficando g cerca de $\theta_0 = 0$.

18. Sea $G(t) = (1 - \cos t)/t^2$.

a. Haga una tabla para consignar los valores de G en los valores de t que se acercan a $t_0 = 0$ por abajo y por arriba. Después estime $\lim_{t \to 0} G(t)$.

b. Apoye las conclusiones a que llegó en el inciso (a) graficando G cerca de $t_0 = 0$.

19. Sea $f(x) = x^{1/(1-x)}$.

a. Haga una tabla para consignar los valores de f en los valores de x que se acercan a $x_0 = 1$ por abajo y por arriba. ¿Parece que f tiene un límite cuando $x \to 1$? De ser así, ¿cuál es dicho límite? Si su respuesta es negativa, explique por qué.

b. Apoye las conclusiones a las que llegó en el inciso (a) graficando f cerca de $x_0 = 1$.

20. Sea $f(x) = (3^x - 1)/x$.

a. Haga una tabla para consignar los valores de f en los valores de x que se acercan a $x_0 = 0$ por abajo y por arriba. ¿Parece que f tiene un límite cuando $x \to 0$? De ser así, ¿cuál es dicho límite? Si su respuesta es negativa, explique por qué.

b. Apoye las conclusiones a que llegó en el inciso (a) graficando f cerca de $x_0 = 0$.

Determinación de límites por sustitución

En los ejercicios 21 a 28, encuentre los límites por sustitución. *De ser posible, compruebe sus respuestas con una calculadora o computadora.*

21. $\lim_{x\to 2} 2x$

22. $\lim_{x\to 0} 2x$

23. $\lim_{x\to 1/3} (3x - 1)$

24. $\lim_{x\to 1} \dfrac{-1}{(3x-1)}$

25. $\lim_{x\to -1} 3x(2x - 1)$

26. $\lim_{x\to -1} \dfrac{3x^2}{2x-1}$

27. $\lim_{x\to \pi/2} x \operatorname{sen} x$

28. $\lim_{x\to \pi} \dfrac{\cos x}{1-\pi}$

Razones de cambio promedio

En los ejercicios 29 a 34, encuentre la razón de cambio promedio de la función en el intervalo o intervalos dados.

29. $f(x) = x^3 + 1$;

a. $[2, 3]$ **b.** $[-1, 1]$

30. $g(x) = x^2$;

a. $[-1, 1]$ **b.** $[-2, 0]$

31. $h(t) = \cot t$;

a. $[\pi/4, 3\pi/4]$ **b.** $[\pi/6, \pi/2]$

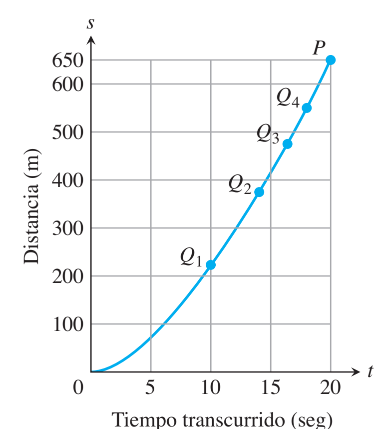
32. $g(t) = 2 + \cos t$;

a. $[0, \pi]$ **b.** $[-\pi, \pi]$

33. $R(\theta) = \sqrt{4\theta + 1}$; $[0, 2]$

34. $P(\theta) = \theta^3 - 4\theta^2 + 5\theta$; $[1, 2]$

35. Velocidad de un Ford Mustang Cobra La siguiente figura muestra la gráfica tiempo-distancia de un Ford Mustang Cobra 1994 acelerando desde el reposo.



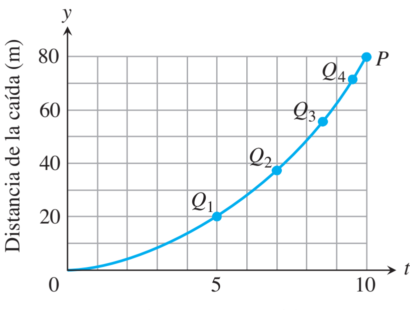
a. Estime las pendientes de las secantes PQ_1, PQ_2, PQ_3 y PQ_4, ordenándolas en una tabla como la de la figura 2.3. ¿Cuáles son las unidades apropiadas para estas pendientes?

b. Después, calcule la velocidad del Cobra en el tiempo $t = 20$ seg.

36. La siguiente figura muestra la gráfica de la distancia de caída contra el tiempo para un objeto que cae desde un módulo espacial que está a una distancia de 80 m de la superficie de la Luna.

a. Estime las pendientes de las secantes PQ_1, PQ_2, PQ_3 y PQ_4, ordenándolas en una tabla como la de la figura 2.3.

b. ¿Cuál será la velocidad del objeto al golpear la superficie?



T **37.** En la siguiente tabla se dan las utilidades de una pequeña empresa en cada uno de los primeros cinco años de operación:

Año	Utilidades en miles de $
1990	6
1991	27
1992	62
1993	111
1994	174

a. Trace los puntos que representan las utilidades como una función del año, y únalos con una curva suave.

b. ¿Cuál es la razón de incremento promedio de las utilidades entre 1992 y 1994?

c. Use su gráfica para estimar la razón en la que cambiaron las utilidades en 1992.

T **38.** Haga una tabla de valores para la función $F(x) = (x + 2)/(x - 2)$ en los puntos $x = 1.2$, $x = 11/10$, $x = 101/100$, $x = 1001/1000$, $x = 10001/10000$ y $x = 1$.

a. Encuentre la razón de cambio promedio de $F(x)$ en los intervalos $[1, x]$ para cada $x \neq 1$ usando su tabla.

b. Si es necesario, amplíe su tabla para tratar de determinar la razón de cambio de $F(x)$ en $x = 1$.

T **39.** Sea $g(x) = \sqrt{x}$ para $x \geq 0$.

a. Encuentre la razón de cambio promedio de $g(x)$ respecto de x en los intervalos $[1, 2]$, $[1, 1.5]$ y $[1, 1 + h]$.

b. Haga una tabla de valores de la razón de cambio promedio de g respecto de x en el intervalo $[1, 1 + h]$ para algunos valores

de h cercanos a cero, digamos $h = 0.1$, 0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001 y 0.000001.

c. De acuerdo con su tabla, ¿cuál es la razón de cambio de $g(x)$ respecto de x en $x = 1$?

d. Calcule el límite cuando h se aproxima a cero de la razón de cambio promedio de $g(x)$ respecto a x en el intervalo $[1, 1 + h]$.

T **40.** Sea $f(t) = 1/t$ para $t \neq 0$.

a. Encuentre la razón de cambio promedio de f respecto a t en los intervalos (i) de $t = 2$ a $t = 3$, y (ii) de $t = 2$ a $t = T$.

b. Haga una tabla de valores de la razón de cambio promedio de f respecto a t en el intervalo $[2, T]$ para algunos valores de T cercanos a 2, digamos T = 2.1, 2.01, 2.001, 2.0001, 2.00001 y 2.000001.

c. De acuerdo con su tabla, ¿cuál es la razón de cambio de f respecto a t en $t = 2$?

d. Calcule el límite conforme T se aproxima a 2 de la razón de cambio promedio de f respecto a t en el intervalo de 2 a T. Para sustituir $T = 2$ tendrá que realizar algunas operaciones algebraicas.

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

Estimaciones de límites mediante gráficas

En los ejercicios 41 a 46, use un software matemático para realizar los pasos siguientes:

a. Grafique la función al aproximarse al punto x_0.

b. Deduzca el valor del límite a partir de su gráfica.

41. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^4 - 16}{x - 2}$

42. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 - x^2 - 5x - 3}{(x + 1)^2}$

43. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1 + x} - 1}{x}$

44. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{\sqrt{x^2 + 7} - 4}$

45. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x \operatorname{sen} x}$

46. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^2}{3 - 3\cos x}$

2.2 Cálculo de límites mediante las leyes de los límites

ENSAYO HISTÓRICO*

Límites

En la sección 2.1 usamos gráficas y calculadoras para averiguar los valores de los límites. En esta sección se presentan los teoremas para calcular límites. Los primeros tres de ellos nos permiten llegar a los resultados del ejemplo 8 de la sección anterior, determinando límites de funciones polinomiales, funciones racionales y potencias. El cuarto y el quinto nos preparan para cálculos que se harán más adelante en el texto.

Las leyes de los límites

El teorema siguiente nos indica cómo calcular límites de funciones que son combinaciones aritméticas de otras cuyos límites ya se conocen.

TEOREMA 1 Leyes de los límites

Si L, M, c y k son números reales y

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to c} g(x) = M, \quad \text{entonces}$$

1. *Regla de la suma*: $\lim\limits_{x \to c} (f(x) + g(x)) = L + M$

El límite de la suma de dos funciones es la suma de sus límites.

2. *Regla de la diferencia*: $\lim\limits_{x \to c} (f(x) - g(x)) = L - M$

El límite de la diferencia de dos funciones es la diferencia de sus límites.

3. *Regla del producto*: $\lim\limits_{x \to c} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$

El límite del producto de dos funciones es el producto de sus límites.

*Para aprender más acerca de las figuras históricas y del desarrollo de los elementos y temas principales del cálculo, visite **www.aw-bc.com/thomas**.

4. *Regla del múltiplo constante:* $\lim_{x \to c} (k \cdot f(x)) = k \cdot L$

El límite de una constante multiplicada por una función es la constante por el límite de la función.

5. *Regla del cociente:* $\lim_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}, \quad M \neq 0$

El límite del cociente de dos funciones es el cociente de sus límites, siempre y cuando el límite del denominador sea distinto de cero.

6. *Regla de la potencia:* Si r y s son enteros sin factores comunes y $s \neq 0$, entonces

$$\lim_{x \to c} (f(x))^{r/s} = L^{r/s}$$

siempre y cuando $L^{r/s}$ sea un número real. (Si s es par, suponemos que $L > 0$).

El límite de una potencia racional de una función es el límite de la función elevado a esa potencia, siempre y cuando esta última sea un número real.

Es fácil convencernos de que las propiedades del teorema 1 son válidas (aunque estos argumentos intuitivos no constituyen una prueba de ello). De acuerdo con nuestra definición informal de límite, si x está suficientemente cerca de c, $f(x)$ está cerca de L y $g(x)$ está cerca de M. Por lo tanto, es razonable que $f(x) + g(x)$ esté cerca de $L + M$; que $f(x) - g(x)$ esté cerca de $L - M$; que $f(x)g(x)$ esté cerca de LM; que $kf(x)$ esté cerca de kL; y que $f(x)/g(x)$ esté cerca de L/M si M es distinto de cero. En la sección 2.3 probaremos la regla de la suma, basándonos en una definición más precisa de límite que se discutió antes. Las reglas 2-5 se comprueban en el apéndice 2. La regla 6 se prueba en textos más avanzados.

A continuación se dan algunos ejemplos en los que puede usarse el teorema 1 para encontrar los límites de funciones polinomiales y racionales.

EJEMPLO 1 Uso de las leyes de los límites

Usar las observaciones $\lim_{x \to c} k = k$ y $\lim_{x \to c} x = c$ (ejemplo 8 de la sección 2.1) y las propiedades de los límites para encontrar los siguientes límites.

(a) $\lim_{x \to c} (x^3 + 4x^2 - 3)$ **(b)** $\lim_{x \to c} \dfrac{x^4 + x^2 - 1}{x^2 + 5}$ **(c)** $\lim_{x \to -2} \sqrt{4x^2 - 3}$

Solución

(a) $\lim_{x \to c} (x^3 + 4x^2 - 3) = \lim_{x \to c} x^3 + \lim_{x \to c} 4x^2 - \lim_{x \to c} 3$ Reglas de la suma y la diferencia

$= c^3 + 4c^2 - 3$ Reglas del producto y el múltiplo

(b) $\lim_{x \to c} \dfrac{x^4 + x^2 - 1}{x^2 + 5} = \dfrac{\lim_{x \to c} (x^4 + x^2 - 1)}{\lim_{x \to c} (x^2 + 5)}$ Regla del cociente

$= \dfrac{\lim_{x \to c} x^4 + \lim_{x \to c} x^2 - \lim_{x \to c} 1}{\lim_{x \to c} x^2 + \lim_{x \to c} 5}$ Reglas de la suma y la diferencia

$= \dfrac{c^4 + c^2 - 1}{c^2 + 5}$ Regla de la potencia o el producto

(c) $$\begin{aligned}\lim_{x\to -2}\sqrt{4x^2-3} &= \sqrt{\lim_{x\to -2}(4x^2-3)} && \text{Regla de la potencia con } r/s = {}^1/_2\\ &= \sqrt{\lim_{x\to -2}4x^2-\lim_{x\to -2}3} && \text{Regla de la diferencia}\\ &= \sqrt{4(-2)^2-3} && \text{Reglas del producto y del múltiplo}\\ &= \sqrt{16-3}\\ &= \sqrt{13}\end{aligned}$$

■

Dos consecuencias del teorema 1 simplifican aún más la tarea de calcular límites de funciones polinomiales y funciones racionales. Para evaluar el límite de una función polinomial cuando x se aproxima a c, todo lo que tenemos que hacer es sustituir x por c en la fórmula de la función esto se debe a que estas funciones son continuas, propiedad que se discutirá más adelante. Para evaluar el límite de una función racional cuando x se aproxima a un punto c *cuyo denominador es distinto de cero*, sustituimos x por c en la fórmula de la función. (Vea los ejemplos 1a y 1b).

TEOREMA 2 Los límites de las funciones polinomiales pueden encontrarse por sustitución

Si $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, entonces

$$\lim_{x\to c} P(x) = P(c) = a_nc^n + a_{n-1}c^{n-1} + \cdots + a_0.$$

TEOREMA 3 Los límites de las funciones racionales pueden encontrarse por sustitución si el límite del denominador es distinto de cero

Si $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones polinomiales y $Q(c) \neq 0$, entonces

$$\lim_{x\to c}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}.$$

EJEMPLO 2 Límite de una función racional

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+4x^2-3}{x^2+5} = \frac{(-1)^3+4(-1)^2-3}{(-1)^2+5} = \frac{0}{6} = 0$$

Este resultado es similar al segundo límite del ejemplo 1, en donde $c = -1$, aunque en esta ocasión se llegó a él en un solo paso.

■

Identificación de factores comunes

Es posible comprobar que si $Q(x)$ es una función polinomial y $Q(c) = 0$, entonces $(x - c)$ es un factor de $Q(x)$. Por lo tanto, si tanto el numerador como el denominador de una función racional de x son iguales a cero en $x = c$, tienen como factor común a $(x - c)$.

Eliminación algebraica de denominadores iguales a cero

El teorema 3 es aplicable únicamente si el denominador de la función racional es distinto de cero en el punto límite c. Si el denominador es igual a cero, eliminar los factores comunes en el numerador y el denominador puede reducir la fracción de manera que ésta ya no sea igual a cero en c. Si esto ocurre, es posible encontrar el límite por sustitución en la fracción simplificada.

EJEMPLO 3 Eliminación de un factor común

Evaluar

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-x}.$$

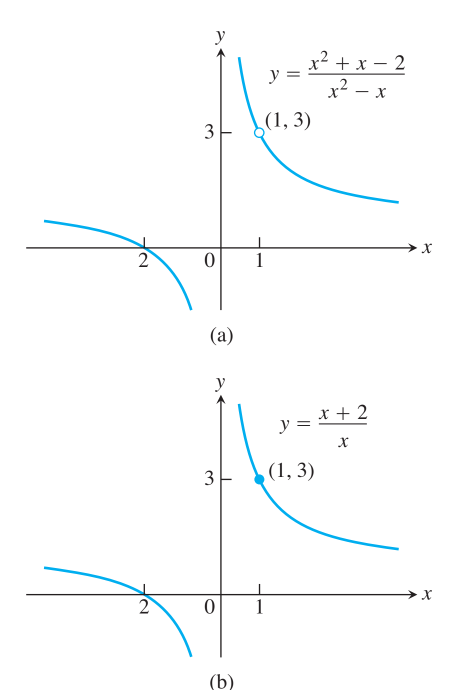


FIGURA 2.8 La gráfica de $f(x) = (x^2 + x - 2)/(x^2 - x)$ de la parte (a) es la misma gráfica de $g(x) = (x + 2)/x$ de la parte (b), excepto en el punto $x = 1$, donde f no está definida. Las funciones tienen el mismo límite conforme $x \to 1$ (ejemplo 3).

Solución No podemos sustituir $x = 1$, ya que obtendríamos un denominador igual a cero. Por otro lado, evaluamos el numerador en $x = 1$ para ver si también es igual a cero. Lo es, así que tiene a $(x - 1)$ como factor común con el denominador. Al eliminar $(x - 1)$ obtenemos una fracción más simple con los mismos valores que la original para $x \neq 1$:

$$\frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = \frac{(x - 1)(x + 2)}{x(x - 1)} = \frac{x + 2}{x}, \qquad \text{si } x \neq 1.$$

Usando la fracción más simple, encontramos por sustitución el límite de estos valores cuando $x \to 1$:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = \lim_{x \to 1} \frac{x + 2}{x} = \frac{1 + 2}{1} = 3.$$

Vea la figura 2.8. ■

EJEMPLO 4 Crear y eliminar un factor común

Evaluar

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2 + 100} - 10}{x^2}.$$

Solución Éste es el límite que consideramos en el ejemplo 10 de la sección anterior. No podemos sustituir $x = 0$, y el numerador y el denominador no tienen factores comunes obvios. Podemos crear un factor común multiplicando ambos, numerador y denominador, por la expresión $\sqrt{x^2 + 100} + 10$ (que se obtiene al cambiar el signo que aparece después de la raíz cuadrada). Para racionalizar el numerador utilizamos primero propiedades algebraicas:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{x^2 + 100} - 10}{x^2} &= \frac{\sqrt{x^2 + 100} - 10}{x^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 100} + 10}{\sqrt{x^2 + 100} + 10} \\
&= \frac{x^2 + 100 - 100}{x^2\left(\sqrt{x^2 + 100} + 10\right)} \\
&= \frac{x^2}{x^2\left(\sqrt{x^2 + 100} + 10\right)} && \text{Factor común } x^2 \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 100} + 10}. && \text{Eliminar } x^2 \text{ para } x \neq 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2 + 100} - 10}{x^2} &= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 100} + 10} \\
&= \frac{1}{\sqrt{0^2 + 100} + 10} && \text{Denominador distinto de 0 en } x = 0\text{; sustituir} \\
&= \frac{1}{20} = 0.05.
\end{aligned}$$

Estos cálculos dan la respuesta correcta, a diferencia de los resultados ambiguos que obtuvimos utilizando una computadora o calculadora en el ejemplo 10 de la sección anterior. ■

El teorema del sandwich

El teorema siguiente nos permitirá calcular una variedad de límites en los capítulos subsecuentes. Se le conoce como Teorema del sandwich, porque se refiere a una función f cuyos

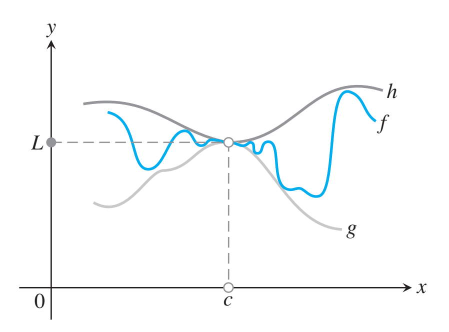


FIGURA 2.9 La gráfica de *f* está entre las gráficas de *g* y *h*.

valores están entre los valores de otras dos funciones *g* y *h* que tienen el mismo límite *L* en el punto *c*. Al estar "atrapados" entre los valores de dos funciones que se acercan a *L*, los valores de *f* también deben acercarse a *L* (figura 2.9). En el apéndice 2 se encuentra una demostración.

> **TEOREMA 4 El teorema del sandwich**
> Supongamos que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para toda x en algún intervalo abierto que contenga a c, excepto posiblemente en el mismo $x = c$. Supongamos también que
> $$\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L.$$
> Entonces, $\lim_{x\to c} f(x) = L$.

Algunas veces al teorema del sándwich se le conoce también como teorema del emparedado.

EJEMPLO 5 Aplicación del teorema del sandwich

Dado que

$$1 - \frac{x^2}{4} \leq u(x) \leq 1 + \frac{x^2}{2} \qquad \text{para todo } x \neq 0,$$

encontrar $\lim_{x\to 0} u(x)$, sin importar que tan complicado sea u.

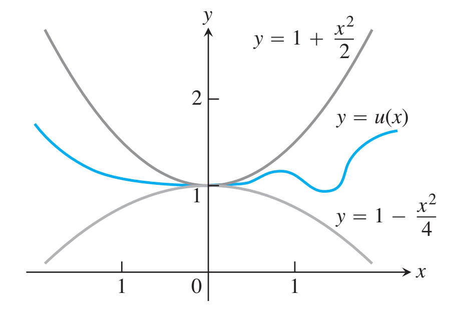


FIGURA 2.10 Cualquier función $u(x)$ cuya gráfica está en la región entre $y = 1 + (x^2/2)$ y $y = 1 - (x^2/4)$ tiene límite 1 conforme $x \to 0$ (ejemplo 5).

Solución Como

$$\lim_{x\to 0}(1 - (x^2/4)) = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0}(1 + (x^2/2)) = 1,$$

el teorema del sandwich implica que $\lim_{x\to 0} u(x) = 1$ (figura 2.10). ■

EJEMPLO 6 Más aplicaciones del teorema del sandwich

(a) (Figura 2.11a). De acuerdo con la definición de sen θ, sabemos que $-|\theta| \leq \operatorname{sen} \theta \leq |\theta|$ para toda θ, y como $\lim_{\theta\to 0}(-|\theta|) = \lim_{\theta\to 0}|\theta| = 0$, tenemos que

$$\lim_{\theta\to 0} \operatorname{sen} \theta = 0.$$

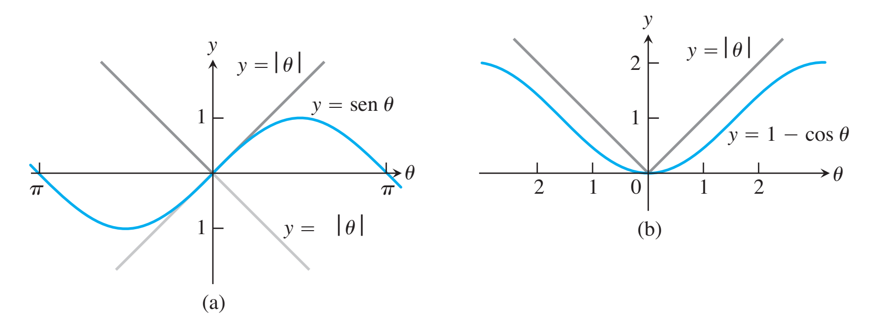


FIGURA 2.11 El teorema del sandwich confirma que (a) $\lim_{\theta\to 0} \operatorname{sen} \theta = 0$ y (b) $\lim_{\theta\to 0}(1 - \cos \theta) = 0$ (ejemplo 6).

(b) (Figura 2.11b). De acuerdo con la definición de $\cos\theta$, $0 \leq 1 - \cos\theta \leq |\theta|$ para toda θ, y tenemos que $\lim_{\theta\to 0}(1 - \cos\theta) = 0$ o

$$\lim_{\theta\to 0} \cos\theta = 1.$$

(c) Para cualquier función $f(x)$, si $\lim_{x\to c}|f(x)| = 0$, entonces $\lim_{x\to c} f(x) = 0$. El argumento $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ y $-|f(x)|$ y $|f(x)|$ tiene límite 0 cuando $x \to c$. ■

En el teorema 5 se hace referencia a otra importante propiedad de los límites. En la siguiente sección se hará la comprobación correspondiente.

TEOREMA 5 Si $f(x) \leq g(x)$ para toda x en algún intervalo abierto que contenga a c, excepto posiblemente en el mismo $x = c$, y existen los límites de f y g cuando x se aproxima a c, entonces

$$\lim_{x\to c} f(x) \leq \lim_{x\to c} g(x).$$

Si sustituimos el signo menor o igual que $\leq$ por la desigualdad estricta $<$ la afirmación del teorema 5 resulta falsa. En la figura 2.11a se muestra que para $\theta \neq 0$, $-|\theta| < \operatorname{sen}\theta < |\theta|$, pero en el límite la igualdad sigue siendo válida cuando $\theta \to 0$.

EJERCICIOS 2.2

Cálculo de límites

Encuentre los límites solicitados en los ejercicios 1 a 18.

1. $\lim_{x\to -7}(2x + 5)$
2. $\lim_{x\to 12}(10 - 3x)$
3. $\lim_{x\to 2}(-x^2 + 5x - 2)$
4. $\lim_{x\to -2}(x^3 - 2x^2 + 4x + 8)$
5. $\lim_{t\to 6} 8(t - 5)(t - 7)$
6. $\lim_{s\to 2/3} 3s(2s - 1)$
7. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x + 3}{x + 6}$
8. $\lim_{x\to 5} \dfrac{4}{x - 7}$
9. $\lim_{y\to -5} \dfrac{y^2}{5 - y}$
10. $\lim_{y\to 2} \dfrac{y + 2}{y^2 + 5y + 6}$
11. $\lim_{x\to -1} 3(2x - 1)^2$
12. $\lim_{x\to -4}(x + 3)^{1984}$
13. $\lim_{y\to -3}(5 - y)^{4/3}$
14. $\lim_{z\to 0}(2z - 8)^{1/3}$
15. $\lim_{h\to 0} \dfrac{3}{\sqrt{3h + 1} + 1}$
16. $\lim_{h\to 0} \dfrac{5}{\sqrt{5h + 4} + 2}$
17. $\lim_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{3h + 1} - 1}{h}$
18. $\lim_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{5h + 4} - 2}{h}$

Encuentre los límites solicitados en los ejercicios 19 a 36.

19. $\lim_{x\to 5} \dfrac{x - 5}{x^2 - 25}$
20. $\lim_{x\to -3} \dfrac{x + 3}{x^2 + 4x + 3}$
21. $\lim_{x\to -5} \dfrac{x^2 + 3x - 10}{x + 5}$
22. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 7x + 10}{x - 2}$
23. $\lim_{t\to 1} \dfrac{t^2 + t - 2}{t^2 - 1}$
24. $\lim_{t\to -1} \dfrac{t^2 + 3t + 2}{t^2 - t - 2}$
25. $\lim_{x\to -2} \dfrac{-2x - 4}{x^3 + 2x^2}$
26. $\lim_{y\to 0} \dfrac{5y^3 + 8y^2}{3y^4 - 16y^2}$
27. $\lim_{u\to 1} \dfrac{u^4 - 1}{u^3 - 1}$
28. $\lim_{v\to 2} \dfrac{v^3 - 8}{v^4 - 16}$
29. $\lim_{x\to 9} \dfrac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$
30. $\lim_{x\to 4} \dfrac{4x - x^2}{2 - \sqrt{x}}$
31. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x - 1}{\sqrt{x + 3} - 2}$
32. $\lim_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x^2 + 8} - 3}{x + 1}$
33. $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2 + 12} - 4}{x - 2}$
34. $\lim_{x\to -2} \dfrac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 5} - 3}$

35. $\lim_{x\to -3} \dfrac{2-\sqrt{x^2-5}}{x+3}$

36. $\lim_{x\to 4} \dfrac{4-x}{5-\sqrt{x^2+9}}$

Aplicación de las reglas de los límites

37. Suponga que $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ y $\lim_{x\to 0} g(x) = -5$. Señale qué reglas del teorema 1 se usan para realizar los pasos (a), (b) y (c) del cálculo siguiente.

$$\lim_{x\to 0} \frac{2f(x)-g(x)}{(f(x)+7)^{2/3}} = \frac{\lim_{x\to 0}(2f(x)-g(x))}{\lim_{x\to 0}(f(x)+7)^{2/3}} \quad \text{(a)}$$

$$= \frac{\lim_{x\to 0} 2f(x) - \lim_{x\to 0} g(x)}{\left(\lim_{x\to 0}\left(f(x)+7\right)\right)^{2/3}} \quad \text{(b)}$$

$$= \frac{2\lim_{x\to 0} f(x) - \lim_{x\to 0} g(x)}{\left(\lim_{x\to 0} f(x) + \lim_{x\to 0} 7\right)^{2/3}} \quad \text{(c)}$$

$$= \frac{(2)(1)-(-5)}{(1+7)^{2/3}} = \frac{7}{4}$$

38. Sean $\lim_{x\to 1} h(x) = 5$, $\lim_{x\to 1} p(x) = 1$ y $\lim_{x\to 1} r(x) = 2$. Señale qué reglas del teorema 1 se usan para realizar los pasos (a), (b) y (c) del cálculo siguiente.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{5h(x)}}{p(x)(4-r(x))} = \frac{\lim_{x\to 1}\sqrt{5h(x)}}{\lim_{x\to 1}(p(x)(4-r(x)))} \quad \text{(a)}$$

$$= \frac{\sqrt{\lim_{x\to 1} 5h(x)}}{\left(\lim_{x\to 1} p(x)\right)\left(\lim_{x\to 1}\left(4-r(x)\right)\right)} \quad \text{(b)}$$

$$= \frac{\sqrt{5\lim_{x\to 1} h(x)}}{\left(\lim_{x\to 1} p(x)\right)\left(\lim_{x\to 1} 4 - \lim_{x\to 1} r(x)\right)} \quad \text{(c)}$$

$$= \frac{\sqrt{(5)(5)}}{(1)(4-2)} = \frac{5}{2}$$

39. Suponga que $\lim_{x\to c} f(x) = 5$ y $\lim_{x\to c} g(x) = -2$. Encuentre

a. $\lim_{x\to c} f(x)g(x)$ **b.** $\lim_{x\to c} 2f(x)g(x)$

c. $\lim_{x\to c} (f(x) + 3g(x))$ **d.** $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{f(x)-g(x)}$

40. Suponga que $\lim_{x\to 4} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to 4} g(x) = -3$. Encuentre

a. $\lim_{x\to 4} (g(x) + 3)$ **b.** $\lim_{x\to 4} xf(x)$

c. $\lim_{x\to 4} (g(x))^2$ **d.** $\lim_{x\to 4} \dfrac{g(x)}{f(x)-1}$

41. Suponga que $\lim_{x\to b} f(x) = 7$ y $\lim_{x\to b} g(x) = -3$. Encuentre

a. $\lim_{x\to b} (f(x) + g(x))$ **b.** $\lim_{x\to b} f(x)\cdot g(x)$

c. $\lim_{x\to b} 4g(x)$ **d.** $\lim_{x\to b} f(x)/g(x)$

42. Suponga que $\lim_{x\to -2} p(x) = 4$, $\lim_{x\to -2} r(x) = 0$, y $\lim_{x\to -2} s(x) = -3$. Encuentre

a. $\lim_{x\to -2} (p(x) + r(x) + s(x))$

b. $\lim_{x\to -2} p(x)\cdot r(x)\cdot s(x)$

c. $\lim_{x\to -2} (-4p(x) + 5r(x))/s(x)$

Límites de razones de cambio promedio

Debido a la relación que existe entre rectas secantes, tangentes y razones instantáneas, los límites de la forma

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

aparecen frecuentemente en cálculo. En los ejercicios 43 a 48, evalúe este límite para el valor de x dado y la función f.

43. $f(x) = x^2$, $x = 1$ **44.** $f(x) = x^2$, $x = -2$

45. $f(x) = 3x - 4$, $x = 2$ **46.** $f(x) = 1/x$, $x = -2$

47. $f(x) = \sqrt{x}$, $x = 7$ **48.** $f(x) = \sqrt{3x+1}$, $x = 0$

Aplicación del teorema del sandwich

49. Si $\sqrt{5-2x^2} \le f(x) \le \sqrt{5-x^2}$ para $-1 \le x \le 1$, encuentre $\lim_{x\to 0} f(x)$.

50. Si $2 - x^2 \le g(x) \le 2\cos x$ para toda x, encuentre $\lim_{x\to 0} g(x)$.

51. **a.** Se puede probar que las desigualdades

$$1 - \frac{x^2}{6} < \frac{x \operatorname{sen} x}{2 - 2\cos x} < 1$$

son válidas para toda x cercana a cero. ¿Esto nos indica algo acerca del

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{2-2\cos x}?$$

Justifique su respuesta.

T **b.** Grafique

$$y = 1 - (x^2/6),\ y = (x \operatorname{sen} x)/(2 - 2\cos x) \ \text{ y } y = 1$$

en una misma gráfica para $-2 \le x \le 2$. Comente el comportamiento de las gráficas cuando $x \to 0$.

52. **a.** Suponga que las desigualdades

$$\frac{1}{2} - \frac{x^2}{24} < \frac{1-\cos x}{x^2} < \frac{1}{2}$$

son válidas para toda x cercana a cero. (Sí, son válidas, tal como comprobaremos en la sección 11.9). ¿Qué nos indica esto acerca del

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}?$$

Justifique su respuesta.

b. Grafique en una misma gráfica las ecuaciones $y = (1/2) - (x^2/24)$, $y = (1 - \cos x)/x^2$ y $y = 1/2$ para $-2 \le x \le 2$. Comente el comportamiento de las gráficas conforme $x \to 0$.

Teoría y ejemplos

53. Si $x^4 \leq f(x) \leq x^2$ para x en $[-1, 1]$ y $x^2 \leq f(x) \leq x^4$ para $x < -1$ y $x > 1$, ¿en qué puntos c sabemos automáticamente que $\lim_{x\to c} f(x)$? ¿Qué se puede decir respecto al valor del límite en esos puntos?

54. Suponga que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para toda $x \neq 2$, y que

$$\lim_{x\to 2} g(x) = \lim_{x\to 2} h(x) = -5.$$

¿Puede concluirse algo acerca de los valores de f, g y h en $x = 2$? ¿Es posible que $f(2) = 0$? ¿Es posible que $\lim_{x\to 2} f(x) = 0$? Justifique sus respuestas

55. Si $\lim_{x\to 4} \dfrac{f(x) - 5}{x - 2} = 1$, encuentre $\lim_{x\to 4} f(x)$.

56. Si $\lim_{x\to -2} \dfrac{f(x)}{x^2} = 1$, encuentre

a. $\lim_{x\to -2} f(x)$ **b.** $\lim_{x\to -2} \dfrac{f(x)}{x}$

57. **a.** Si $\lim_{x\to 2} \dfrac{f(x) - 5}{x - 2} = 3$, encuentre $\lim_{x\to 2} f(x)$.

b. Si $\lim_{x\to 2} \dfrac{f(x) - 5}{x - 2} = 4$, encuentre $\lim_{x\to 2} f(x)$.

58. Si $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^2} = 1$, encuentre

a. $\lim_{x\to 0} f(x)$ **b.** $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x}$

T **59.** **a.** Grafique $g(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$ para estimar $\lim_{x\to 0} g(x)$, acercándose al origen tanto como sea necesario.

b. Confirme con una prueba el resultado que obtuvo en el inciso (a).

T **60.** **a.** Grafique $h(x) = x^2 \cos(1/x^3)$ para estimar $\lim_{x\to 0} h(x)$, acercándose al origen tanto como sea necesario.

b. Confirme mediante una prueba el resultado que obtuvo en el inciso (a).

2.3 La definición formal de límite

Ahora que entendemos un poco mejor el concepto de límite habiendo trabajado intuitivamente a partir de su definición informal, concentraremos nuestra atención en su definición precisa. Para ello, reemplazaremos las frases vagas como “se acerca arbitrariamente a” que utilizamos en la definición informal, con condiciones específicas que pueden aplicarse a cualquier ejemplo particular. Gracias a la definición formal seremos capaces de realizar pruebas rigurosas sobre las propiedades de los límites que se analizaron en la sección anterior, y podremos establecer otros límites específicos importantes para el estudio del cálculo.

Para comprobar que el límite de $f(x)$ cuando $x \to x_0$ es igual al número L, necesitamos probar primero que la brecha entre $f(x)$ y L puede hacerse “tan pequeña como queramos” si x se mantiene lo “suficientemente cerca” de x_0. Veamos cómo podemos conseguir esto si especificamos el tamaño de la diferencia entre $f(x)$ y L.

EJEMPLO 1 Una función lineal

Considerar la función $y = 2x - 1$ cerca de $x_0 = 4$. Desde el punto de vista intuitivo, resulta evidente que y está cerca de 7 cuando x está cerca de 4, así que $\lim_{x\to 4}(2x - 1) = 7$. Sin embargo, ¿qué tan cerca debe estar x de $x_0 = 4$ para que $y = 2x - 1$ difiera de 7, digamos por menos de 2 unidades?

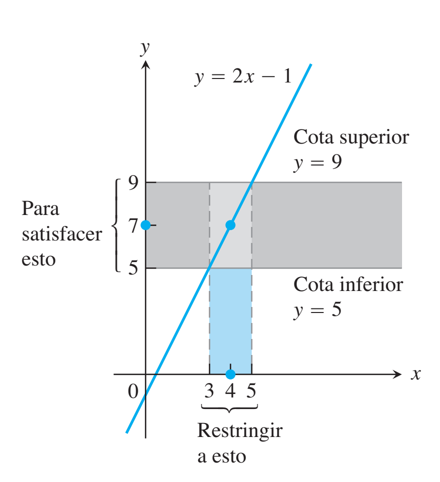


FIGURA 2.12 Al mantener x a 1 unidad de $x_0 = 4$ mantendremos y a 2 unidades de $y_0 = 7$.

Solución Podemos preguntarnos: ¿para qué valores de x, es $|y - 7| < 2$? Para encontrar la respuesta, primero expresamos $|y - 7|$ en términos de x:

$$|y - 7| = |(2x - 1) - 7| = |2x - 8|.$$

Entonces, la pregunta se convierte en: ¿qué valores de x, cercanos a 4, satisfacen la desigualdad $|2x - 8| < 2$? Para encontrarlos resolvemos la desigualdad:

$$\begin{aligned} |2x - 8| &< 2 \\ -2 < 2x - 8 &< 2 \\ 6 < 2x &< 10 \\ 3 < x &< 5 \\ -1 < x - 4 &< 1. \end{aligned}$$

Al mantener x a una unidad o menos de $x_0 = 4$, mantendremos y a 2 unidades o menos de $y_0 = 7$ (figura 2.12). ■

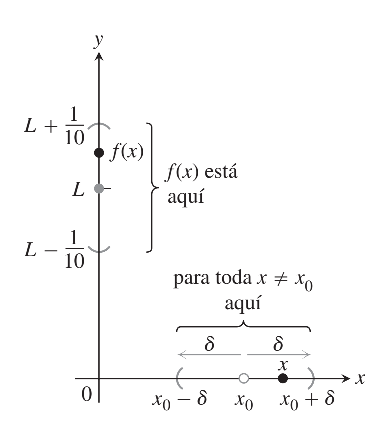


FIGURA 2.13 ¿Cómo podemos definir $\delta > 0$ de manera que, tomando x en el intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $f(x)$ se mantenga dentro del intervalo $\left(L - \frac{1}{10}, L + \frac{1}{10}\right)$?

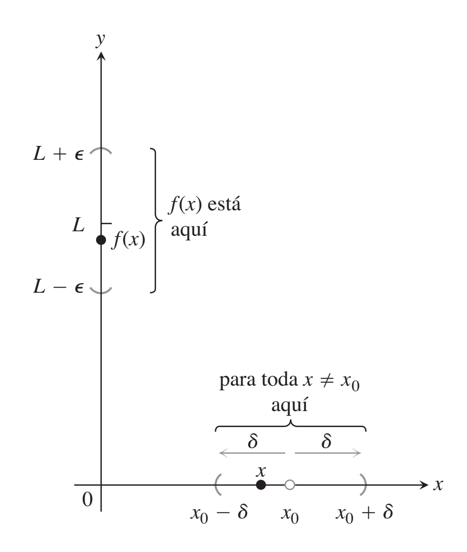


FIGURA 2.14 La relación entre δ y ϵ en la definición de límite.

En el ejemplo anterior determinamos qué tan cerca debe estar x de un valor particular de x_0 para asegurarnos de que los resultados $f(x)$ de alguna función están dentro del intervalo prescrito alrededor del valor límite L. Para comprobar que el límite de $f(x)$ cuando $x \longrightarrow x_0$ en realidad es igual a L, debemos ser capaces de probar que la diferencia entre $f(x)$ y L puede hacerse menor que *cualquier error prescrito*, sin importar cuán pequeño sea éste, tomando a x lo suficientemente cerca de x_0.

Definición de límite

Suponga que estamos viendo los valores de una función $f(x)$ cuando x se aproxima a x_0 (sin tomar en cuenta el valor del mismo x_0). Ciertamente nos interesa poder decir que $f(x)$ permanece a una décima de unidad de L tan pronto como x está a una distancia δ de x_0 (figura 2.13). Pero esto no es suficiente en sí mismo, ya que, a medida que x continúa su camino hacia x_0 ¿qué impediría que $f(x)$ oscilara en el intervalo de $L - (1/10)$ a $L + (1/10)$ sin tender hacia L?

Se nos podría decir que el error no puede ser mayor que 1/100 o 1/1000 o 1/100,000. Cada vez encontramos un nuevo intervalo δ alrededor de x_0, de manera que manteniendo a x dentro de ese intervalo se satisface el nuevo error de tolerancia. Y siempre existe la posibilidad de que $f(x)$ oscile alejándose de L en algún momento.

Las figuras de la siguiente página ilustran el problema. Podríamos comparar esta situación con una discusión entre un escéptico y un académico. El escéptico presenta ϵ-reto para probar que el límite no existe, o más precisamente, que hay lugar a dudas; el académico contesta a cada ϵ reto con un δ intervalo alrededor de x_0.

¿Cómo podemos acabar con esta serie de retos y respuestas aparentemente interminable? Probando que para todo error de tolerancia ϵ que pueda generar el escéptico, es posible encontrar, calcular o conjeturar una distancia δ correspondiente que mantenga a x "lo suficientemente cerca" de x_0 para que $f(x)$ esté dentro del rango de tolerancia de L (figura 2.14). Esto nos lleva a la definición formal de límite.

DEFINICIÓN Límite de una función

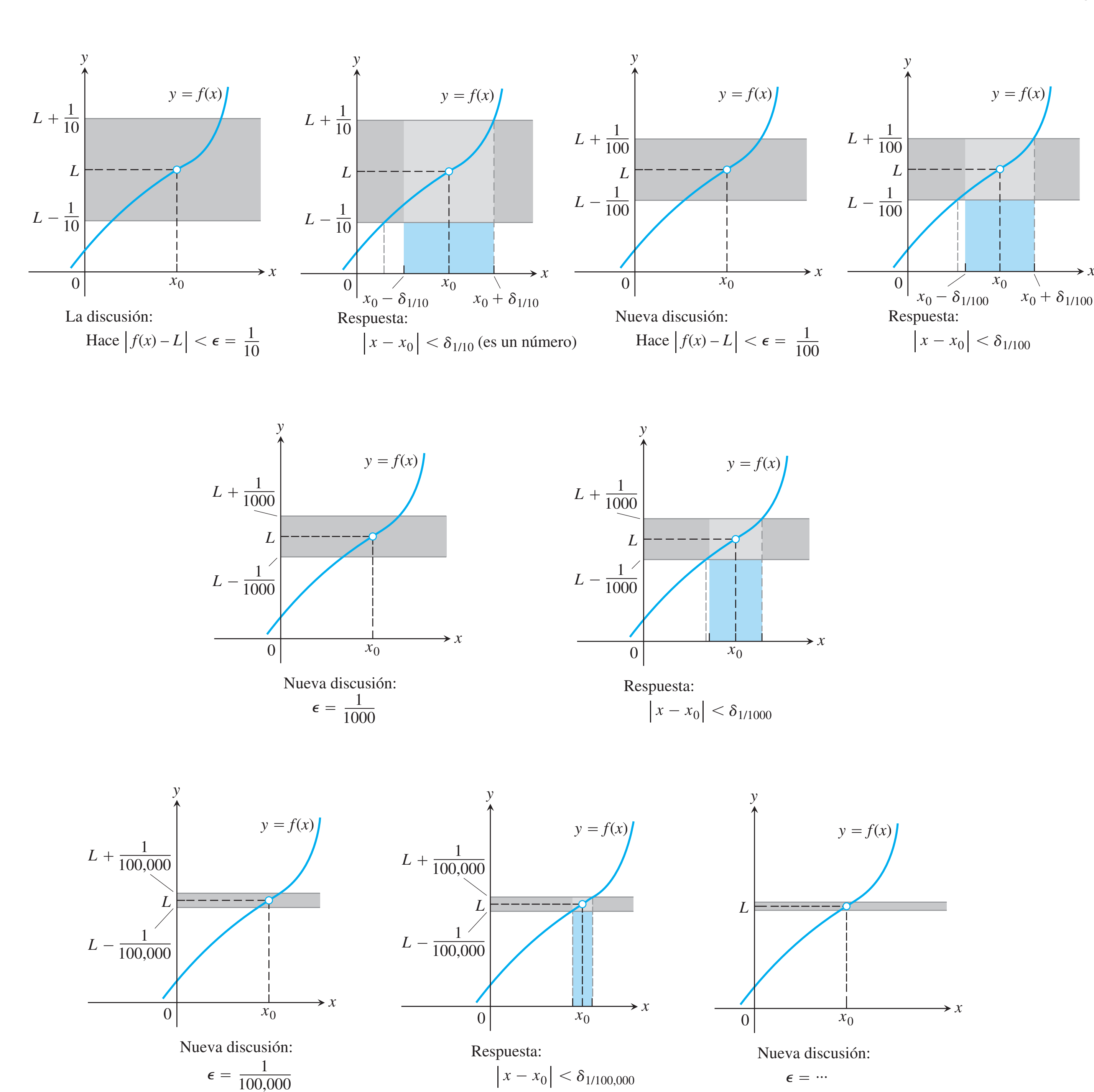
Sea $f(x)$ definida en un intervalo abierto alrededor de x_0, excepto posiblemente el mismo x_0. Decimos que el **límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a x_0 es el número L,** y escribimos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

si, para cada número $\epsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ correspondiente tal que, para toda x,

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon.$$

Una manera de interpretar esta definición, consiste en suponer que estamos operando un taladro de precisión y que deseamos hacer un orificio de diámetro L, pero como nada es perfecto, debemos darnos por satisfechos con un diámetro $f(x)$ entre los valores $L - \epsilon$ y $L + \epsilon$. La δ es la medida de qué tan preciso debe ser nuestro control para garantizar este grado de exactitud en el diámetro del orificio. Observe que, a medida que la tolerancia de error se haga más estricta, tal vez tengamos que ajustar δ. Esto es, el valor de δ —que determina qué tan estricto debe ser nuestro control—, depende del valor de ϵ, que es la tolerancia de error.



Ejemplos: comprobación de la definición

La definición formal de límite no nos dice cómo encontrar el límite de una función, pero nos permite verificar si el cálculo de un límite es correcto. Los siguientes ejemplos muestran cómo puede usarse la definición para verificar los límites de funciones específicas. (Los primeros dos ejemplos corresponden a partes de los ejemplos 7 y 8 de la sección 2.1). Sin embargo, el propósito real de la definición no es hacer cálculos como éstos, sino comprobar teoremas generales de manera que los cálculos de límites específicos puedan simplificarse.

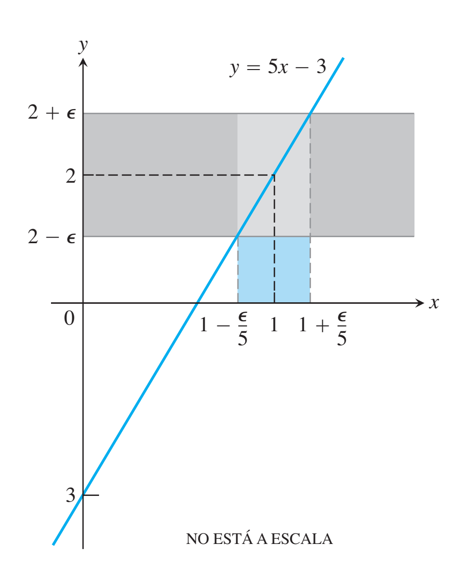


FIGURA 2.15 Si $f(x) = 5x - 3$, $0 < |x - 1| < \epsilon/5$ garantiza que $|f(x) - 2| < \epsilon$ (ejemplo 2).

EJEMPLO 2 Comprobación de la definición

Probar que

$$\lim_{x \to 1} (5x - 3) = 2.$$

Solución Sean $x_0 = 1$, $f(x) = 5x - 3$ y $L = 2$ en la definición de límite. Para cualquier $\epsilon > 0$, dada, debemos encontrar una $\delta > 0$ conveniente, de manera que si $x \neq 1$ y x está a una distancia menor que δ de $x_0 = 1$, es decir, siempre que

$$0 < |x - 1| < \delta,$$

es cierto que $f(x)$ está a una distancia menor que ϵ de $L = 2$, de modo que

$$|f(x) - 2| < \epsilon.$$

Para determinar δ, trabajamos hacia atrás a partir de la desigualdad ϵ:

$$\begin{aligned} |(5x - 3) - 2| = |5x - 5| &< \epsilon \\ 5|x - 1| &< \epsilon \\ |x - 1| &< \epsilon/5. \end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos tomar $\delta = \epsilon/5$ (figura 2.15). Si $0 < |x - 1| < \delta = \epsilon/5$, entonces

$$|(5x - 3) - 2| = |5x - 5| = 5|x - 1| < 5(\epsilon/5) = \epsilon,$$

lo que prueba que $\lim_{x \to 1}(5x - 3) = 2$.

El valor de $\delta = \epsilon/5$ no es el único que hará que $0 < |x - 1| < \delta$ implique $|5x - 5| < \epsilon$. Cualquier δ positiva menor lo hará. La definición no exige encontrar la "mejor" δ positiva, sino simplemente una que funcione. ■

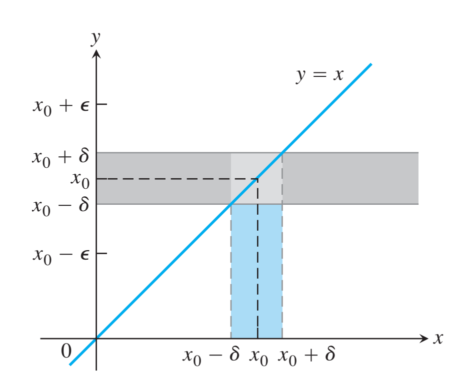


FIGURA 2.16 Para la función $f(x) = x$, encontramos que $0 < |x - x_0| < \delta$ garantizará que $|f(x) - x_0| < \epsilon$ siempre y cuando $\delta \leq \epsilon$ (ejemplo 3a).

EJEMPLO 3 Límites de las funciones identidad y constante

Probar que:

(a) $\lim_{x \to x_0} x = x_0$ **(b)** $\lim_{x \to x_0} k = k$ (k constante).

Solución

(a) Sea $\epsilon > 0$ dado. Debemos encontrar $\delta > 0$ tal que para toda x

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \text{implique} \quad |x - x_0| < \epsilon.$$

La implicación será válida si δ es igual a ϵ o a cualquier número positivo menor (figura 2.16). Esto prueba que $\lim_{x \to x_0} x = x_0$.

(b) Sea $\epsilon > 0$ dado. Debemos encontrar $\delta > 0$ tal que para toda x

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \text{implique} \quad |k - k| < \epsilon.$$

Como $k - k = 0$, podemos usar cualquier número positivo para δ, y la implicación será válida (figura 2.17). Esto prueba que $\lim_{x \to x_0} k = k$. ■

Determinación algebraica de una delta para épsilon dado

En los ejemplos 2 y 3, el intervalo de valores alrededor de x_0 para los que $|f(x) - L|$ era menor que ϵ, era simétrico alrededor de x_0, lo que nos permitió considerar que δ fuera

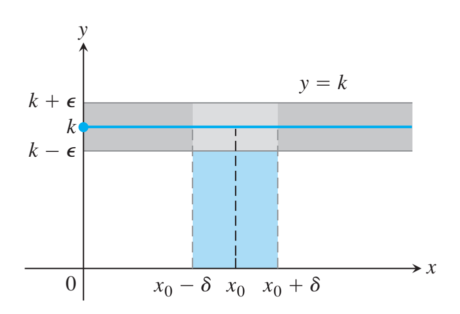


FIGURA 2.17 Para la función $f(x) = k$ encontramos que $|f(x) - k| < \epsilon$ para cualquier positiva δ (ejemplo 3b).

equivalente a la mitad de la longitud de ese intervalo. Cuando no existe tal simetría —lo cual es bastante común—, podemos tomar δ como la distancia entre x_0 y el extremo *más cercano* al intervalo.

EJEMPLO 4 Determinación algebraica de delta

Para el límite $\lim_{x\to 5}\sqrt{x-1} = 2$, encontrar una $\delta > 0$ que funcione para $\epsilon = 1$. Esto es, encontrar una $\delta > 0$ tal que para toda x

$$0 < |x - 5| < \delta \quad \Rightarrow \quad |\sqrt{x-1} - 2| < 1.$$

Solución Organizaremos la búsqueda en dos pasos, como se explica a continuación.

1. *Resolver la desigualdad* $|\sqrt{x-1} - 2| < 1$ *para encontrar un intervalo que contenga a* $x_0 = 5$, *en donde la desigualdad se satisfaga para toda* $x \neq x_0$.

$$|\sqrt{x-1} - 2| < 1$$
$$-1 < \sqrt{x-1} - 2 < 1$$
$$1 < \sqrt{x-1} < 3$$
$$1 < x - 1 < 9$$
$$2 < x < 10$$

La desigualdad se satisface para toda x en el intervalo abierto (2, 10), de manera que también se satisface para toda $x \neq 5$ en este intervalo (vea la figura 2.19).

2. *Encontrar un valor de* $\delta > 0$ *para colocar el intervalo centrado* $5 - \delta < x < 5 + \delta$ (con centro en $x_0 = 5$) *dentro del intervalo* (2, 10). La distancia entre 5 y el extremo más cercano de (2, 10) es 3 (figura 2.18). Si tomamos $\delta = 3$ o a cualquier número positivo menor, la desigualdad $0 < |x - 5| < \delta$ colocará automáticamente a x entre 2 y 10 para hacer que $|\sqrt{x-1} - 2| < 1$ (figura 2.19)

$$0 < |x - 5| < 3 \quad \Rightarrow \quad |\sqrt{x-1} - 2| < 1.$$

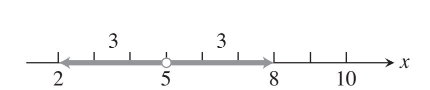


FIGURA 2.18 Un intervalo abierto de radio 3 alrededor de $x_0 = 5$ estará en el intervalo abierto (2, 10).

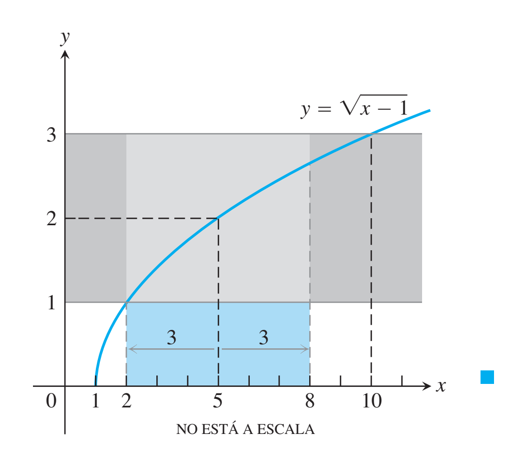


FIGURA 2.19 La función y los intervalos del ejemplo 4.

Cómo encontrar δ algebraicamente para f, L, x_0 y $\epsilon > 0$ dados

El proceso para encontrar una $\delta > 0$ tal que para toda x

$$0 < |x - x_0| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - L| < \epsilon$$

puede llevarse a cabo en dos pasos.

1. *Resolver la desigualdad* $|f(x) - L| < \epsilon$ para encontrar un intervalo abierto (a, b) que contenga a x_0 en el que la desigualdad se satisfaga para toda $x \neq x_0$.
2. *Encontrar un valor de* $\delta > 0$ que coloque el intervalo abierto $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ centrado en x_0 dentro del intervalo (a, b). La desigualdad $|f(x) - L| < \epsilon$ se cumplirá para toda $x \neq x_0$ en este δ intervalo.

EJEMPLO 5 Determinación algebraica de delta

Probar que $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$ si

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 2 \\ 1, & x = 2. \end{cases}$$

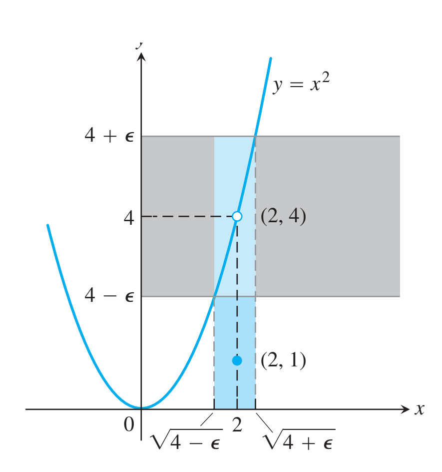


FIGURA 2.20 Un intervalo que contiene $x = 2$, de manera que la función del ejemplo 5 satisface $|f(x) - 4| < \epsilon$.

Solución Nuestra tarea consiste en probar que dado $\epsilon > 0$, existe una $\delta > 0$ tal que para toda x

$$0 < |x - 2| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - 4| < \epsilon.$$

1. *Resolver la desigualdad* $|f(x) - 4| < \epsilon$ *para encontrar un intervalo abierto que contenga a* $x_0 = 2$ *en el que la desigualdad se satisfaga para toda* $x \neq x_0$.

Para $x \neq x_0 = 2$, tenemos que $f(x) = x^2$, y la desigualdad a resolver es $|x^2 - 4| < \epsilon$:

$$|x^2 - 4| < \epsilon$$

$$-\epsilon < x^2 - 4 < \epsilon$$

$$4 - \epsilon < x^2 < 4 + \epsilon$$

$$\sqrt{4 - \epsilon} < |x| < \sqrt{4 + \epsilon}$$ Suponga que $\epsilon < 4$; vea abajo.

$$\sqrt{4 - \epsilon} < x < \sqrt{4 + \epsilon}.$$ Un intervalo abierto alrededor de $x_0 = 2$ que resuelve la desigualdad

La desigualdad $|f(x) - 4| < \epsilon$ se satisface para toda $x \neq 2$ en el intervalo abierto $\left(\sqrt{4 - \epsilon}, \sqrt{4 + \epsilon}\right)$ (figura 2.20).

2. *Encontrar un valor de* $\delta > 0$ *que coloque el intervalo centrado* $(2 - \delta, 2 + \delta$ *dentro del intervalo* $\left(\sqrt{4 - \epsilon}, \sqrt{4 + \epsilon}\right)$.

Sea δ la distancia de entre $x_0 = 2$ y el extremo más cercano de $\left(\sqrt{4 - \epsilon}, \sqrt{4 + \epsilon}\right)$. En otras palabras, tomamos $\delta = \text{mín}\left\{2 - \sqrt{4 - \epsilon}, \sqrt{4 + \epsilon} - 2\right\}$, es decir, el *mínimo* (el más pequeño) de los dos números $2 - \sqrt{4 - \epsilon}$ y $\sqrt{4 + \epsilon} - 2$. Son δ tiene éste o cualquier valor menor positivo, la desigualdad $0 < |x - 2| < \delta$ colocará automáticamente a x entre $\sqrt{4 - \epsilon}$ y $\sqrt{4 + \epsilon}$ para hacer que $|f(x) - 4| < \epsilon$. Para toda x,

$$0 < |x - 2| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - 4| < \epsilon.$$

Esto completa la prueba.

¿A qué se debe que sea correcto suponer que $\epsilon < 4$? A que al buscar una δ tal que para toda x, $x, 0 < |x - 2| < \delta$ implique $|f(x) - 4| < \epsilon < 4$, encontramos una δ que también funcionaría para cualquier ϵ más grande.

Por último, observe la libertad que obtenemos al tomar $\delta = \min\left\{2 - \sqrt{4 - \epsilon}, \sqrt{4 + \epsilon} - 2\right\}$. De esta forma ya no tenemos que perder tiempo en decidir cuál de los dos números es menor. Simplemente representamos el menor mediante δ y continuamos para concluir el argumento. ■

Uso de la definición para comprobar teoremas

Casi nunca se emplea la definición de límite para verificar límites específicos como los que se presentaron en los ejemplos anteriores. Para ello resultan más útiles los teoremas generales sobre límites, en particular los teoremas de la sección 2.2. La definición se utiliza, más bien, para probar dichos teoremas (como lo haremos en el apéndice 2). A manera de ejemplo, probaremos la parte 1 del teorema 1, es decir, la regla de la suma.

EJEMPLO 6 Comprobación de la regla para el límite de una suma

Dado que $\lim_{x \to c} f(x) = L$ y $\lim_{x \to c} g(x) = M$, probar que

$$\lim_{x \to c} (f(x) + g(x)) = L + M.$$

Solución Sea $\epsilon > 0$ dado. Queremos encontrar un número positivo δ tal que para toda x

$$0 < |x - c| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) + g(x) - (L + M)| < \epsilon.$$

Reagrupando términos obtenemos

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x) - (L + M)| &= |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \\ &\leq |f(x) - L| + |g(x) - M|. \end{aligned}$$

Desigualdad del triángulo: $|a + b| \leq |a| + |b|$

Como $\lim_{x \to c} f(x) = L$, existe un número $\delta_1 > 0$ tal que para toda x

$$0 < |x - c| < \delta_1 \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - L| < \epsilon/2.$$

De manera similar, como $\lim_{x \to c} g(x) = M$, existe un número $\delta_2 > 0$ tal que para toda x

$$0 < |x - c| < \delta_2 \qquad \Rightarrow \qquad |g(x) - M| < \epsilon/2.$$

Sea $\delta = \text{mín}\,\{\delta_1, \delta_2\}$ el menor de δ_1 y δ_2, Si $0 < |x - c| < \delta$, entonces $|x - c| < \delta_1$, de manera que $|f(x) - L| < \epsilon/2$, y $|x - c| < \delta_2$, de manera que $|g(x) - M| < \epsilon/2$. Por lo tanto,

$$|f(x) + g(x) - (L + M)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Esto demuestra que $\lim_{x \to c} (f(x) + g(x)) = L + M$. ■

Comprobemos también el teorema 5 de la sección 2.2.

EJEMPLO 7 Dado que $\lim_{x \to c} f(x) = L$ y $\lim_{x \to c} g(x) = M$, y que $f(x) \leq g(x)$ para toda x en un intervalo abierto que contiene a c (excepto posiblemente la misma c), probar que $L \leq M$.

Solución Usaremos el método de prueba por contradicción. En otras palabras, supondremos lo contrario de lo que se afirma, es decir, que $L > M$. Entonces, de acuerdo con la propiedad del límite de una diferencia del teorema 1,

$$\lim_{x \to c} (g(x) - f(x)) = M - L.$$

En consecuencia, para cualquier $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|(g(x) - f(x)) - (M - L)| < \epsilon \qquad \text{siempre que} \quad 0 < |x - c| < \delta.$$

Como, por hipótesis, $L - M > 0$, tomamos $\epsilon = L - M$ en particular, y tenemos un número $\delta > 0$ tal que

$$|(g(x) - f(x)) - (M - L)| < L - M \qquad \text{siempre que} \quad 0 < |x - c| < \delta.$$

Como $a \leq |a|$ para cualquier número a, tenemos que

$$(g(x) - f(x)) - (M - L) < L - M \qquad \text{siempre que} \quad 0 < |x - c| < \delta$$

que se simplifica en

$$g(x) < f(x) \qquad \text{siempre que} \quad 0 < |x - c| < \delta.$$

Pero esto contradice $f(x) \leq g(x)$. Por lo tanto, la desigualdad $L > M$ debe ser falsa. En consecuencia, $L \leq M$. ■

EJERCICIOS 2.3

Centrar intervalos en torno a un punto

En los ejercicios 1 a 6, trace el intervalo (a, b) en el eje x, colocando el punto x_0 en el interior. Después encuentre un valor de $\delta > 0$ tal que para toda x, $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow a < x < b$.

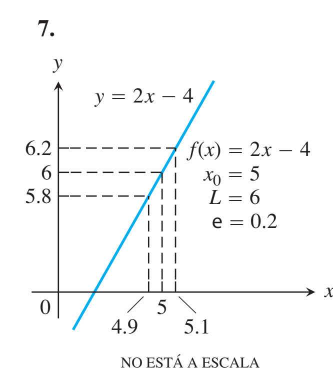
1. $a = 1, \quad b = 7, \quad x_0 = 5$
2. $a = 1, \quad b = 7, \quad x_0 = 2$
3. $a = -7/2, \quad b = -1/2, \quad x_0 = -3$
4. $a = -7/2, \quad b = -1/2, \quad x_0 = -3/2$
5. $a = 4/9, \quad b = 4/7, \quad x_0 = 1/2$
6. $a = 2.7591, \quad b = 3.2391, \quad x_0 = 3$

Determinación gráfica de deltas

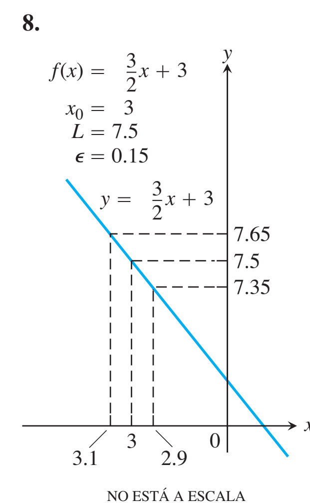
En los ejercicios 7 a 14, use las gráficas para encontrar una $\delta > 0$ tal que para toda x

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon.$$

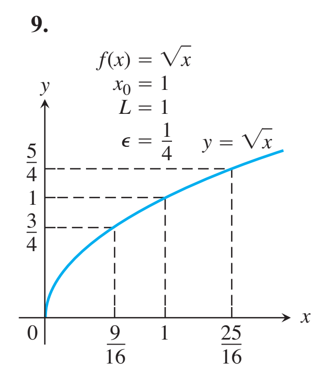
7.



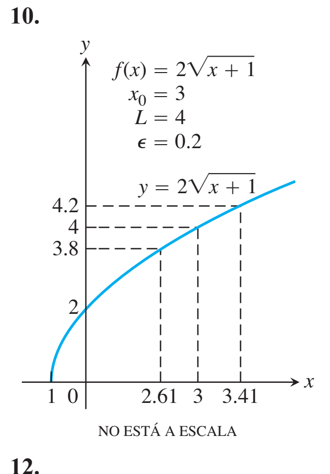
8.



9.

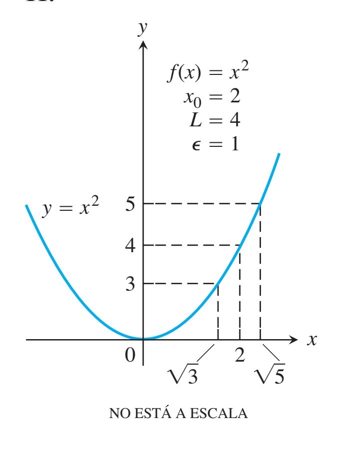


10.

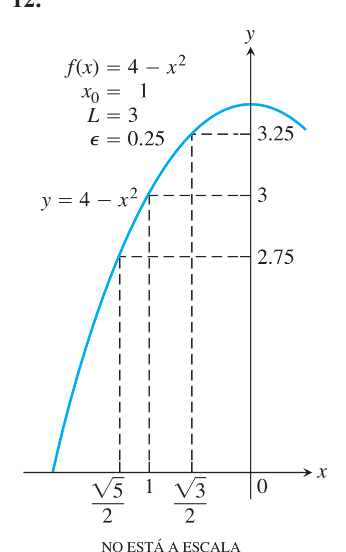


11.

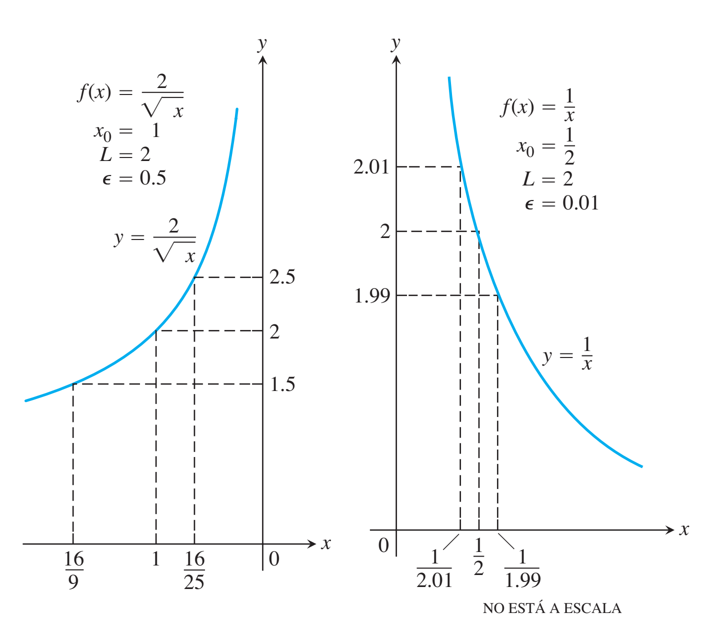




12.



13. **14.**



Determinación algebraica de deltas

En cada uno de los ejercicios 15 a 30 se dan una función $f(x)$ y los números L, x_0 y $\epsilon > 0$. Encuentre, en cada caso, un intervalo abierto alrededor de x_0 en donde se cumpla la desigualdad $|f(x) - L| < \epsilon$. Después dé un valor para $\delta > 0$ tal que para toda x que satisfaga $0 < |x - x_0| < \delta$ se cumpla la desigualdad $|f(x) - L| < \epsilon$.

15. $f(x) = x + 1, \quad L = 5, \quad x_0 = 4, \quad \epsilon = 0.01$

16. $f(x) = 2x - 2, \quad L = -6, \quad x_0 = -2, \quad \epsilon = 0.02$

17. $f(x) = \sqrt{x + 1}, \quad L = 1, \quad x_0 = 0, \quad \epsilon = 0.1$

18. $f(x) = \sqrt{x}, \quad L = 1/2, \quad x_0 = 1/4, \quad \epsilon = 0.1$

19. $f(x) = \sqrt{19 - x}, \quad L = 3, \quad x_0 = 10, \quad \epsilon = 1$

20. $f(x) = \sqrt{x - 7}, \quad L = 4, \quad x_0 = 23, \quad \epsilon = 1$

21. $f(x) = 1/x, \quad L = 1/4, \quad x_0 = 4, \quad \epsilon = 0.05$

22. $f(x) = x^2, \quad L = 3, \quad x_0 = 2\sqrt{3}, \quad \epsilon = 0.1$

23. $f(x) = x^2, \quad L = 4, \quad x_0 = -2, \quad \epsilon = 0.5$

24. $f(x) = 1/x, \quad L = -1, \quad x_0 = -1, \quad \epsilon = 0.1$

25. $f(x) = x^2 - 5, \quad L = 11, \quad x_0 = 4, \quad \epsilon = 1$

26. $f(x) = 120/x, \quad L = 5, \quad x_0 = 24, \quad \epsilon = 1$

27. $f(x) = mx, \quad m > 0, \quad L = 2m, \quad x_0 = 2, \quad \epsilon = 0.03$

28. $f(x) = mx, \quad m > 0, \quad L = 3m, \quad x_0 = 3,$
$\epsilon = c > 0$

29. $f(x) = mx + b, \quad m > 0, \quad L = (m/2) + b,$
$x_0 = 1/2, \quad \epsilon = c > 0$

30. $f(x) = mx + b, \quad m > 0, \quad L = m + b, \quad x_0 = 1,$
$\epsilon = 0.05$

Más ejercicios con límites formales

En cada uno de los ejercicios 31 a 36 se da una función $f(x)$, un punto x_0 y un número positivo ϵ. Encuentre $L = \lim_{x \to x_0} f(x)$. Después encuentre un número $\delta > 0$ tal que para toda x

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon.$$

31. $f(x) = 3 - 2x, \quad x_0 = 3, \quad \epsilon = 0.02$

32. $f(x) = -3x - 2, \quad x_0 = -1, \quad \epsilon = 0.03$

33. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, \quad x_0 = 2, \quad \epsilon = 0.05$

34. $f(x) = \dfrac{x^2 + 6x + 5}{x + 5}, \quad x_0 = -5, \quad \epsilon = 0.05$

35. $f(x) = \sqrt{1 - 5x}, \quad x_0 = -3, \quad \epsilon = 0.5$

36. $f(x) = 4/x, \quad x_0 = 2, \quad \epsilon = 0.4$

Pruebe los límites de los ejercicios 37 a 50.

37. $\lim_{x \to 4} (9 - x) = 5$

38. $\lim_{x \to 3} (3x - 7) = 2$

39. $\lim_{x \to 9} \sqrt{x - 5} = 2$

40. $\lim_{x \to 0} \sqrt{4 - x} = 2$

41. $\lim_{x \to 1} f(x) = 1 \quad \text{si} \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$

42. $\lim_{x \to -2} f(x) = 4 \quad \text{si} \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq -2 \\ 1, & x = -2 \end{cases}$

43. $\lim_{x \to 1} \dfrac{1}{x} = 1$

44. $\lim_{x \to \sqrt{3}} \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{3}$

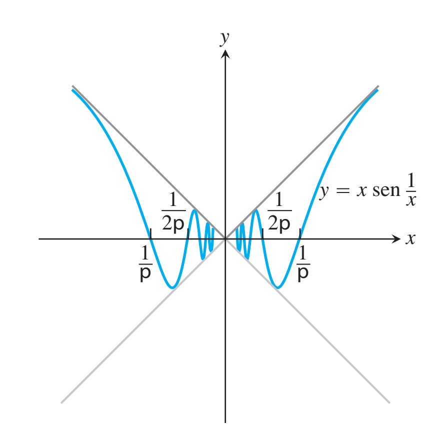
45. $\lim_{x \to -3} \dfrac{x^2 - 9}{x + 3} = -6$

46. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$

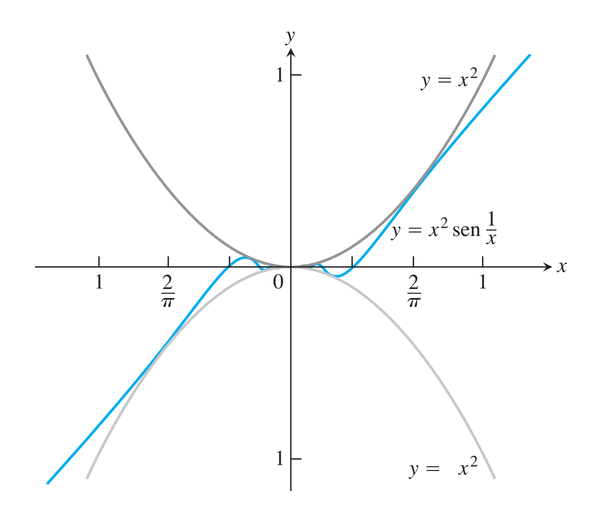
47. $\lim_{x \to 1} f(x) = 2 \quad \text{si} \quad f(x) = \begin{cases} 4 - 2x, & x < 1 \\ 6x - 4, & x \geq 1 \end{cases}$

48. $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 \quad \text{si} \quad f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 0 \\ x/2, & x \geq 0 \end{cases}$

49. $\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} = 0$



50. $\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$



Teoría y ejemplos

51. Explique qué significa afirmar que $\lim_{x\to 0} g(x) = k$.

52. Pruebe que $\lim_{x\to c} f(x) = L$ si y sólo si $\lim_{h\to 0} f(h + c) = L$.

53. Una afirmación errónea acerca de límites Compruebe mediante un ejemplo que la afirmación siguiente es incorrecta:

El número L es el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a x_0 si $f(x)$ se acerca más a L a medida que x se aproxima a x_0.

Explique por qué la función de su ejemplo no tiene el valor L dado como un límite conforme $x \to x_0$.

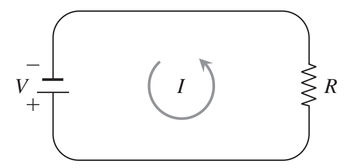
54. Otra afirmación incorrecta acerca de límites Compruebe mediante un ejemplo que la afirmación siguiente es incorrecta:

El número L es el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a x_0 si, dada cualquier $\epsilon > 0$, existe un valor de x para el que $|f(x) - L| < \epsilon$.

Explique por qué la función de su ejemplo no tiene el valor L dado como un límite conforme $x \to x_0$.

T **55. Fabricación de cilindros** Antes de solicitar la fabricación de cilindros para motor de automóvil con un área transversal de 9 pulg^2, usted necesita saber qué tanta desviación respecto del diámetro ideal del cilindro (que es de $x_0 = 3.385$ pulgadas) puede permitir para obtener un área con un error menor que 0.01 pulg^2 a partir de las 9 pulg^2 requeridas. Para averiguarlo, defina $A = \pi(x/2)^2$ y busque un intervalo x para hacer que $|A - 9| \leq 0.01$. ¿Cuál es ese intervalo?

56. Fabricación de resistencias eléctricas La ley de Ohm para circuitos eléctricos como el que se muestra en la figura siguiente, establece que $V = RI$. En la ecuación, V es una constante de voltaje, en volts, I es la corriente, en amperes, y R es la resistencia, en ohms. A la empresa en donde usted trabaja le han pedido que sustituya las resistencias por un circuito en donde V sea de 120 voltios, e I sea de 5 ± 0.1 amperes. ¿En qué intervalo debe encontrarse R para que I esté a menos de 1 ampere del valor $I_0 = 5$?



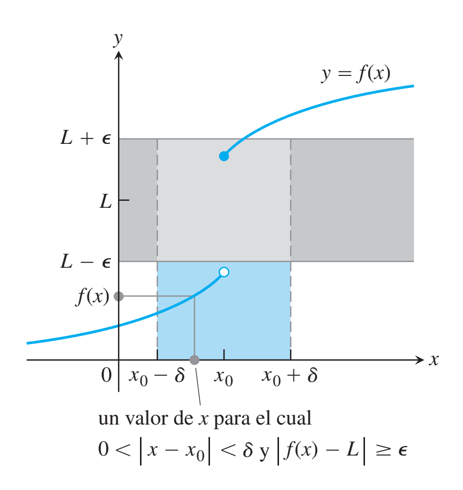
¿Qué ocurre cuando un número L no es el límite de $f(x)$ cuando $x \to x_0$?

Podemos probar que $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq L$ proporcionando una $\epsilon > 0$ tal que ninguna $\delta > 0$ satisfaga la condición

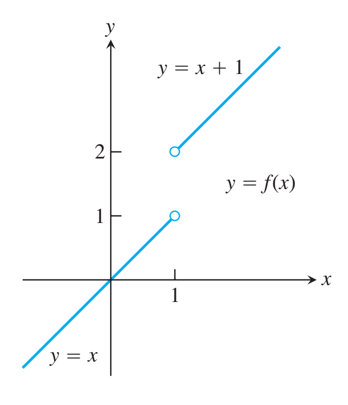
$$\text{Para toda } x, \quad 0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon.$$

A fin de lograr lo anterior para nuestro candidato ϵ probando que para cada $\delta > 0$ existe un valor de x tal que

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \text{y} \quad |f(x) - L| \geq \epsilon.$$



57. Sea $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ x + 1, & x > 1. \end{cases}$



a. Sea $\epsilon = 1/2$. Demuestre que ninguna posible $\delta > 0$ satisface la condición siguiente:

$$\text{Para toda } x, \quad 0 < |x - 1| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - 2| < 1/2.$$

Esto es, para cada $\delta > 0$, compruebe que hay un valor de x tal que

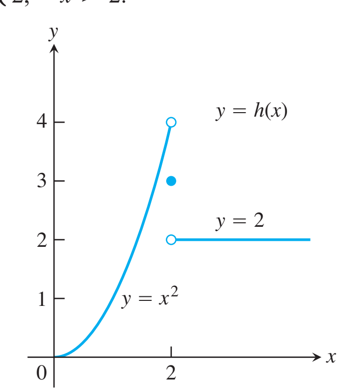
$$0 < |x - 1| < \delta \quad \text{y} \quad |f(x) - 2| \geq 1/2.$$

Esto probará que $\lim_{x \to 1} f(x) \neq 2$.

b. Demuestre que $\lim_{x \to 1} f(x) \neq 1$.

c. Compruebe que $\lim_{x \to 1} f(x) \neq 1.5$.

58. Sea $h(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2 \\ 3, & x = 2 \\ 2, & x > 2. \end{cases}$



Compruebe que

a. $\lim_{x \to 2} h(x) \neq 4$

b. $\lim_{x \to 2} h(x) \neq 3$

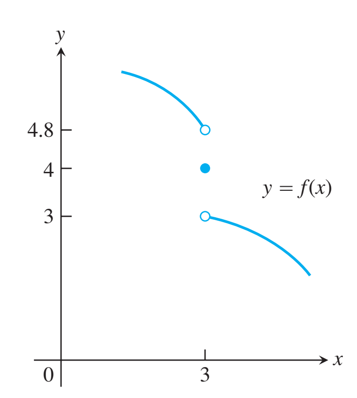
c. $\lim_{x \to 2} h(x) \neq 2$

59. A partir de la función cuya gráfica se muestra aquí, explique por qué

a. $\lim_{x \to 3} f(x) \neq 4$

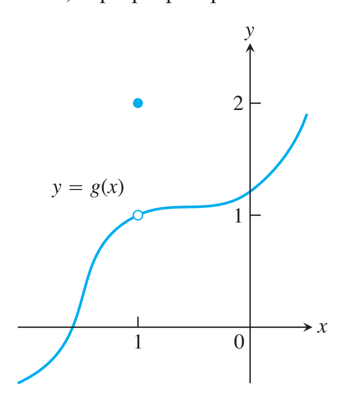
b. $\lim_{x \to 3} f(x) \neq 4.8$

c. $\lim_{x \to 3} f(x) \neq 3$



60. **a.** A partir de la función cuya gráfica se muestra aquí, demuestre que $\lim_{x \to -1} g(x) \neq 2$.

b. ¿Existirá $\lim_{x \to -1} g(x)$? Si es el caso, ¿cuál es el valor del límite? Si no existe, explique por qué.



EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

En los ejercicios 61 a 66, usted explorará con más detalle la determinación gráfica de delta. Use un software matemático para realizar los pasos siguientes:

a. Grafique la función $y = f(x)$ cerca del punto x_0 al que se quiere aproximar.

b. Suponga cuál es el valor del límite L, y después evalúe simbólicamente el límite para ver si su suposición es correcta.

c. Utilizando el valor $\epsilon = 0.2$, trace en la misma gráfica las rectas de la banda $y_1 = L - \epsilon$ y $y_2 = L + \epsilon$ junto con la función f cerca de x_0.

d. A partir de la gráfica obtenida en el inciso (c), estime una $\delta > 0$ tal que para toda x

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon.$$

Compruebe su estimación graficando f, y_1 y y_2 en el intervalo $0 < |x - x_0| < \delta$. Use $x_0 - 2\delta \leq x \leq x_0 + 2\delta$ y $L - 2\epsilon \leq y \leq L + 2\epsilon$ para establecer el tamaño de su pantalla de visualización. Si algún valor de la función está fuera del intervalo $[L - \epsilon, L + \epsilon]$, significa que eligió una δ demasiado grande. Inténtelo nuevamente con una estimación menor.

e. Repita sucesivamente los pasos indicados en los incisos (c) y (d) para $\epsilon = 0.1$, 0.05 y 0.001.

61. $f(x) = \dfrac{x^4 - 81}{x - 3}, \quad x_0 = 3$

62. $f(x) = \dfrac{5x^3 + 9x^2}{2x^5 + 3x^2}, \quad x_0 = 0$

63. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{3x}, \quad x_0 = 0$

64. $f(x) = \dfrac{x(1 - \cos x)}{x - \operatorname{sen} x}, \quad x_0 = 0$

65. $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}, \quad x_0 = 1$

66. $f(x) = \dfrac{3x^2 - (7x + 1)\sqrt{x} + 5}{x - 1}, \quad x_0 = 1$

2.4 Límites laterales y límites al infinito

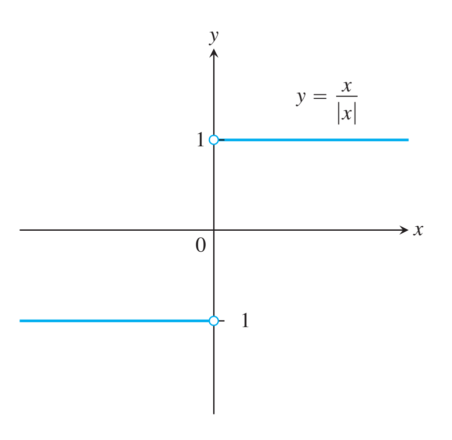


FIGURA 2.21 Límites laterales derecho e izquierdo, diferentes en el origen.

En esta sección ampliaremos el concepto de límite para abordar los *límites laterales*, que son aquellos que se dan solamente a medida que x se aproxima únicamente por la izquierda al número x_0 (donde $x < x_0$) o únicamente por la derecha (donde $x > x_0$). También analizaremos las gráficas de ciertas funciones racionales, así como otras funciones con el comportamiento de límite cuando $x \to \pm\infty$.

Límites laterales

Para que una función f tenga límite L cuando x se aproxima a c, debe estar definida a *ambos lados* de c, y los valores de $f(x)$ deben aproximarse a L a medida que x se aproxima a c. Debido a ello, los límites ordinarios se llaman **bilaterales**.

Aun cuando f no tenga un límite bilateral en c, podría tener un límite lateral, esto es, un límite si la aproximación es sólo por un lado. Si la aproximación es por la derecha, el límite es un **límite lateral derecho**. Si es por la izquierda, es un **límite lateral izquierdo**.

La función $f(x) = x/|x|$ (figura 2.21) tiene límite 1 cuando x se aproxima a 0 por la derecha, y límite –1 cuando x se aproxima a 0 por la izquierda. Como estos valores de límites laterales son diferentes, no hay un solo número al que $f(x)$ se aproxime cuando x se acerca a 0. De manera que $f(x)$ no tiene límite (bilateral) en 0.

Intuitivamente, si $f(x)$ está definida en un intervalo (c, b), donde $c < b$, y se aproxima arbitrariamente a L cuando x se aproxima a c dentro de ese intervalo, f tiene **límite lateral derecho** L en c. Escribimos

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = L.$$

El símbolo "$x \to c^+$" significa que consideramos solamente los valores de x mayores que c.

De manera similar, si $f(x)$ está definida en un intervalo (a, c), donde $a < c$ y se aproxima arbitrariamente a M cuando x se aproxima a c dentro de ese intervalo, f tiene **límite lateral izquierdo** M en c. Escribimos

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = M.$$

El símbolo "$x \to c^-$" significa que consideramos solamente los valores de x menores que c.

En la figura 2.22 se ilustran estas definiciones informales. Para la función $f(x) = x/|x|$ de la figura 2.21, tenemos

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -1.$$

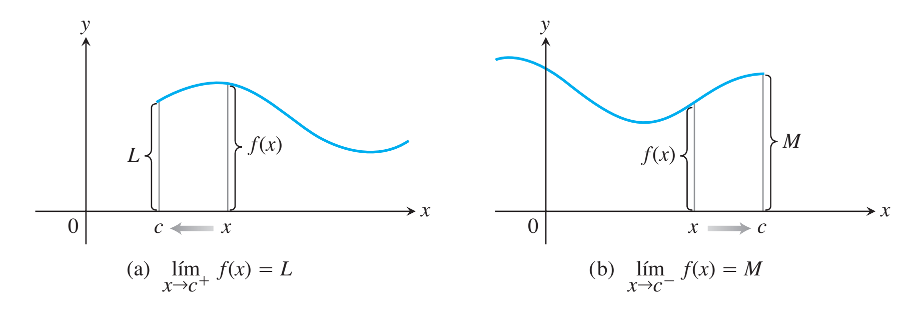


FIGURA 2.22 Límite lateral derecho conforme x se aproxima a c. (b) Límite lateral izquierdo conforme x se aproxima a c.

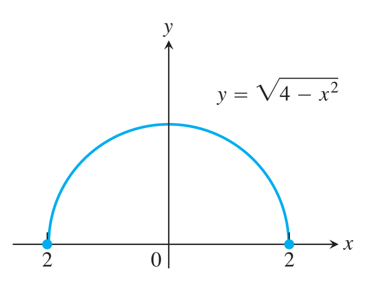


FIGURA 2.23 $\lim_{x\to 2^-} \sqrt{4-x^2} = 0$ y $\lim_{x\to -2^+} \sqrt{4-x^2} = 0$ (ejemplo 1).

EJEMPLO 1 Límites laterales para un semicírculo

El dominio de $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ es $[-2, 2]$; su gráfica es el semicírculo de la figura 2.23. Tenemos

$$\lim_{x\to -2^+} \sqrt{4-x^2} = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 2^-} \sqrt{4-x^2} = 0.$$

La función no tiene límite lateral izquierdo en $x = -2$, ni límite lateral derecho en $x = 2$. Tampoco tiene límites bilaterales normales, ni en –2 ni en 2. ■

Los límites laterales tienen todas las propiedades listadas en el teorema 1 de la sección 2.2. El límite lateral derecho de la suma de dos funciones es la suma de los límites laterales derechos, y así sucesivamente. Los teoremas de límites de funciones polinomiales y racionales se satisfacen con límites laterales, lo mismo que el teorema del sandwich y el teorema 5. Los límites laterales están relacionados con los límites de la manera siguiente.

TEOREMA 6

Una función $f(x)$ tiene un límite cuando x se aproxima a c si y sólo si existen los límites laterales izquierdo y derecho, y además estos límites laterales son iguales:

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to c^-} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x\to c^+} f(x) = L.$$

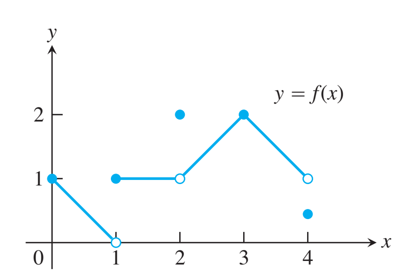


FIGURA 2.24 Gráfica de la función del ejemplo 2.

EJEMPLO 2 Límites de la función graficada en la figura 2.24

En $x = 0$: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$,

$\lim_{x\to 0^-} f(x)$ y $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existen. La función no está definida a la izquierda de $x = 0$.

En $x = 1$: $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0$ aunque $f(1) = 1$,

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$,

$\lim_{x\to 1} f(x)$ no existen. Los límites laterales derecho e izquierdo no son iguales.

En $x = 2$: $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1$,

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 1$,

$\lim_{x\to 2} f(x) = 1$ aunque $f(2) = 2$.

En $x = 3$: $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3} f(x) = f(3) = 2$.

En $x = 4$: $\lim_{x\to 4^-} f(x) = 1$ aunque $f(4) \neq 1$,

$\lim_{x\to 4^+} f(x)$ y $\lim_{x\to 4} f(x)$ no existen. La función no está definida a la derecha de $x = 4$.

En cualquier otro punto c en $[0, 4]$, $f(x)$ tiene límite $f(c)$. ■

Definición formal de límites laterales

La definición formal de límite que se dio en la sección 2.3 puede modificarse fácilmente para los límites laterales.

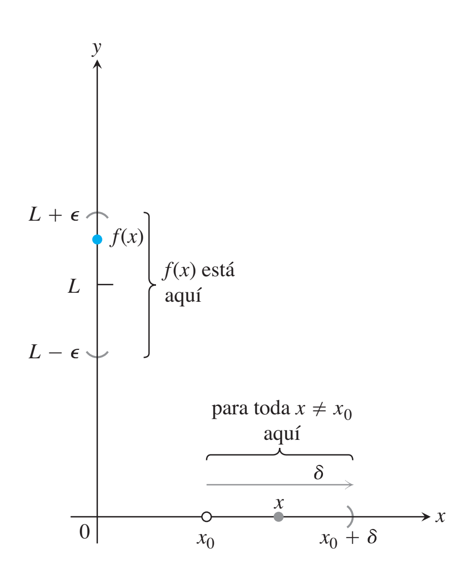


FIGURA 2.25 Intervalos asociados con la definición de límite lateral derecho.

DEFINICIONES Límites laterales derecho e izquierdo

Decimos que $f(x)$ tiene **límite lateral derecho L en x_0,** y escribimos

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L \qquad \text{(vea la figura 2.25)}$$

si para todo número $\epsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ correspondiente, tal que para toda x

$$x_0 < x < x_0 + \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - L| < \epsilon.$$

Decimos que f tiene **límite L lateral izquierdo en x_0,** y escribimos

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L \qquad \text{(vea la figura 2.26)}$$

si para todo número $\epsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ correspondiente, tal que para toda x

$$x_0 - \delta < x < x_0 \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - L| < \epsilon.$$

FIGURA 2.26 Intervalos asociados con la definición de límite lateral izquierdo.

EJEMPLO 3 Aplicación de la definición para encontrar un delta

Probar que

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0.$$

Solución Sea $\epsilon > 0$ dada. Aquí $x_0 = 0$ y $L = 0$, de manera que queremos encontrar una $\delta > 0$ tal que para toda x

$$0 < x < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |\sqrt{x} - 0| < \epsilon,$$

o

$$0 < x < \delta \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{x} < \epsilon.$$

Elevando al cuadrado ambos lados de la última desigualdad, tenemos

$$x < \epsilon^2 \qquad \text{si} \qquad 0 < x < \delta.$$

Si elegimos $\delta = \epsilon^2$ tenemos

$$0 < x < \delta = \epsilon^2 \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{x} < \epsilon,$$

o

$$0 < x < \epsilon^2 \qquad \Rightarrow \qquad |\sqrt{x} - 0| < \epsilon.$$

De acuerdo con la definición, esto prueba que $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$ (figura 2.27). ■

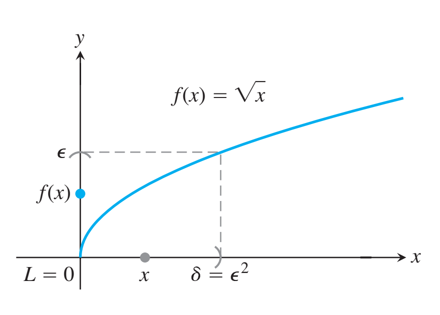


FIGURA 2.27 $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$ del ejemplo 3.

Las funciones que hemos examinado hasta aquí han tenido algún tipo de límite en cada punto de interés. Sin embargo, en general esto no ocurre así.

EJEMPLO 4 Una función que oscila demasiado

Probar que $y = \operatorname{sen}(1/x)$ no tiene límite cuando x se aproxima a cero por cualquier lado (figura 2.28).

Solución Cuando x se aproxima a cero, su recíproco, $1/x$, aumenta sin cota y los valores de $\operatorname{sen}(1/x)$ se repiten periódicamente entre –1 y 1. No hay un solo número L al que los

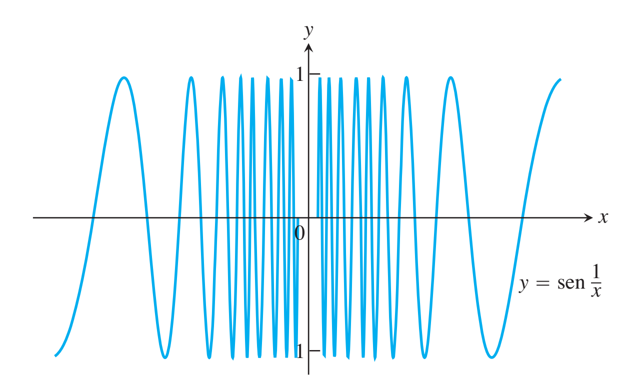


FIGURA 2.28 La función $y = \operatorname{sen}(1/x)$ no tiene límite lateral derecho ni límite lateral izquierdo conforme x se aproxima a cero (ejemplo 4).

valores de la función estén suficientemente cercanos cuando x se aproxima a cero. Esto es cierto aún cuando restrinjamos x a valores positivos o a valores negativos. La función no tiene límites laterales izquierdo o derecho en $x = 0$. ■

Límites que involucran $(\operatorname{sen}\theta)/\theta$

Un hecho importante acerca de $(\operatorname{sen}\theta)/\theta$ consiste en que, medido en radianes, su límite cuando $\theta \to 0$ es 1. Podemos ver esto en la figura 2.29, y confirmarlo algebraicamente mediante el teorema del sandwich.

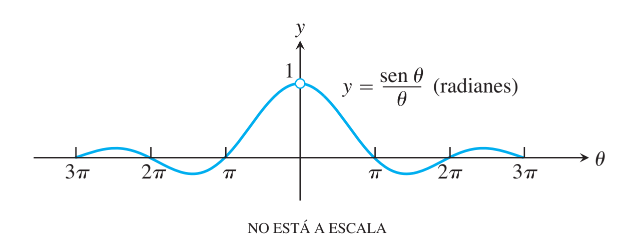


FIGURA 2.29 La gráfica de $f(\theta) = (\sin\theta)/\theta$.

TEOREMA 7

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1 \qquad (\theta \text{ en radianes}) \qquad (1)$$

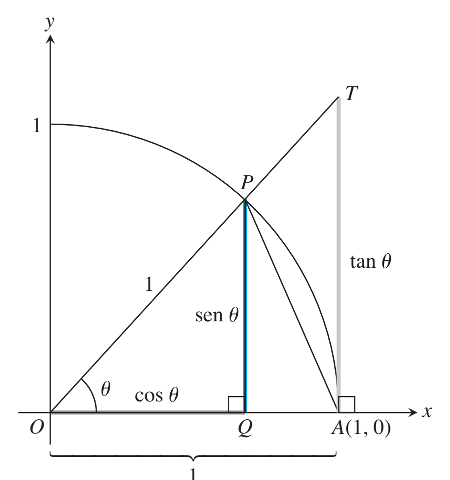


FIGURA 2.30 La figura para la prueba del teorema 7, $TA/OA = \tan\theta$, pero $OA = 1$, de manera que $TA = \tan\theta$.

Demostración El plan es probar que ambos límites laterales, derecho e izquierdo, son iguales a 1. Por lo tanto, el límite bilateral también es igual a 1.

Para probar que el límite lateral derecho es 1, empezamos con valores positivos de θ menores que $\pi/2$ (figura 2.30). Observe que

$$\text{Área } \Delta OAP < \text{ área del sector } OAP < \text{ área } \Delta OAT.$$

La medición en radianes aparece en la ecuación (2): el área del sector *OAP* es $\theta/2$ sólo si θ se mide en radianes.

Podemos expresar estas áreas en términos de θ como sigue:

$$\text{Área } \Delta OAP = \frac{1}{2}\text{base} \times \text{altura} = \frac{1}{2}(1)(\operatorname{sen}\theta) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta$$

$$\text{Área sector } OAP = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}(1)^2\theta = \frac{\theta}{2} \qquad (2)$$

$$\text{Área } \Delta OAT = \frac{1}{2}\text{base} \times \text{altura} = \frac{1}{2}(1)(\tan\theta) = \frac{1}{2}\tan\theta.$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta < \frac{1}{2}\theta < \frac{1}{2}\tan\theta.$$

Esta última desigualdad no se altera si dividimos los tres términos entre el número $(1/2)\operatorname{sen}\theta$, que es positivo, ya que $0 < \theta < \pi/2$:

$$1 < \frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta} < \frac{1}{\cos\theta}.$$

Las desigualdades se invierten al tomar recíprocos:

$$1 > \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} > \cos\theta.$$

Dado que $\lim_{\theta\to 0^+}\cos\theta = 1$ (ejemplo 6b, sección 2.2), el teorema del sandwich nos da

$$\lim_{\theta\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1.$$

Recuerde que tanto $\operatorname{sen}\theta$ como θ son *funciones impares* (sección 1.4). Por lo tanto, $f(\theta) = (\operatorname{sen}\theta)/\theta$ es una *función par*, con una gráfica simétrica respecto del eje y (vea la figura 2.29). Esta simetría implica que existe límite lateral izquierdo en 0, y tiene el mismo valor que el límite lateral derecho:

$$\lim_{\theta\to 0^-}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1 = \lim_{\theta\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta},$$

así, de acuerdo con el teorema 6, $\lim_{\theta\to 0}(\operatorname{sen}\theta)/\theta = 1$. ■

EJEMPLO 5 Usando $\lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$

Probar que **(a)** $\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} = 0$ y **(b)** $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x}{5x} = \frac{2}{5}$.

Solución

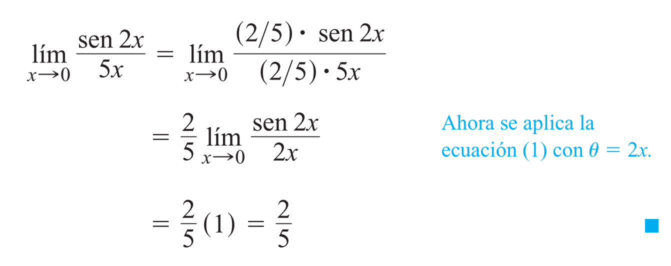
(a) Utilizando la fórmula del ángulo medio, $\cos h = 1 - 2\operatorname{sen}^2(h/2)$, calculamos

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h\to 0} -\frac{2\operatorname{sen}^2(h/2)}{h}$$

$$= -\lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\operatorname{sen}\theta \qquad \text{Sea } \theta = h/2.$$

$$= -(1)(0) = 0.$$

(b) La ecuación (1) no se aplica a la fracción original. Necesitamos un $2x$ en el denominador, no un $5x$. Para obtenerlo multiplicamos por $2/5$ el numerador y el denominador: :



$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x}{5x} = \lim_{x\to 0}\frac{(2/5)\cdot \operatorname{sen} 2x}{(2/5)\cdot 5x}$$

$$= \frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x}{2x} \qquad \text{Ahora se aplica la ecuación (1) con } \theta = 2x.$$

$$= \frac{2}{5}(1) = \frac{2}{5}$$

■

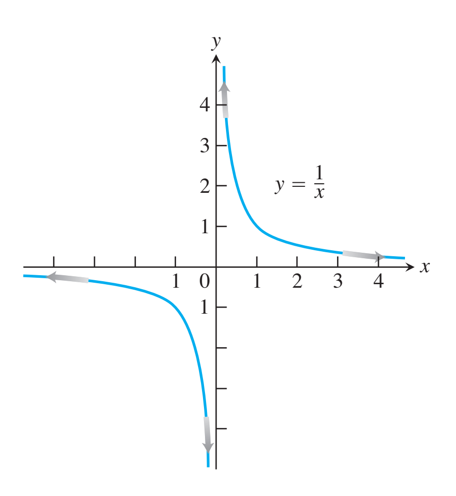


FIGURA 2.31 La gráfica de $y = 1/x$.

Límites finitos cuando $x \to \pm\infty$

El símbolo que designa infinito (∞) no representa un número real. Lo usamos para describir el comportamiento de una función cuando los valores sobrepasan, en su dominio o rango, cualesquiera cotas finitas. Por ejemplo, la función $f(x)$ 0 $1/x$ está definida para toda $x \neq 0$ (figura 2.31). Cuando x es positiva y se vuelve muy grande, $1/x$ se hace cada vez más pequeña. Cuando x es negativo y su magnitud se vuelve cada vez más grande, nuevamente $1/x$ se hace pequeña. Para resumir estas observaciones, diremos que $f(x) = 1/x$ tiene límite 0 cuando $x \to \pm\infty$ o que 0 es el *límite de* $f(x) = 1/x$ *al infinito, tanto positivo como negativo*. A continuación se da la definición exacta.

DEFINICIONES **Límite cuando x se aproxima a ∞ o $-\infty$**

1. Decimos que $f(x)$ tiene el **límite L cuando x tiende al infinito**, y escribimos

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

si, para cada número $\epsilon > 0$, existe un número M correspondiente tal que para toda x

$$x > M \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - L| < \epsilon.$$

2. Decimos que $f(x)$ tiene el **límite L cuando x tiende a menos infinito**, y escribimos

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

si, para cada número $\epsilon > 0$, existe un número N correspondiente tal que para toda x

$$x < N \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - L| < \epsilon.$$

Intuitivamente, $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ si cuando x se aleja cada vez más del origen en dirección positiva, $f(x)$ se acerca arbitrariamente a L. De manera similar $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ si, cuando x se aleja del origen en dirección negativa, $f(x)$ se acerca arbitrariamente a L.

La estrategia para calcular límites de funciones cuando $x \to \pm\infty$ es similar a la que se explicó en la sección 2.2 para determinar límites finitos. Ahí primero encontramos los límites de las funciones constante e identidad, $y = k$ y $y = x$. Después extendimos los resultados a otras funciones, mediante la aplicación de un teorema sobre límites de combinaciones algebraicas. Aquí haremos lo mismo, pero empezaremos con las funciones $y = k$ y $y = 1/x$ en lugar de $y = k$ y $y = x$.

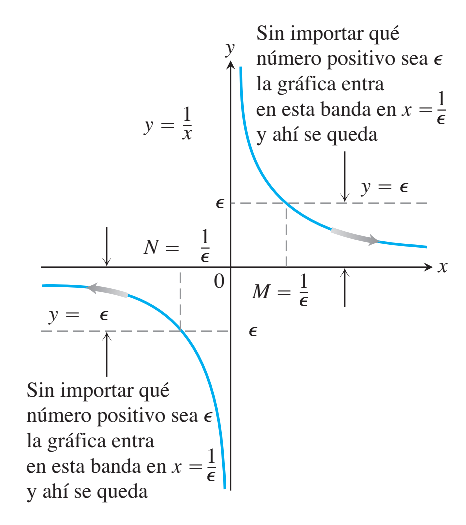


FIGURA 2.32 La geometría detrás del argumento del ejemplo 6.

Los hechos básicos que debemos verificar al aplicar la definición formal, son

$$\lim_{x\to\pm\infty} k = k \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0. \tag{3}$$

A continuación probaremos esta última afirmación, y dejaremos la comprobación de la primera para los ejercicios 71 y 72.

EJEMPLO 6 Los límites al infinito para $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Probar que

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ **(b)** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0.$

Solución

(a) Sea $\epsilon > 0$ dada. Debemos encontrar un número M tal que para toda x

$$x > M \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{x} - 0\right| = \left|\frac{1}{x}\right| < \epsilon.$$

Esta implicación se satisface si $M = 1/\epsilon$ o a cualquier número positivo mayor (figura 2.32). Esto prueba que $\lim_{x\to\infty}(1/x) = 0$.

(b) Sea $\epsilon > 0$ dada. Debemos encontrar un número N tal que para todo x

$$x < N \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{x} - 0\right| = \left|\frac{1}{x}\right| < \epsilon.$$

Esta implicación se satisface si $N = -1/\epsilon$ o a cualquier número menor que $-1/\epsilon$ (figura 2.32). Esto prueba que $\lim_{x\to-\infty}(1/x) = 0$. ■

Los límites al infinito tienen propiedades similares a las de los límites finitos.

TEOREMA 8 Leyes de los límites cuando $x \to \pm\infty$

Si L, M y k son números reales y

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to\pm\infty} g(x) = M, \quad \text{entonces}$$

1. *Regla de la suma:* $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) + g(x)) = L + M$
2. *Regla de la diferencia:* $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - g(x)) = L - M$
3. *Regla del producto:* $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)\cdot g(x)) = L\cdot M$
4. *Regla del múltiplo constante:* $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}(k\cdot f(x)) = k\cdot L$
5. *Regla del cociente:* $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}, \quad M \neq 0$
6. *Regla de la potencia:* Si r y s son enteros sin factores comunes, $s \neq 0$, entonces

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x))^{r/s} = L^{r/s}$$

siempre y cuando $L^{r/s}$ sea un número real. (Si s es par, damos por hecho que $L > 0$).

Estas propiedades son similares a las del teorema 1 de la sección 2.2, y se utilizan de la misma manera.

EJEMPLO 7 Uso del teorema 8

(a) $$\lim_{x\to\infty}\left(5+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} 5 + \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} \qquad \text{Regla de la suma}$$

$$= 5 + 0 = 5 \qquad \text{Límites conocidos}$$

(b) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{\pi\sqrt{3}}{x^2} = \lim_{x\to-\infty}\pi\sqrt{3}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\pi\sqrt{3}\cdot\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} \qquad \text{Regla del producto}$$

$$= \pi\sqrt{3}\cdot 0\cdot 0 = 0 \qquad \text{Límites conocidos}$$ ■

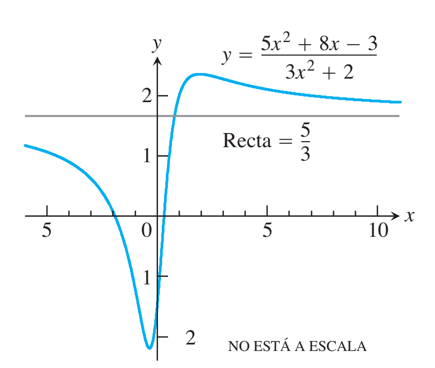


FIGURA 2.33 La gráfica de la función del ejemplo 8. La gráfica se aproxima a la recta $y = 5/3$ conforme $|x|$ crece.

Límites al infinito de funciones racionales

Para determinar el límite de una función racional cuando $x \to \pm\infty$, podemos dividir el numerador y el denominador entre la mayor potencia de x en el denominador. Lo que pase después dependerá de los grados de los polinomios involucrados.

EJEMPLO 8 El numerador y el denominador tienen el mismo grado

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+8x-3}{3x^2+2} = \lim_{x\to\infty}\frac{5+(8/x)-(3/x^2)}{3+(2/x^2)} \qquad \text{Dividir el numerador y el denominador entre } x^2.$$

$$= \frac{5+0-0}{3+0} = \frac{5}{3} \qquad \text{Vea la figura 2.33.}$$ ■

EJEMPLO 9 El grado del numerador es menor que el grado del denominador

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{11x+2}{2x^3-1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{(11/x^2)+(2/x^3)}{2-(1/x^3)} \qquad \text{Dividir el numerador y el denominador entre } x^3.$$

$$= \frac{0+0}{2-0} = 0 \qquad \text{Vea la figura 2.34.}$$ ■

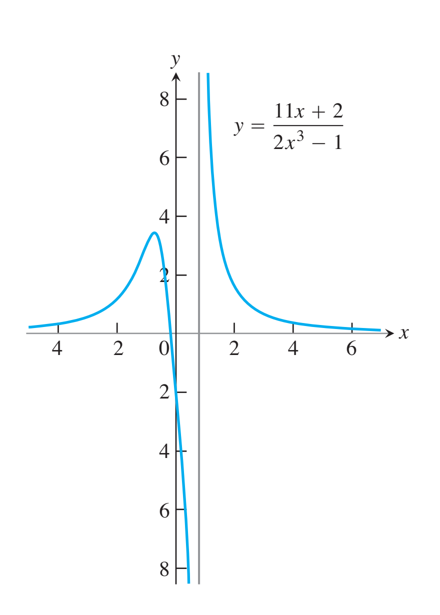


FIGURA 2.34 La gráfica de la función del ejemplo 9. La gráfica se aproxima al eje x conforme $|x|$ crece.

En la siguiente sección se da un ejemplo del caso en donde el grado del numerador es mayor que el grado del denominador (ejemplo 8, sección 2.5).

Asíntotas horizontales

Si la distancia entre la gráfica de una función y alguna recta fija se aproxima a cero cuando un punto de la gráfica se aleja cada vez más del origen, decimos que la gráfica se aproxima asintóticamente a la recta, y esa recta es una *asíntota* de la gráfica.

Al analizar $f(x) = 1/x$ (vea la figura 2.31), observamos que el eje x es una asíntota de la curva por la derecha, ya que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$$

y una asíntota de la curva por la izquierda, ya que

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0.$$

Decimos que el eje x es un *asíntota horizontal* de la gráfica de $f(x) = 1/x$.

DEFINICIÓN Asíntota horizontal
Una recta $y = b$ es una **asíntota horizontal** de la gráfica de una función $y = f(x)$, si se satisface alguna de las condiciones siguientes

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \qquad \text{o} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b.$$

La curva

$$f(x) = \frac{5x^2 + 8x - 3}{3x^2 + 2}$$

trazada en la figura 2.33 (ejemplo 8), tiene como asíntota horizontal, tanto a la derecha como a la izquierda, la recta $y = 5/3$, ya que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{5}{3} \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{5}{3}.$$

EJEMPLO 10 Sustitución de una nueva variable

Encontrar $\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen}(1/x)$.

Solución Introducimos una nueva variable, $t = 1/x$. De acuerdo con el ejemplo 6, sabemos que $t \to 0^+$ cuando $x \to \infty$ (vea la figura 2.31). Por lo tanto,

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen}\frac{1}{x} = \lim_{t\to 0^+} \operatorname{sen} t = 0.$$ ■

Otra aplicación del teorema del sandwich

El teorema del sandwich también se cumple para límites cuando $x \to \pm\infty$.

EJEMPLO 11 Una curva puede atravesar su asíntota horizontal

Usar el teorema del sandwich para encontrar la asíntota horizontal de la curva

$$y = 2 + \frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

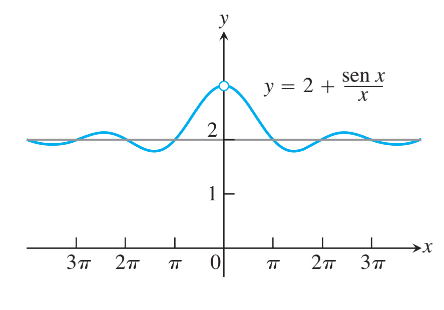


FIGURA 2.35 Una curva puede cruzar una de sus asíntotas una infinidad de veces (ejemplo 11).

Solución Estamos interesados en lo que ocurra cuando $x \to \pm\infty$. Como

$$0 \le \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| \le \left|\frac{1}{x}\right|$$

y $\lim_{x\to\pm\infty} |1/x| = 0$, de acuerdo con el teorema del sandwich tenemos que $\lim_{x\to\pm\infty} (\operatorname{sen} x)/x = 0$. En consecuencia,

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(2 + \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) = 2 + 0 = 2,$$

y la recta $y = 2$ es una asíntota horizontal de la curva, tanto a la izquierda como a la derecha (figura 2.35).

Este ejemplo ilustra que una curva puede —quizás varias veces— atravesar una de sus asíntotas horizontales. ■

Asíntotas oblicuas

Si el grado del numerador de una función racional es mayor en una unidad que el grado del denominador, la gráfica tiene una **asíntota oblicua (inclinada)**. Encontramos una ecuación para la asíntota dividiendo el numerador entre el denominador, con el propósito de expresar f como una función lineal más un residuo que tiende a cero cuando $x \to \pm\infty$. Veamos un ejemplo.

EJEMPLO 12 Encontrar una asíntota oblicua

Encontrar la asíntota oblicua de la gráfica de

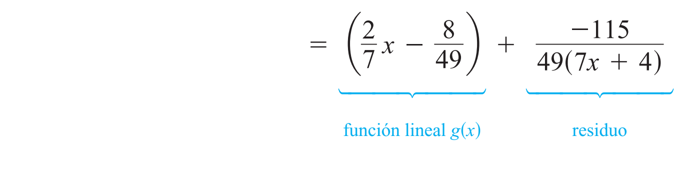
$$f(x) = \frac{2x^2 - 3}{7x + 4}$$

ilustrada en la figura 2.36.

Solución Dividiendo los polinomios encontramos

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3}{7x + 4}$$

$$= \underbrace{\left(\frac{2}{7}x - \frac{8}{49}\right)}_{\text{función lineal } g(x)} + \underbrace{\frac{-115}{49(7x + 4)}}_{\text{residuo}}$$



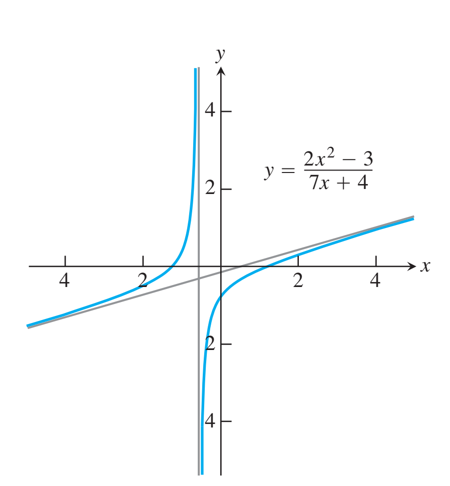


FIGURA 2.36 La gráfica del ejemplo 12 tiene una asíntota oblicua.

A medida que $x \to \pm\infty$, el residuo, cuya magnitud representa la distancia vertical entre las gráficas de f y g, tiende a cero, haciendo que la recta (oblicua)

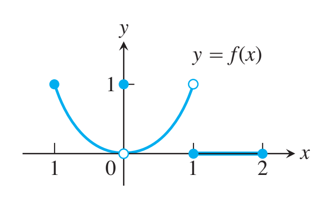
$$g(x) = \frac{2}{7}x - \frac{8}{49}$$

sea una asíntota de la gráfica de f (figura 2.36). La recta $y = g(x)$ es una asíntota tanto a la derecha como a la izquierda. En la sección siguiente veremos que la función $f(x)$ crece arbitrariamente en valor absoluto cuando x se aproxima a $-4/7$, donde el denominador se convierte en cero (figura 2.36). ■

EJERCICIOS 2.4

Determinación gráfica de límites

1. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones acerca de la función $y = f(x)$, cuya gráfica aparece a continuación, son verdaderas y cuáles falsas?



a. $\lim_{x \to -1^+} f(x) = 1$ **b.** $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$

c. $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$ **d.** $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$

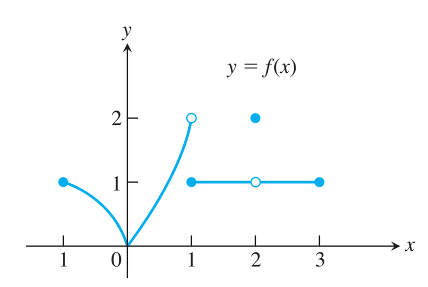
e. $\lim_{x \to 0} f(x)$ existe **f.** $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

g. $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ **h.** $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$

i. $\lim_{x \to 1} f(x) = 0$ **j.** $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 2$

k. $\lim_{x \to -1^-} f(x)$ no existe. **l.** $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 0$

2. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones acerca de la función $y = f(x)$, cuya gráfica aparece a continuación, son verdaderas y cuáles son falsas?



a. $\lim_{x \to -1^+} f(x) = 1$ **b.** $\lim_{x \to 2} f(x)$ no existe.

c. $\lim_{x \to 2} f(x) = 2$ **d.** $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2$

e. $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1$ **f.** $\lim_{x \to 1} f(x)$ no existe.

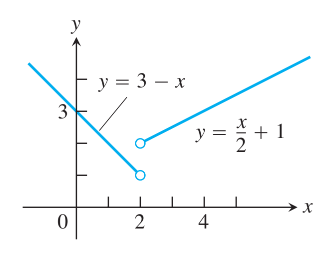
g. $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x)$

h. $\lim_{x \to c} f(x)$ existe para toda c en el intervalo abierto $(-1, 1)$.

i. $\lim_{x \to c} f(x)$ existe para toda c en el intervalo abierto $(1, 3)$.

j. $\lim_{x \to -1^-} f(x) = 0$ **k.** $\lim_{x \to 3^+} f(x)$ no existe.

3. Sea $f(x) = \begin{cases} 3 - x, & x < 2 \\ \dfrac{x}{2} + 1, & x > 2. \end{cases}$



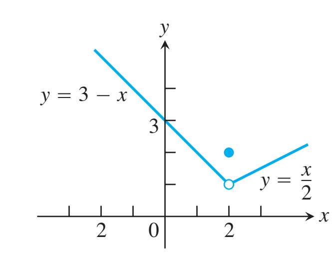
a. Encuentre $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ y $\lim_{x \to 2^-} f(x)$.

b. ¿$\lim_{x \to 2} f(x)$ existe? Si es así, ¿cuál es? Si su respuesta es negativa, explique por qué.

c. Encuentre $\lim_{x \to 4^-} f(x)$ y $\lim_{x \to 4^+} f(x)$.

d. ¿$\lim_{x \to 4} f(x)$ existe? Si es así, ¿cuál es? Si su respuesta es negativa, explique por qué.

4. Sea $f(x) = \begin{cases} 3 - x, & x < 2 \\ 2, & x = 2 \\ \dfrac{x}{2}, & x > 2. \end{cases}$



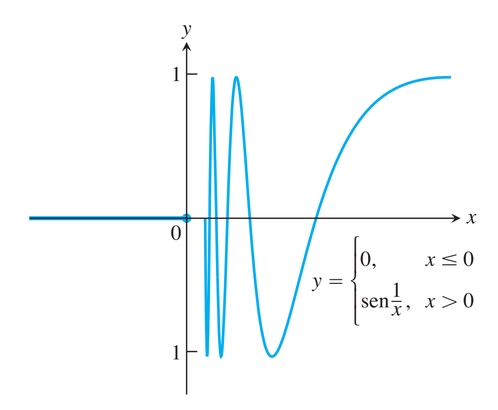
a. Encuentre $\lim_{x \to 2^+} f(x)$, $\lim_{x \to 2^-} f(x)$, y $f(2)$.

b. ¿$\lim_{x \to 2} f(x)$ existe? Si es así, ¿cuál es? Si su respuesta es negativa, explique por qué.

c. Encuentre $\lim_{x \to -1^-} f(x)$ y $\lim_{x \to -1^+} f(x)$.

d. Encuentre $\lim_{x \to -1} f(x)$ existe? Si es así, ¿cuál es? Si su respuesta es negativa, explique por qué.

5. Sea $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & x > 0. \end{cases}$

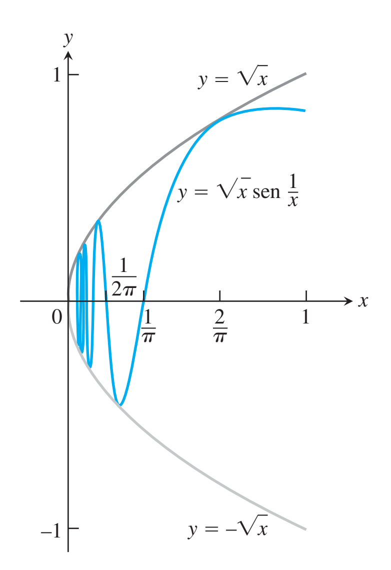


a. ¿$\lim_{x \to 0^+} f(x)$ existe? Si es así, ¿cuál es? Si su respuesta es negativa, explique por qué.

b. ¿$\lim_{x \to 0^-} f(x)$ existe? Si es así, ¿cuál es? Si su respuesta es negativa, explique por qué.

c. ¿$\lim_{x \to 0} f(x)$ existe? Si es así, ¿cuál es? Si su respuesta es negativa, explique por qué.

6. Sea $g(x) = \sqrt{x} \operatorname{sen}(1/x)$.



a. ¿$\lim_{x \to 0^+} g(x)$ existe? Si es así, ¿cuál es? Si su respuesta es negativa, explique por qué.

b. ¿$\lim_{x \to 0^-} g(x)$ existe? Si es así, ¿cuál es? Si su respuesta es negativa, explique por qué.

c. ¿$\lim_{x \to 0} g(x)$ existe? Si es así, ¿cuál es? Si su respuesta es negativa, explique por qué.

7. a. Grafique $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1. \end{cases}$

b. Encuentre $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ y $\lim_{x\to 1^+} f(x)$.

c. ¿$\lim_{x\to 1} f(x)$ existe? Si es así, ¿cuál es? Si su respuesta es negativa, explique por qué.

8. a. Grafique $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1. \end{cases}$

b. Encuentre $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ y $\lim_{x\to 1^-} f(x)$.

c. ¿$\lim_{x\to 1} f(x)$ existe? Si es así, ¿cuál es? Si su respuesta es negativa, explique por qué.

Trace las gráficas de las funciones de los ejercicios 9 y 10. Después, conteste estas preguntas.

a. ¿Cuáles son el dominio y el rango de *f*?

b. ¿En qué puntos *c* existe $\lim_{x\to c} f(x)$?

c. ¿En qué puntos sólo existe el límite lateral izquierdo?

d. ¿En qué puntos sólo existe el límite lateral derecho?

9. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2}, & 0 \le x < 1 \\ 1, & 1 \le x < 2 \\ 2, & x = 2 \end{cases}$

10. $f(x) = \begin{cases} x, & -1 \le x < 0, \text{ o } 0 < x \le 1 \\ 1, & x = 0 \\ 0, & x < -1, \text{ o } x > 1 \end{cases}$

Determinación algebraica de límites laterales

Encuentre los límites de los ejercicios 11 a 18.

11. $\lim_{x\to -0.5^-} \sqrt{\dfrac{x+2}{x+1}}$

12. $\lim_{x\to 1^+} \sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}$

13. $\lim_{x\to -2^+} \left(\dfrac{x}{x+1}\right)\left(\dfrac{2x+5}{x^2+x}\right)$

14. $\lim_{x\to 1^-} \left(\dfrac{1}{x+1}\right)\left(\dfrac{x+6}{x}\right)\left(\dfrac{3-x}{7}\right)$

15. $\lim_{h\to 0^+} \dfrac{\sqrt{h^2+4h+5} - \sqrt{5}}{h}$

16. $\lim_{h\to 0^-} \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{5h^2+11h+6}}{h}$

17. a. $\lim_{x\to -2^+} (x+3)\dfrac{|x+2|}{x+2}$ **b.** $\lim_{x\to -2^-} (x+3)\dfrac{|x+2|}{x+2}$

18. a. $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{2x}\,(x-1)}{|x-1|}$ **b.** $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{\sqrt{2x}\,(x-1)}{|x-1|}$

Use la gráfica de la función mayor entero $y = \lfloor x \rfloor$ (que se denota a veces como $y = \text{ent}\, x$) figura 1.31, sección 1.3, para encontrar los límites de los ejercicios 19 y 20.

19. a. $\lim_{\theta\to 3^+} \dfrac{\lfloor \theta \rfloor}{\theta}$ **b.** $\lim_{\theta\to 3^-} \dfrac{\lfloor \theta \rfloor}{\theta}$

20. a. $\lim_{t\to 4^+} (t - \lfloor t \rfloor)$ **b.** $\lim_{t\to 4^-} (t - \lfloor t \rfloor)$

Uso de $\lim_{\theta\to 0} \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\theta} = 1$

Encuentre los límites de los ejercicios 21 a 36.

21. $\lim_{\theta\to 0} \dfrac{\text{sen}\sqrt{2}\theta}{\sqrt{2}\theta}$

22. $\lim_{t\to 0} \dfrac{\text{sen}\, kt}{t}$ (k constante)

23. $\lim_{y\to 0} \dfrac{\text{sen}\, 3y}{4y}$

24. $\lim_{h\to 0^-} \dfrac{h}{\text{sen}\, 3h}$

25. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan 2x}{x}$

26. $\lim_{t\to 0} \dfrac{2t}{\tan t}$

27. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x \csc 2x}{\cos 5x}$

28. $\lim_{x\to 0} 6x^2(\cot x)(\csc 2x)$

29. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x + x\cos x}{\text{sen}\, x \cos x}$

30. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2 - x + \text{sen}\, x}{2x}$

31. $\lim_{t\to 0} \dfrac{\text{sen}\,(1 - \cos t)}{1 - \cos t}$

32. $\lim_{h\to 0} \dfrac{\text{sen}\,(\text{sen}\, h)}{\text{sen}\, h}$

33. $\lim_{\theta\to 0} \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\text{sen}\, 2\theta}$

34. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}\, 5x}{\text{sen}\, 4x}$

35. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan 3x}{\text{sen}\, 8x}$

36. $\lim_{y\to 0} \dfrac{\text{sen}\, 3y \cot 5y}{y \cot 4y}$

Cálculo de límites conforme $x \to \pm\infty$

En los ejercicios 37 a 42, encuentre el límite de cada función **(a)** cuando $x \to \infty$ y **(b)** cuando $x \to -\infty$. (Puede utilizar una calculadora graficadora o una computadora para ver la respuesta gráficamente).

37. $f(x) = \dfrac{2}{x} - 3$

38. $f(x) = \pi - \dfrac{2}{x^2}$

39. $g(x) = \dfrac{1}{2 + (1/x)}$

40. $g(x) = \dfrac{1}{8 - (5/x^2)}$

41. $h(x) = \dfrac{-5 + (7/x)}{3 - (1/x^2)}$

42. $h(x) = \dfrac{3 - (2/x)}{4 + \left(\sqrt{2}/x^2\right)}$

Encuentre los límites de los ejercicios 43 a 46.

43. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{\text{sen}\, 2x}{x}$

44. $\lim_{\theta\to -\infty} \dfrac{\cos\theta}{3\theta}$

45. $\lim_{t\to -\infty} \dfrac{2 - t + \text{sen}\, t}{t + \cos t}$

46. $\lim_{r\to \infty} \dfrac{r + \text{sen}\, r}{2r + 7 - 5\,\text{sen}\, r}$

Límites de funciones racionales

En los ejercicios 47 a 56, encuentre el límite de cada función racional **(a)** cuando $x \to \infty$ y **(b)** cuando $x \to -\infty$.

47. $f(x) = \dfrac{2x + 3}{5x + 7}$

48. $f(x) = \dfrac{2x^3 + 7}{x^3 - x^2 + x + 7}$

49. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 + 3}$

50. $f(x) = \dfrac{3x + 7}{x^2 - 2}$

51. $h(x) = \dfrac{7x^3}{x^3 - 3x^2 + 6x}$

52. $g(x) = \dfrac{1}{x^3 - 4x + 1}$

53. $g(x) = \dfrac{10x^5 + x^4 + 31}{x^6}$

54. $h(x) = \dfrac{9x^4 + x}{2x^4 + 5x^2 - x + 6}$

55. $h(x) = \dfrac{-2x^3 - 2x + 3}{3x^3 + 3x^2 - 5x}$

56. $h(x) = \dfrac{-x^4}{x^4 - 7x^3 + 7x^2 + 9}$

Límites con potencias no enteras o negativas

El proceso mediante el que determinamos los límites de funciones racionales funciona también para calcular razones que contienen potencias no enteras o negativas de x, y consiste en dividir el numerador y el denominador entre la mayor potencia de x en el denominador, y proceder a partir de ahí. De acuerdo con ello, encuentre los límites de los ejercicios 57 a 62.

57. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2\sqrt{x} + x^{-1}}{3x - 7}$

58. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2 + \sqrt{x}}{2 - \sqrt{x}}$

59. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}}$

60. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^{-1} + x^{-4}}{x^{-2} - x^{-3}}$

61. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x^{5/3} - x^{1/3} + 7}{x^{8/5} + 3x + \sqrt{x}}$

62. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 5x + 3}{2x + x^{2/3} - 4}$

Teoría y ejemplos

63. Si conocemos $\lim_{x\to a^+} f(x)$ y $\lim_{x\to a^-} f(x)$ en un punto interior del dominio de f, ¿conocemos también $\lim_{x\to a} f(x)$? Justifique su respuesta.

64. Si sabemos que $\lim_{x\to c} f(x)$ existe, ¿es posible encontrar su valor calculando $\lim_{x\to c^+} f(x)$? Justifique su respuesta.

65. Suponga que f es una función impar de x. ¿Saber que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 3$ nos indica algo acerca de $\lim_{x\to 0^-} f(x)$? Justifique su respuesta.

66. Suponga que f es una función par de x. ¿Saber que $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 7$ nos indica algo acerca de $\lim_{x\to -2^-} f(x)$ o $\lim_{x\to -2^+} f(x)$? Justifique su respuesta.

67. Suponga que f y g son funciones polinomiales en x, y que $\lim_{x\to\infty} (f(x)/g(x)) = 2$. ¿A partir de esos datos es posible concluir algo respecto de $\lim_{x\to-\infty} (f(x)/g(x))$? Justifique su respuesta.

68. Suponga que $f(x)$ y $g(x)$ son funciones polinomiales en x. En ese caso, ¿la gráfica de $f(x)/g(x)$ puede tener una asíntota si $g(x)$ nunca es cero? Justifique su respuesta.

69. ¿Cuántas asíntotas horizontales puede tener la gráfica de una función racional dada? Justifique su respuesta.

70. Encuentre $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}\right)$.

Use las definiciones formales de límites cuando $x \to \pm\infty$ para establecer los límites de los ejercicios 71 y 72.

71. Si f tiene el valor constante $f(x) = k$, entonces $\lim_{x\to\infty} f(x) = k$.

72. Si f tiene el valor constante $f(x) = k$, entonces $\lim_{x\to-\infty} f(x) = k$.

Definiciones formales de límites laterales

73. Dado $\epsilon > 0$, encuentre un intervalo $I = (5, 5 + \delta)$, $\delta > 0$, tal que si x está en I, entonces $\sqrt{x - 5} < \epsilon$. ¿Qué límite se está verificando y cuál es su valor?

74. Dado $\epsilon > 0$, encuentre un intervalo $I = (4 - \delta, 4)$, $\delta > 0$, tal que si x está en I, entonces $\sqrt{4 - x} < \epsilon$. ¿Qué límite se está verificando y cuál es su valor?

Use las definiciones de límites lateral derecho e izquierdo para probar los límites propuestos en los ejercicios 75 y 76.

75. $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{x}{|x|} = -1$

76. $\lim_{x\to 2^+} \dfrac{x - 2}{|x - 2|} = 1$

77. **Función mayor entero** Encuentre **(a)** $\lim_{x\to 400^+} \lfloor x \rfloor$ y **(b)** $\lim_{x\to 400^-} \lfloor x \rfloor$; después, emplee las definiciones de límites para verificar sus resultados. **(c)** Con base en las conclusiones a que llegó en los incisos (a) y (b), ¿puede decir algo acerca de $\lim_{x\to 400} \lfloor x \rfloor$? Justifique sus respuestas.

78. **Límites laterales** Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x), & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0. \end{cases}$

Encuentre **(a)** $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ y **(b)** $\lim_{x\to 0^-} f(x)$; después use las definiciones de límites para verificar sus resultados. **(c)** Con base en las conclusiones a que llegó en los incisos (a) y (b), ¿puede decir algo acerca de $\lim_{x\to 0} f(x)$? Justifique sus respuestas.

Exploraciones gráficas: cómo "ver" límites al infinito

Algunas veces un cambio de variable puede modificar una expresión poco familiar para convertirla en una cuyo límite sabemos cómo encontrar. Por ejemplo,

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen}\frac{1}{x} = \lim_{\theta\to 0^+} \operatorname{sen}\theta \qquad \text{Sustituir } \theta = 1/x$$
$$= 0.$$

Esto sugiere una manera creativa de "ver" los límites al infinito. Describa el procedimiento y úselo para ilustrar y determinar los límites de los ejercicios 79 a 84.

79. $\lim_{x\to\pm\infty} x \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$

80. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\cos(1/x)}{1 + (1/x)}$

81. $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{3x + 4}{2x - 5}$

82. $\lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{1/x}$

83. $\lim_{x\to\pm\infty} \left(3 + \dfrac{2}{x}\right)\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)$

84. $\lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{3}{x^2} - \cos\dfrac{1}{x}\right)\left(1 + \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}\right)$

2.5 Límites infinitos y asíntotas verticales

En esta sección ampliaremos el concepto de límite a los *límites infinitos* que, a diferencia de los que hemos hablado hasta el momento, exigen una definición completamente nueva. Los límites infinitos proveen símbolos y conceptos útiles para describir el comportamiento de funciones cuyos valores positivos o negativos se vuelven arbitrariamente grandes. Continuaremos el análisis de las gráficas de funciones racionales que realizamos en la última sección, usando asíntotas verticales y términos dominantes para valores numéricamente grandes de x.

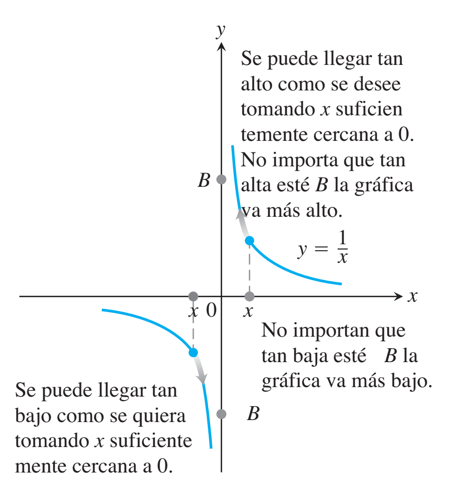


FIGURA 2.37 Límites laterales infinitos:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Límites infinitos

Veamos nuevamente la función $f(x) = 1/x$. Cuando $x \to 0^+$, los valores de f crecen sin cota, alcanzando y sobrepasando todo número real positivo. Esto es, dado cualquier número real positivo B, tan grande como queramos, los valores de f se vuelven todavía mayores (figura 2.37). Por lo tanto, f no tiene límite cuando $x \to 0^+$. Sin embargo, es conveniente describir el comportamiento de f diciendo que $f(x)$ se aproxima a ∞ cuando $x \to 0^+$. Escribimos

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty.$$

Al escribir esto *no* estamos diciendo que el límite existe, Y tampoco que hay un número real ∞, ya que no existe tal número. Más bien, estamos diciendo que $\lim_{x\to 0^+} (1/x)$ *no existe, porque* $1/x$ *se vuelve arbitrariamente grande y positiva cuando* $x \to 0^+$.

A medida que $x \to 0^-$, los valores de $f(x) = 1/x$ se vuelven arbitrariamente grandes en valor absoluto y negativos. Dado cualquier número real $-B$, los valores de f terminan ubicándose por debajo de $-B$. (Vea la figura 2.37). Escribimos

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Una vez más, no se está afirmando que el límite existe, ni que es igual al número $-\infty$. No *existe* ningún número real $-\infty$. En realidad, estamos describiendo el comportamiento de una función cuyo límite cuando $x \to 0^-$ *no existe, porque sus valores son arbitrariamente grandes en valor absoluto y negativos.*

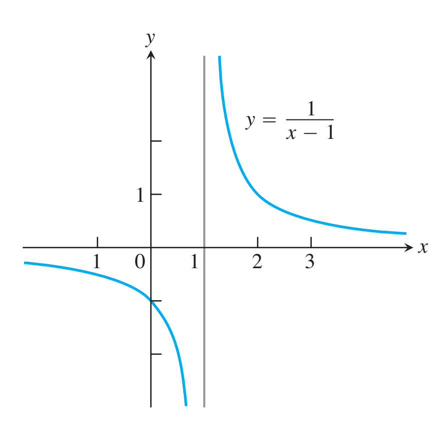


FIGURA 2.38 Cerca de $x = 1$, la función $y = 1/(x-1)$ se comporta igual que la función $y = 1/x$ cerca de $x = 0$. Su gráfica es la gráfica de $y = 1/x$ desplazada 1 unidad a la derecha (ejemplo 1).

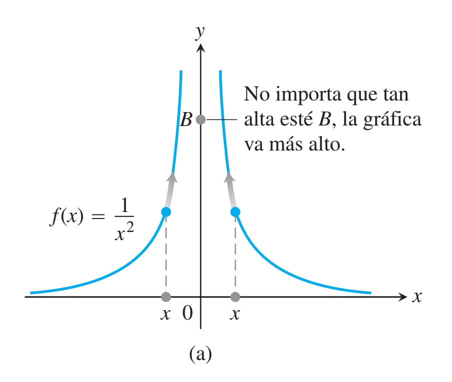
EJEMPLO 1 Límites laterales infinitos

Encuentre $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1}$ y $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1}$.

Solución geométrica La gráfica de $y = 1/(x-1)$ es la gráfica de $y = 1/x$, desplazada una unidad a la derecha (figura 2.38). Por lo tanto, el comportamiento de $y = 1/(x-1)$ cerca del 1 es exactamente el mismo que el de $y = 1/x$ cerca del cero:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty.$$

Solución analítica Piense en el número $x-1$ y su recíproco. Cuando $x \to 1^+$, tenemos $(x-1) \to 0^+$ y $1/(x-1) \to \infty$. Cuando $x \to 1^-$, tenemos $(x-1) \to 0^-$ y $1/(x-1) \to -\infty$. ■



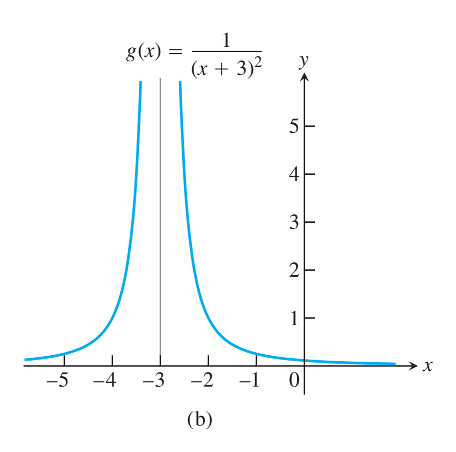


FIGURA 2.39 Las gráficas de las funciones del ejemplo 2. (a) $f(x)$ tiende a infinito conforme $x \to 0$. (b) $g(x)$ tiende a infinito conforme $x \to -3$.

EJEMPLO 2 Límites bilaterales infinitos

Discutir el comportamiento de

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ cerca de $x = 0$,

(b) $g(x) = \dfrac{1}{(x+3)^2}$ cerca de $x = -3$.

Solución

(a) Cuando x se aproxima a cero por cualquier lado, los valores de $1/x^2$ son positivos y se vuelven arbitrariamente grandes (figura 2.39a):

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

(b) La gráfica de $g(x) = 1/(x + 3)^2$ es la gráfica de $f(x) = 1/x^2$ desplazada 3 unidades a la izquierda (figura 2.39b). Por lo tanto, g se comporta exactamente igual cerca de -3 que f cerca de cero.

$$\lim_{x \to -3} g(x) = \lim_{x \to -3} \frac{1}{(x+3)^2} = \infty.$$

La función $y = 1/x$ muestra un comportamiento inconsistente cuando $x \to 0$. Tenemos que $1/x \to \infty$ si $x \to 0^+$, pero $1/x \to -\infty$ si $x \to 0^-$. Lo único que podemos decir acerca del $\lim_{x\to 0} (1/x)$ es que no existe. La función $y = 1/x^2$ es distinta. Sus valores tienden al infinito cuando x se aproxima a cero por cualquier lado, de manera que podemos decir que $\lim_{x\to 0} (1/x^2) = \infty$.

EJEMPLO 3 Las funciones racionales pueden comportarse de distintas maneras cerca de los ceros de sus denominadores

(a) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{(x-2)^2}{x^2-4} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x+2} = 0$

(b) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$

(c) $\displaystyle\lim_{x \to 2^+} \frac{x-3}{x^2-4} = \lim_{x \to 2^+} \frac{x-3}{(x-2)(x+2)} = -\infty$ Los valores son negativos para $x > 2$, x cerca de 2.

(d) $\displaystyle\lim_{x \to 2^-} \frac{x-3}{x^2-4} = \lim_{x \to 2^-} \frac{x-3}{(x-2)(x+2)} = \infty$ Los valores son positivos para $x < 2$, x cerca de 2.

(e) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{x-3}{x^2-4} = \lim_{x \to 2} \frac{x-3}{(x-2)(x+2)}$ no existe. Vea los incisos (c) y (d)

(f) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{2-x}{(x-2)^3} = \lim_{x \to 2} \frac{-(x-2)}{(x-2)^3} = \lim_{x \to 2} \frac{-1}{(x-2)^2} = -\infty$

En los incisos (a) y (b), el efecto del cero en el denominador en $x = 2$ se cancela, ya que el numerador también es cero. Por lo tanto, existe un límite finito. Esto es falso en el inciso (f), donde la cancelación todavía deja un cero en el denominador.

Definición formal de los límites infinitos

En lugar de requerir que $f(x)$ esté arbitrariamente cercano de un número finito L para toda x suficientemente cerca de x_0, las definiciones de límites infinitos requieren que $f(x)$ se

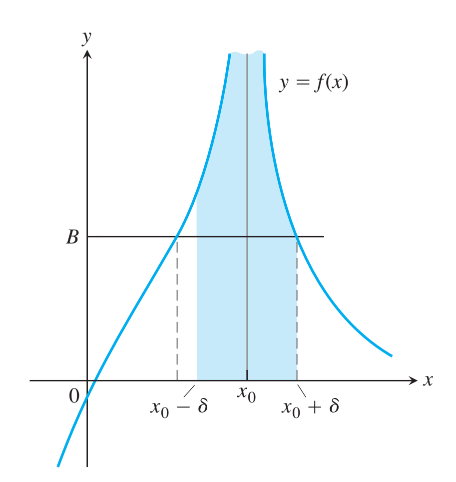


FIGURA 2.40 $f(x)$ tiende al infinito conforme $x \to x_0$.

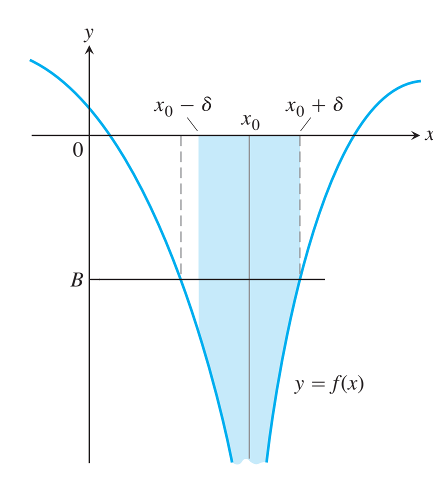


FIGURA 2.41 $f(x)$ tiende a menos infinito conforme $x \to x_0$.

ubique arbitrariamente lejos del origen. Excepto por este cambio, el lenguaje es idéntico al que hemos visto antes. Las figuras 2.40 y 2.41 ilustran estas definiciones.

DEFINICIONES Infinito y menos infinito como límites

1. Decimos que ***f*(*x*) tiende al infinito cuando *x* se aproxima a x_0**, y escribimos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty,$$

si para todo número real positivo B existe un correspondiente $\delta > 0$ tal que para toda x

$$0 < |x - x_0| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad f(x) > B.$$

2. Decimos que ***f*(*x*) tiende a menos infinito cuando *x* se aproxima a x_0**, y escribimos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty,$$

si para todo número real $-B$ existe un correspondiente $\delta > 0$ tal que para toda x

$$0 < |x - x_0| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad f(x) < -B.$$

Las definiciones precisas de los límites laterales infinitos en x_0 son similares y se establecen en los ejercicios.

EJEMPLO 4 Aplicación de la definición de límites infinitos

Probar que $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = \infty$.

Solución Dada $B > 0$, queremos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - 0| < \delta \quad \text{implique} \quad \frac{1}{x^2} > B.$$

Ahora,

$$\frac{1}{x^2} > B \qquad \text{si y sólo si } x^2 < \frac{1}{B}$$

o, de manera equivalente,

$$|x| < \frac{1}{\sqrt{B}}.$$

En consecuencia, eligiendo $\delta = 1/\sqrt{B}$ (o cualquier número positivo menor), vemos que

$$|x| < \delta \quad \text{implique} \quad \frac{1}{x^2} > \frac{1}{\delta^2} \geq B.$$

Por lo tanto, de acuerdo con la definición,

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

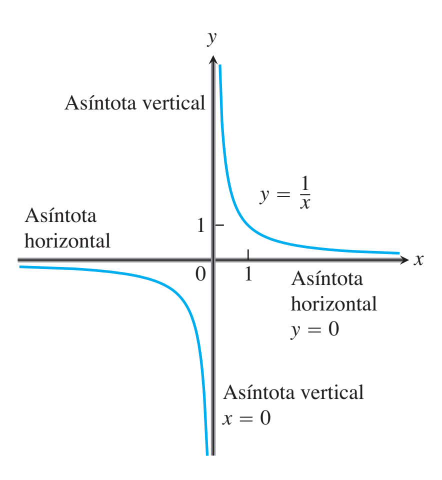


FIGURA 2.42 Los ejes coordenados son asíntotas de ambas ramas de la hipérbola $y = 1/x$.

Asíntotas verticales

Observe que la distancia entre un punto de la gráfica de $y = 1/x$ y el eje y se aproxima a cero cuando el punto se mueve verticalmente a lo largo de la gráfica y lejos del origen (figura 2.42). Este comportamiento ocurre debido a que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Decimos que la recta $x = 0$ (el eje y) es una *asíntota vertical* de la gráfica de $y = 1/x$. Observe que el denominador es cero en $x = 0$ y la función no está definida ahí.

DEFINICIÓN Asíntota vertical
Una recta $x = a$ es una **asíntota vertical** de la gráfica de una función $y = f(x)$ ya sea que

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty \qquad \text{o} \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty.$$

EJEMPLO 5 Búsqueda de asíntotas

Encontrar las asíntotas horizontal y vertical de la curva

$$y = \frac{x+3}{x+2}.$$

Solución Estamos interesados en el comportamiento cuando $x \to \pm\infty$ y cuando $x \to -2$, donde el denominador es cero.

Las asíntotas se descubren rápidamente si escribimos la función racional como una polinomial con un residuo, dividiendo $(x + 2)$ entre $(x + 3)$.

$$\begin{array}{r} 1 \\ x+2 \overline{)\, x+3} \\ \underline{x+2} \\ 1 \end{array}$$

Este resultado nos permite rescribir y:

$$y = 1 + \frac{1}{x+2}.$$

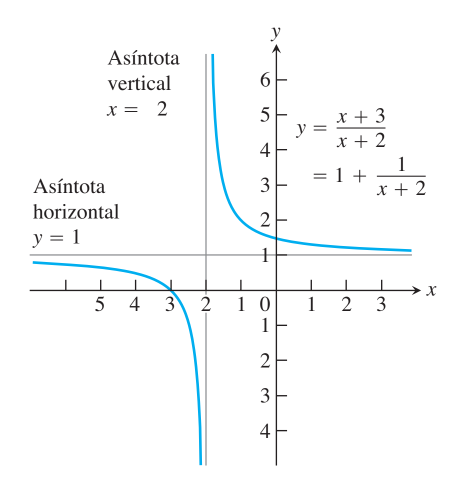


FIGURA 2.43 Las rectas $y = 1$ y $x = -2$ son asíntotas de la curva $y = (x + 3)/(x + 2)$ (ejemplo 5).

Ahora vemos que la curva en cuestión es la gráfica de $y = 1/x$ desplazada 1 unidad hacia arriba y 2 unidades hacia la izquierda (figura 2.43). Las asíntotas, en lugar de ser los ejes coordenados, son ahora las rectas $y = 1$ y $x = -2$. ■

EJEMPLO 6 Las asíntotas no necesariamente son bilaterales

Encuentre las asíntotas horizontal y vertical de la gráfica de

$$f(x) = -\frac{8}{x^2 - 4}.$$

Solución Estamos interesados en el comportamiento cuando $x \to \pm\infty$ y conforme $x \to \pm 2$, donde el denominador es cero. Observe que f es una función par de x, de manera que su gráfica es simétrica respecto del eje y.

(a) *El comportamiento cuando* $x \to \pm\infty$. Como $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, la recta $y = 0$ la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal de la gráfica a la derecha. Por simetría, también hay

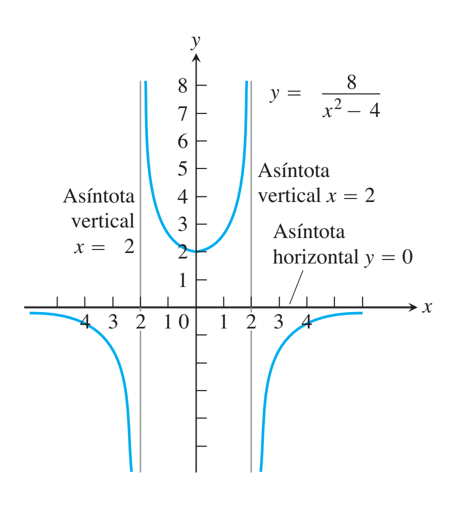


FIGURA 2.44 Gráfica de $y = -8/(x^2 - 4)$. Observe que la curva se aproxima al eje x solamente por un lado. Las asíntotas no tienen que ser bilaterales (ejemplo 6).

una asíntota por la izquierda (figura 2.44). Observe que la curva se aproxima al eje x sólo por el lado negativo (o por debajo).

(b) *El comportamiento cuando* $x \to \pm 2$. Como

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 2^-} f(x) = \infty,$$

la recta $x = 2$ es una asíntota vertical tanto a la derecha como a la izquierda. Por simetría, sucede lo mismo con la recta $x = -2$.

No hay otras asíntotas, porque f tiene un límite finito en cualquier otro punto. ■

EJEMPLO 7 Curvas con infinidad de asíntotas

Las curvas

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \text{y} \qquad y = \tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

tienen asíntotas verticales en los múltiplos enteros impares de $\pi/2$, donde $\cos x = 0$ (figura 2.45).

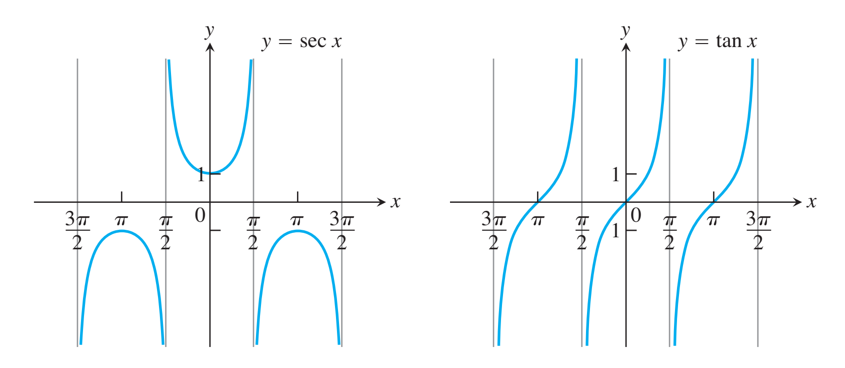


FIGURA 2.45 Las gráficas de $\sec x$ y $\tan x$ tienen una infinidad de asíntotas verticales (ejemplo 7).

Las gráficas de

$$y = \csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \qquad \text{y} \qquad y = \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

tienen asíntotas verticales en los múltiplos enteros de π, donde $\operatorname{sen} x = 0$ (figura 2.46).

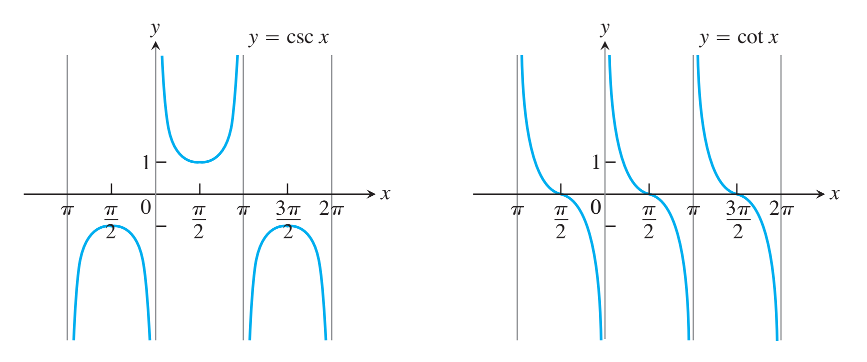


FIGURA 2.46 Las gráficas de $\csc x$ y $\cot x$ (ejemplo 7). ■

EJEMPLO 8 Una función racional con el grado del numerador mayor que el grado del denominador

Encontrar las asíntotas de la gráfica de

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x - 4}.$$

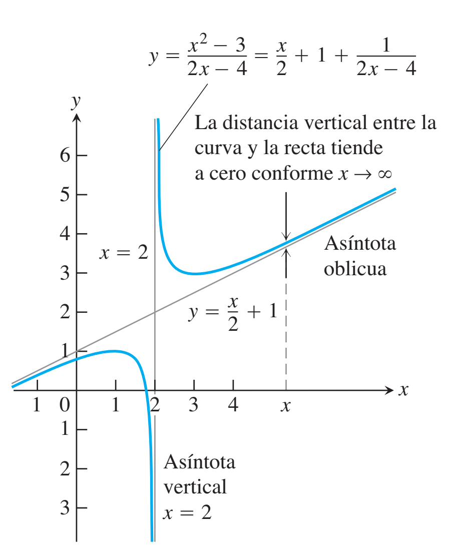


FIGURA 2.47 La gráfica de $f(x) = (x^2 - 3)/(2x - 4)$ tiene asíntota vertical y asíntota oblicua (ejemplo 8).

Solución Estamos interesados en el comportamiento cuando $x \to \pm\infty$ y también cuando $x \to 2$, donde el denominador es cero. Dividimos $(2x - 4)$ entre $(x^2 - 3)$:

$$\begin{array}{r}
\frac{x}{2} + 1 \\
2x - 4\overline{\smash{)}\,x^2 - 3} \\
\underline{x^2 - 2x} \\
2x - 3 \\
\underline{2x - 4} \\
1
\end{array}$$

Esto nos indica que

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x - 4} = \underbrace{\frac{x}{2} + 1}_{\text{lineal}} + \underbrace{\frac{1}{2x - 4}}_{\text{residuo}}.$$

Como $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$, la recta $x = 2$ es una asíntota vertical bilateral. Cuando $x \to \pm\infty$, el residuo se aproxima a 0 y $f(x) \to (x/2) + 1$. La recta $y = (x/2) + 1$ es una asíntota oblicua tanto por la derecha como por la izquierda (figura 2.47). ■

Observe, en el ejemplo 8, que si el grado del numerador en una función racional es mayor que el grado del denominador, el límite es $+\infty$ o $-\infty$, dependiendo del signo del numerador y del denominador cuando $|x|$ se hace más grande.

Términos dominantes

De todas las observaciones que podamos hacer rápidamente acerca de la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x - 4}$$

del ejemplo 8, probablemente la más útil es que

$$f(x) = \frac{x}{2} + 1 + \frac{1}{2x - 4}.$$

Esto nos indica inmediatamente que

$$f(x) \approx \frac{x}{2} + 1 \qquad \text{Para } x \text{ numéricamente grande}$$

$$f(x) \approx \frac{1}{2x - 4} \qquad \text{Para } x \text{ cerca de 2}$$

Si queremos saber cómo se comporta f, ésta es la manera de encontrarlo. Se comporta como $y = (x/2) + 1$ cuando x es numéricamente grande, y la contribución de $1/(2x - 4)$ al va-

lor total de f es insignificante. Se comporta como $1/(2x-4)$ cuando x está tan cerca de 2 que $1/(2x-4)$ hace la contribución dominante.

Decimos que $(x/2)+1$ **domina** cuando x es numéricamente grande, y también que $1/(2x-4)$ domina cuando x está cerca de 2. Los **términos dominantes** como éstos son la clave para predecir el comportamiento de las funciones. Aquí hay otro ejemplo.

EJEMPLO 9 Dos gráficas que parecen idénticas a gran escala

Sean $f(x)=3x^4-2x^3+3x^2-5x+6$ y $g(x)=3x^4$. Probar que, aunque f y g son bastante diferentes para valores numéricos pequeños de x, son prácticamente idénticas para $|x|$ muy grande.

Solución Las gráficas de f y g se comportan de manera bastante diferente cerca del origen (figura 2.48a), pero parecen prácticamente idénticas en gran escala (figura 2.48b).

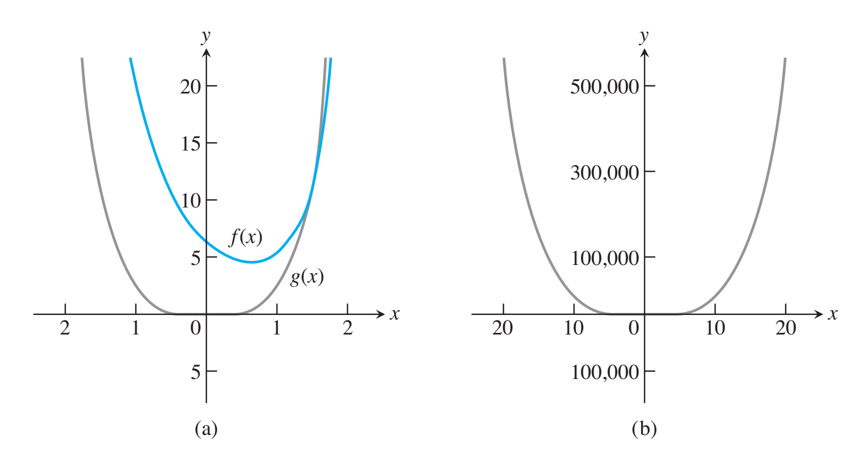


FIGURA 2.48 Las gráficas de f y g (a) son distintas para $|x|$ pequeña, y (b) casi idénticas para $|x|$ grande (ejemplo 9).

Podemos probar que el término $3x^4$ en f, representado gráficamente por g, domina a la polinomial f para valores numéricos grandes de x, examinando la razón de las dos funciones cuando $x \to \pm\infty$. Encontramos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^4-2x^3+3x^2-5x+6}{3x^4}\\ &= \lim_{x\to\pm\infty}\left(1-\frac{2}{3x}+\frac{1}{x^2}-\frac{5}{3x^3}+\frac{2}{x^4}\right)\\ &= 1,\end{aligned}$$

de manera que f y g son casi idénticas para $|x|$ grande. ■

EJERCICIOS 2.5

Límites infinitos

Encuentre los límites en los ejercicios 1 a 12.

1. $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{3x}$

2. $\lim_{x\to 0^-} \frac{5}{2x}$

3. $\lim_{x\to 2^-} \frac{3}{x-2}$

4. $\lim_{x\to 3^+} \frac{1}{x-3}$

5. $\lim_{x\to -8^+} \frac{2x}{x+8}$

6. $\lim_{x\to -5^-} \frac{3x}{2x+10}$

7. $\lim_{x\to 7} \frac{4}{(x-7)^2}$

8. $\lim_{x\to 0} \frac{-1}{x^2(x+1)}$

9. a. $\lim_{x\to 0^+} \frac{2}{3x^{1/3}}$ **b.** $\lim_{x\to 0^-} \frac{2}{3x^{1/3}}$

10. a. $\lim_{x\to 0^+} \frac{2}{x^{1/5}}$ **b.** $\lim_{x\to 0^-} \frac{2}{x^{1/5}}$

11. $\lim_{x\to 0} \frac{4}{x^{2/5}}$

12. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{2/3}}$

Encuentre los límites en los ejercicios 13 a 16.

13. $\lim_{x\to (\pi/2)^-} \tan x$

14. $\lim_{x\to (-\pi/2)^+} \sec x$

15. $\lim_{\theta\to 0^-} (1 + \csc\theta)$

16. $\lim_{\theta\to 0} (2 - \cot\theta)$

Cálculos adicionales

Encuentre los límites en los ejercicios 17 a 22.

17. $\lim \frac{1}{x^2-4}$ cuando

a. $x\to 2^+$ **b.** $x\to 2^-$

c. $x\to -2^+$ **d.** $x\to -2^-$

18. $\lim \frac{x}{x^2-1}$ cuando

a. $x\to 1^+$ **b.** $x\to 1^-$

c. $x\to -1^+$ **d.** $x\to -1^-$

19. $\lim \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{x}\right)$ cuando

a. $x\to 0^+$ **b.** $x\to 0^-$

c. $x\to \sqrt[3]{2}$ **d.** $x\to -1$

20. $\lim \frac{x^2-1}{2x+4}$ cuando

a. $x\to -2^+$ **b.** $x\to -2^-$

c. $x\to 1^+$ **d.** $x\to 0^-$

21. $\lim \frac{x^2-3x+2}{x^3-2x^2}$ cuando

a. $x\to 0^+$ **b.** $x\to 2^+$

c. $x\to 2^-$ **d.** $x\to 2$

e. ¿Qué puede decirse acerca del límite conforme $x\to 0$?

22. $\lim \frac{x^2-3x+2}{x^3-4x}$ cuando

a. $x\to 2^+$ **b.** $x\to -2^+$

c. $x\to 0^-$ **d.** $x\to 1^+$

e. ¿Qué puede decirse acerca del límite conforme $x\to 0$?

Encuentre los límites en los ejercicios 23 a 26.

23. $\lim \left(2 - \frac{3}{t^{1/3}}\right)$ cuando

a. $t\to 0^+$ **b.** $t\to 0^-$

24. $\lim \left(\frac{1}{t^{3/5}} + 7\right)$ cuando

a. $t\to 0^+$ **b.** $t\to 0^-$

25. $\lim \left(\frac{1}{x^{2/3}} + \frac{2}{(x-1)^{2/3}}\right)$ cuando

a. $x\to 0^+$ **b.** $x\to 0^-$

c. $x\to 1^+$ **d.** $x\to 1^-$

26. $\lim \left(\frac{1}{x^{1/3}} - \frac{1}{(x-1)^{4/3}}\right)$ cuando

a. $x\to 0^+$ **b.** $x\to 0^-$

c. $x\to 1^+$ **d.** $x\to 1^-$

Graficación de funciones racionales

En los ejercicios 27 a 38, trace la gráfica de las funciones racionales. Incluya las gráficas y las ecuaciones de las asíntotas y los términos dominantes.

27. $y = \frac{1}{x-1}$

28. $y = \frac{1}{x+1}$

29. $y = \frac{1}{2x+4}$

30. $y = \frac{-3}{x-3}$

31. $y = \frac{x+3}{x+2}$

32. $y = \frac{2x}{x+1}$

33. $y = \frac{x^2}{x-1}$

34. $y = \frac{x^2+1}{x-1}$

35. $y = \frac{x^2-4}{x-1}$

36. $y = \frac{x^2-1}{2x+4}$

37. $y = \frac{x^2-1}{x}$

38. $y = \frac{x^3+1}{x^2}$

Creación de gráficas a partir de valores y límites

En los ejercicios 39 a 42, trace la gráfica de una función $y = f(x)$ que satisfaga las condiciones dadas. No es necesario que incluya fórmulas, solamente marque los ejes coordenados y trace una gráfica apropiada. (Las respuestas no son únicas, de manera que sus gráficas podrían ser distintas de las que se dan en la sección de respuestas).

39. $f(0) = 0,\ f(1) = 2,\ f(-1) = -2,\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$, y $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$

40. $f(0) = 0,\ \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0,\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = 2$, y $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -2$

41. $f(0) = 0,\ \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0,\ \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$

42. $f(2) = 1,\ f(-1) = 0,\ \lim_{x\to\infty} f(x) = 0,\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$

Creación de funciones

En los ejercicios 43 a 46, encuentre una función que satisfaga las condiciones dadas y trace su gráfica. (Las respuestas no son únicas. Cualquier función que satisfaga las condiciones es aceptable. Siéntase libre de usar fórmulas definidas a pedazos si eso le ayuda).

43. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0,\ \lim_{x\to 2^-} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \infty$

44. $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0,\ \lim_{x\to 3^-} g(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to 3^+} g(x) = \infty$

45. $\lim_{x\to-\infty} h(x) = -1,\ \lim_{x\to\infty} h(x) = 1,\ \lim_{x\to 0^-} h(x) = -1$ y $\lim_{x\to 0^+} h(x) = 1$

46. $\lim_{x\to\pm\infty} k(x) = 1,\ \lim_{x\to 1^-} k(x) = \infty$ y $\lim_{x\to 1^+} k(x) = -\infty$

Definición formal de límite infinito

Use las definiciones formales para probar los límites enunciados en los ejercicios 47 a 50.

47. $\lim_{x\to 0} \frac{-1}{x^2} = -\infty$

48. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|} = \infty$

49. $\lim_{x\to 3} \frac{-2}{(x-3)^2} = -\infty$

50. $\lim_{x\to -5} \frac{1}{(x+5)^2} = \infty$

Definiciones formales de límites laterales infinitos

51. La siguiente es la definición de **límite lateral derecho infinito**.

> Decimos que $f(x)$ tiende al infinito cuando x se aproxima por la derecha a x_0, y escribimos
>
> $$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \infty,$$
>
> si, para todo número real positivo B, existe un número $\delta > 0$ correspondiente tal que para toda x
>
> $$x_0 < x < x_0 + \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) > B.$$

Modifique la definición de manera que sea válida para los casos siguientes.

a. $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \infty$

b. $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$

c. $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$

Use las definiciones formales del ejercicio 51 para probar los límites enunciados en los ejercicios 52 a 56.

52. $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$

53. $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

54. $\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$

55. $\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty$

56. $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1-x^2} = \infty$

Graficación de términos

Cada una de las funciones de los ejercicios 57 a 60 está dada como la suma o diferencia de dos términos. Comience por graficar los términos (en el mismo sistema de ejes). Después, emplee las gráficas resultantes como guías para graficar la función.

57. $y = \sec x + \frac{1}{x},\quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

58. $y = \sec x - \frac{1}{x^2},\quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

59. $y = \tan x + \frac{1}{x^2},\quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

60. $y = \frac{1}{x} - \tan x,\quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

Exploraciones gráficas: comparación de gráficas con fórmulas

Grafique las curvas de los ejercicios 61 a 64. Explique la relación entre la fórmula de la curva y la gráfica.

61. $y = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

62. $y = \frac{-1}{\sqrt{4-x^2}}$

63. $y = x^{2/3} + \frac{1}{x^{1/3}}$

64. $y = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x^2+1}\right)$

2.6 Continuidad

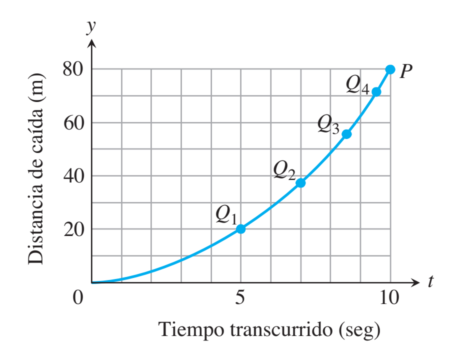


FIGURA 2.49 Conecte los puntos marcados por una curva sin rupturas para los datos experimentales $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ para un objeto cayendo.

Cuando se dibujan los valores de una función, ya sea generados en un laboratorio o recopilados en el campo, es frecuente que los puntos se unan mediante una curva continua para mostrar los valores de la función en los tiempos que no se midieron (figura 2.49). Al hacerlo, suponemos que estamos trabajando con una *función continua*, de manera que los resultados varían de forma continua de acuerdo con los datos, en lugar de "saltar" de un valor a otro sin tomar en cuenta los valores intermedios. El límite de una función continua cuando x se aproxima a c puede encontrarse con sólo calcular el valor de la función en c. (En la sección 2.2 concluimos que esto es válido para las funciones polinomiales).

Cualquier función $y = f(x)$ cuya gráfica pueda trazarse sobre su dominio con un movimiento ininterrumpido, es decir, sin levantar el lápiz de la hoja de papel, es un ejemplo de función continua. En esta sección investigaremos con más precisión qué significa que una función sea continua. También estudiaremos las propiedades de las funciones continuas y veremos que muchas de las funciones presentadas en la sección 1.4 son continuas.

Continuidad en un punto

Para entender la continuidad es necesario considerar una función como la de la figura 2.50, cuyos límites investigamos en el ejemplo 2 de la sección 2.4.

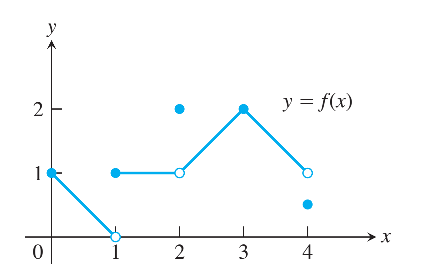


FIGURA 2.50 La función es continua en [0, 4], excepto en $x = 1$, $x = 2$ y $x = 4$ (ejemplo 1).

EJEMPLO 1 Análisis de la continuidad

Encontrar los puntos en los que la función f de la figura 2.50 es continua, y los puntos en los que es discontinua.

Solución La función f es continua en todos los puntos de su dominio [0, 4], excepto en $x = 1$, $x = 2$ y $x = 4$. En estos puntos de la gráfica se dan rupturas. Observe la relación entre el límite de f y el valor de f en cada punto del dominio de la función.

Puntos en los que f es continua:

Pero $x = 0$, $\qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$.

Pero $x = 3$, $\qquad \lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$.

Pero $0 < c < 4,\ c \neq 1, 2$, $\qquad \lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Puntos en los que f es discontinua:

Pero $x = 1$, $\qquad \lim_{x \to 1} f(x)$ no existe

Pero $x = 2$, $\qquad \lim_{x \to 2} f(x) = 1$, pero $1 \neq f(2)$.

Pero $x = 4$, $\qquad \lim_{x \to 4^-} f(x) = 1$, pero $1 \neq f(4)$.

Pero $c < 0,\ c > 4$, $\qquad$ estos puntos no están en el dominio de f ■

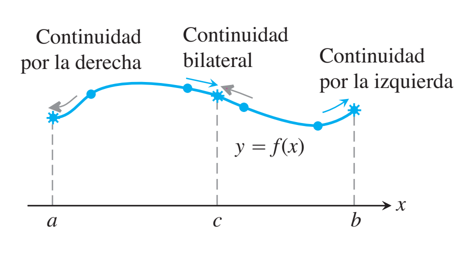


FIGURA 2.51 Continuidad en los puntos a, b y c.

Para definir la continuidad en un punto del dominio de una función, necesitamos definir la continuidad en un punto interior (lo cual involucra un límite bilateral) y la continuidad en un punto extremo (lo cual involucra un límite lateral) (figura 2.51).

DEFINICIÓN Continuidad en un punto

Punto interior: Una función $y = f(x)$ es **continua en un punto interior *c*** de su dominio si

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

Punto extremo: Una función $y = f(x)$ es **continua en un punto extremo izquierdo *a*** o es **continua en un punto extremo derecho *b*** de su dominio si

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \qquad \text{o} \qquad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b), \quad \text{respectivamente}.$$

Si una función f no es continua en un punto c, decimos que f es **discontinua** en c y que c es un **punto de discontinuidad** de f. Observe que no es necesario que c esté en el dominio de f.

Una función f es **continua por la derecha (o continua desde la derecha)** en un punto $x = c$ de su dominio si $\lim_{x \to c^+} f(x) = f(c)$. Por otro lado, es **continua por la izquierda (o continua desde la izquierda)** en c si $\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c)$. Por lo tanto, una función es continua en el punto extremo izquierdo a de su dominio si es continua por la derecha en a, y es continua en el punto extremo derecho b de su dominio si es continua por la izquierda en b. Una función es continua en un punto interior c de su dominio si y sólo si es, al mismo tiempo, continua por la derecha y continua por la izquierda en c (figura 2.51).

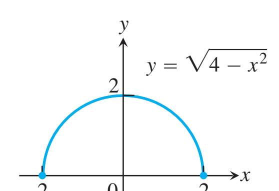


FIGURA 2.52 Una función continua en todo punto de su dominio (ejemplo 2).

EJEMPLO 2 Una función continua en todo su dominio

La función $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ es continua en todos los puntos de su dominio, $[-2, 2]$ (figura 2.52), incluyendo $x = -2$, donde f es continua por la derecha y $x = 2$, donde f es continua por la izquierda. ■

FIGURA 2.53 Una función que es continua por la derecha pero no por la izquierda, en el origen. Hay una discontinuidad en ese punto (ejemplo 3).

EJEMPLO 3 La función escalonada unitaria tiene una discontinuidad de salto

La función escalonada unitaria $U(x)$, graficada en la figura 2.53, es continua por la derecha en $x = 0$, pero no es ni continua por la izquierda ni continua en el punto. Tiene una discontinuidad de salto en $x = 0$. ■

A continuación se resumen las condiciones que deben cumplirse para la continuidad en un punto.

Condiciones para la continuidad

Una función $f(x)$ es continua en $x = c$ si y sólo si se cumplen las tres condiciones siguientes.

1. $f(c)$ existe (c está en el dominio de f)
2. $\lim_{x \to c} f(x)$ existe (f tiene un límite cuando $x \to c$)
3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ (el límite es igual al valor de la función)

Para la continuidad lateral y la continuidad en un punto extremo, los límites de las condiciones 2 y 3 deben reemplazarse por los límites laterales apropiados.

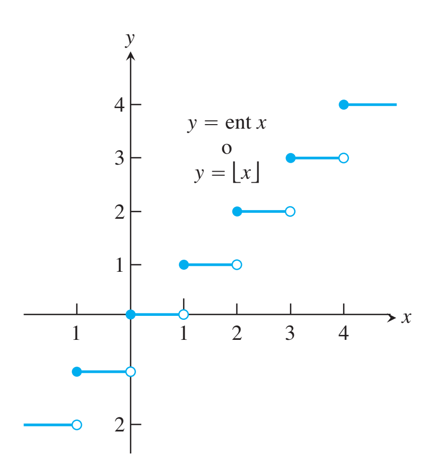


FIGURA 2.54 La función mayor entero es continua en todo punto no entero. Es continua por la derecha pero no por la izquierda, en todo punto entero (ejemplo 4).

EJEMPLO 4 La función parte entera

La función $y = \lfloor x \rfloor$ o $y = \text{ent } x$, de la que se habló por primera vez en el capítulo 1, aparece graficada en la figura 2.54. Dicha función es discontinua en todos los enteros, porque el límite no existe en ningún entero n:

$$\lim_{x \to n^-} \text{ent } x = n - 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to n^+} \text{ent } x = n$$

de modo que los límites laterales izquierdo y derecho no son iguales cuando $x \to n$. Como ent $n = n$, la función mayor entero es continua por la derecha en todo entero n (pero no es continua por la izquierda).

La función parte entera es continua en cualquier número real que no sea entero. Por ejemplo

$$\lim_{x \to 1.5} \text{ent } x = 1 = \text{ent } 1.5.$$

En general, si $n - 1 < c < n$, siendo n un entero, entonces

$$\lim_{x \to c} \text{ent } x = n - 1 = \text{ent } c.$$

■

La figura 2.55 es un catálogo de tipos de discontinuidades. La función de la figura 2.55a es continua en $x = 0$. La función de la figura 2.55b sería continua si tuviera $f(0) = 1$. La función de la figura 2.55c sería continua si $f(0)$ fuera 1 en lugar de 2. Las discontinuidades de las figuras 2.55b y c son **removibles** (evitables). Cada función tiene un límite cuando $x \to 0$ y podemos evitar la discontinuidad haciendo que $f(0)$ sea igual a ese límite.

En la figura 2.55d las discontinuidades a lo largo de f son más serias: $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe y no hay manera de resolver la situación cambiando f en 0. La función escalonada de la figura 2.55d tiene una **discontinuidad de salto:** existen límites laterales, pero tienen valores distintos. La función $f(x) = 1/x^2$ de la figura 2.55e tiene una **discontinuidad infinita**. La función de la figura 2.55f tiene una **discontinuidad oscilante:** oscila demasiado para tener un límite cuando $x \to 0$.

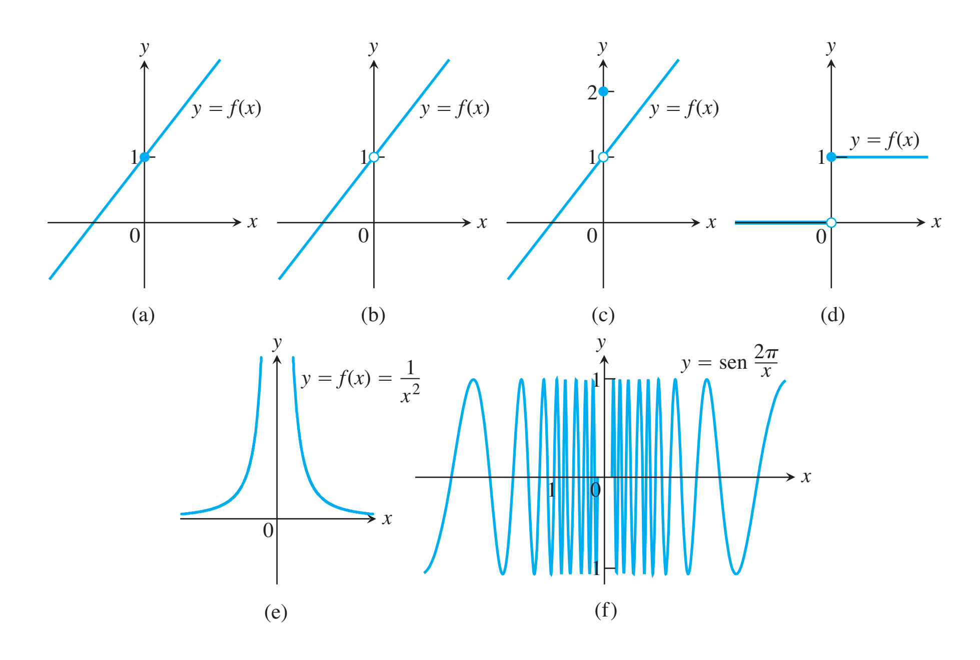


FIGURA 2.55 Una función en (a) es continua en $x = 0$; las funciones en (b) a (f) no lo son.

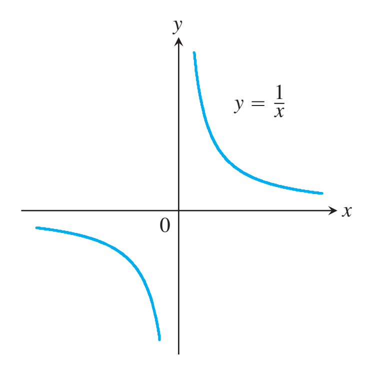


FIGURA 2.56 La función $y = 1/x$ es continua en todo valor de x excepto en $x = 0$. Tiene un punto de discontinuidad en $x = 0$ (ejemplo 5).

Funciones continuas

Una función es **continua en un intervalo** si y sólo si es continua en todos los puntos del mismo. Por ejemplo, la función semicírculo graficada en la figura 2.52 es continua en el intervalo $[-2, 2]$, que es su dominio. Una **función continua** es aquella que es continua en todos los puntos de su dominio, aunque no es necesario que lo sea en todos los intervalos. Por ejemplo, $y = 1/x$ no es continua en $[-1, 1]$ (figura 2.56) pero sí lo es en su dominio $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

EJEMPLO 5 Identificación de funciones continuas

(a) La función $y = 1/x$ (figura 2.56) es continua, porque es continua en todos los puntos de su dominio. Sin embargo, tiene un punto de discontinuidad en $x = 0$, ya que no está definida ahí.

(b) De acuerdo con el ejemplo 3 de la sección 2.3, la función identidad $f(x) = x$ y las funciones constantes son continuas en toda la recta real. ■

Las combinaciones algebraicas de funciones continuas son continuas, siempre y cuando estén definidas, es decir son continuas en su dominio.

TEOREMA 9 Propiedades de las funciones continuas

Si las funciones f y g son continuas en $x = c$, entonces las combinaciones siguientes son continuas en $x = c$.

1. *Sumas:*	$f + g$
2. *Diferencias:*	$f - g$
3. *Productos:*	$f \cdot g$
4. *Múltiplos constantes:*	$k \cdot f$, para cualquier número k
5. *Cocientes:*	f/g siempre y cuando $g(c) \neq 0$
6. *Potencias:*	$f^{r/s}$, siempre y cuando esté definida en un intervalo abierto que contenga a c, donde r y s son enteros.

Casi todos los resultados del teorema 9 pueden comprobarse fácilmente a partir de las reglas de los límites del teorema 1, sección 2.2. Por ejemplo, para probar la propiedad de la suma tenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to c}(f + g)(x) &= \lim_{x \to c}(f(x) + g(x)) \\
&= \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x), && \text{Regla de la suma, teorema 1} \\
&= f(c) + g(c) && \text{Continuidad de } f, g \text{ en } c \\
&= (f + g)(c).
\end{aligned}$$

Esto prueba que $f + g$ es continua.

EJEMPLO 6 Las funciones polinomiales y racionales son continuas

(a) Cualquier función polinomial $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ es continua, porque $\lim_{x \to c} P(x) = P(c)$ de acuerdo con el teorema 2, sección 2.2.

(b) Si $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios, entonces la función racional $P(x)/Q(x)$ es continua siempre que esté definida ($Q(c) \neq 0$), según la regla del cociente del teorema 9.

EJEMPLO 7 Continuidad de la función valor absoluto

La función $f(x) = |x|$ es continua en todo valor de x. Si $x > 0$, tenemos $f(x) = x$, una función polinomial. Si $x < 0$, tenemos $f(x) = -x$, otra función polinomial. Finalmente, en el origen, $\lim_{x\to 0} |x| = 0 = |0|$. ■

Las funciones $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x$ son continuas en $x = 0$, de acuerdo con el ejemplo 6 de la sección 2.2. Ambas funciones son, de hecho, continuas en todos lados (vea el ejercicio 62). En consecuencia, según el teorema 9, las seis funciones trigonométricas son continuas siempre que estén definidas. Por ejemplo, $y = \tan x$ es continua en $\cdots \cup (-\pi/2, \pi/2) \cup (\pi/2, 3\pi/2) \cup \cdots$.

Funciones compuestas

Todas las composiciones de funciones continuas son continuas. La idea es que si $f(x)$ es continua en $x = c$ y $g(x)$ es continua en $x = f(c)$, entonces $g \circ f$ es continua en $x = c$ (figura 2.57). En este caso, el límite cuando $x \to c$ es $g(f(c))$.

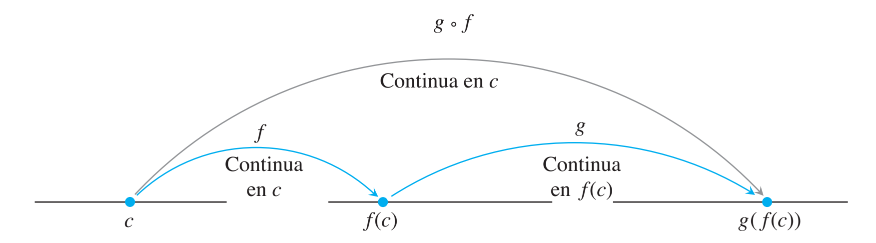


FIGURA 2.57 La composición de funciones continuas es continua.

> **TEOREMA 10 Composición de funciones continuas**
> Si f es continua en c y g es continua en $f(c)$, entonces la composición $g \circ f$ es continua en c.

Desde el punto de vista intuitivo, el teorema 10 es razonable, ya que si x está cerca de c, entonces $f(x)$ está cerca de $f(c)$, y como g es continua en $f(c)$, resulta que $g(f(x))$ está cerca de $g(f(c))$.

La continuidad de composiciones se cumple para cualquier número finito de funciones. El único requerimiento es que cada función sea continua donde está aplicada. En el ejercicio 6 del Apéndice 2 se presenta un resumen de la prueba del teorema 10.

EJEMPLO 8 Aplicación de los teoremas 9 y 10

Probar que las funciones siguientes son continuas en todos los puntos de sus respectivos dominios.

(a) $y = \sqrt{x^2 - 2x - 5}$ **(b)** $y = \dfrac{x^{2/3}}{1 + x^4}$

(c) $y = \left|\dfrac{x - 2}{x^2 - 2}\right|$ **(d)** $y = \left|\dfrac{x \operatorname{sen} x}{x^2 + 2}\right|$

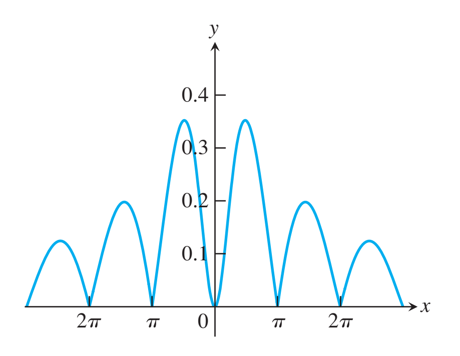


FIGURA 2.58 La gráfica sugiere que $y = |(x \operatorname{sen} x)/(x^2 + 2)|$ es continua (ejemplo 8d).

Solución

(a) La función raíz cuadrada es continua en $[0, \infty)$ ya que es una potencia racional de la función identidad continua $f(x) = x$ (parte 6, teorema 9). En consecuencia, la función dada es la composición de la función polinomial $f(x) = x^2 - 2x - 5$ con la función raíz cuadrada $g(t) = \sqrt{t}$.

(b) El numerador es una potencia racional de la función identidad; el denominador es una función polinomial positiva en todos sus puntos. Por lo tanto, el cociente es continuo.

(c) El cociente $(x - 2)/(x^2 - 2)$ es continuo para todo $x \neq \pm\sqrt{2}$, y la función es la composición de este cociente con la función continua valor absoluto (ejemplo 7).

(d) Debido a que la función seno es continua en todos sus puntos (ejercicio 62), el término del numerador $x \operatorname{sen} x$ es el producto de funciones continuas, y el término del denominador $x^2 + 2$ es una función polinomial positiva en todos sus puntos. La función dada es la composición de un cociente de funciones continuas con la función continua valor absoluto (figura 2.58). ■

Extensión continua para un punto

La función $y = (\operatorname{sen} x)/x$ es continua en todos los puntos, excepto en $x = 0$. En este punto es parecida a la función $y = 1/x$. Pero $y = (\operatorname{sen} x)/x$ es distinta de $y = 1/x$, toda vez que tiene un límite finito cuando $x \to 0$ (teorema 7). Por lo tanto, es posible extender el dominio de la función para incluir el punto $x = 0$ de tal manera que la función extendida es continua en $x = 0$. Definimos

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

La función $F(x)$ es continua en $x = 0$, ya que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = F(0)$$

(figura 2.59).

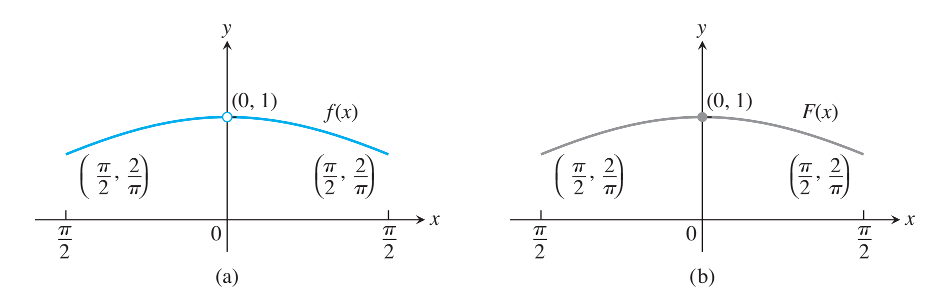


FIGURA 2.59 La gráfica (a) de $f(x) = (\operatorname{sen} x)/x$ para $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ no incluye el punto (0, 1), ya que la función no está definida en $x = 0$. (b) Podemos eliminar la discontinuidad de la gráfica definiendo la nueva función $F(x)$ con $F(0) = 1$ y $F(x) = f(x)$ en cualquier otro lado. Observe que $F(0) = \lim_{x \to 0} f(x)$.

De forma más general, una función (como una función racional) puede tener un límite incluso en un punto donde no esté definida. Si $f(c)$ no está definida, pero $\lim_{x \to c} f(x) = L$ existe, podemos definir una nueva función $F(x)$ mediante la regla

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \text{ si en el dominio de } f \\ L, & \text{si } x = c. \end{cases}$$

La función F es continua en $x = c$. Para referirnos a ella, decimos que es la **extensión continua** de f para $x = c$. Para funciones racionales f, las extensiones continuas usualmente se encuentran eliminando factores comunes.

EJEMPLO 9 Una extensión continua

Probar que

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$$

tiene una extensión continua para $x = 2$, y encontrar esa extensión.

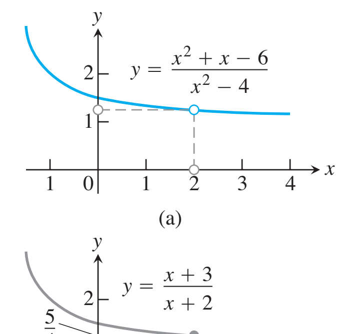


FIGURA 2.60 (a) La gráfica de $f(x)$ y (b) la gráfica de su extensión continua $F(x)$ (ejemplo 9).

Solución A pesar de que $f(2)$ no está definida, si $x \neq 2$ tenemos

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \frac{(x - 2)(x + 3)}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{x + 3}{x + 2}.$$

La nueva función

$$F(x) = \frac{x + 3}{x + 2}$$

es igual a $f(x)$ para $x \neq 2$, pero es continua en $x = 2$, y ahí tiene el valor 5/4. Así, F es la extensión continua de f para $x = 2$ y

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2} f(x) = \frac{5}{4}.$$

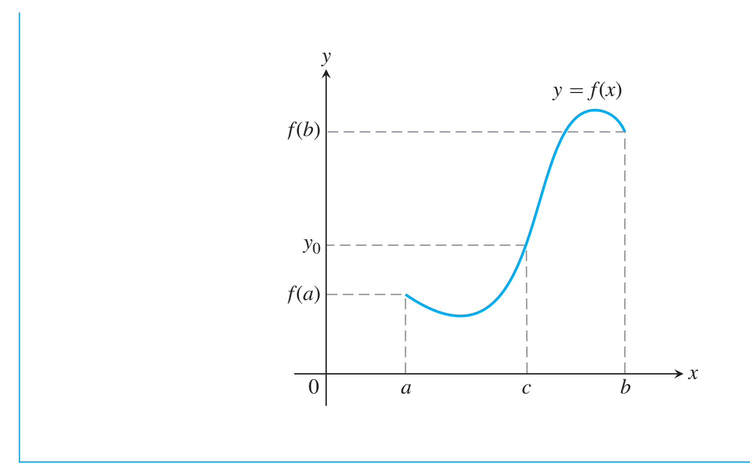
En la figura 2.60 se muestra la gráfica de f. La extensión continua F tiene la misma gráfica, pero sin el hueco en (2, 5/4). Efectivamente, F es la función f con su punto de discontinuidad en $x = 2$ removido. ■

El teorema del valor intermedio para funciones continuas

Las funciones que son continuas en intervalos tienen propiedades que las hacen particularmente útiles en matemáticas y en sus aplicaciones. Una de éstas es la *propiedad del valor intermedio*. Se dice que una función tiene la **propiedad del valor intermedio** si siempre que toma dos valores también toma todos los valores entre esos dos.

TEOREMA 11 El teorema del valor intermedio para funciones continuas

Una función $y = f(x)$ que es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ toma todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$. En otras palabras, si y_0 es cualquier valor entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces $y_0 = f(c)$ para algún c en $[a, b]$.



Geométricamente, el teorema del valor intermedio dice que cualquier recta horizontal $y = y_0$ que cruza el eje y entre los números $f(a)$ y $f(b)$ cruzará la curva $y = f(x)$ al menos una vez sobre el intervalo $[a, b]$.

La demostración del teorema del valor intermedio depende de la propiedad de completez (completitud) del sistema de los números reales, y se puede encontrar en textos más avanzados.

La continuidad de f en el intervalo es esencial para el teorema 11. Si f es discontinua aunque sea en un solo punto, la afirmación del teorema podría no cumplirse, como sucede en el caso de la función graficada en la figura 2.61.

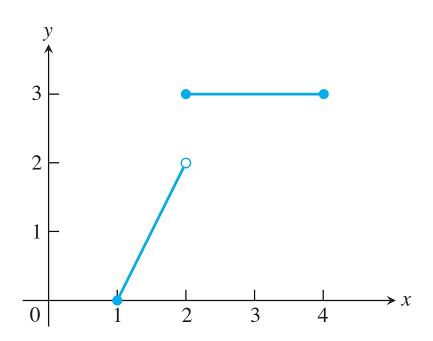


FIGURA 2.61 La función
$$f(x) = \begin{cases} 2x - 2, & 1 \le x < 2 \\ 3, & 2 \le x \le 4 \end{cases}$$
no toma todos los valores entre $f(1) = 0$ y $f(4) = 3$; pierde todos los valores entre 2 y 3.

Una consecuencia para la graficación: conectividad El teorema 11 es la razón por la que la gráfica de una función continua en un intervalo no puede tener rupturas sobre el intervalo. Será **conexa**,es decir, una curva simple sin rupturas, como la gráfica de sen x. No tendrá saltos, al contrario de lo que ocurre con la gráfica de la función parte entera (figura 2.54) ni ramas separadas, como la gráfica de $1/x$ (figura 2.56).

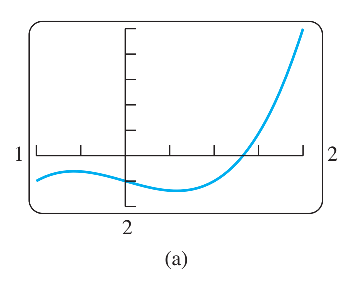
Una consecuencia para la determinación de raíces Llamamos **raíz** de la ecuación o **cero** de la función f a una solución de la ecuación $f(x) = 0$. El teorema del valor intermedio nos dice que si f es continua, cualquier intervalo en donde f cambie de signo contendrá un cero de la función.

En términos prácticos, cuando vemos en una pantalla de computadora que la gráfica de una función continua cruza el eje horizontal, sabemos que no lo brinca. Realmente hay un punto donde el valor de la función es cero. Esta consecuencia nos lleva a un procedimiento para estimar los ceros de cualquier función continua que podamos graficar:

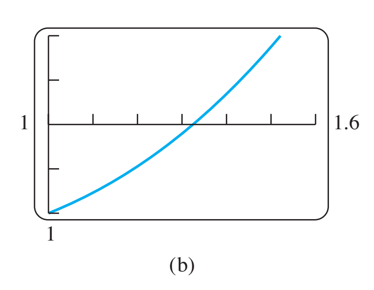
1. Graficamos la función sobre un intervalo grande para ver de forma general donde están los ceros.

2. Hacemos un acercamiento en cada cero para estimar su valor en la coordenada x.

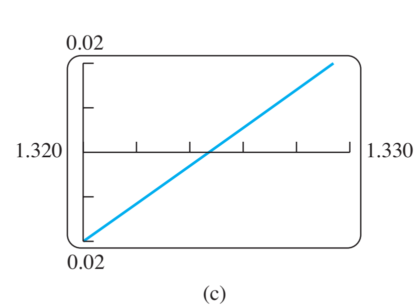
Puede practicar este procedimiento utilizando su calculadora graficadora o computadora para resolver algunos de los ejercicios. En la figura 2.62 se muestra la secuencia de pasos típicos para encontrar una solución gráfica para la ecuación $x^3 - x - 1 = 0$.



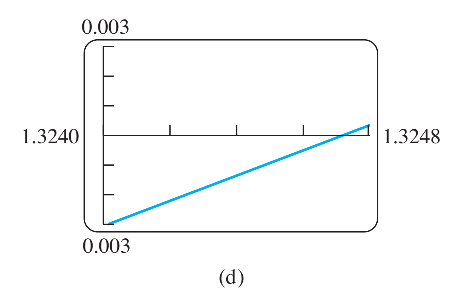
(a)



(b)



(c)



(d)

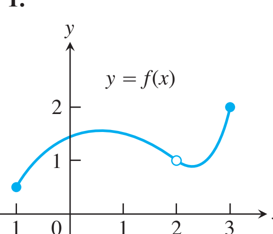
FIGURA 2.62 Acercamiento al cero de la función $f(x) = x^3 - x - 1$. El cero está cerca de $x = 1.3247$.

EJERCICIOS 2.6

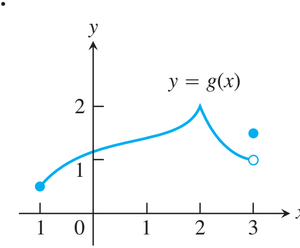
Continuidad a partir de la gráfica

En los ejercicios 1 a 4, diga si la función graficada es continua en [–1, 3]. Si no lo es, explique en dónde falla la continuidad y por qué.

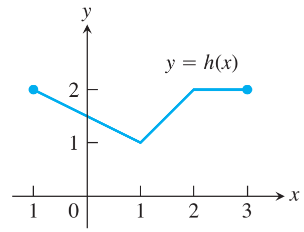
1.



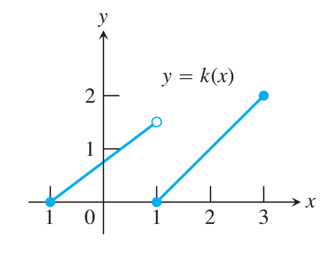
2.



3.



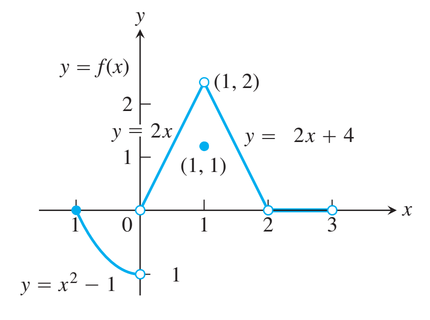
4.



Los ejercicios 5 a 10 son acerca de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & -1 \leq x < 0 \\ 2x, & 0 < x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ -2x + 4, & 1 < x < 2 \\ 0, & 2 < x < 3 \end{cases}$$

cuya gráfica aparece en la figura siguiente.



Gráfica para los ejercicios 5 a 10

5. **a.** ¿$f(-1)$ existe?
   b. ¿$\text{lím}_{x\to -1^+} f(x)$ existe?
   c. ¿$\text{lím}_{x\to -1^+} f(x) = f(-1)$?
   d. ¿Es f continua en $x = -1$?
6. **a.** ¿$f(1)$ existe?
   b. ¿$\text{lím}_{x\to 1} f(x)$ existe?
   c. ¿$\text{lím}_{x\to 1} f(x) = f(1)$?
   d. ¿Es f continua en $x = 1$?
7. **a.** ¿Está f definida en $x = 2$? (Vea la definición de f).
   b. ¿Es f continua en $x = 2$?
8. ¿En qué valores de x es continua f?
9. ¿Qué valor debe asignarse a $f(2)$ para que la función extendida sea continua en $x = 2$?
10. ¿A qué nuevo valor hay que cambiar $f(1)$ para remover la discontinuidad?

Aplicación de la prueba de continuidad

¿En qué puntos las funciones de los ejercicios 11 y 12 no son continuas? ¿En qué puntos, si hay alguno, es posible remover las discontinuidades? ¿En cuáles no es posible remover? Justifique sus respuestas

11. Ejercicio 1 de la sección 2.4
12. Ejercicio 2 de la sección 2.4

¿En qué puntos son continuas las funciones de los ejercicios 13 a 28?

13. $y = \frac{1}{x-2} - 3x$
14. $y = \frac{1}{(x+2)^2} + 4$
15. $y = \frac{x+1}{x^2 - 4x + 3}$
16. $y = \frac{x+3}{x^2 - 3x - 10}$
17. $y = |x - 1| + \text{sen}\, x$
18. $y = \frac{1}{|x| + 1} - \frac{x^2}{2}$
19. $y = \frac{\cos x}{x}$
20. $y = \frac{x+2}{\cos x}$
21. $y = \csc 2x$
22. $y = \tan \frac{\pi x}{2}$
23. $y = \frac{x \tan x}{x^2 + 1}$
24. $y = \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{1 + \text{sen}^2 x}$
25. $y = \sqrt{2x + 3}$
26. $y = \sqrt[4]{3x - 1}$
27. $y = (2x - 1)^{1/3}$
28. $y = (2 - x)^{1/5}$

Funciones compuestas

Encuentre los límites en los ejercicios 29 a 34. ¿Las funciones son continuas en el punto al que se aproximan?

29. $\lim_{x\to\pi} \text{sen}\,(x - \text{sen}\, x)$
30. $\lim_{t\to 0} \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cos(\tan t)\right)$
31. $\lim_{y\to 1} \sec(y \sec^2 y - \tan^2 y - 1)$
32. $\lim_{x\to 0} \tan\left(\frac{\pi}{4}\cos(\text{sen}\, x^{1/3})\right)$
33. $\lim_{t\to 0} \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{19 - 3\sec 2t}}\right)$
34. $\lim_{x\to\pi/6} \sqrt{\csc^2 x + 5\sqrt{3}\tan x}$

Extensiones continuas

35. Defina $g(3)$ de manera que extienda $g(x) = (x^2 - 9)/(x - 3)$ para que sea continua en $x = 3$.
36. Defina $h(2)$ de manera que extienda $h(t) = (t^2 + 3t - 10)/(t - 2)$ para que sea continua en $t = 2$.
37. Defina $f(1)$ de manera que extienda $f(s) = (s^3 - 1)/(s^2 - 1)$ para que sea continua en $s = 1$.
38. Defina $f(1)$ de manera que extienda $g(x) = (x^2 - 16)/(x^2 - 3x - 4)$ para que sea continua en $x = 4$.
39. ¿Para qué valor de a es

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 3 \\ 2ax, & x \geq 3 \end{cases}$$

continua en toda x?

40. ¿Para qué valor de b es

$$g(x) = \begin{cases} x, & x < -2 \\ bx^2, & x \geq -2 \end{cases}$$

continua en toda x?

T En los ejercicios 41 a 44, grafique la función f para ver si parece tener una extensión continua en el origen. De ser así, utilice las funciones *Trace* y *Zoom* para encontrar un punto que sea apropiado para el valor de la función extendida en $x = 0$. Si la función no parece tener una extensión continua, ¿es posible extenderla para que sea continua en el origen por la derecha o por la izquierda? De ser así, ¿cuál debe ser el valor (o valores) de la función extendida?

41. $f(x) = \frac{10^x - 1}{x}$
42. $f(x) = \frac{10^{|x|} - 1}{x}$
43. $f(x) = \frac{\text{sen}\, x}{|x|}$
44. $f(x) = (1 + 2x)^{1/x}$

Teoría y ejemplos

45. Se sabe que una función continua $y = f(x)$ es negativa en $x = 0$, y positiva en $x = 1$. ¿Por qué la ecuación $f(x) = 0$ tiene al menos una solución entre $x = 0$ y $x = 1$? Ilústrelo con un bosquejo.
46. Explique por qué la ecuación $\cos x = x$ tiene al menos una solución.
47. **Raíces cúbicas** Pruebe que la ecuación $x^3 - 15x + 1 = 0$ tiene tres soluciones en el intervalo $[-4, 4]$.
48. **Un valor de la función** Pruebe que la función $F(x) = (x - a)^2 \cdot (x - b)^2 + x$ toma el valor $(a + b)/2$ para algún valor de x.
49. **Resolución de una ecuación** Si $f(x) = x^3 - 8x + 10$, pruebe que hay valores de c para los que $f(c)$ es igual a **(a)** π; **(b)** $-\sqrt{3}$; **(c)** 5,000,000.

50. Explique por qué los cinco enunciados siguientes están solicitando la misma información.

a. Encuentre las raíces de $f(x) = x^3 - 3x - 1$.

b. Encuentre las coordenadas x de los puntos donde la curva $y = x^3$ cruza la recta $y = 3x + 1$.

c. Encuentre los valores de x para los que $x^3 - 3x = 1$.

d. Encuentre las coordenadas x de los puntos donde la curva cúbica $y = x^3 - 3x$ cruza la recta $y = 1$.

e. Resuelva la ecuación $x^3 - 3x - 1 = 0$.

51. Discontinuidad removible Dé un ejemplo de una función $f(x)$ que sea continua para todos los valores de x, excepto $x = 2$, en donde tenga una discontinuidad que sea posible eliminar. Explique cómo sabe que f es discontinua en $x = 2$, y cómo sabe que la discontinuidad se puede eliminar.

52. Discontinuidad no removible Dé un ejemplo de una función $g(x)$ que sea continua para todos los valores de x, excepto $x = -1$, donde tenga una discontinuidad que no sea posible eliminar. Explique cómo sabe que g es discontinua ahí, y por qué no se puede eliminar la discontinuidad.

53. Una función discontinua en todos los puntos

a. Use el hecho de que todo intervalo no vacío de números reales contiene números racionales e irracionales, para probar que la función

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0, & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

es discontinua en todos los puntos.

b. ¿f es continua por la derecha o por la izquierda en algún punto?

54. Si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son continuas para $0 \le x \le 1$, ¿$f(x)/g(x)$ podría ser discontinua en un punto de $[0, 1]$? Justifique su respuesta.

55. Si la función producto $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ es continua en $x = 0$, ¿$f(x)$ y $g(x)$ deben ser continuas en $x = 0$? Justifique su respuesta.

56. Composición discontinua de funciones continuas Dé un ejemplo de funciones f y g, ambas continuas en $x = 0$, para las que la composición $f \circ g$ sea discontinua en $x = 0$. ¿Esto contradice el teorema 10? Justifique su respuesta.

57. Funciones continuas que nunca son cero ¿Es cierto que una función continua que nunca es cero en un intervalo nunca cambia de signo en ese intervalo? Justifique su respuesta.

58. Estiramiento de una liga de hule ¿Es cierto que si se estira una liga de hule jalando uno de sus extremos hacia la derecha y el otro hacia la izquierda algún punto de la misma terminará en su posición original? Justifique su respuesta.

59. Un teorema de punto fijo Suponga que una función f es continua en un intervalo cerrado $[0, 1]$ y que $0 \le f(x) \le 1$ para toda x en $[0, 1]$. Demuestre que debe existir un número c en $[0, 1]$ tal que $f(c) = c$ (c se denomina **punto fijo** de f).

60. La propiedad de conservar el signo en funciones continuas Sea f definida en un intervalo (a, b), y suponga que $f(c) \neq 0$ en alguna c donde f es continua. Demuestre que existe un intervalo $(c - \delta, c + \delta)$ alrededor de c donde f tiene el mismo signo que $f(c)$. Observe qué importante es esta conclusión. A pesar de que f está definida en todo (a, b), no se requiere que sea continua en cualquier punto, excepto en c. Esto, y la condición $f(c) \neq 0$, es suficiente para hacer f distinta de cero (ya sea positiva o negativa) en todo un intervalo.

61. Demuestre que f es continua en c si y sólo si

$$\lim_{h \to 0} f(c + h) = f(c).$$

62. Use el ejercicio 61 y las identidades

$$\operatorname{sen}(h + c) = \operatorname{sen} h \cos c + \cos h \operatorname{sen} c,$$
$$\cos(h + c) = \cos h \cos c - \operatorname{sen} h \operatorname{sen} c$$

para probar que $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \cos x$ son continuas en cualquier punto $x = c$.

Resolución gráfica de ecuaciones

T Use una calculadora graficadora o una computadora para resolver las ecuaciones de los ejercicios 63 a 70.

63. $x^3 - 3x - 1 = 0$

64. $2x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = 0$

65. $x(x - 1)^2 = 1$ (una raíz)

66. $x^x = 2$

67. $\sqrt{x} + \sqrt{1 + x} = 4$

68. $x^3 - 15x + 1 = 0$ (una raíz)

69. $\cos x = x$ (una raíz). Asegúrese de estar usando el modo radianes.

70. $2 \operatorname{sen} x = x$ (tres raíces). Asegúrese de estar usando el modo radianes.

2.7 Tangentes y derivadas

En esta sección continuaremos el análisis de las secantes y las tangentes, que comenzamos en la sección 2.1. Calcularemos los límites de las pendientes de las secantes para encontrar las tangentes a las curvas.

¿Qué es la tangente a una curva?

En el caso de los círculos, comprender qué es una tangente resulta bastante sencillo. Una recta L es tangente a un círculo en un punto P si L pasa por P y es perpendicular al radio

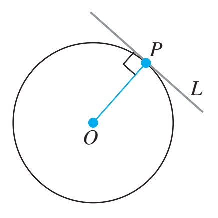


FIGURA 2.63 *L* es tangente al círculo en *P* si pasa por *P* y es perpendicular al radio *OP*.

en *P* (figura 2.63). Tal recta solo *toca* al círculo. Pero, ¿qué significa que una recta *L* sea tangente a cualquier otra curva *C* en un punto *P*? Generalizando a partir de la geometría del círculo, podemos decir que significa cualquiera de las afirmaciones siguientes:

1. *L* pasa por *P*, es perpendicular a de la recta que se forma entre *P* y el centro de *C*.
2. *L* pasa sólo por un punto de *C*, digamos, *P*.
3. *L* pasa por *P* y se ubica únicamente en uno de los lados de *C*.

Aunque estas afirmaciones son válidas si *C* es un círculo, ninguna de ellas funciona para todas las curvas más generales. Pocas curvas tienen centro, y la recta que podríamos calificar como tangente tal vez cortaría a *C* en puntos distintos, o quizá cruzaría *C* en el punto de tangencia (figura 2.64).

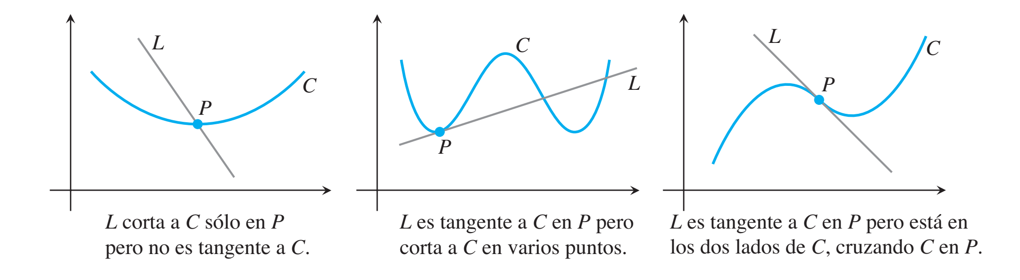


FIGURA 2.64 Exploración de mitos acerca de las rectas tangentes.

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

Pierre de Fermat (1601–1665)

Para definir la tangencia para curvas generales, necesitamos una aproximación *dinámica* que tome en cuenta el comportamiento de las secantes que pasan por *P* y los puntos cercanos *Q*, moviendose hacia *P* a lo largo de la curva (figura 2.65). Tal aproximación consistiría en lo siguiente:

1. Empezamos con lo que *podemos* calcular, a saber, la pendiente de la secante *PQ*.
2. Investigamos el límite de la pendiente de la secante cuando *Q* se acerca a *P* a lo largo de la curva.
3. Si el límite existe, lo tomamos como la pendiente de la curva en *P*, y definimos la tangente a la curva en *P* como la recta que pasa por *P* con esta pendiente.

Estos pasos son los que realizamos en los ejemplos de la caída de la piedra y las moscas de la fruta en la sección 2.1.

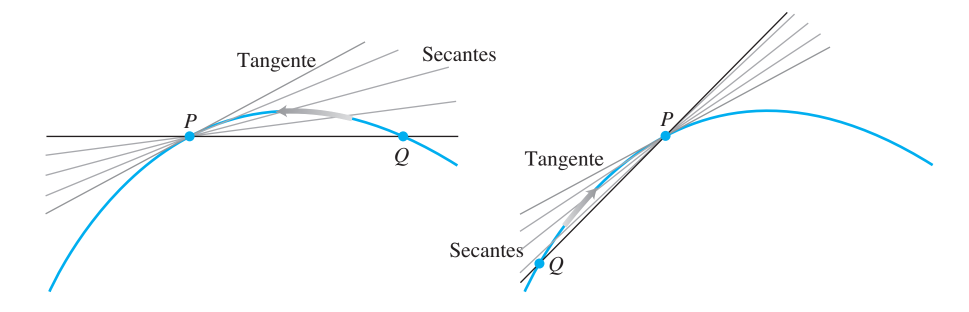


FIGURA 2.65 Aproximación dinámica de la tangente. La tangente a la curva en *P* es la recta que pasa por *P* cuya pendiente es el límite de las pendientes de las secantes cuando $Q \rightarrow P$ por ambos lados.

EJEMPLO 1 Recta tangente a una parábola

Encontrar la pendiente de la parábola $y = x^2$ en el punto $P(2, 4)$. Escribir una ecuación para la tangente a la parábola en este punto.

Solución Empezamos con una recta secante que pasa por $P(2, 4)$ y $Q(2 + h, (2 + h)^2)$. Después escribimos una expresión para la pendiente de la secante PQ e investigamos qué pasa con la pendiente cuando Q se acerca a P a lo largo de la curva:

$$\text{Pendiente de la secante} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = \frac{h^2 + 4h + 4 - 4}{h}$$

$$= \frac{h^2 + 4h}{h} = h + 4.$$

Si $h > 0$, entonces Q está arriba y a la derecha de P, como en la figura 2.66. Si $h < 0$, entonces Q está a la izquierda de P (este caso no se ilustra en la figura). En cualquier caso, cuando Q se aproxima a P a lo largo de la curva, h se aproxima a cero y la pendiente de la secante se aproxima a 4:

$$\lim_{h \to 0} (h + 4) = 4.$$

Tomamos 4 para que sea la pendiente de la parábola en P.

La tangente a la parábola en P es la recta que pasa por P con pendiente 4:

$$y = 4 + 4(x - 2) \qquad \text{Ecuación punto-pendiente}$$

$$y = 4x - 4.$$

■

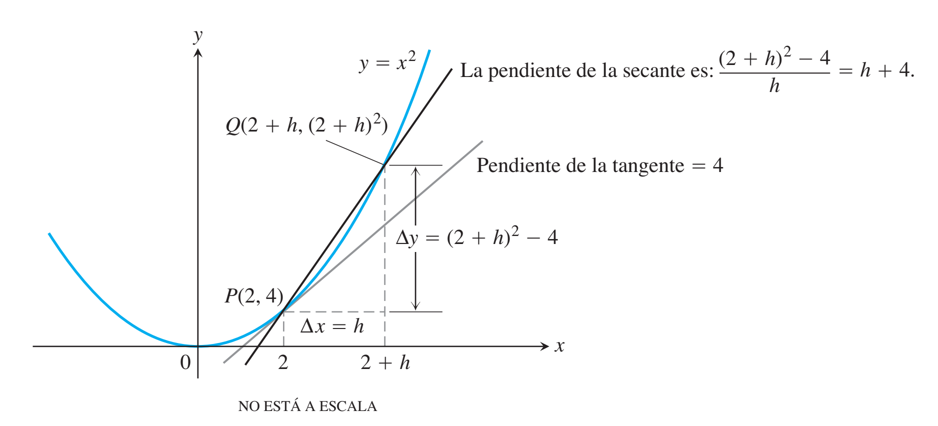


FIGURA 2.66 Encontrar la pendiente de la parábola $y = x^2$ en el punto $P(2, 4)$ (ejemplo 1).

Determinación de una tangente a la gráfica de una función

La determinación de una tangente a una curva fue el problema matemático dominante a principios del siglo XVII. En óptica, la tangente determina el ángulo por el que un rayo de luz atraviesa una lente curva. En mecánica, la tangente determina la dirección del movimiento de un cuerpo a lo largo de todos los puntos de una trayectoria. En geometría, las tangentes a dos curvas en un punto de intersección determinan los ángulos en los que éstas se cortan. Para encontrar una tangente a una curva arbitraria $y = f(x)$ en un punto $P(x_0, f(x_0))$, usamos el mismo proceso dinámico. Calculamos la pendiente de la secante a través de P y un punto $Q(x_0 + h, f(x_0 + h))$. Después investigamos el límite de la pendiente cuando $h \to 0$ (figura 2.67). Si el límite existe, lo llamamos la pendiente de la curva en P, y definimos la tangente en P como la recta que pasa por P y tiene esta pendiente.

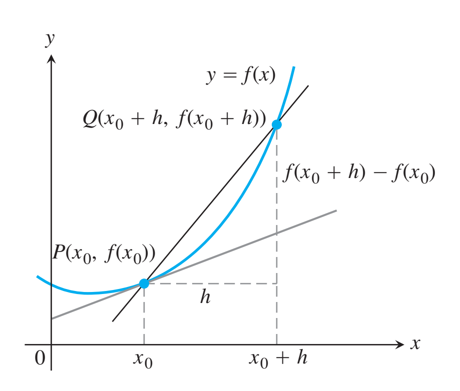


FIGURA 2.67 Encontrar la pendiente de la recta tangente en P es

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

DEFINICIONES Pendiente, recta tangente

La **pendiente de la curva** $y = f(x)$ en el punto $P(x_0, f(x_0))$ es el número

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad \text{(siempre y cuando el límite exista).}$$

La **recta tangente** a la curva en P es la recta que pasa por P con esta pendiente.

Siempre que damos una definición nueva, la comprobamos mediante situaciones familiares para asegurarnos de que es consistente con los resultados esperados en esos casos. El ejemplo 2 muestra que la nueva definición de pendiente coincide con la que se dio del mismo concepto en la sección 1.2, cuando lo aplicamos a rectas no verticales.

EJEMPLO 2 Comprobación de la definición

Demostrar que la recta $y = mx + b$ es su propia tangente en cualquier punto $(x_0, mx_0 + b)$.

Solución Hacemos $f(x) = mx + b$, y organizamos el trabajo en tres pasos.

1. *Encontrar* $f(x_0)$ *y* $f(x_0 + h)$

$$f(x_0) = mx_0 + b$$
$$f(x_0 + h) = m(x_0 + h) + b = mx_0 + mh + b$$

2. *Encontrar la pendiente* $\lim_{h \to 0} (f(x_0 + h) - f(x_0))/h$.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(mx_0 + mh + b) - (mx_0 + b)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{mh}{h} = m$$

3. *Encontrar la recta tangente usando la ecuación punto-pendiente.* La recta tangente en el punto $(x_0, mx_0 + b)$ es

$$y = (mx_0 + b) + m(x - x_0)$$
$$y = mx_0 + b + mx - mx_0$$
$$y = mx + b.$$

■

Resumamos los pasos del ejemplo 2.

Determinación de la tangente a la curva $y = f(x)$ en (x_0, y_0)

1. Calcular $f(x_0)$ y $f(x_0 + h)$.
2. Calcular la pendiente

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

3. Si el límite existe, encontrar la recta tangente como

$$y = y_0 + m(x - x_0).$$

EJEMPLO 3 Pendiente y tangente de $y = 1/x,\ x \neq 0$

(a) Encontrar la pendiente de la curva $y = 1/x$ en $x = a \neq 0$.

(b) ¿En qué punto la pendiente es igual a $-1/4$?

(c) ¿Qué pasa con la tangente a la curva en el punto $(a, 1/a)$ a medida que cambia a?

Solución

(a) Aquí $f(x) = 1/x$. La pendiente en $(a, 1/a)$ es

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{a+h} - \dfrac{1}{a}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{a - (a+h)}{a(a+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{ha(a+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{a(a+h)} = -\frac{1}{a^2}.$$

Observe cómo fue necesario seguir escribiendo "$\lim_{h\to 0}$" antes de cada fracción, hasta llegar a la etapa en donde pudimos evaluar el límite sustituyendo $h = 0$. El número a puede ser positivo o negativo, pero no cero.

(b) La pendiente de $y = 1/x$ en el punto donde $x = a$ es $-1/a^2$. Será $-1/4$ siempre y cuando

$$-\frac{1}{a^2} = -\frac{1}{4}.$$

Esta ecuación es equivalente a $a^2 = 4$, de manera que $a = 2$ o $a = -2$. La curva tiene pendiente $-1/4$ en los dos puntos, $(2, 1/2)$ y $(-2, -1/2)$ (figura 2.68).

(c) Observe que la pendiente —$1/a^2$ siempre es negativa si $a \neq 0$. Cuando $a \to 0^+$, la pendiente tiende a $-\infty$ y la tangente se hace cada vez más inclinada (figura 2.69). La misma situación ocurre cuando $a \to 0^-$. A medida que a se aleja del origen en cualquier dirección, la pendiente se aproxima a 0^- y la tangente tiende a hacerse horizontal. ■

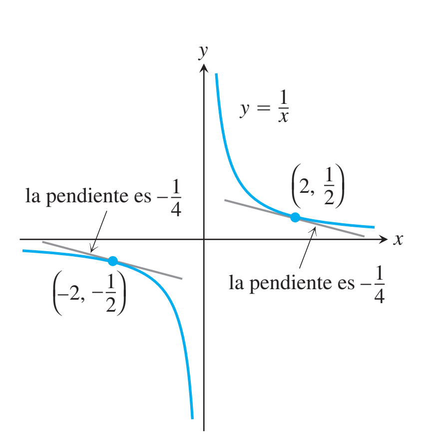


FIGURA 2.68 Las dos rectas tangentes $y = 1/x$ tienen pendiente $-1/4$ (ejemplo 3).

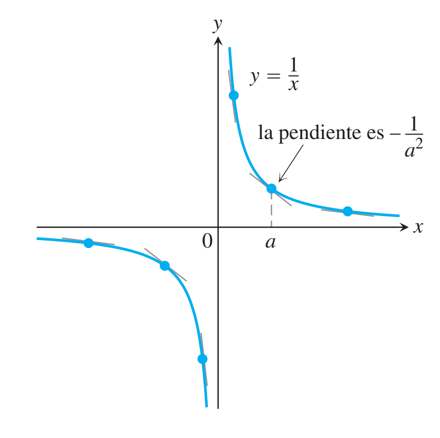


FIGURA 2.69 Las pendientes de las tangentes se inclinan cerca del origen, y se vuelven menos inclinadas conforme el punto de tangencia se aleja.

Razones de cambio: derivada en un punto

La expresión

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

se llama **cociente de diferencias de f en x_0 con incremento h**. Si el cociente de diferencias tiene un límite cuando h se aproxima a cero, a dicho límite se le llama la **derivada de f en x_0**. Si interpretamos el cociente de diferencias como la pendiente de la secante, la derivada da la pendiente de la curva y de la tangente en el punto donde $x = x_0$. Si interpretamos el cociente de diferencias como una razón de cambio promedio, como hicimos en la sección 2.1, la derivada da la razón de cambio de la función respecto de x en el punto $x = x_0$. Desde el punto de vista del cálculo, la derivada es uno de los dos objetos matemáticos más importantes. En el capítulo 3 empezaremos un análisis completo de ella. El otro objeto importante es la integral, e iniciaremos su estudio en el capítulo 5.

EJEMPLO 4 Velocidad instantánea (continuación de la sección 2.1, ejemplos 1 y 2)

En los ejemplos 1 y 2 de la sección 2.1, estudiamos la velocidad de una piedra que cae libremente desde el reposo cerca de la superficie de la Tierra. Sabíamos que la piedra caía $y = 16t^2$ pies durante los primeros t segundos, y usamos una secuencia de razones de cambio sobre intervalos pequeños para estimar la velocidad de la piedra en el instante $t = 1$. ¿Cuál *era* exactamente la velocidad de la piedra en ese tiempo?

Solución Hacemos $f(t) = 16t^2$. La velocidad promedio de la piedra a lo largo del intervalo entre $t = 1$ y $t = 1 + h$ segundos era

$$\frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \frac{16(1 + h)^2 - 16(1)^2}{h} = \frac{16(h^2 + 2h)}{h} = 16(h + 2).$$

La velocidad de la piedra en el instante $t = 1$ era

$$\lim_{h\to 0} 16(h + 2) = 16(0 + 2) = 32 \text{ pies/seg}.$$

Nuestra estimación original de 32 pies/ seg era correcta. ■

Resumen

En esta sección hemos analizado las pendientes de las curvas, la recta tangente a una curva, la razón de cambio de una función, el límite del cociente de diferencias, y la derivada de una función en un punto. Todos estos conceptos se refieren a un mismo tema, tal como se resume a continuación.

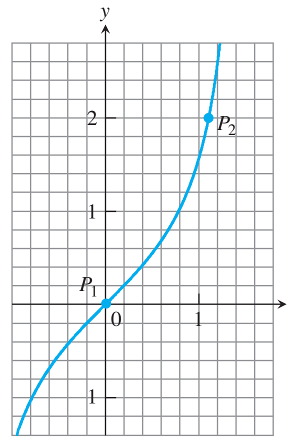
1. La pendiente de $y = f(x)$ en $x = x_0$
2. La pendiente de la tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = x_0$
3. La razón de cambio de $f(x)$ respecto de x en $x = x_0$
4. La derivada de f en $x = x_0$
5. El límite del cociente de diferencias, $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

EJERCICIOS 2.7

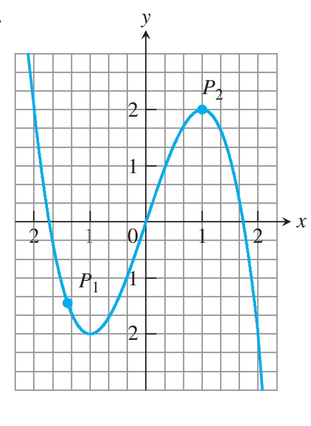
Pendientes y rectas tangentes

En los ejercicios 1 a 4, use la cuadrícula y una regla para estimar de manera general la pendiente de la curva (en unidades de y por unidades de x) en los puntos P_1 y P_2. (Es posible que sus estimaciones sean un poco distintas de las que aparecen al final del libro).

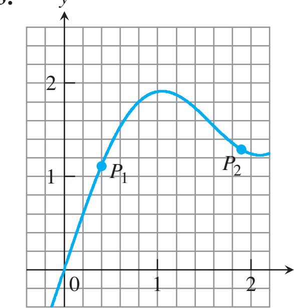
1.



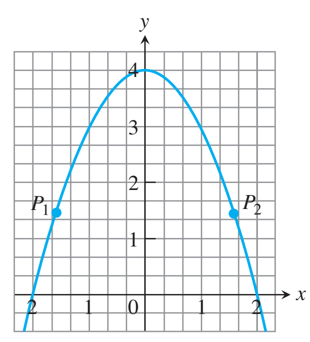
2.



3.



4.



En los ejercicios 5 a 10, encuentre una expresión para la tangente a la curva en el punto dado. Después trace la curva y la tangente juntas.

5. $y = 4 - x^2, \quad (-1, 3)$

6. $y = (x - 1)^2 + 1, \quad (1, 1)$

7. $y = 2\sqrt{x}, \quad (1, 2)$

8. $y = \dfrac{1}{x^2}, \quad (-1, 1)$

9. $y = x^3, \quad (-2, -8)$

10. $y = \dfrac{1}{x^3}, \quad \left(-2, -\dfrac{1}{8}\right)$

En los ejercicios 11 a 18, encuentre la pendiente de la gráfica de la función en el punto dado. Después encuentre una ecuación para la recta tangente de la gráfica en ese punto.

11. $f(x) = x^2 + 1, \quad (2, 5)$

12. $f(x) = x - 2x^2, \quad (1, -1)$

13. $g(x) = \dfrac{x}{x - 2}, \quad (3, 3)$

14. $g(x) = \dfrac{8}{x^2}, \quad (2, 2)$

15. $h(t) = t^3, \quad (2, 8)$

16. $h(t) = t^3 + 3t, \quad (1, 4)$

17. $f(x) = \sqrt{x}, \quad (4, 2)$

18. $f(x) = \sqrt{x + 1}, \quad (8, 3)$

En los ejercicios 19 a 22, encuentre la pendiente de la curva en el punto indicado.

19. $y = 5x^2, \quad x = -1$

20. $y = 1 - x^2, \quad x = 2$

21. $y = \dfrac{1}{x - 1}, \quad x = 3$

22. $y = \dfrac{x - 1}{x + 1}, \quad x = 0$

Rectas tangentes con pendientes específicas

Determine en qué puntos tienen tangentes horizontales las gráficas de las funciones de los ejercicios 23 y 24.

23. $f(x) = x^2 + 4x - 1$

24. $g(x) = x^3 - 3x$

25. Encuentre las ecuaciones de todas las rectas con pendiente –1 que son tangentes a la curva $y = 1/(x - 1)$.

26. Encuentre una ecuación de la recta con pendiente 1/4 que es tangente a la curva $y = \sqrt{x}$.

Razones de cambio

27. Objeto lanzado desde una torre Un objeto es lanzado desde una torre de 100 metros de altura. Después de t segundos, la altura del objeto es $100 - 4.9t^2$ m. ¿Cuál es su velocidad 2 segundos después de haber sido lanzado?

28. Velocidad de un cohete A t segundos del despegue, la altura de un cohete es de $3t^2$ pies. ¿Cuál es la velocidad de ascenso del cohete 10 segundos después del lanzamiento?

29. Cambio del área de un círculo ¿Cuál es la razón de cambio del área de un círculo ($A = \pi r^2$) respecto del radio cuando éste es $r = 3$?

30. Cambio de volumen de una pelota ¿Cuál es la razón de cambio del volumen de una pelota ($V = (4/3)\pi r^3$) respecto del radio cuando éste es $r = 2$?

Comprobación de tangentes

31. ¿La gráfica de

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

tiene una tangente en el origen? Justifique su respuesta.

32. ¿La gráfica de

$$g(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

tiene una tangente en el origen? Justifique su respuesta.

Tangentes verticales

Decimos que la curva $y = f(x)$ tiene una **tangente vertical** en el punto donde $x = x_0$ si $\lim_{h\to 0} (f(x_0 + h) - f(x_0))/h = \infty$ o $-\infty$.

Tangente vertical en $x = 0$ (vea la figura siguiente):

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^{1/3} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{2/3}} = \infty$$

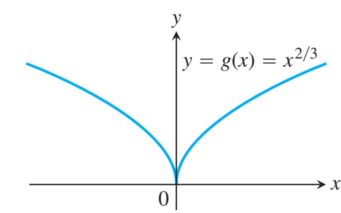
y
$y = f(x) = x^{1/3}$
0 x

TANGENTE VERTICAL EN EL ORIGEN

No habiendo tangente vertical en $x = 0$ (vea la figura siguiente):

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(0+h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^{2/3}-0}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{1/3}}$$

no existe, ya que el límite es ∞ por la derecha y $-\infty$ por la izquierda.



NO HAY TANGENTE VERTICAL EN EL ORIGEN

33. ¿La gráfica de

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

tiene una tangente vertical en el origen? Justifique su respuesta.

34. ¿La gráfica de

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

tiene una tangente vertical en el punto (0, 1)? Justifique su respuesta.

T **a.** Grafique las curvas en los ejercicios 35 a 44. ¿En qué punto las gráficas parecen tener tangentes verticales?

b. Confirme la respuesta que dio al inciso (a) calculando límites, pero antes de hacerlo lea la introducción de los ejercicios 33 y 34.

35. $y = x^{2/5}$

36. $y = x^{4/5}$

37. $y = x^{1/5}$

38. $y = x^{3/5}$

39. $y = 4x^{2/5} - 2x$

40. $y = x^{5/3} - 5x^{2/3}$

41. $y = x^{2/3} - (x - 1)^{1/3}$

42. $y = x^{1/3} + (x - 1)^{1/3}$

43. $y = \begin{cases} -\sqrt{|x|}, & x \leq 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$

44. $y = \sqrt{|4 - x|}$

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

Graficación de las rectas secante y tangente

Use un software matemático para realizar los pasos siguientes en las funciones de los ejercicios 45 a 48.

a. Trace $y = f(x)$ sobre el intervalo $(x_0 - 1/2) \leq x \leq (x_0 + 3)$.

b. Manteniendo x_0 fija, el cociente de diferencias

$$q(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

en x_0 se convierte en una función del tamaño del paso h. Introduzca esta función en su software matemático.

c. Encuentre el limite de q cuando $h \to 0$.

d. Defina las rectas secantes $y = f(x_0) + q \cdot (x - x_0)$ para $h = 3, 2$ y 1. Grafíquelas juntas con f y la recta tangente sobre el intervalo señalado en el inciso (a).

45. $f(x) = x^3 + 2x, \quad x_0 = 0$

46. $f(x) = x + \frac{5}{x}, \quad x_0 = 1$

47. $f(x) = x + \text{sen}\,(2x), \quad x_0 = \pi/2$

48. $f(x) = \cos x + 4\,\text{sen}\,(2x), \quad x_0 = \pi$

Capítulo 2 Preguntas de repaso

1. ¿Cuál es la razón de cambio promedio de la función $g(t)$ sobre el intervalo de $t = a$ a $t = b$? ¿Cómo está relacionada con la recta secante?

2. ¿Qué límite debe de calcularse para encontrar la razón de cambio de la función $g(t)$ en $t = t_0$?

3. Dé una definición informal o intuitiva del límite

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L?$$

¿Por qué decimos que esa definición es "informal"? Dé ejemplos.

4. ¿La existencia y el valor del límite de una función $f(x)$ cuando x se aproxima a x_0 dependen siempre de lo que pase en $x = x_0$? Explique por qué y dé ejemplos.

5. ¿Qué comportamiento debe tener una función para que el límite no exista? Dé ejemplos.

6. ¿Qué teoremas nos sirven para calcular límites? Dé ejemplos de su utilización.

7. ¿Cómo están relacionados los límites laterales con los límites? ¿Cómo puede usarse (algunas veces) esta relación para calcular un límite o para probar que no existe? Dé ejemplos.

8. ¿Cuál es el valor de $\lim_{\theta \to 0}((\text{sen}\,\theta)/\theta)$? ¿Importa si θ se mide en radianes o en grados? Explique por qué.

9. ¿Qué significa exactamente $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ Dé un ejemplo en donde, dados f, L, x_0 y $\epsilon > 0$, encuentre $\delta > 0$ en la definición formal de límite.

10. Dé las definiciones precisas de los siguientes enunciados.

   a. $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 5$ **b.** $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 5$

   c. $\lim_{x \to 2} f(x) = \infty$ **d.** $\lim_{x \to 2} f(x) = -\infty$

11. ¿Qué significan exactamente $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ y $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$? Dé ejemplos.

12. ¿Qué son $\lim_{x \to \pm\infty} k$ (k constante) y $\lim_{x \to \pm\infty}(1/x)$? ¿Cómo puede ampliar estos resultados a otras funciones? Dé ejemplos.

13. ¿Cómo se encuentra el límite de una función racional cuando $x \to \pm\infty$? Dé ejemplos

14. ¿Qué son las asíntotas horizontales, verticales y oblicuas? Dé ejemplos.

15. ¿Qué condiciones debe satisfacer una función para ser continua en un punto interior de su dominio? ¿Cuáles debe cumplir para ser continua en un punto extremo?

16. ¿Cómo puede ayudarnos la observación de la gráfica de una función a determinar en dónde es continua ésta?

17. ¿Qué significa que una función sea continua por la derecha en un punto? ¿Qué significa que sea continua por la izquierda? ¿Cómo están relacionadas la continuidad y la continuidad lateral?

18. ¿Qué puede decirse de la continuidad de las funciones polinomiales? ¿De las funciones racionales? ¿De las funciones trigonométricas? ¿De las potencias racionales y las combinaciones algebraicas de funciones? ¿De la composición de funciones? ¿Del valor absoluto de funciones?

19. ¿En qué circunstancias una función $f(x)$ puede extenderse para ser continua en un punto $x = c$? Dé un ejemplo.

20. ¿Qué significa que una función sea continua en un intervalo?

21. ¿Qué significa que una función sea continua? Dé ejemplos para ilustrar el hecho de que una función que no es continua en todo su dominio puede, sin embargo, ser continua en intervalos seleccionados dentro de su dominio.

22. ¿Cuáles son los tipos básicos de discontinuidades? Dé un ejemplo de cada uno. ¿Qué es una discontinuidad removible? Dé un ejemplo.

23. ¿Qué significa que una función tenga la propiedad del valor intermedio? ¿Qué condiciones garantizan que una función tenga esta propiedad en un intervalo? ¿Cuáles son las consecuencias de graficar y resolver la ecuación $f(x) = 0$?

24. Suele decirse que una función es continua si es posible graficarla sin separar el lápiz del papel. ¿Por qué?

25. ¿Qué significa que una recta sea tangente a una curva C en un punto P?

26. ¿Cuál es el significado de la fórmula

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}?$$

Interprete la fórmula geométrica y físicamente.

27. ¿Cómo se encuentra la tangente a la curva $y = f(x)$ en un punto (x_0, y_0) sobre la curva?

28. ¿Cómo está relacionada la pendiente de la curva $y = f(x)$ en $x = x_0$ con la razón de cambio de la función respecto de x en $x = x_0$? ¿Cómo se relaciona con la derivada de f en x_0?

Capítulo 2 Ejercicios de práctica

Límites y continuidad

1. Grafique la función

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq -1 \\ -x, & -1 < x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ -x, & 0 < x < 1 \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

Después, discuta con detalle los límites, los límites laterales, la continuidad y la continuidad lateral de f en $x = -1$, 0 y 1. ¿Alguna de las discontinuidades se puede remover? Explique.

2. Repita las instrucciones del ejercicio 1 para

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ 1/x, & 0 < |x| < 1 \\ 0, & x = 1 \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

3. Suponga que $f(t)$ y $g(t)$ están definidas para toda t, y que $\lim_{t \to t_0} f(t) = -7$ y $\lim_{t \to t_0} g(t) = 0$. Encuentre el límite de las funciones siguientes cuando $t \to t_0$

   a. $3f(t)$ **b.** $(f(t))^2$

   c. $f(t) \cdot g(t)$ **d.** $\dfrac{f(t)}{g(t) - 7}$

   e. $\cos(g(t))$ **f.** $|f(t)|$

   g. $f(t) + g(t)$ **h.** $1/f(t)$

4. Suponga que $f(x)$ y $g(x)$ están definidas para toda x, y que $\lim_{x\to 0} f(x) = 1/2$ y $\lim_{x\to 0} g(x) = \sqrt{2}$. Encuentre los límites de las siguientes funciones cuando $x \to 0$.

a. $-g(x)$ **b.** $g(x) \cdot f(x)$

c. $f(x) + g(x)$ **d.** $1/f(x)$

e. $x + f(x)$ **f.** $\dfrac{f(x) \cdot \cos x}{x - 1}$

En los ejercicios 5 y 6, encuentre el valor que debe tener $\lim_{x\to 0} g(x)$ si el límite dado se satisface.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4 - g(x)}{x}\right) = 1$ **6.** $\lim\limits_{x\to -4}\left(x \lim\limits_{x\to 0} g(x)\right) = 2$

7. ¿En qué intervalos son continuas las siguientes funciones?

a. $f(x) = x^{1/3}$ **b.** $g(x) = x^{3/4}$

c. $h(x) = x^{-2/3}$ **d.** $k(x) = x^{-1/6}$

8. ¿En qué intervalos son continuas las siguientes funciones?

a. $f(x) = \tan x$ **b.** $g(x) = \csc x$

c. $h(x) = \dfrac{\cos x}{x - \pi}$ **d.** $k(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

Determinación de límites

En los ejercicios 9 a 16, encuentre el límite o explique por qué no existe.

9. $\lim \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^3 + 5x^2 - 14x}$

a. cuando $x \to 0$ **b.** cuando $x \to 2$

10. $\lim \dfrac{x^2 + x}{x^5 + 2x^4 + x^3}$

a. cuando $x \to 0$ **b.** cuando $x \to -1$

11. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}$ **12.** $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2 - a^2}{x^4 - a^4}$

13. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x + h)^2 - x^2}{h}$ **14.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x + h)^2 - x^2}{h}$

15. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{2 + x} - \dfrac{1}{2}}{x}$ **16.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(2 + x)^3 - 8}{x}$

En los ejercicios 17 a 20, encuentre el límite de $g(x)$ cuando x se aproxima al valor indicado.

17. $\lim\limits_{x\to 0^+} (4g(x))^{1/3} = 2$ **18.** $\lim\limits_{x\to \sqrt{5}} \dfrac{1}{x + g(x)} = 2$

19. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2 + 1}{g(x)} = \infty$ **20.** $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{5 - x^2}{\sqrt{g(x)}} = 0$

Límites al infinito

Encuentre los límites en los ejercicios 21 a 30.

21. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x + 3}{5x + 7}$ **22.** $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x^2 + 3}{5x^2 + 7}$

23. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2 - 4x + 8}{3x^3}$ **24.** $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{1}{x^2 - 7x + 1}$

25. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2 - 7x}{x + 1}$ **26.** $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^4 + x^3}{12x^3 + 128}$

27. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{\lfloor x \rfloor}$ (Si tiene una calculadora graficadora, intente graficar la función para $-5 \le x \le 5$).

28. $\lim\limits_{\theta\to \infty} \dfrac{\cos \theta - 1}{\theta}$ (Si tiene una calculadora graficadora, intente graficar $f(x) = x(\cos(1/x) - 1)$ cerca del origen para "ver" el límite al infinito).

29. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x + \operatorname{sen} x + 2\sqrt{x}}{x + \operatorname{sen} x}$ **30.** $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^{2/3} + x^{-1}}{x^{2/3} + \cos^2 x}$

Extensión continua

31. ¿$f(x) = x(x^2 - 1)/|x^2 - 1|$ puede extenderse para que sea continua en $x = 1$ o -1? Justifique sus respuestas. (Grafique la función; encontrará interesante la gráfica).

32. Explique por qué la función $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ no tiene una extensión continua a $x = 0$.

T En los ejercicios 33 a 36, grafique la función para descubrir si tiene una extensión continua al punto dado a. Si la tiene, use las funciones *Trace* y *Zoom* para encontrar un buen candidato para el valor de la extensión de la función en a. Si la función parece no tener una extensión continua, ¿puede extenderse para ser continua por la derecha o por la izquierda? Si es el caso, ¿cuál cree que debería ser el valor de la función extendida?

33. $f(x) = \dfrac{x - 1}{x - \sqrt[4]{x}}$, $a = 1$ **34.** $g(\theta) = \dfrac{5 \cos \theta}{4\theta - 2\pi}$, $a = \pi/2$

35. $h(t) = (1 + |t|)^{1/t}$, $a = 0$ **36.** $k(x) = \dfrac{x}{1 - 2^{|x|}}$, $a = 0$

Raíces

T **37.** Sea $f(x) = x^3 - x - 1$.

a. Demuestre que f tiene un cero entre -1 y 2.

b. Resuelva gráficamente la ecuación $f(x) = 0$ con un error de magnitud cuando mucho de 10^{-8}.

c. Es posible demostrar que el valor exacto de la solución del inciso (b) es

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{69}}{18}\right)^{1/3} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{69}}{18}\right)^{1/3}$$

Evalúe esta respuesta exacta y compárela con el valor que obtuvo en el inciso (b).

T **38.** Sea $f(\theta) = \theta^3 - 2\theta + 2$.

a. Demuestre que f tiene un cero entre -2 y 0.

b. Resuelva gráficamente la ecuación $f(\theta) = 0$ con un error de magnitud cuando mucho de 10^{-4}.

c. Es posible demostrar que el valor exacto de la solución del inciso (b) es

$$\left(\sqrt{\frac{19}{27}} - 1\right)^{1/3} - \left(\sqrt{\frac{19}{27}} + 1\right)^{1/3}$$

Evalúe esta respuesta exacta y compárela con el valor que obtuvo en el inciso (b).

Capítulo 2 Ejercicios adicionales y avanzados

T **1. Asignación de un valor a 0^0** Las reglas de los exponentes (vea el Apéndice 9) nos indican que $a^0 = 1$ si a es cualquier número distinto de cero. También señalan que $0^n = 0$ si n es cualquier número positivo.

Si intentamos ampliar estas reglas para incluir el caso 0^0 obtendríamos resultados conflictivos. La primera regla diría que $0^0 = 1$, mientras que la segunda afirmaría que $0^0 = 0$.

No se trata de dar una respuesta del tipo verdadero o falso. Ninguna de las reglas es válida en todos los casos, de manera que no hay contradicción. Podríarmos, de hecho, definir 0^0 como cualquier valor que queramos, siempre y cuando convenzamos a los demás de aceptarlo.

¿Qué valor le gustaría que tuviera 0^0? Aquí hay un ejemplo que le ayudará a decidir. (Vea el ejercicio 2, en donde se da otro ejemplo).

a. Calcule x^x para $x = 0.1, 0.01, 0.001$ y así sucesivamente hasta donde alcance su calculadora. Apunte los valores que obtenga. ¿Qué patrón ve?

b. Grafique la función $y = x^x$ para $0 < x \leq 1$. A pesar de que la función no está definida para $x \leq 0$, la gráfica se aproximará al eje y por la derecha. ¿Hacia qué valor de y parece dirigirse? Haga un acercamiento para comprobar su suposición.

T **2. Una razón para que el valor de 0^0 sea distinto de 0 o 1** Cuando un número x aumenta en valores positivos, tanto el número $1/x$ como el número $1/(1\text{n } x)$ se aproximan a cero. ¿Qué pasa con el número

$$f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{1/(\ln x)}$$

conforme x crece? Éstas son dos maneras de averiguarlo.

a. Evalúe f para $x = 10, 100, 1000$ y así sucesivamente hasta donde alcance su calculadora. ¿Qué patrón ve?

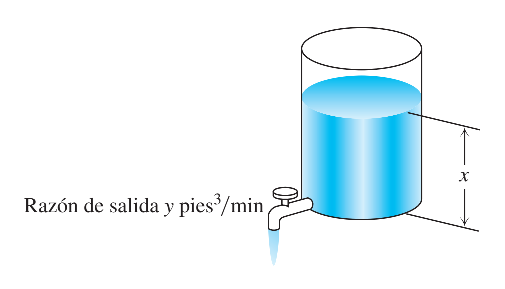
b. Grafique f en diversas ventanas de graficación, incluyendo algunas que contengan el origen. ¿Qué ve? Trace los valores de y a lo largo de la gráfica. ¿Qué encontró?

3. Contracción de Lorentz De acuerdo con la teoría de la relatividad, desde el punto de vista de un observador la longitud de un objeto, digamos un cohete, parece variar según la velocidad con la que viaja el objeto respecto a él. Si el observador mide la longitud del cohete como L_0 en reposo, a una velocidad v la longitud del objeto parece ser

$$L = L_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Esta ecuación es la fórmula de contracción de Lorentz. Aquí c es la velocidad de la luz en el vacío, alrededor de 3×10^8 m/seg. ¿Qué pasa con L a medida que v crece? Encuentre $\lim_{v\to c^-} L$. ¿Por qué es necesario el límite lateral izquierdo?

4. Control del flujo de un tanque de drenaje La ley de Torricelli dice que si se vacía un tanque como el que se muestra en la figura, la razón y a la que sale el agua es una constante por la raíz cuadrada de la profundidad x del agua. La constante depende del tamaño y la forma de la válvula de salida.



Suponga que $y = \sqrt{x}/2$ para cierto tanque. Usted está intentando mantener una salida relativamente constante, para lo cual añade, de vez en cuando, agua al tanque mediante una manguera. ¿Qué profundidad debe tener el agua si quiere mantener una razón de salida de

a. $y_0 = 1$ pies^3/min con un error no mayor a 0.2 pies^3/min?

b. $y_0 = 1$ pies^3/min con un error no mayor a 0.1 pies^3/min?

5. Expansión térmica en equipos de precisión Como seguramente sabe, casi todos los metales se dilatan con el calor y se contraen con el frío. Las dimensiones de una pieza de equipo de laboratorio son tan importantes, que el taller donde se fabrica tiene que estar a la misma temperatura que el laboratorio donde se usará el equipo. Una barra de aluminio típica de 10 cm de ancho a 70ºF tendrá

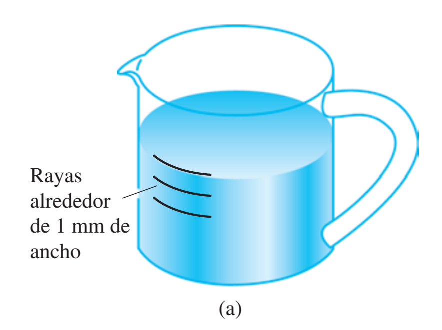
$$y = 10 + (t - 70) \times 10^{-4}$$

centímetros de ancho a una temperatura t cercana. Suponga que estamos usando una barra como ésta en un detector de ondas de gravedad, y su ancho debe tener, cuando mucho, una diferencia de 0.0005 cm respecto de los 10 cm ideales. ¿Qué tan cerca de $t_0 = 70$ºF debe mantenerse la temperatura para asegurarnos de no exceder esta tolerancia?

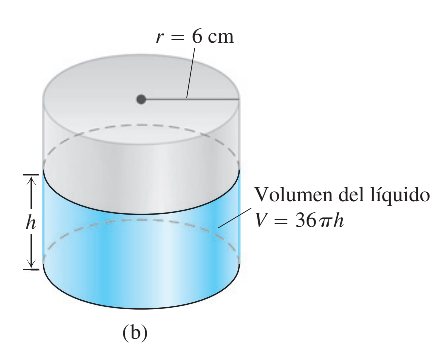
6. Marcas en una taza de medir El interior de una típica taza de medir con capacidad de 1 litro es un cilindro circular recto de radio 6 cm (vea la siguiente figura). El volumen de agua que ponemos en la taza es, por lo tanto, una función del nivel h con que se llena la taza, siendo la fórmula

$$V = \pi 6^2 h = 36\pi h.$$

¿Con cuánta exactitud debemos medir h para que el volumen sea de 1 L de agua (1000 cm^3) con un error no mayor de 1% (10 cm^3)?



(a)



(b)

Una taza medidora (a), modelada como un cilindro circular recto (b) de radio $r = 6$ cm.

Definición formal de límite

En los ejercicios 7 a 10, use la definición formal de límite para probar que la función es continua en x_0.

7. $f(x) = x^2 - 7, \quad x_0 = 1$ **8.** $g(x) = 1/(2x), \quad x_0 = 1/4$

9. $h(x) = \sqrt{2x - 3}, \quad x_0 = 2$ **10.** $F(x) = \sqrt{9 - x}, \quad x_0 = 5$

11. Unicidad del límite Pruebe que una función no puede tener dos límites distintos en el mismo punto. Esto es, que si $\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1$ y $\lim_{x\to x_0} f(x) = L_2$, entonces $L_1 = L_2$.

12. Demuestre la regla del límite del múltiplo constante:
$\lim_{x\to c} kf(x) = k \lim_{x\to c} f(x)$ para cualquier consonante k.

13. Límites laterales Si $\lim_{x\to 0^+} f(x) = A$ y $\lim_{x\to 0^-} f(x) = B$, encuentre

a. $\lim_{x\to 0^+} f(x^3 - x)$ **b.** $\lim_{x\to 0^-} f(x^3 - x)$

c. $\lim_{x\to 0^+} f(x^2 - x^4)$ **d.** $\lim_{x\to 0^-} f(x^2 - x^4)$

14. Límites y continuida ¿Cuáles de los enunciados siguientes son verdaderos y cuáles falsos? Si la afirmación es verdadera, explique por qué. Si es falsa, dé un contraejemplo (es decir, un ejemplo que compruebe su falsedad).

a. Si $\lim_{x\to a} f(x)$ existe pero $\lim_{x\to a} g(x)$ no, entonces $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x))$ tampoco existe.

b. Si $\lim_{x\to a} f(x)$ no existe y $\lim_{x\to a} g(x)$ no existe, entonces $\lim_{x\to a} (f(x) + g(x))$ tampoco.

c. Si f es continua en x, entonces también lo es $|f|$.

d. Si $|f|$ es continua en a, entonces también lo es f.

En los ejercicios 15 y 16, use la definición formal de límite para probar que la función tiene una extensión continua en el valor dado de x.

15. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}, \quad x = -1$ **16.** $g(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{2x - 6}, \quad x = 3$

17. Una función continua sólo en un punto Sea

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0, & \text{si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$$

a. Demuestre que f es continua en $x = 0$. $x = 0$.

b. Use el hecho de que todo intervalo abierto no vacío de números reales contiene números racionales e irracionales, para probar que f no es continua en valores de x distintos de cero.

18. La función regla de Dirichlet Si x es un número racional, entonces x puede escribirse de manera única como un cociente de los enteros m/n, donde $n > 0$ y m y n no tienen factores comunes mayores que 1. Decimos que tal fracción está en su *mínima expresión*. Por ejemplo, escrito en su mínima expresión, 6/4 es 3/2. Sea $f(x)$ definida para toda x en el intervalo [0, 1] por

$$f(x) = \begin{cases} 1/n, & \text{si } x = m/n \text{ es un número racional en su mínima expresión} \\ 0, & \text{si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$$

Por ejemplo, $f(0) = f(1) = 1$, $f(1/2) = 1/2$, $f(1/3) = f(2/3) = 1/3$, $f(1/4) = f(3/4) = 1/4$ y así sucesivamente.

a. Pruebe que f es discontinua en todo número racional en [0, 1].

b. Pruebe que f es continua en todo número irracional en [0, 1]. (*Sugerencia:* Si ϵ es un número positivo dado, demuestre que hay únicamente un número finito de números racionales r en [0, 1] tales que $f(r) \geq \epsilon$.)

c. Trace la gráfica de f. ¿Por qué cree que a f se le denomina "función regla"?

19. Puntos antípodas ¿Hay alguna razón para creer que siempre existe un par de puntos antípodas (diametralmente opuestos) en el ecuador de la Tierra, donde las temperaturas son iguales? Explique.

20. Si $\lim_{x\to c} (f(x) + g(x)) = 3$ y $\lim_{x\to c} (f(x) - g(x)) = -1$, encuentre $\lim_{x\to c} f(x)g(x)$.

21. Raíces casi lineales de ecuaciones cuadráticas La ecuación $ax^2 + 2x - 1 = 0$, donde a es constante, tiene dos raíces si $a > -1$ y $a \neq 0$, una positiva y una negativa:

$$r_+(a) = \frac{-1 + \sqrt{1 + a}}{a}, \qquad r_-(a) = \frac{-1 - \sqrt{1 + a}}{a}.$$

a. ¿Qué le sucede a $r_+(a)$ cuando $a \to 0$? ¿Cuando $a \to -1^+$?

b. ¿Qué le sucede a $r_-(a)$ cuando $a \to 0$? ¿Cuando $a \to -1^+$?

c. Justifique las conclusiones a que llegó dibujando la gráfica de $r_+(a)$ y $r_-(a)$ como funciones de a. Describa lo que ve.

d. Para mayor justificación, trace la gráfica de $f(x) = ax^2 + 2x - 1$ simultáneamente para $a = 1, 0.5, 0.2, 0.1$, y 0.05.

22. Raíz de una ecuación Demuestre que la ecuación $x + 2 \cos x = 0$ tiene al menos una solución.

23. Funciones acotadas Una función de variable real f está **acotada por arriba** en un conjunto D si existe un número N tal que $f(x) \leq N$ para toda x en D. Llamamos a N, cuando existe, una **cota superior** de f en D, y decimos que f está acotada por arriba por N. De manera análoga, decimos que f está **acotada por abajo** en D si existe un número M tal que $f(x) \geq M$ para toda x en D. Llamamos a M, cuando existe, una **cota inferior** de f en D, y decimos que f está acotada por abajo por M. Decimos que f está **acotada** en D si está acotada por arriba y por abajo.

a. Pruebe que f está acotada en D si y sólo si existe un número B tal que $|f(x)| \leq B$ para toda x en D.

b. Suponga que f está acotada por arriba por N. Demuestre que si $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, entonces $L \leq N$.

c. Suponga que f está acotada por abajo por M. Pruebe que si $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, entonces $L \geq M$.

24. ***Máx*** $\{a, b\}$ ***y mín*** $\{a, b\}$

a. Demuestre que la expresión

$$\text{máx}\,\{a, b\} = \frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2}$$

es igual a a si $a \geq b$ y es igual a b si $b \geq a$. En otras palabras, *máx* $\{a, b\}$ da el mayor de los dos números a y b.

b. Encuentre una expresión similar para *mín* $\{a, b\}$, el menor de a y b.

Generalización de límites que involucran $\frac{\text{sen}\,\theta}{\theta}$

La fórmula $\lim_{\theta\to 0}(\text{sen}\,\theta)/\theta = 1$ puede generalizarse. Si $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ y $f(x)$ nunca es cero en un intervalo abierto que contenga al punto $x = c$, excepto posiblemente en c, entonces

$$\lim_{x\to c} \frac{\text{sen}\,f(x)}{f(x)} = 1.$$

He aquí varios ejemplos.

a. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,x^2}{x^2} = 1.$

b. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,x^2}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,x^2}{x^2} \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = 1 \cdot 0 = 0.$

c. $\displaystyle \lim_{x\to -1} \frac{\text{sen}\,(x^2-x-2)}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{\text{sen}\,(x^2-x-2)}{(x^2-x-2)} \cdot$

$\displaystyle \lim_{x\to -1} \frac{(x^2-x-2)}{x+1} = 1 \cdot \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x-2)}{x+1} = -3.$

d. $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{\text{sen}\left(1-\sqrt{x}\right)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\text{sen}\left(1-\sqrt{x}\right)}{1-\sqrt{x}} \frac{1-\sqrt{x}}{x-1} =$

$\displaystyle 1 \cdot \lim_{x\to 1} \frac{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}{(x-1)\left(1+\sqrt{x}\right)} = \lim_{x\to 1} \frac{1-x}{(x-1)\left(1+\sqrt{x}\right)} = -\frac{1}{2}.$

Encuentre los límites en los ejercicios 25 a 30.

25. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,(1-\cos x)}{x}$

26. $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} \frac{\text{sen}\,x}{\text{sen}\sqrt{x}}$

27. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,(\text{sen}\,x)}{x}$

28. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,(x^2+x)}{x}$

29. $\displaystyle \lim_{x\to 2} \frac{\text{sen}\,(x^2-4)}{x-2}$

30. $\displaystyle \lim_{x\to 9} \frac{\text{sen}\left(\sqrt{x}-3\right)}{x-9}$

Capítulo 2 Proyectos de aplicación tecnológica

Módulo Mathematica-Maple

Llévela al límite

Parte I

Parte II (Cero elevado a la potencia cero: ¿qué significa?)

Parte III (Límites laterales)

Visualizar e interpretar el concepto de límite mediante exploraciones gráficas y numéricas.

Parte IV (La potencia hace la diferencia)

Vea qué tan sensibles pueden ser los límites con varias potencias de x.

Módulo Mathematica-Maple

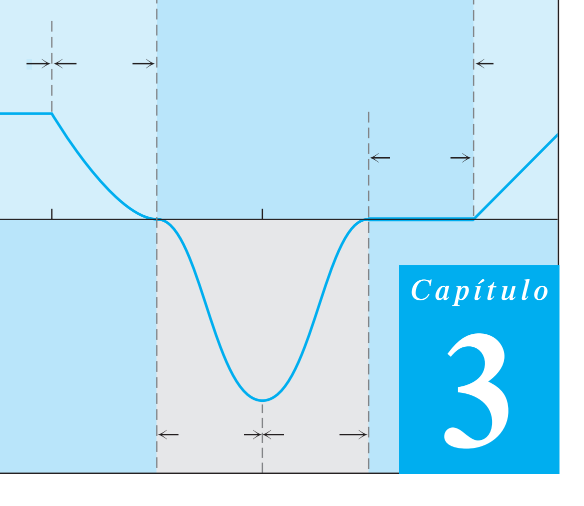
Tender al infinito

Parte I (Explorar el comportamiento de una función cuando $x \to \infty$ o $x \to -\infty$)

Este módulo da cuatro ejemplos para explorar el comportamiento de una función cuando $x \to \infty$ o $x \to -\infty$.

Parte II (Razón de crecimiento)

Observar gráficas que parecen continuas, aún cuando la función no lo sea. Se exploran varios resultados de continuidad para obtener resultados que encontrará sorprendentes.



Derivadas

INTRODUCCIÓN En el capítulo 2 definimos la pendiente de una curva en un punto como el límite de las pendientes de las secantes. Este límite, llamado derivada, mide la razón a la que cambia la función, y se constituye como uno de los conceptos más importantes del cálculo. Las derivadas se usan para calcular la velocidad y la aceleración, estimar la razón de propagación de una enfermedad, fijar niveles de producción de manera que pueda maximizarse la eficiencia, encontrar las mejores dimensiones para una lata cilíndrica, averiguar la antigüedad de un objeto prehistórico, y para muchas otras aplicaciones. En este capítulo desarrollaremos técnicas para calcular derivadas fácilmente, y aprenderemos cómo usarlas para aproximar funciones complicadas.

3.1 La derivada como una función

ENSAYO HISTÓRICO

La derivada

Al final del capítulo 2 definimos que la pendiente de una curva $y = f(x)$ en el punto donde $x = x_0$ es

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Cuando este límite existe, lo denominamos derivada de f en x_0. A continuación analizaremos la derivada como una *función* obtenida a partir de f; para ello, tomaremos en cuenta el límite en cada punto del dominio de f.

DEFINICIÓN **La función derivada**

La **derivada** de la función $f(x)$ con respecto a la variable x, es la función f', cuyo valor en x es

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h},$$

siempre y cuando este límite exista.

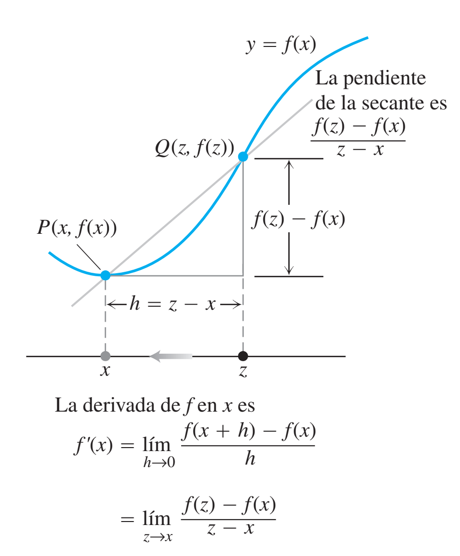


FIGURA 3.1 La manera en la que escribimos el cociente de diferencias para la derivada de una función f depende de cómo etiquetemos los puntos involucrados.

Usamos la notación $f(x)$ en lugar de simplemente f en la definición, con el propósito de hacer hincapié en la variable independiente x, con respecto a la cual estamos diferenciando. El dominio de f' es el conjunto de puntos del dominio de f para los que existe el límite, y puede ser el mismo o menor que el dominio de f. Si f' existe en un punto x particular, decimos que f es **diferenciable** (o que **tiene derivada**) en x. Si f' existe en todos los puntos del dominio de f, decimos que f es **diferenciable**.

Si escribimos $z = x + h$, entonces $h = z - x$ y h se aproxima a 0 si y sólo si z se aproxima a x. Por lo tanto, una definición equivalente de la derivada de una función es la siguiente (vea la figura 3.1).

Fórmula alternativa de la derivada

$$f'(x) = \lim_{z\to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}.$$

Cálculo de derivadas a partir de la definición

El proceso para calcular una derivada se llama **diferenciación**. Con el propósito de hacer hincapié en la idea de que la diferenciación es una operación que se realiza sobre una función $y = f(x)$, usamos la notación

$$\frac{d}{dx} f(x)$$

como otra manera de denotar la derivada $f'(x)$. Los ejemplos 2 y 3 de la sección 2.7 ilustran el proceso de diferenciación para las funciones $y = mx + b$ y $y = 1/x$. El ejemplo 2 demuestra que

$$\frac{d}{dx}(mx + b) = m.$$

Por ejemplo,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{2}x - 4\right) = \frac{3}{2}.$$

En el ejemplo 3 vemos que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}.$$

A continuación se dan dos ejemplos más.

EJEMPLO 1 Aplicación de la definición

Derivar $f(x) = \dfrac{x}{x - 1}$.

Solución Aquí tenemos $f(x) = \dfrac{x}{x - 1}$

y

$$f(x+h) = \frac{(x+h)}{(x+h)-1}, \text{ así que}$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \frac{\dfrac{x+h}{x+h-1} - \dfrac{x}{x-1}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\cdot\frac{(x+h)(x-1)-x(x+h-1)}{(x+h-1)(x-1)} \qquad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-cb}{bd} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\cdot\frac{-h}{(x+h-1)(x-1)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(x+h-1)(x-1)} = \frac{-1}{(x-1)^2}.
\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 2 Derivada de la función raíz cuadrada

(a) Encontrar la derivada de $y = \sqrt{x}$ para $x > 0$.

(b) Encontrar la recta tangente a la curva $y = \sqrt{x}$ en $x = 4$.

Muchas veces es necesario conocer la derivada de $\sqrt{x}$ para $x > 0$:

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Solución

(a) Usamos la forma equivalente para calcular f':

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{z\to x} \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \\
&= \lim_{z\to x} \frac{\sqrt{z}-\sqrt{x}}{z-x} \\
&= \lim_{z\to x} \frac{\sqrt{z}-\sqrt{x}}{\left(\sqrt{z}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{z}+\sqrt{x}\right)} \\
&= \lim_{z\to x} \frac{1}{\sqrt{z}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.
\end{aligned}$$

(b) La pendiente de la curva en $x = 4$ es

$$f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}.$$

La tangente es la recta que pasa por el punto (4, 2) y tiene pendiente $1/4$ (figura 3.2):

$$y = 2 + \frac{1}{4}(x-4)$$

$$y = \frac{1}{4}x + 1.$$

■

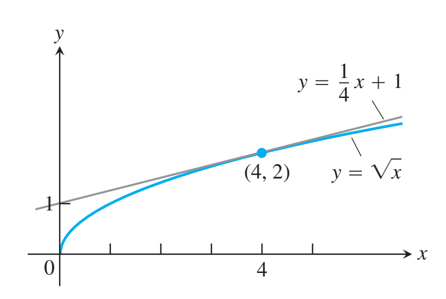


FIGURA 3.2 La curva $y = \sqrt{x}$ y su tangente en (4, 2). La pendiente de la tangente se encuentra evaluando la derivada en $x = 4$ (ejemplo 2).

En el ejemplo 6 se considera la derivada de $y = \sqrt{x}$ cuando $x = 0$ en el ejemplo 6.

Notaciones

Hay muchas maneras de denotar la derivada de una función $y = f(x)$, donde la variable independiente es x y la variable dependiente es y. Algunas de las notaciones alternativas de uso común para la derivada son

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = D(f)(x) = D_x f(x).$$

Los símbolos d/dx y D indican la operación de diferenciación, por lo que se les conoce como **operadores de derivada**. dy/dx se lee: "la derivada de y con respecto a x", y df/dx y $(d/dx)f(x)$ se leen: "la derivada de f respecto a x". Las notaciones "prima" y' y f' provienen de las que usaba Newton para las derivadas. Las notaciones d/dx son semejantes a las usadas por Leibniz. El símbolo dy/dx no debe interpretarse como una razón (hasta que introduzcamos la idea de "diferenciales" en la sección 3.8).

De igual manera, hay que tener cuidado de no confundir el significado de la notación $D(f)$, creyendo que se refiere al dominio de la función f', cuando en realidad representa la función derivada f. La diferencia casi siempre resulta evidente gracias al contexto.

Para indicar el valor de una derivada en un número específico $x = a$, se usa la notación

$$f'(a) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a} = \left.\frac{d}{dx}f(x)\right|_{x=a}.$$

Como muestra de lo anterior, observe que en el ejemplo 2b pudimos haber escrito

$$f'(4) = \left.\frac{d}{dx}\sqrt{x}\right|_{x=4} = \left.\frac{1}{2\sqrt{x}}\right|_{x=4} = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}.$$

Para evaluar una expresión, algunas veces se utiliza el corchete derecho (o de clausura,]) en lugar de la barra vertical | .

Gráfica de la derivada

Es posible obtener una gráfica razonable de la derivada de $y = f(x)$ estimando las pendientes de la gráfica de f. Esto es, se localizan los puntos $(x, f'(x))$ en el plano xy y se unen mediante una curva suave, la cual representa $y = f'(x)$.

EJEMPLO 3 Graficación de una derivada

Graficar la derivada de la función $y = f(x)$, como se ilustra en la figura 3.3a.

Solución Trazamos las tangentes a la gráfica de f en intervalos consecutivos, y usamos sus pendientes para estimar los valores de $f'(x)$ en esos puntos. Graficamos los pares $(x, f'(x))$ correspondientes, y los unimos con una curva suave, como se esboza en la figura 3.3b. ■

¿Qué podemos aprender de la gráfica de $y = f'(x)$? A partir de un vistazo o un examen rápido podemos ver:

1. el lugar en donde la razón de cambio de f es positiva, negativa o cero.
2. el tamaño aproximado de la razón de crecimiento en cualquier x y su tamaño en relación con el tamaño de $f(x)$.
3. el sitio en donde la razón de cambio es creciente o decreciente

Veamos otro ejemplo.

EJEMPLO 4 Concentración de azúcar en la sangre

El 23 de abril de 1988, el aeroplano *Dédalo* (o *Daedalus*), de propulsión humana, rompió el récord de los vuelos a distancia, al recorrer los 119 km que separan las islas de Creta y

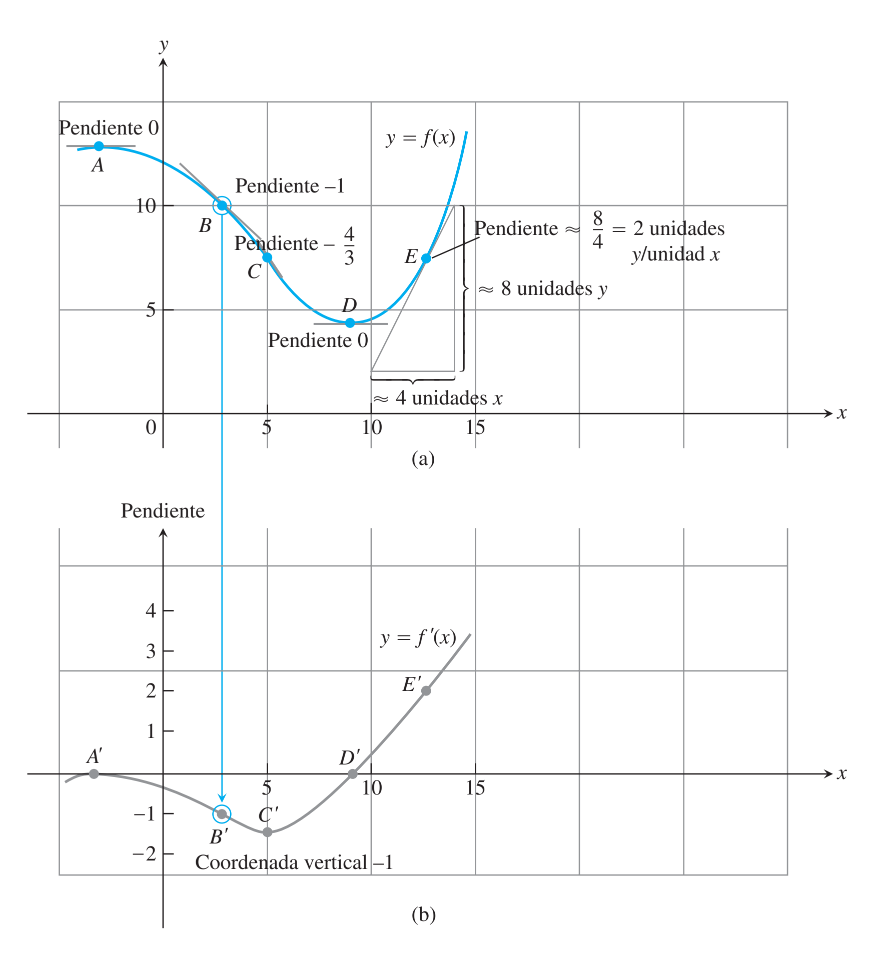


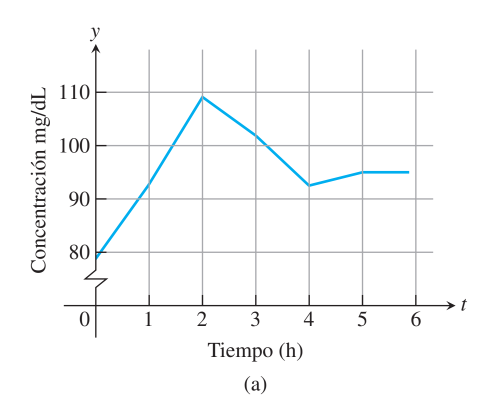
FIGURA 3.3 Hacemos la gráfica de $y = f'(x)$ en (b) trazando las pendientes a partir de la gráfica de $y = f(x)$ en (a). La coordenada vertical de B' es la pendiente de B, y así sucesivamente. La gráfica de f' es un registro visual de cómo cambia la pendiente de f con x.

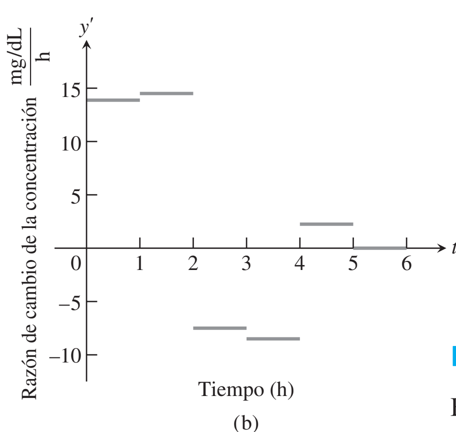
Santorini, en el Mar Egeo, al sureste de Grecia. Durante las 6 horas de pruebas de resistencia previas al vuelo, los investigadores vigilaron la concentración de azúcar en la sangre de los posibles pilotos. En la figura 3.4a se muestra la gráfica para uno de los pilotos; en ella, la concentración de azúcar, en miligramos/decilitro, se ha trazado contra el tiempo, en horas.

La gráfica se compone de segmentos de recta que unen los puntos de los datos. La pendiente constante de cada segmento da una estimación de la derivada de la concentración entre las mediciones. Calculamos la pendiente de cada segmento a partir de la cuadrícula de coordenadas y trazamos la derivada como una función escalonada en la figura 3.4b. Al trazar los datos de la primera hora, por ejemplo, observamos que la concentración crece de aproximadamente 79 mg/dL a 93 mg/dL. El crecimiento neto fue $\Delta y = 93 - 79 = 14$ mg/dL. Dividiendo esto entre $\Delta t = 1$ hora obtenemos la razón de cambio como

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{14}{1} = 14 \text{ mg/dL por hora}.$$

Observe que no podemos estimar la razón de cambio de la concentración en los tiempos $t = 1, 2, ..., 5$, en los que la gráfica de concentración que trazamos alcanza una esquina y no tiene pendiente. La derivada escalonada no está definida para esos tiempos. ■







Trayectoria del vuelo del *Daedalus* el 23 de abril de 1988

FIGURA 3.4 (a) Gráfica de la concentración de azúcar en la sangre de un piloto del *Daedalus* durante las pruebas de resistencia, 6 horas antes al vuelo. (b) La derivada de la concentración de azúcar en la sangre del piloto muestra qué tan rápido se eleva y cae la concentración durante varias partes de la prueba.

Diferenciabilidad en un intervalo; derivadas laterales

En un intervalo abierto (finito o infinito), una función $y = f(x)$ es **diferenciable** si tiene derivada en cada punto del intervalo. Es diferenciable en un intervalo cerrado $[a, b]$ si es diferenciable en el interior de (a, b) y si los límites

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \qquad \textbf{Derivada en } a \textbf{ por la derecha}$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(b + h) - f(b)}{h} \qquad \textbf{Derivada en } b \textbf{ por la izquierda}$$

existen en los extremos (figura 3.5).

Las derivadas por la derecha y por la izquierda pueden definirse en cualquier punto del dominio de la función. La relación usual entre el límite y los límites laterales se cumple para estas derivadas. De acuerdo con el teorema 6 de la sección 2.4, una función tiene derivada en un punto, si y sólo si, tiene derivadas por la derecha y por la izquierda en ese punto, y si estas derivadas laterales son iguales.

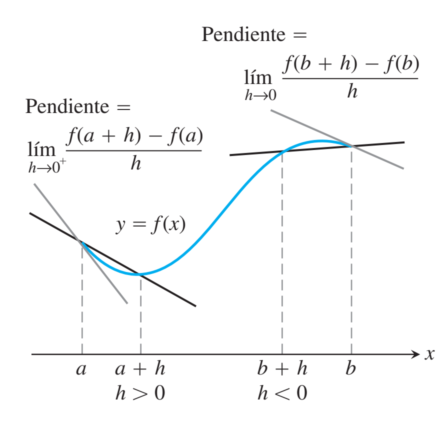


FIGURA 3.5 Las derivadas en los puntos extremos son límites laterales.

EJEMPLO 5 $y = |x|$ no es diferenciable en el origen

Demostrar que la función $y = |x|$ es diferenciable en $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$ pero no tiene derivada en $x = 0$.

Solución A la derecha del origen,

$$\frac{d}{dx}(|x|) = \frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(1 \cdot x) = 1. \qquad \frac{d}{dx}(mx + b) = m, |x| = x$$

A la izquierda,

$$\frac{d}{dx}(|x|) = \frac{d}{dx}(-x) = \frac{d}{dx}(-1 \cdot x) = -1 \qquad |x| = -x$$

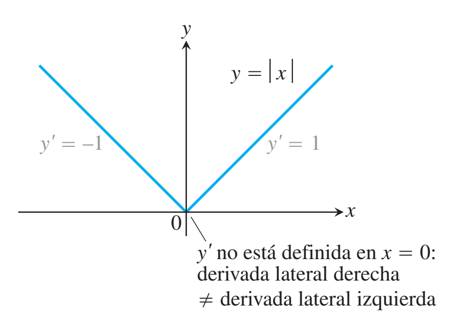


FIGURA 3.6 La función $y = |x|$ no es diferenciable en el origen, donde la gráfica tiene un "pico".

(figura 3.6). No puede haber derivada en el origen, ya que las derivadas laterales difieren en ese punto:

$$\begin{aligned}
\text{Derivada por la derecha de } |x| \text{ en cero} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} \qquad |h| = h \text{ cuando } h > 0. \\
&= \lim_{h\to 0^+} 1 = 1 \\
\text{Derivada por la izquierda de } |x| \text{ en cero} &= \lim_{h\to 0^-} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} \qquad |h| = -h \text{ cuando } h < 0. \\
&= \lim_{h\to 0^-} -1 = -1.
\end{aligned}$$

EJEMPLO 6 $y = \sqrt{x}$ no es diferenciable en $x = 0$

En el ejemplo 2 vimos que para $x > 0$, $x > 0$,

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Aplicamos la definición para averiguar si la derivada existe en $x = 0$:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{0+h} - \sqrt{0}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = \infty.$$

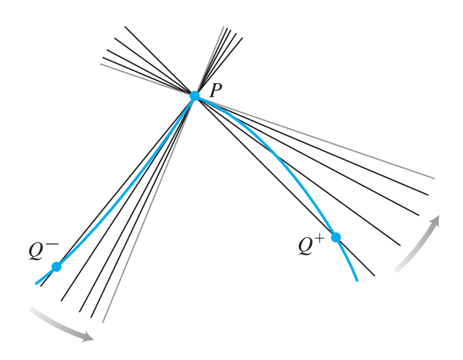
Como el límite lateral derecho no es finito, no hay derivada en $x = 0$ y como las pendientes de las rectas secantes que unen el origen con los puntos $\left(h, \sqrt{h}\right)$ en la gráfica de $y = \sqrt{x}$ se aproximan a ∞, la gráfica tiene una *tangente vertical* en el origen.

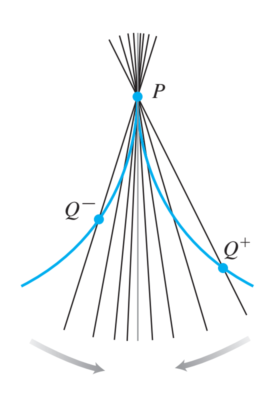
¿En qué situación una función *no* tiene derivada en un punto?

Una función tiene derivada en un punto x_0 si las pendientes de las rectas secantes que pasan por $P(x_0, f(x_0))$ y un punto cercano Q en la gráfica se aproximan al límite conforme Q se acerca a P. Si las secantes no tienden a una posición límite o se vuelven verticales conforme Q se aproxima a P, la derivada no existe. En consecuencia, la diferenciabilidad se caracteriza por la "suavidad" de la gráfica de f. Una función cuya gráfica no cumpla con esta característica no tendrá derivada en un punto; esto puede deberse a varias razones:

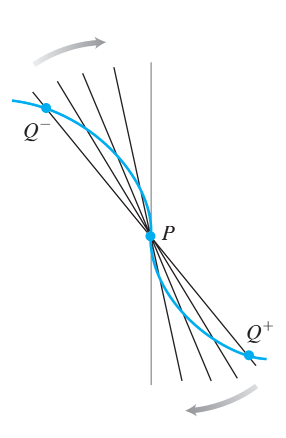
1. que la gráfica describa en el punto P una *esquina*, provocando que las derivadas laterales difieran entre sí.

2. que la gráfica describa en el punto P una *cúspide*, ocasionando que la pendiente de PQ tienda a ∞ por un lado y a $-\infty$ por el otro.

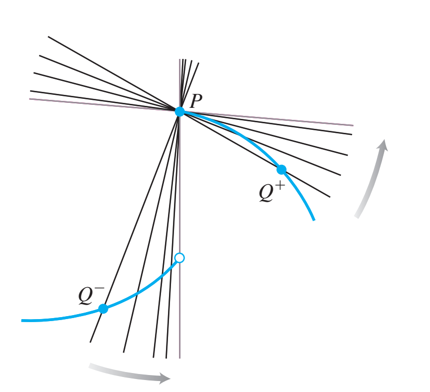


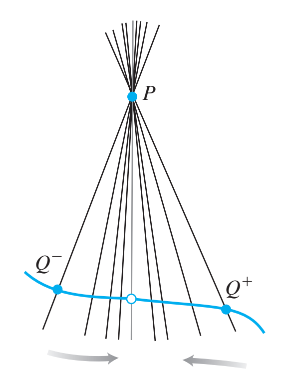


3. que la gráfica tenga una *tangente vertical* en P, dando lugar a que la pendiente de PQ se tienda a ∞ por ambos lados, o a $-\infty$ por ambos lados (en la figura se ilustra que tiende a $-\infty$).



4. que la gráfica presente una *discontinuidad*.





Las funciones diferenciables son continuas

Una función es continua en todos los puntos donde tiene derivada.

> **TEOREMA 1 Diferenciabilidad implica continuidad**
> Si f tiene derivada en $x = c$, entonces f es continua en $x = c$.

Demostración Dado que $f'(c)$ existe, debemos probar que $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$, o, de manera equivalente, que $\lim_{h \to 0} f(c + h) = f(c)$. Si $h \neq 0$, entonces

$$
\begin{aligned}
f(c + h) &= f(c) + (f(c + h) - f(c)) \\
&= f(c) + \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \cdot h .
\end{aligned}
$$

Ahora tomamos límites cuando $h \to 0$. De acuerdo con el teorema 1 de la sección 2.2,

$$
\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} f(c+h) &= \lim_{h \to 0} f(c) + \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \cdot \lim_{h \to 0} h \\
&= f(c) + f'(c) \cdot 0 \\
&= f(c) + 0 \\
&= f(c). \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

La aplicación de argumentos semejantes a los límites laterales, demuestra que si f tiene derivada lateral (por la derecha o por la izquierda) en $x = c$, entonces f es continua por ese lado en $x = c$.

El teorema 1, definido en la página anterior, afirma que si una función tiene una discontinuidad en un punto (por ejemplo, una discontinuidad de salto), no puede ser diferenciable en dicho punto. La función mayor entero $y = \lfloor x \rfloor = \text{ent}\, x$ no es diferenciable en cada entero $x = n$ (ejemplo 4, sección 2.6).

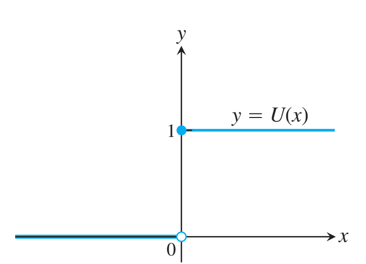


FIGURA 3.7 La función escalonada unitaria no tiene la propiedad del valor intermedio y no puede ser la derivada de una función en la recta real.

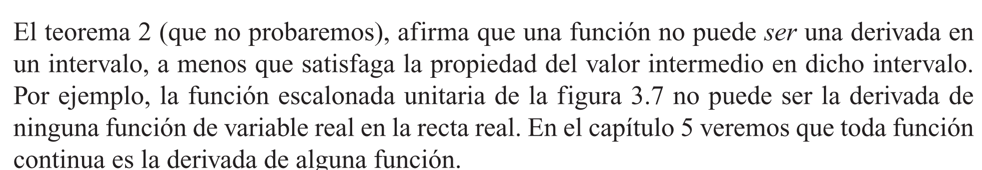
PRECAUCIÓN El recíproco del teorema 1 es falso. No es necesario que una función tenga derivada en un punto donde es continua, como vimos en el ejemplo 5.

La propiedad del valor intermedio para derivadas

Como se deduce del teorema siguiente, no cualquier función puede ser la derivada de alguna función.



TEOREMA 2
Si a y b son dos puntos cualesquiera en un intervalo donde f es diferenciable, entonces f' toma todos los valores entre $f'(a)$ y $f'(b)$.



El teorema 2 (que no probaremos), afirma que una función no puede *ser* una derivada en un intervalo, a menos que satisfaga la propiedad del valor intermedio en dicho intervalo. Por ejemplo, la función escalonada unitaria de la figura 3.7 no puede ser la derivada de ninguna función de variable real en la recta real. En el capítulo 5 veremos que toda función continua es la derivada de alguna función.

En la sección 4.4 utilizaremos el teorema 2 para analizar qué pasa en un punto de la gráfica de una función doblemente diferenciable donde cambia su "curvatura".

EJERCICIOS 3.1

Funciones derivadas y sus valores

Calcule las derivadas de las funciones de los ejercicios 1 a 6 utilizando la definición. Después, determine los valores de las derivadas que se especifican.

1. $f(x) = 4 - x^2;\quad f'(-3), f'(0), f'(1)$

2. $F(x) = (x-1)^2 + 1;\quad F'(-1), F'(0), F'(2)$

3. $g(t) = \dfrac{1}{t^2};\quad g'(-1), g'(2), g'\left(\sqrt{3}\right)$

4. $k(z) = \dfrac{1-z}{2z};\quad k'(-1), k'(1), k'\left(\sqrt{2}\right)$

5. $p(\theta) = \sqrt{3\theta};\quad p'(1), p'(3), p'(2/3)$

6. $r(s) = \sqrt{2s+1};\quad r'(0), r'(1), r'(1/2)$

En los ejercicios 7 a 12, determine las derivadas indicadas.

7. $\dfrac{dy}{dx}$ si $y = 2x^3$

8. $\dfrac{dr}{ds}$ si $r = \dfrac{s^3}{2} + 1$

9. $\dfrac{ds}{dt}$ si $s = \dfrac{t}{2t + 1}$

10. $\dfrac{dv}{dt}$ si $v = t - \dfrac{1}{t}$

11. $\dfrac{dp}{dq}$ si $p = \dfrac{1}{\sqrt{q + 1}}$

12. $\dfrac{dz}{dw}$ si $z = \dfrac{1}{\sqrt{3w - 2}}$

Pendientes y rectas tangentes

En los ejercicios 13 a 16, derive las funciones y encuentre la pendiente de la recta tangente en el valor dado de la variable independiente.

13. $f(x) = x + \dfrac{9}{x}, \quad x = -3$

14. $k(x) = \dfrac{1}{2 + x}, \quad x = 2$

15. $s = t^3 - t^2, \quad t = -1$

16. $y = (x + 1)^3, \quad x = -2$

En los ejercicios 17 y 18, derive las funciones. Después encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto indicado.

17. $y = f(x) = \dfrac{8}{\sqrt{x - 2}}, \quad (x, y) = (6, 4)$

18. $w = g(z) = 1 + \sqrt{4 - z}, \quad (z, w) = (3, 2)$

En los ejercicios 19 a 22, determine los valores de las derivadas.

19. $\left.\dfrac{ds}{dt}\right|_{t=-1}$ si $s = 1 - 3t^2$

20. $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=\sqrt{3}}$ si $y = 1 - \dfrac{1}{x}$

21. $\left.\dfrac{dr}{d\theta}\right|_{\theta=0}$ si $r = \dfrac{2}{\sqrt{4 - \theta}}$

22. $\left.\dfrac{dw}{dz}\right|_{z=4}$ si $w = z + \sqrt{z}$

Uso de la fórmula alternativa para derivadas

Use la fórmula

$$f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

para encontrar la derivada de las funciones en los ejercicios 23 a 26.

23. $f(x) = \dfrac{1}{x + 2}$

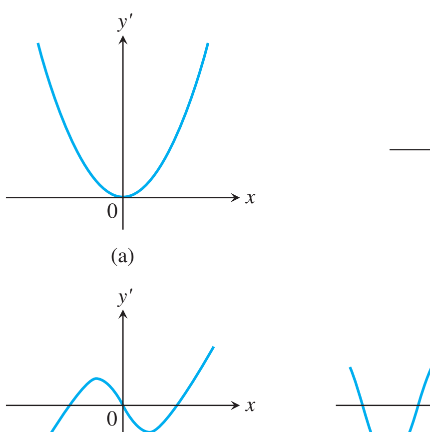
24. $f(x) = \dfrac{1}{(x - 1)^2}$

25. $g(x) = \dfrac{x}{x - 1}$

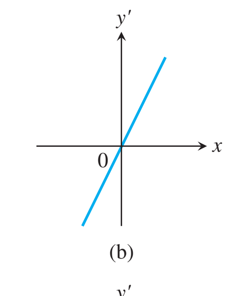
26. $g(x) = 1 + \sqrt{x}$

Gráficas

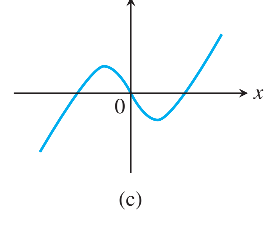
En los ejercicios 27 a 30, relacione las funciones graficadas con las derivadas graficadas en las figuras (a)-(d).



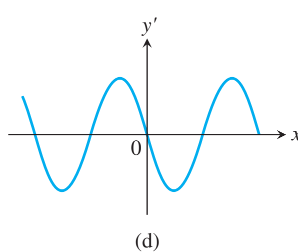
(a)



(b)

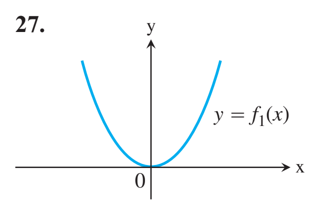


(c)

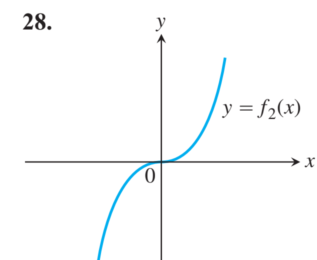


(d)

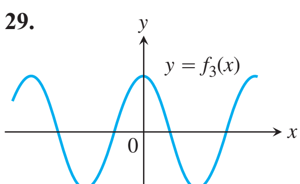
27.



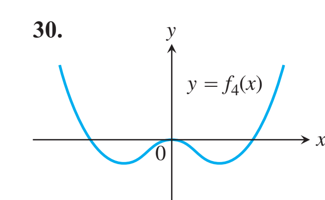
28.



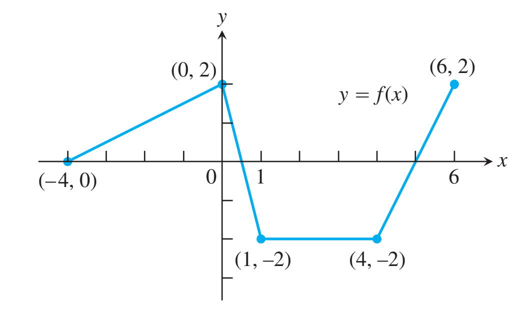
29.



30.



31. **a.** La gráfica de la figura siguiente se compone de segmentos de recta unidos por sus extremos. ¿En qué puntos del intervalo $[-4, 6]$ no está definida f'? Justifique su respuesta.



b. Grafique la derivada de f.
La gráfica debe mostrar una función escalonada.

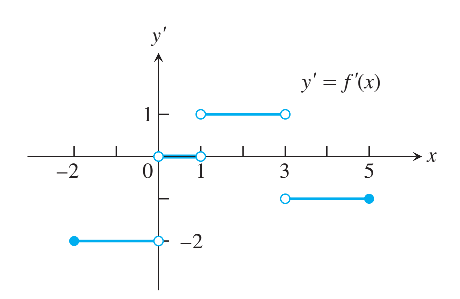
32. Recuperación de una función a partir de su derivada

a. Use la información siguiente para graficar la función f en el intervalo cerrado $[-2, 5]$.

i) La gráfica de f se compone de segmentos de recta cerrados, unidos por sus extremos.

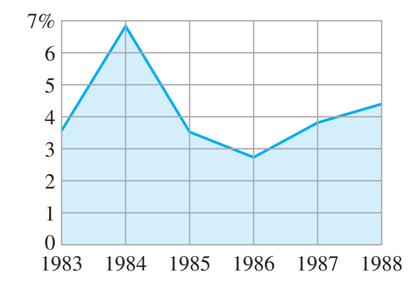
ii) La gráfica empieza en el punto $(-2, 3)$.

iii) La derivada de f es la función escalonada que se muestra en la figura que aparece enseguida.



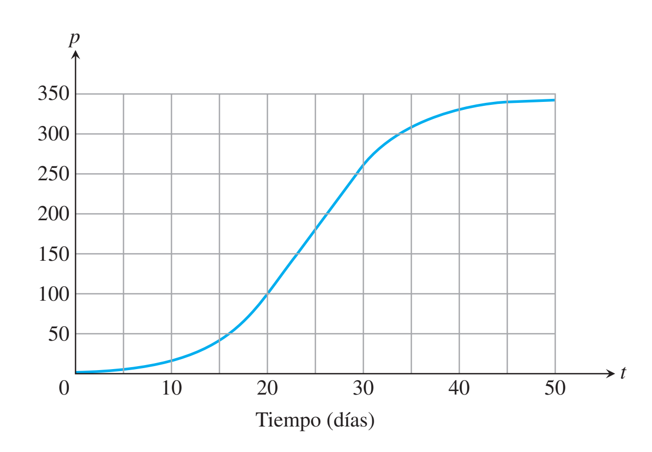
b. Repita el inciso (a), suponiendo que la gráfica empieza en $(-2, 0)$ en lugar de $(-2, 3)$.

33. Crecimiento de la economía La gráfica siguiente muestra el cambio porcentual anual promedio $y = f(t)$ del producto interno bruto (PIB) estadounidense en los años 1983–1988. Grafique dy/dt (en donde esté definida). (*Fuente: Statistical Abstracts of the United States,* 110ª edición, Departamento de Comercio de Estados Unidos, pág. 427).



34. Moscas de la fruta (*Continuación del ejemplo 3, sección 2.1*). Al principio, en un ambiente cerrado con relativamente pocos miembros, la población inicial crece con lentitud; luego, el crecimiento se da con más rapidez, ya que el número de individuos reproductores ha aumentado y se cuenta todavía con recursos abundantes; por último, el crecimiento se vuelve lento una vez más a medida que la población alcanza la capacidad de sustentación del ambiente.

a. Use el método gráfico del ejemplo 3 para graficar la derivada de la población de la mosca de la fruta que se analizó en la sección 2.1. A continuación se reproduce la gráfica de la población.

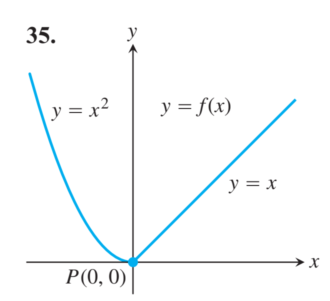


b. ¿En qué días parece que la población crece con más rapidez? ¿En qué días su crecimiento parece más lento?

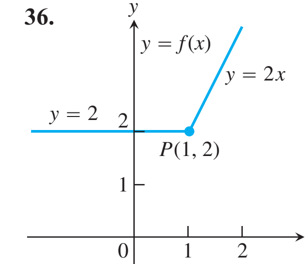
Derivadas laterales

Compare las derivadas por la derecha y por la izquierda para demostrar que las funciones de los ejercicios 35 a 38 no son diferenciables en el punto P.

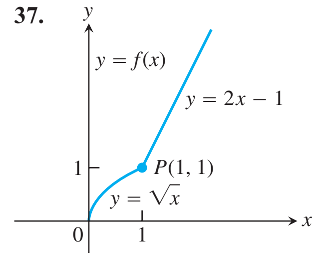
35.



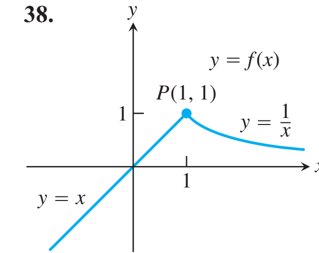
36.



37.



38.



Diferenciabilidad y continuidad en un intervalo

En los ejercicios 39 a 44, cada una de las figuras muestra la gráfica de una función sobre un intervalo cerrado D. ¿En qué puntos del dominio se ve que la función es

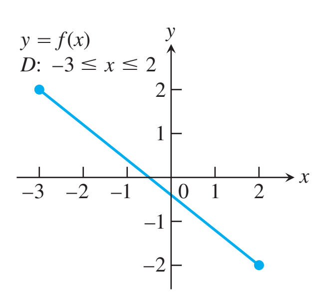
a. diferenciable?

b. continua pero no diferenciable?

c. ni continua ni diferenciable?

Justifique sus respuestas.

39.

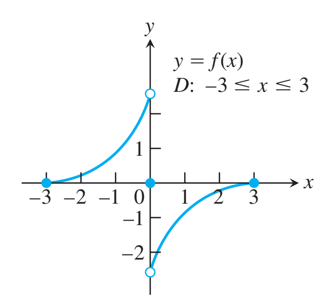




40.

$y = f(x)$
D: $-2 \le x \le 3$

41.

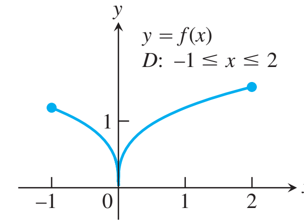




42.

$y = f(x)$
D: $-2 \le x \le 3$

43.



44.

$y = f(x)$
D: $-3 \le x \le 3$

Teoría y ejemplos

En los ejercicios 45 a 48,

a. Encuentre la derivada $f'(x)$ de la función dada $y = f(x)$.

b. Grafique $y = f(x)$ y $y = f'(x)$ una junto a la otra, usando distintos conjuntos de ejes coordenados, y responda las preguntas siguientes:

c. ¿Para qué valores de x, si los hay, f' es positiva? ¿Para cuáles es igual a cero? ¿Para cuáles es negativa?

d. ¿En qué intervalos de valores de x, si los hay, la función $y = f(x)$ crece conforme x aumenta? ¿En qué intervalos decrece conforme x aumenta? ¿Cómo se relaciona esto con lo que encontró en el inciso (c)? (Hablaremos más acerca de esta relación en el capítulo 4).

45. $y = -x^2$ **46.** $y = -1/x$

47. $y = x^3/3$ **48.** $y = x^4/4$

49. ¿La curva $y = x^3$ tiene alguna pendiente negativa? De ser así, ¿en dónde la tiene? Justifique su respuesta.

50. ¿La curva $y = 2\sqrt{x}$ tiene alguna tangente horizontal? De ser así, ¿en dónde la tiene? Justifique su respuesta.

51. Tangente a la parábola ¿La parábola $y = 2x^2 - 13x + 5$ tiene una tangente cuya pendiente sea -1? De ser así, determine la ecuación para la recta y el punto de tangencia. De lo contrario, explique por qué no la tiene.

52. Tangente a $y = \sqrt{x}$ ¿Alguna tangente a la curva $y = \sqrt{x}$ cruza el eje x en $x = -1$? De ser así, encuentre la ecuación para la recta y el punto de tangencia. De lo contrario, explique por qué no lo cruza.

53. Mayor entero en x ¿Alguna función diferenciable en $(-\infty, \infty)$ tiene $y = \text{ent } x$, el mayor entero en x (vea la figura 2.55), como su derivada? Justifique su respuesta.

54. Derivada de $y = |x|$ Grafique la derivada de $f(x) = |x|$. Después grafique $y = (|x| - 0)/(x - 0) = |x|/x$. ¿Qué puede concluir?

55. Derivada de $-f$ ¿Qué implica saber que una función $f(x)$ es diferenciable en $x = x_0$ respecto a la diferenciabilidad de la función $-f$ en $x = x_0$? Justifique su respuesta.

56. Derivada de múltiplos ¿Qué nos dice el hecho de que la función $g(t)$ sea diferenciable en $t = 7$ respecto a la diferenciabilidad de la función $3g$ en $t = 7$? Justifique su respuesta.

57. Límite de un cociente Suponga que las funciones $g(t)$ y $h(t)$ están definidas para todos los valores de t, y que $g(0) = h(0) = 0$. ¿Puede existir $\lim_{t\to 0}(g(t))/(h(t))$ De ser así, ¿es igual a cero? Justifique sus respuestas.

58. a. Sea $f(x)$ una función que satisface $|f(x)| \le x^2$ para $-1 \le x \le 1$. Demuestre que f es diferenciable en $x = 0$ y determine $f'(0)$.

b. Demuestre que

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

es diferenciable en $x = 0$, y encuentre $f'(0)$.

T **59.** Utilice su calculadora para graficar $y = 1/(2\sqrt{x})$ en una ventana que tenga $0 \le x \le 2$. Después emplee la misma ventana para graficar

$$y = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

para $h = 1, 0.5, 0.1$. Después intente hacerlo para $h = -1, -0.5, -0.1$. Explique lo que ocurre.

T **60.** Grafique $y = 3x^2$ en una ventana que tenga $-2 \le x \le 2$, $0 \le y \le 3$. Después emplee la misma pantalla para graficar

$$y = \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

para $h = 2, 1, 0.2$. Luego inténtelo para $h = -2, -1, -0.2$. Explique lo que ocurre.

T **61. La función de Weierstrass, continua, pero no diferenciable en punto alguno** La suma de los primeros ocho términos de la función de Weierstrass, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2/3)^n \cos(9^n \pi x)$ is

$$g(x) = \cos(\pi x) + (2/3)^1 \cos(9\pi x) + (2/3)^2 \cos(9^2 \pi x) + (2/3)^3 \cos(9^3 \pi x) + \cdots + (2/3)^7 \cos(9^7 \pi x).$$

Grafique esta suma. Haga varios acercamientos. ¿Qué tanto “brinca” la gráfica? Especifique una escala para la ventana en donde se pueda ver una parte suave de la gráfica.

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

Use un software matemático para realizar los siguientes pasos para las funciones en los ejercicios 62 a 67.

a. Grafique $y = f(x)$ para ver el comportamiento global de la función.

b. Defina el cociente de diferencias q en un punto general x, con un incremento general (en el tamaño) h.

c. Calcule el límite cuando $h \to 0$. ¿Qué fórmula se obtiene?

d. Sustituya el valor $x = x_0$ y grafique la función $y = f(x)$ junto con su recta tangente en ese punto.

e. Sustituya varios valores para x, mayores y menores que x_0 en la fórmula obtenida en el inciso (c). ¿Los números concuerdan con la figura?

f. Grafique la fórmula obtenida en el inciso (c). ¿Qué significa el hecho de que sus valores sean negativos? ¿Qué significa que sean cero? ¿Qué significa que sean positivos? ¿El resultado concuerda con la gráfica del inciso (a)? Justifique su respuesta.

62. $f(x) = x^3 + x^2 - x, \quad x_0 = 1$

63. $f(x) = x^{1/3} + x^{2/3}, \quad x_0 = 1$

64. $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 1}, \quad x_0 = 2$

65. $f(x) = \dfrac{x - 1}{3x^2 + 1}, \quad x_0 = -1$

66. $f(x) = \operatorname{sen} 2x, \quad x_0 = \pi/2$

67. $f(x) = x^2 \cos x, \quad x_0 = \pi/4$

3.2 Reglas de diferenciación

En esta sección se introducen algunas reglas que nos permiten derivar una gran variedad de funciones. Una vez que las hayamos comprobado seremos capaces de derivar funciones sin tener que aplicar la definición de derivada.

Potencias, múltiplos, sumas y diferencias

La primera regla de diferenciación sostiene que la derivada de toda función constante es cero.

REGLA 1 Derivada de una función constante

Si f tiene el valor constante $f(x) = c$, entonces

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(c) = 0.$$

EJEMPLO 1

Si f tiene el valor constante $f(x) = 8$, entonces

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(8) = 0.$$

De manera similar,

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx}\left(\sqrt{3}\right) = 0. \quad ■$$

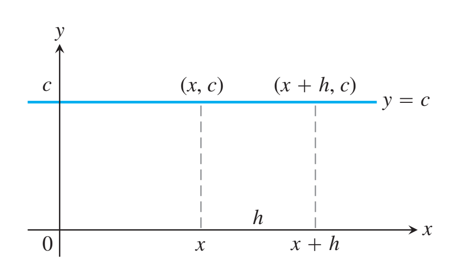


FIGURA 3.8 La regla $(d/dx)(c) = 0$ es otra manera de decir que los valores de las funciones constantes nunca cambian, y que la pendiente de una recta horizontal es cero en todos sus puntos.

Demostración de la regla 1 Aplicamos la definición de derivada a $f(x) = c$, la función cuyos valores de salida tienen el valor constante c (figura 3.8). En todo valor de x encontramos que

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0. \quad ■$$

La segunda regla nos dice cómo derivar x^n si n es un entero positivo.

REGLA 2 Regla de potencias para enteros positivos
Si n es un entero positivo, entonces

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}.$$

Para aplicar la regla de potencias, restamos 1 al exponente original (n) y multiplicamos el resultado por n.

EJEMPLO 2 Interpretación de la regla 2

f	x	x^2	x^3	x^4	$\cdots$
f'	1	$2x$	$3x^2$	$4x^3$	$\cdots$

■

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

Richard Courant
(1888-1972)

Primera demostración de la regla 2 La fórmula

$$z^n - x^n = (z - x)(z^{n-1} + z^{n-2}x + \cdots + zx^{n-2} + x^{n-1})$$

puede verificarse multiplicando el lado derecho. Luego, de acuerdo con la forma alternativa de la definición de la derivada,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{z\to x}\frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \lim_{z\to x}\frac{z^n - x^n}{z - x} \\ &= \lim_{z\to x}(z^{n-1} + z^{n-2}x + \cdots + zx^{n-2} + x^{n-1}) \\ &= nx^{n-1} \end{aligned}$$

Segunda demostración de la regla 2 Si $f(x) = x^n$, entonces $f(x + h) = (x + h)^n$. Como n es un entero positivo, de acuerdo con el teorema del binomio, podemos expandir $(x + h)^n$ para obtener

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x + h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\left[x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n\right] - x^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right] \\ &= nx^{n-1} \end{aligned}$$

■

La tercera regla dice que, cuando una función diferenciable se multiplica por una constante, su derivada está multiplicada por la misma constante.

REGLA 3 Regla del múltiplo constante
Si u es una función diferenciable de x, y c es una constante, entonces

$$\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}.$$



FIGURA 3.9 Las gráficas de $y = x^2$ y $y = 3x^2$. Triplicando la coordenada y se triplica la pendiente (ejemplo 3).

En particular, si n es un entero positivo, entonces

$$\frac{d}{dx}(cx^n) = cnx^{n-1}.$$

EJEMPLO 3

(a) La fórmula de la derivada

$$\frac{d}{dx}(3x^2) = 3 \cdot 2x = 6x$$

dice que si modificamos la escala de la gráfica de $y = x^2$ multiplicando cada coordenada y por 3, la pendiente en cada punto se multiplica también por 3 (figura 3.9).

(b) Un caso especial útil

La derivada del negativo de una función diferenciable u es el negativo de la derivada de la función. La aplicación de la regla 3 con $c = -1$ da

$$\frac{d}{dx}(-u) = \frac{d}{dx}(-1 \cdot u) = -1 \cdot \frac{d}{dx}(u) = -\frac{du}{dx}.$$ ■

Demostración de la regla 3

$$\frac{d}{dx}cu = \lim_{h\to 0}\frac{cu(x+h) - cu(x)}{h}$$ Definición de la derivada con $f(x) = cu(x)$

$$= c\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$ Propiedad del límite

$$= c\frac{du}{dx}$$ u es diferenciable. ■

Notación de las funciones mediante u y v

Al buscar una fórmula de diferenciación, es probable encontrar que las funciones con las que se trabaja estén denotadas mediante letras como f y g. Sin embargo, cuando se aplica la fórmula lo mejor sería no emplear las mismas letras para denotar algo distinto. Para evitar este problema, en las reglas de diferenciación suelen utilizarse letras como u y v para denotar las funciones, ya que probablemente no se hayan usado en otro lado.

La siguiente regla dice que la derivada de la suma de dos funciones diferenciables es la suma de sus derivadas.

REGLA 4 Regla de la derivada de una suma
Si u y v son funciones diferenciables de x, entonces su suma $u + v$ es diferenciable en todo punto donde tanto u como v sean diferenciables. En tales puntos

$$\frac{d}{dx}(u + v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}.$$

EJEMPLO 4 Derivada de una suma

$$\begin{aligned} y &= x^4 + 12x \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^4) + \frac{d}{dx}(12x) \\ &= 4x^3 + 12 \end{aligned}$$

Demostración de la regla 4 Aplicamos la definición de derivada a $f(x) = u(x) + v(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[u(x) + v(x)] &= \lim_{h\to 0} \frac{[u(x+h) + v(x+h)] - [u(x) + v(x)]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left[\frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \frac{v(x+h) - v(x)}{h}\right] \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}. \end{aligned}$$

Al combinar las reglas de la suma y del múltiplo constante, obtenemos la **regla de la diferencia**, según la cual la derivada de una *diferencia* de funciones diferenciables es la diferencia de sus derivadas.

$$\frac{d}{dx}(u - v) = \frac{d}{dx}[u + (-1)v] = \frac{du}{dx} + (-1)\frac{dv}{dx} = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}$$

La regla de la suma se extiende a sumas de más de dos funciones, siempre y cuando la suma conste solamente de un número finito de funciones. Si $u_1, u_2, \ldots, u_n$ son diferenciables en x, entonces también lo es $u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ y

$$\frac{d}{dx}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \cdots + \frac{du_n}{dx}.$$

EJEMPLO 5 Derivada de una función polinomial

$$\begin{aligned} y &= x^3 + \frac{4}{3}x^2 - 5x + 1 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}x^3 + \frac{d}{dx}\left(\frac{4}{3}x^2\right) - \frac{d}{dx}(5x) + \frac{d}{dx}(1) \\ &= 3x^2 + \frac{4}{3}\cdot 2x - 5 + 0 \\ &= 3x^2 + \frac{8}{3}x - 5 \end{aligned}$$

Observe que podemos derivar cualquier polinomio término a término, tal como lo hicimos con el polinomio del ejemplo 5. Todas las funciones polinomiales son diferenciables en todos los puntos.

Demostración de la regla de la suma para sumas de más de dos funciones Probamos la afirmación

$$\frac{d}{dx}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \cdots + \frac{du_n}{dx}$$

mediante inducción matemática (vea el Apéndice 1). La afirmación es cierta para $n = 2$, tal como se acaba de probar. Éste es el paso 1 de la prueba por inducción.

El paso 2 consiste en demostrar que si el enunciado es verdadero para cualquier entero positivo $n = k$, donde $k \geq n_0 = 2$, entonces también será válido para $n = k + 1$. Por lo tanto, supongamos que

$$\frac{d}{dx}(u_1 + u_2 + \cdots + u_k) = \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \cdots + \frac{du_k}{dx}. \quad (1)$$

Entonces

$$\frac{d}{dx}(\underbrace{u_1 + u_2 + \cdots + u_k}_{\text{Llamemos a la función definida por esta suma } u} + \underbrace{u_{k+1}}_{\text{Ahora llamemos a esta función } v})$$

$$= \frac{d}{dx}(u_1 + u_2 + \cdots + u_k) + \frac{du_{k+1}}{dx} \qquad \text{Regla 4 para } \frac{d}{dx}(u + v)$$

$$= \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \cdots + \frac{du_k}{dx} + \frac{du_{k+1}}{dx}. \qquad \text{Ecuación 1.}$$

Habiendo verificado estos pasos, el principio de inducción matemática garantiza la regla de la suma para cualquier entero $n \geq 2$. ■

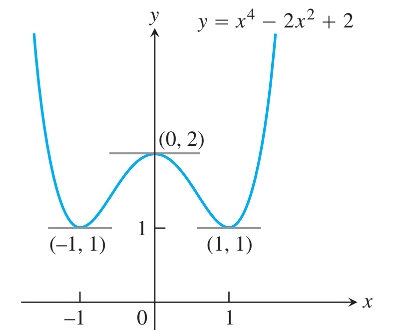


FIGURA 3.10 La curva $y = x^4 - 2x^2 + 2$ y sus tangentes horizontales (ejemplo 6).

EJEMPLO 6 Determinación de tangentes horizontales

¿La curva $y = x^4 - 2x^2 + 2$ tiene alguna tangente horizontal? De ser así, ¿en dónde la tiene?

Solución Las tangentes horizontales, si las hay, aparecen cuando la pendiente dy/dx es cero. Tenemos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^4 - 2x^2 + 2) = 4x^3 - 4x.$$

Ahora resolvemos la ecuación $\dfrac{dy}{dx} = 0$ para x:

$$\begin{aligned} 4x^3 - 4x &= 0 \\ 4x(x^2 - 1) &= 0 \\ x &= 0, 1, -1. \end{aligned}$$

La curva $y = x^4 - 2x^2 + 2$ tiene tangentes horizontales en $x = 0$, 1 y –1. Los puntos correspondientes en la curva son (0, 2), (1, 1) y (–1, 1). Vea la figura 3.10. ■

Productos y cocientes

Mientras la derivada de la suma de dos funciones es la suma de sus derivadas, la derivada del producto de dos funciones *no* es el producto de sus derivadas. Por ejemplo,

$$\frac{d}{dx}(x \cdot x) = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x, \qquad \text{mientras que} \qquad \frac{d}{dx}(x) \cdot \frac{d}{dx}(x) = 1 \cdot 1 = 1.$$

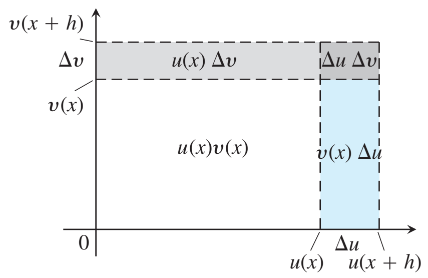
La derivada de el producto de dos funciones es la suma de *dos* productos, como se explica a continuación.

REGLA 5 Regla de la derivada de un producto

Si u y v son diferenciables en x, entonces también lo es su producto uv, y

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

Ilustración de la regla del producto
Si $u(x)$ y $v(x)$ son positivas y crecientes conforme x crece, y si $h > 0$,



de manera que el área sombreada total en la figura es

$$u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)$$
$$= u(x+h)\,\Delta v + v(x+h)\,\Delta u - \Delta u \Delta v.$$

Dividiendo ambos lados de la ecuación entre h, obtenemos

$$\frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h}$$
$$= u(x+h)\frac{\Delta v}{h} + v(x+h)\frac{\Delta u}{h} - \Delta u \frac{\Delta v}{h}.$$

Como $h \to 0^+$,

$$\Delta u \cdot \frac{\Delta v}{h} \to 0 \cdot \frac{dv}{dx} = 0,$$

obteniendo

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

La derivada del producto uv es u veces la derivada de v más v veces la derivada de u. En *notación* prima, $(uv)' = uv' + vu'$. En notación de funciones,

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x).$$

EJEMPLO 7 Uso de la regla del producto

Encontrar la derivada de

$$y = \frac{1}{x}\left(x^2 + \frac{1}{x}\right).$$

Solución Aplicamos la regla del producto con $u = 1/x$ y $v = x^2 + (1/x)$:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)\right] = \frac{1}{x}\left(2x - \frac{1}{x^2}\right) + \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$
$$= 2 - \frac{1}{x^3} - 1 - \frac{1}{x^3}$$
$$= 1 - \frac{2}{x^3}.$$

$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$ y $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$ por Ejemplo 3, sección 2.7

■

Demostración de la regla 5

$$\frac{d}{dx}(uv) = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h}$$

Para convertir esta fracción en una equivalente que contenga los cocientes de diferencias para las derivadas de u y v, restamos y sumamos $u(x + h)v(x)$ en el numerador:

$$\frac{d}{dx}(uv) = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x+h)v(x) + u(x+h)v(x) - u(x)v(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\left[u(x+h)\frac{v(x+h)-v(x)}{h} + v(x)\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\right]$$
$$= \lim_{h\to 0} u(x+h)\cdot \lim_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h} + v(x)\cdot \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}.$$

Cuando h tiende a cero, $u(x + h)$ tiende a $u(x)$, ya que u, siendo diferenciable en x, es continua en x. Las dos fracciones tienden a los valores de dv/dx en x y du/dx en x. En resumen

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

■

En el ejemplo siguiente trabajaremos únicamente con valores numéricos.

EJEMPLO 8 Derivadas a partir de valores numéricos

Sea $y = uv$ el producto de las funciones u y v. Encontrar $y'(2)$ si

$$u(2) = 3, \quad u'(2) = -4, \quad v(2) = 1 \quad \text{y} \quad v'(2) = 2.$$

Solución De acuerdo con la regla del producto, en la forma

$$y' = (uv)' = uv' + vu',$$

tenemos

$$\begin{aligned} y'(2) &= u(2)v'(2) + v(2)u'(2) \\ &= (3)(2) + (1)(-4) = 6 - 4 = 2. \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 9 Dos métodos para derivar un producto

Encontrar la derivada de $y = (x^2 + 1)(x^3 + 3)$.

Solución

(a) De acuerdo con la regla del producto, con $u = x^2 + 1$ y $v = x^3 + 3$, encontramos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left[\left(x^2+1\right)\left(x^3+3\right)\right] &= (x^2+1)(3x^2) + (x^3+3)(2x) \\ &= 3x^4 + 3x^2 + 2x^4 + 6x \\ &= 5x^4 + 3x^2 + 6x. \end{aligned}$$

(b) Este producto en particular también puede derivarse (quizás mejor) multiplicando la expresión original para y y derivando la función polinomial resultante:

$$\begin{aligned} y &= (x^2+1)(x^3+3) = x^5 + x^3 + 3x^2 + 3 \\ \frac{dy}{dx} &= 5x^4 + 3x^2 + 6x. \end{aligned}$$

Esto concuerda con nuestro primer cálculo. ■

Así como la derivada de un producto de dos funciones diferenciables no es el producto de sus derivadas, la derivada del cociente de dos funciones no es el cociente de sus derivadas. Lo que pasa en este caso queda explicado por la regla del cociente.

REGLA 6 Regla de la derivada de un cociente

Si u y v son diferenciables en x, y si $v(x) \neq 0$, entonces el cociente u/v es diferenciable en x y

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}.$$

En notación de funciones

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

EJEMPLO 10 Uso de la regla del cociente

Encontrar la derivada de

$$y = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}.$$

Solución
Aplicamos la regla del cociente con $u = t^2 - 1$ y $v = t^2 + 1$:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(t^2 + 1) \cdot 2t - (t^2 - 1) \cdot 2t}{(t^2 + 1)^2} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v(du/dt) - u(dv/dt)}{v^2}$$

$$= \frac{2t^3 + 2t - 2t^3 + 2t}{(t^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{4t}{(t^2 + 1)^2}.$$

Demostración de la regla 6

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{u(x + h)}{v(x + h)} - \dfrac{u(x)}{v(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{v(x)u(x + h) - u(x)v(x + h)}{hv(x + h)v(x)}$$

Para convertir la última fracción en una equivalente que contenga los cocientes de diferencias para las derivadas de u y v, restamos y sumamos $v(x)u(x)$ en el numerador, obteniendo

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \lim_{h \to 0} \frac{v(x)u(x + h) - v(x)u(x) + v(x)u(x) - u(x)v(x + h)}{hv(x + h)v(x)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{v(x)\dfrac{u(x + h) - u(x)}{h} - u(x)\dfrac{v(x + h) - v(x)}{h}}{v(x + h)v(x)}.$$

Tomando el límite en el numerador y en el denominador, obtenemos la regla del cociente.

Potencias enteras negativas de x

La regla de potencias para enteros negativos es la misma que para enteros positivos.

REGLA 7 Regla de potencias para enteros negativos
Si n es un entero negativo y $x \neq 0$, entonces

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}.$$

EJEMPLO 11

(a) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{d}{dx}(x^{-1}) = (-1)x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$ Coincide con el ejemplo 3, sección 2.7

(b) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{4}{x^3}\right) = 4\dfrac{d}{dx}(x^{-3}) = 4(-3)x^{-4} = -\dfrac{12}{x^4}$

Demostración de la regla 7 Usaremos la regla del cociente para esta demostración. Si n es un entero negativo, entonces $n = -m$, donde m es un entero positivo. En consecuencia, $x^n = x^{-m} = 1/x^m$ y

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(x^n) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^m}\right) \\
&= \frac{x^m \cdot \frac{d}{dx}(1) - 1 \cdot \frac{d}{dx}(x^m)}{(x^m)^2} && \text{Regla del cociente con } u = 1 \text{ y } v = x^m \\
&= \frac{0 - mx^{m-1}}{x^{2m}} && \text{Ya que } m > 0,\ \frac{d}{dx}(x^m) = mx^{m-1} \\
&= -mx^{-m-1} \\
&= nx^{n-1}. && \text{Ya que } -m = n
\end{aligned}$$

■

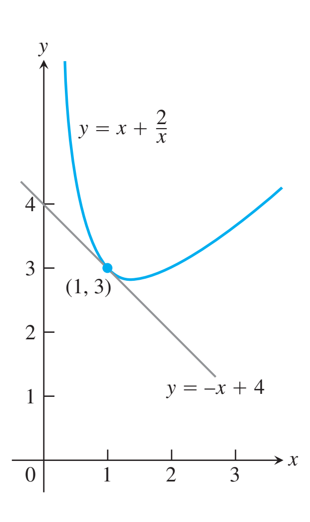


FIGURA 3.11 La tangente a la curva $y = x + (2/x)$ en (1, 3) del ejemplo 12. La curva tiene una parte en el tercer cuadrante que no se muestra aquí. En el capítulo 4 veremos cómo graficar funciones como ésta.

EJEMPLO 12 Tangente a una curva

Encontrar una ecuación para la tangente a la curva

$$y = x + \frac{2}{x}$$

en el punto (1, 3) (figura 3.11).

Solución La pendiente de la curva es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x) + 2\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + 2\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 1 - \frac{2}{x^2}.$$

La pendiente en $x = 1$ es

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = \left[1 - \frac{2}{x^2}\right]_{x=1} = 1 - 2 = -1.$$

La recta que pasa por (1, 3) con pendiente $m = -1$ es

$$\begin{aligned}
y - 3 &= (-1)(x - 1) && \text{Ecuación punto-pendiente} \\
y &= -x + 1 + 3 \\
y &= -x + 4.
\end{aligned}$$

■

Al resolver problemas de diferenciación, la elección de cuáles reglas usar puede hacer la diferencia entre trabajar mucho o no. Veamos el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 13 Elección de la regla a usar

En lugar de usar la regla del cociente para encontrar la derivada de

$$y = \frac{(x - 1)(x^2 - 2x)}{x^4},$$

expandimos el numerador y dividimos entre x^4:

$$y = \frac{(x - 1)(x^2 - 2x)}{x^4} = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^4} = x^{-1} - 3x^{-2} + 2x^{-3}.$$

Después usamos las reglas de la suma y de la potencia:

$$\frac{dy}{dx} = -x^{-2} - 3(-2)x^{-3} + 2(-3)x^{-4}$$
$$= -\frac{1}{x^2} + \frac{6}{x^3} - \frac{6}{x^4}.$$

■

Segundas derivadas y derivadas de orden superior

Si $y = f(x)$ es una función diferenciable, entonces su derivada $f'(x)$ también es una función. Si f' también es diferenciable, podemos derivar f' para obtener una nueva función de x, denotada por f''. Así, $f'' = (f')'$. La función f'' se llama **segunda derivada** de f, ya que es la derivada de la primera derivada. En notación tenemos

$$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dy'}{dx} = y'' = D^2(f)(x) = D_x^{\,2} f(x).$$

El símbolo D^2 significa que la operación de diferenciación se realiza dos veces.

Si $y = x^6$, entonces $y' = 6x^5$ y tenemos que

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx}\left(6x^5\right) = 30x^4.$$

Por lo tanto, $D^2\left(x^6\right) = 30x^4$.

Si y'' es diferenciable, su derivada, $y''' = dy''/dx = d^3y/dx^3$ es la **tercera derivada** de y con respecto a x. Como puede imaginar, los nombres continúan con

$$y^{(n)} = \frac{d}{dx}y^{(n-1)} = \frac{d^ny}{dx^n} = D^ny$$

denotando la **n-ésima derivada** de y con respecto a x para cualquier entero positivo n.

Podemos interpretar la segunda derivada como la razón de cambio de la pendiente de la tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en cada punto. En el siguiente capítulo veremos que la segunda derivada revela si la gráfica se dobla hacia arriba o hacia abajo a partir de la recta tangente conforme movemos el punto de tangencia. En la siguiente sección, la segunda y la tercera derivadas se interpretan en términos del movimiento a lo largo de una recta.

Cómo leer los símbolos para las derivadas

y'	"*y* prima"
y''	"*y* doble prima"
$\frac{d^2y}{dx^2}$	"*d* cuadrada *y dx* cuadrada"
y'''	" triple prima"
$y^{(n)}$	"*y* supra *n*"
$\frac{d^ny}{dx^n}$	"*d* a la *n* de *y* entre *dx* a la *n*"
D^n	"*D* a la *n*"

EJEMPLO 14 Determinación de derivadas de orden superior

Las primeras cuatro derivadas de $y = x^3 - 3x^2 + 2$ son

Primera derivada: $y' = 3x^2 - 6x$
Segunda derivada: $y'' = 6x - 6$
Tercera derivada: $y''' = 6$
Cuarta derivada: $y^{(4)} = 0$.

La función tiene derivadas de todos los órdenes; la quinta derivada y todas las siguientes son cero.

■

EJERCICIOS 3.2

Cálculo de derivadas

En los ejercicios 1 a 12, encuentre la primera y segunda derivadas.

1. $y = -x^2 + 3$

2. $y = x^2 + x + 8$

3. $s = 5t^3 - 3t^5$

4. $w = 3z^7 - 7z^3 + 21z^2$

5. $y = \dfrac{4x^3}{3} - x$

6. $y = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{4}$

7. $w = 3z^{-2} - \dfrac{1}{z}$

8. $s = -2t^{-1} + \dfrac{4}{t^2}$

9. $y = 6x^2 - 10x - 5x^{-2}$

10. $y = 4 - 2x - x^{-3}$

11. $r = \dfrac{1}{3s^2} - \dfrac{5}{2s}$

12. $r = \dfrac{12}{\theta} - \dfrac{4}{\theta^3} + \dfrac{1}{\theta^4}$

En los ejercicios 13 a 16, encuentre y' **(a)** aplicando la regla del producto, y **(b)** multiplicando los factores para obtener una suma de términos más simples para derivar.

13. $y = (3 - x^2)(x^3 - x + 1)$

14. $y = (x - 1)(x^2 + x + 1)$

15. $y = (x^2 + 1)\left(x + 5 + \dfrac{1}{x}\right)$

16. $y = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)\left(x - \dfrac{1}{x} + 1\right)$

Determine las derivadas de las funciones en los ejercicios 17 a 28.

17. $y = \dfrac{2x + 5}{3x - 2}$

18. $z = \dfrac{2x + 1}{x^2 - 1}$

19. $g(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 0.5}$

20. $f(t) = \dfrac{t^2 - 1}{t^2 + t - 2}$

21. $v = (1 - t)(1 + t^2)^{-1}$

22. $w = (2x - 7)^{-1}(x + 5)$

23. $f(s) = \dfrac{\sqrt{s} - 1}{\sqrt{s} + 1}$

24. $u = \dfrac{5x + 1}{2\sqrt{x}}$

25. $v = \dfrac{1 + x - 4\sqrt{x}}{x}$

26. $r = 2\left(\dfrac{1}{\sqrt{\theta}} + \sqrt{\theta}\right)$

27. $y = \dfrac{1}{(x^2 - 1)(x^2 + x + 1)}$

28. $y = \dfrac{(x + 1)(x + 2)}{(x - 1)(x - 2)}$

En las funciones de los ejercicios 29 y 30, encuentre las derivadas de todos los órdenes.

29. $y = \dfrac{x^4}{2} - \dfrac{3}{2}x^2 - x$

30. $y = \dfrac{x^5}{120}$

Encuentre la primera y segunda derivadas de las funciones en los ejercicios 31 a 38.

31. $y = \dfrac{x^3 + 7}{x}$

32. $s = \dfrac{t^2 + 5t - 1}{t^2}$

33. $r = \dfrac{(\theta - 1)(\theta^2 + \theta + 1)}{\theta^3}$

34. $u = \dfrac{(x^2 + x)(x^2 - x + 1)}{x^4}$

35. $w = \left(\dfrac{1 + 3z}{3z}\right)(3 - z)$

36. $w = (z + 1)(z - 1)(z^2 + 1)$

37. $p = \left(\dfrac{q^2 + 3}{12q}\right)\left(\dfrac{q^4 - 1}{q^3}\right)$

38. $p = \dfrac{q^2 + 3}{(q - 1)^3 + (q + 1)^3}$

Uso de valores numéricos

39. Suponga que u y v son funciones de x, diferenciables en $x = 0$, y que

$$u(0) = 5, \quad u'(0) = -3, \quad v(0) = -1, \quad v'(0) = 2.$$

Encuentre los valores de las derivadas siguientes en $x = 0$.

a. $\dfrac{d}{dx}(uv)$ **b.** $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right)$ **c.** $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{v}{u}\right)$ **d.** $\dfrac{d}{dx}(7v - 2u)$

40. Suponga que u y v son funciones diferenciables en x y que

$$u(1) = 2, \quad u'(1) = 0, \quad v(1) = 5, \quad v'(1) = -1.$$

Determine los valores de las derivadas siguientes en $x = 1$.

a. $\dfrac{d}{dx}(uv)$ **b.** $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right)$ **c.** $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{v}{u}\right)$ **d.** $\dfrac{d}{dx}(7v - 2u)$

Pendientes y tangentes

41. a. Normal a una curva Encuentre una ecuación para la recta perpendicular a la tangente a la curva $y = x^3 - 4x + 1$ en el punto (2, 1).

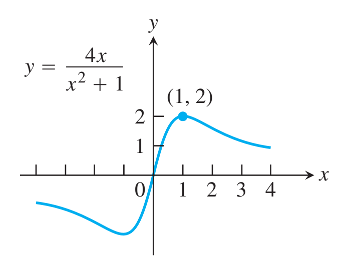
b. Pendiente mínima ¿Cuál es la pendiente mínima en la curva? ¿En qué punto de la curva se da dicha pendiente?

c. Tangentes con pendiente específica Encuentre ecuaciones para las tangentes a la curva en los puntos donde la pendiente de la curva es 8.

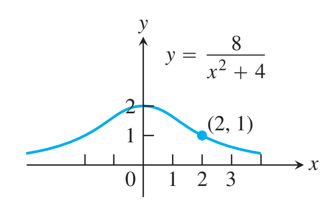
42. a. Tangentes horizontales Encuentre ecuaciones para las tangentes horizontales a la curva $y = x^3 - 3x - 2$. Determine también ecuaciones para las rectas que son perpendiculares a estas tangentes en los puntos de tangencia.

b. Pendiente mínima ¿Cuál es la pendiente mínima en la curva? ¿En qué punto de la curva se da dicha pendiente? Encuentre una ecuación para la recta que es perpendicular a la tangente de la curva en este punto.

43. Encuentre las tangentes de la *serpentina de Newton* (cuya gráfica se muestra a continuación) en el origen y en el punto (1, 2).



44. Determine la tangente de la *bruja de Agnesi* (cuya gráfica se muestra a continuación) en el punto (1, 2).



45. Tangente cuadrática a la función identidad La curva $y = ax^2 + bx + c$ pasa por el punto (1, 2), y es tangente a la recta $y = x$ en el origen. Encuentre a, b y c.

46. Funciones cuadráticas con una tangente común Las curvas $y = x^2 + ax + b$ y $y = cx - x^2$ tienen una recta tangente común en el punto (1, 0). Encuentre a, b y c.

47. a. Encuentre una ecuación para la recta que es tangente a la curva $y = x^3 - x$ en el punto $(-1, 0)$.

T **b.** Grafique juntas la curva y la tangente. La tangente interseca la curva en otro punto. Use las funciones *Zoom* y *Trace* de su calculadora graficadora para estimar las coordenadas del punto.

T **c.** Confirme su estimación de las coordenadas del segundo punto de intersección resolviendo, simultáneamente, las ecuaciones de la curva y la tangente. (Puede utilizar para ello la tecla Solver).

48. a. Encuentre una ecuación para la recta que es tangente a la curva $y = x^3 - 6x^2 + 5x$ en el origen.

T **b.** Grafique juntas la curva y la tangente. La tangente interseca la curva en otro punto. Use las funciones *Zoom* y *Trace* de su calculadora graficadora para estimar las coordenadas del punto.

T **c.** Confirme su estimación de las coordenadas del segundo punto de intersección resolviendo, simultáneamente, las ecuaciones de la curva y la tangente. (Utilice para ello la tecla *Solver*).

Teoría y ejemplos

49. La función polinomial general de grado n tiene la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

donde $a_n \neq 0$. Encuentre $P'(x)$.

50. La reacción del cuerpo a un medicamento En ocasiones, la reacción del cuerpo a una dosis de medicamento puede representarse mediante una ecuación de la forma

$$R = M^2\left(\frac{C}{2} - \frac{M}{3}\right),$$

donde C es una constante positiva y M es la cantidad de medicamento absorbida en la sangre. Si la reacción es un cambio en la presión de la sangre, R se mide en milímetros de mercurio. Si la reacción es un cambio en la temperatura, R se mide en grados, y así sucesivamente.

Encuentre dR/dM. Esta derivada, como una función de M, se denomina sensibilidad del cuerpo al medicamento. En la sección 4.5 veremos cómo determinar la cantidad de medicamento a la que el cuerpo es más sensible.

51. Suponga que la función v en la regla del producto tiene un valor constante c. ¿Qué dice la regla del producto en ese caso? ¿Qué dice de esto la regla del múltiplo constante?

52. La regla de la función recíproca

a. La *regla de la función recíproca* afirma que en cualquier punto donde la función $v(x)$ es diferenciable y distinta de cero,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{v}\right) = -\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}.$$

Demuestre que la regla de la función recíproca es un caso especial de la regla del cociente.

b. Pruebe que juntas, la regla de la función recíproca y la del producto, implican la regla del cociente.

53. Generalización de la regla del producto La regla del producto da lugar a la fórmula

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

para la derivada del producto uv de dos funciones diferenciables de x.

a. ¿Cuál es la fórmula análoga para la derivada del producto uvw de tres funciones diferenciables de x?

b. ¿Cuál es la fórmula para la derivada del producto $u_1u_2u_3u_4$ de *cuatro* funciones diferenciables de x?

c. ¿Cuál es la fórmula para la derivada de un producto $u_1, u_2, u_3 \ldots u_n$ de un número n de funciones diferenciables de x?

54. Potencias racionales

a. Encuentre $\frac{d}{dx}\left(x^{3/2}\right)$ escribiendo $x^{3/2}$ como $x \cdot x^{1/2}$ y usando la regla del producto. Exprese la respuesta como un número racional elevado a una potencia racional de x. Trabaje los incisos (b) y (c) de manera similar.

b. Encuentre $\frac{d}{dx}(x^{5/2})$.

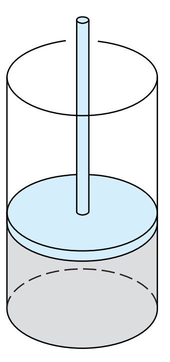
c. Encuentre $\frac{d}{dx}(x^{7/2})$.

d. ¿Qué patrones puede identificar en las respuestas que dio a los incisos (a), (b) y (c)? Las potencias racionales son uno de los temas que estudiaremos en la sección 3.6.

55. Presión en un cilindro Si un gas en un cilindro se mantiene a temperatura constante T, la presión P se relaciona con el volumen V mediante la fórmula

$$P = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{an^2}{V^2},$$

en donde a, b, n y R son constantes. Encuentre dP/dV. (Vea la figura siguiente).



56. Resurtido de inventarios Una de las fórmulas para el manejo de inventarios afirma que el promedio semanal del costo de encargo, pago y manejo de mercancías es

$$A(q) = \frac{km}{q} + cm + \frac{hq}{2},$$

donde q es la cantidad que se ordena al proveedor cuando quedan pocos productos (zapatos, radios, escobas, o cualquiera otro); k es el costo que implica hacer el pedido (es un costo fijo, sin importar qué tan frecuentemente se hacen pedidos); c es el costo de un artículo (una constante); m es el número de artículos vendidos cada semana (una constante); y h es el costo de manejo semanal por artículo (una constante que toma en cuenta factores como el espacio de almacenamiento, las utilidades, el pago de seguros, y vigilancia del almacén). Encuentre dA/dq y d^2A/dq^2.

3.3 La derivada como razón de cambio

En la sección 2.1 iniciamos el estudio de las razones de cambio promedio e instantánea. En esta sección continuaremos nuestro estudio, analizando aplicaciones en donde se usan las derivadas para modelar las razones a las que cambian las cosas en nuestro mundo. Hablaremos nuevamente del movimiento a lo largo de una recta, y examinaremos otras aplicaciones.

Es natural considerar que el cambio es aquel que se da con respecto al tiempo, pero también otras variables pueden estar involucradas. Por ejemplo, es posible que un médico quiera saber cómo se ve afectado el organismo al cambiar la dosis de un medicamento. Un economista podría estar interesado en estudiar cómo el costo de producción de acero varía con el número de toneladas producidas.

Razones de cambio instantáneas

Si interpretamos el cociente de diferencias $(f(x + h) - f(x))/h$ como la razón de cambio promedio de f a lo largo del intervalo de x a $x + h$, podemos interpretar límite cuando $h \longrightarrow 0$ es la razón a la que f está cambiando en el punto x.

DEFINICIÓN Razón de cambio instantánea

La **razón de cambio instantánea** de f con respecto a x en x_0 es la derivada

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

siempre y cuando el límite exista.

Por lo tanto, las razones de cambio instantáneas son límites de las razones de cambio promedio.

Se acostumbra usar la palabra *instantánea* aun cuando x no represente el tiempo. Sin embargo, tal término frecuentemente se omite. Cuando decimos *razón de cambio*, queremos decir *razón de cambio instantánea.*

EJEMPLO 1 Cómo cambia el área de un círculo según su diámetro

El área A de un círculo se relaciona con su diámetro mediante la ecuación

$$A = \frac{\pi}{4} D^2.$$

¿Qué tan rápido cambia el área con respecto al diámetro cuando éste mide 10 m?

Solución La razón de cambio del área con respecto al diámetro es

$$\frac{dA}{dD} = \frac{\pi}{4} \cdot 2D = \frac{\pi D}{2}.$$

Cuando $D = 10$ m, el área está cambiando a razón de $(\pi/2)10 = 5\pi \text{ m}^2/\text{m}$.

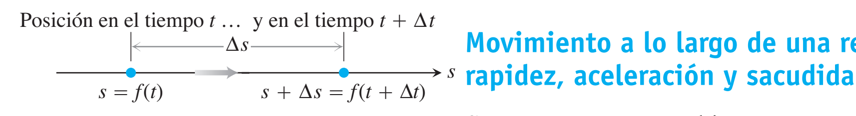


FIGURA 3.12 Las posiciones de un cuerpo que se mueve a lo largo de una recta coordenada en el tiempo t, y un tiempo un poco posterior $t + \Delta t$.

Movimiento a lo largo de una recta: desplazamiento, velocidad, rapidez, aceleración y sacudida

Supongamos que un objeto se mueve a lo largo de una recta coordenada (digamos un eje s), de manera que conocemos su posición s en esa recta como una función del tiempo t:

$$s = f(t).$$

El **desplazamiento** del objeto en el intervalo de tiempo que va de $t + \Delta t$ (figura 3.12) es

$$\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t),$$

y la **velocidad promedio** del objeto en ese intervalo de tiempo es

$$v_{av} = \frac{\text{desplazamiento}}{\text{tiempo de recorrido}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Para encontrar la velocidad del cuerpo en el instante exacto t, tomamos el límite de la velocidad promedio en el intervalo que va de t a $t + \Delta t$ cuando Δt tiende a cero. Este límite es la derivada de f con respecto a t.

DEFINICIÓN Velocidad

La **velocidad (velocidad instantánea)** es la derivada de la función de posición con respecto al tiempo. Si la posición de un cuerpo en el tiempo t es $s = f(t)$, entonces la velocidad del cuerpo en el tiempo t es

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

EJEMPLO 2 Determinar la velocidad de un auto de carreras

La figura 3.13 muestra la gráfica tiempo-distancia de un auto de carreras Riley & Scott Mk III–Olds WSC modelo 1996. La pendiente de la secante PQ es la velocidad promedio en el intervalo de 3 segundos que va de $t = 2$ a $t = 5$ seg; en este caso, es más o menos de 100 pies/seg, o 68 millas/h.

La pendiente de la tangente en P es la lectura del velocímetro en $t = 2$ seg, que es aproximadamente 57 pies/seg o 39 millas/h. La aceleración en el periodo en cuestión es una constante de casi 28.5 pies/seg^2 durante cada segundo, es decir, más o menos

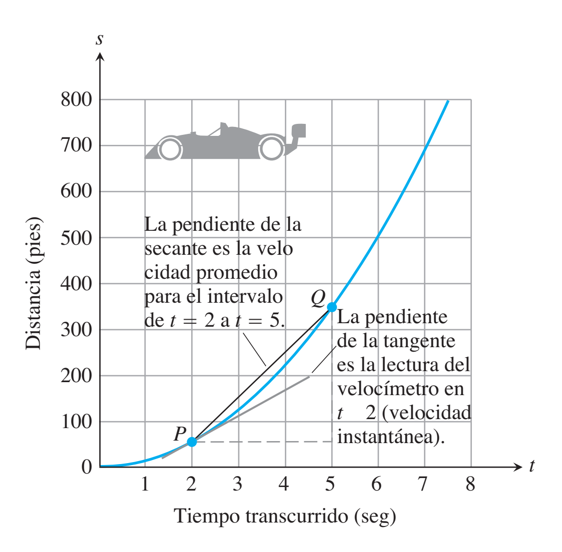


FIGURA 3.13 La gráfica tiempo-distancia para el ejemplo 2. La pendiente de la recta tangente en P es la velocidad instantánea en $t = 2$ seg.

0.89g, donde g es la aceleración debida a la gravedad. Se estima que la velocidad tope del auto de carreras es de 190 millas/h. (*Fuente: Road and Track,* marzo de 1997.) ■

Además de decirnos qué tan rápido se mueve el objeto en movimiento, la velocidad nos indica la dirección del movimiento. Cuando el objeto se mueve hacia delante (s creciente), la velocidad es positiva; cuando el cuerpo se mueve hacia atrás (s decreciente), la velocidad es negativa (figura 3.14).

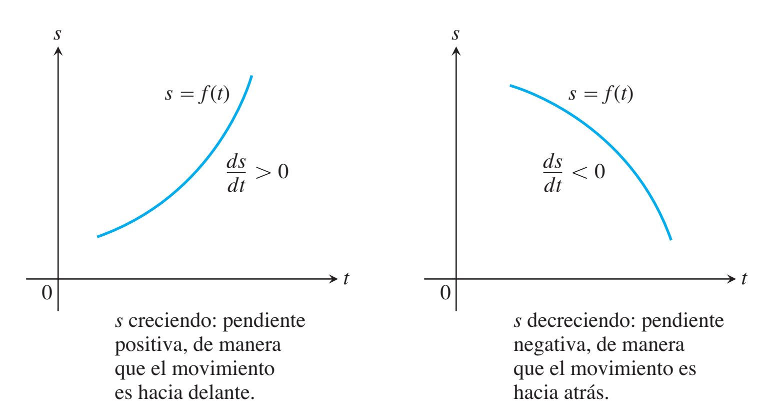


FIGURA 3.14 Para el movimiento $s = f(t)$ a lo largo de una recta, $v = ds/dt$ es positiva cuando s crece, y negativa cuando s decrece.

Si utilizamos un automóvil para ir y volver de casa de un amigo a 30 millas/h, el velocímetro mostrará 30 en el camino de ida, pero no mostrará –30 en el camino de regreso, a pesar de que la distancia respecto de nuestro punto de partida está decreciendo. El velocímetro siempre muestra la *rapidez*, que es el valor absoluto de la velocidad. La rapidez mide la razón de avance sin importar la dirección.

DEFINICIÓN Rapidez

La **rapidez** es el valor absoluto de la velocidad.

$$\text{Rapidez} = |v(t)| = \left|\frac{ds}{dt}\right|$$

EJEMPLO 3 Movimiento horizontal

La figura 3.15 muestra la velocidad $v = f'(t)$ de una partícula que se mueve sobre una recta coordenada. La partícula se mueve hacia delante en los primeros 3 segundos, hacia atrás en los siguientes 2 segundos, se detiene durante un segundo, y se mueve nuevamente hacia delante. La partícula alcanza su rapidez máxima en el tiempo $t = 4$, que se da mientras se mueve hacia atrás. ■

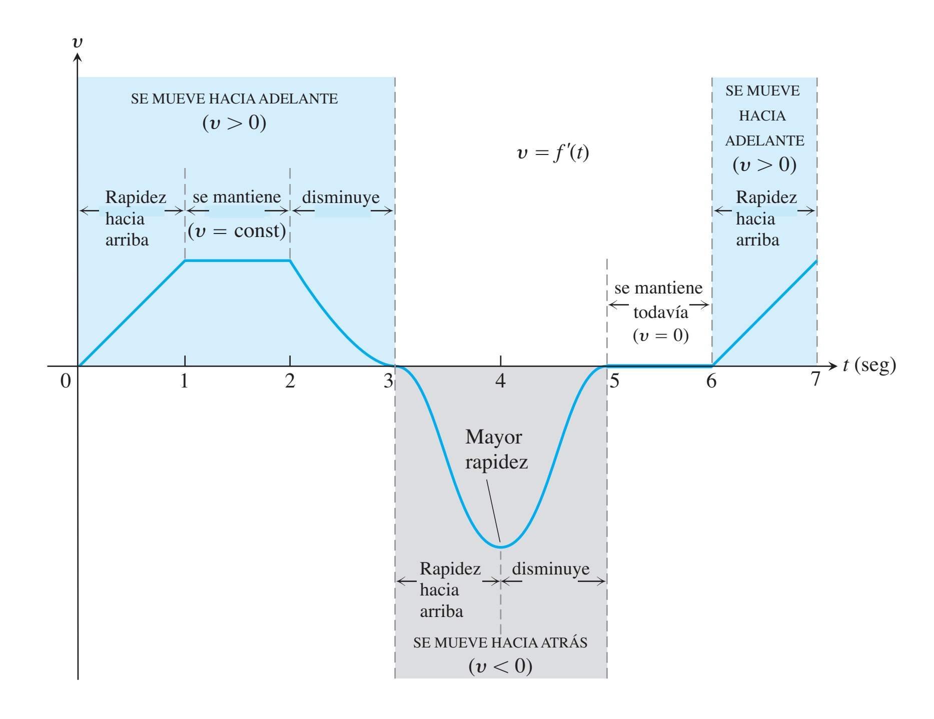


FIGURA 3.15 La gráfica de la velocidad para el ejemplo 3.

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

Bernard Bolzano
(1781–1848)

La razón a la que cambia la velocidad de un cuerpo es su *aceleración*. La aceleración mide qué tan rápido gana o pierde rapidez el cuerpo.

Un cambio repentino en la aceleración es una *sacudida*. Las sacudidas que se dan durante un paseo en coche o en autobús no se deben a que la aceleración involucrada sea necesariamente grande, sino a que el cambio en la aceleración es abrupto.

DEFINICIÓN Aceleración, sacudida

La **aceleración** es la derivada de la velocidad con respecto al tiempo. Si la posición de un cuerpo en el tiempo t es $s = f(t)$, entonces su aceleración en el tiempo t es

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

La **sacudida** es la derivada de la aceleración con respecto al tiempo:

$$j(t) = \frac{da}{dt} = \frac{d^3s}{dt^3}.$$

Cerca de la superficie de la Tierra, todos los cuerpos caen con la misma aceleración constante. Los experimentos de caída libre realizados por Galileo (ejemplo 1, sección 2.1,) nos llevan a la ecuación

$$s = \frac{1}{2}gt^2,$$

donde s es la distancia y g es la aceleración debida a la gravedad terrestre. Esta ecuación se satisface en el vacío, donde no hay resistencia del aire, y representa bastante bien la caída de objetos densos y pesados —como rocas o herramientas de acero— durante los primeros segundos de su caída, antes que la resistencia del aire los empiece a frenar.

El valor de g en la ecuación $s = (1/2)gt^2$ depende de las unidades usadas para medir t y s. Con t en segundos (la unidad usual), el valor de g es aproximadamente 32 pies/seg^2 (pies por segundo cuadrado) en unidades inglesas, y $g = 9.8$ m/seg^2 (metros por segundo cuadrado) en unidades métricas. (Estas constantes gravitacionales dependen de la distancia al centro de masa de la Tierra; por ejemplo, son ligeramente menores en la cima del monte Everest).

La sacudida de la aceleración constante de la gravedad ($g = 32$ pies/seg^2) es cero:

$$j = \frac{d}{dt}(g) = 0.$$

Un objeto no experimenta sacudidas durante la caída libre.

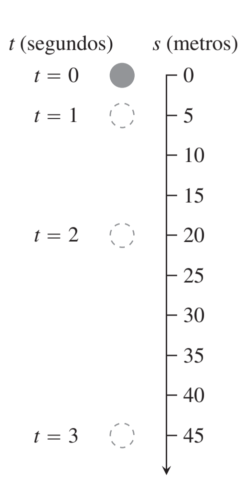


FIGURA 3.16 Comportamiento de una pelota que cae desde el reposo (ejemplo 4).

EJEMPLO 4 Modelado de la caída libre

La figura 3.16 muestra la caída libre de una bola pesada, soltada desde el reposo en el tiempo $t = 0$ seg.

(a) ¿Cuántos metros cae la bola en los primeros 2 seg?

(b) ¿Cuáles son su velocidad, su rapidez y su aceleración en ese instante?

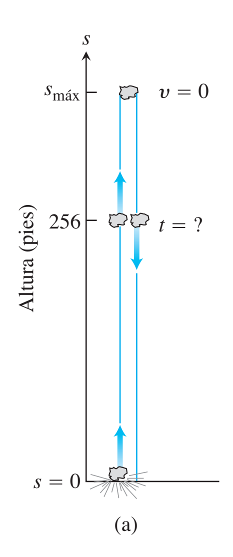
Solución

(a) La ecuación métrica de caída libre es $s = 4.9t^2$. Durante los primeros 2 seg, la bola cae

$$s(2) = 4.9(2)^2 = 19.6 \text{ m}.$$

(b) En cualquier tiempo t, la *velocidad* es la derivada de la posición:

$$v(t) = s'(t) = \frac{d}{dt}(4.9t^2) = 9.8t.$$



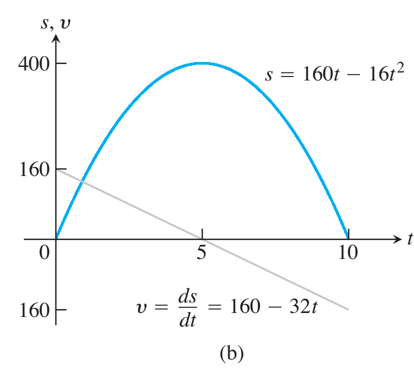


FIGURA 3.17 La roca del ejemplo 5. (b) Las gráficas de s y v como funciones del tiempo; s es más grande cuando $v = ds/dt = 0$. La gráfica de s *no* es la trayectoria de la roca, sino la gráfica de la altura contra el tiempo. La pendiente de la gráfica es la velocidad de la roca, dibujada aquí como una recta.

En $t = 2$, la velocidad es

$$v(2) = 19.6 \text{ m/seg}$$

en la dirección de descenso (s está creciendo). La *rapidez* en $t = 2$ es

$$\text{Rapidez} = |v(2)| = 19.6 \text{ m/seg}.$$

La *aceleración* en cualquier tiempo t es

$$a(t) = v'(t) = s''(t) = 9.8 \text{ m/seg}^2.$$

En $t = 2$, la aceleración es 9.8 m/seg^2. ■

EJEMPLO 5 Modelado del movimiento vertical

Una explosión de dinamita lanza una roca pesada directamente hacia arriba, con una velocidad de 160 pies/seg (alrededor de 109 millas/h) (figura 3.17a). La roca alcanza una altura de $s = 160t - 16t^2$ pies después de t segundos.

(a) ¿Qué altura alcanza la roca?

(b) ¿Cuáles son la velocidad y la rapidez de la roca cuando está a 256 pies del suelo durante el ascenso?, ¿durante el descenso?

(c) ¿Cuál es la aceleración de la roca en cualquier tiempo t durante el vuelo (después de la explosión)?

(d) ¿Cuándo choca la roca nuevamente contra el suelo?

Solución

(a) En el sistema coordenado que hemos elegido, s mide la altura desde el suelo, de manera que la velocidad es positiva en el trayecto hacia arriba y negativa en el camino hacia abajo. Cuando la roca está en su punto más alto, es el instante del vuelo en el que la velocidad es 0. Para encontrar la altura máxima, todo lo que tenemos que hacer es determinar en qué momento $v = 0$ y evaluar s en ese tiempo.

En cualquier tiempo t, la velocidad es

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(160t - 16t^2) = 160 - 32t \text{ pies/seg}.$$

La velocidad es cero cuando

$$160 - 32t = 0 \qquad \text{o} \qquad t = 5 \text{ seg}.$$

La altura de la roca en $t = 5$ seg es

$$s_{máx} = s(5) = 160(5) - 16(5)^2 = 800 - 400 = 400 \text{ pies}.$$

Vea la figura 3.17b.

(b) Para encontrar la velocidad de la roca a 256 pies en el camino de subida y otra vez en el camino de bajada, primero determinamos los dos valores de t para los que

$$s(t) = 160t - 16t^2 = 256.$$

Para resolver esta ecuación, escribimos

$$\begin{aligned} 16t^2 - 160t + 256 &= 0 \\ 16(t^2 - 10t + 16) &= 0 \\ (t - 2)(t - 8) &= 0 \\ t = 2 \text{ seg}, \; t &= 8 \text{ seg}. \end{aligned}$$

FIGURA 3.18 Producción semanal de acero; $c(x)$ es el costo de producir x toneladas por semana. El costo de producir h toneladas adicionales es $c(x + h) - c(x)$.

La roca está a 256 pies sobre el suelo 2 segundos después de la explosión, y una vez más 8 segundos después de la misma. Las velocidades de la roca en esos tiempos son

$$\upsilon(2) = 160 - 32(2) = 160 - 64 = 96 \text{ pies/seg.}$$

$$\upsilon(8) = 160 - 32(8) = 160 - 256 = -96 \text{ pies/seg}.$$

En ambos tiempos la rapidez de la roca es igual a 96 pies/seg. Como $\upsilon(2) > 0$, la roca se mueve hacia arriba (s está decreciendo) en $t = 2$ seg; en $t = 8$ se mueve hacia abajo, ya que $\upsilon(8) < 0$.

(c) En cualquier tiempo durante el vuelo que sigue a la explosión, la aceleración de la roca es una constante

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d}{dt}(160 - 32t) = -32 \text{ pies/seg}^2.$$

La aceleración siempre es hacia abajo. Conforme la roca sube se va frenando; cuando cae, su rapidez aumenta.

(d) La roca choca contra el suelo en el tiempo positivo t para el que $s = 0$. La ecuación $160t - 16t^2 = 0$ se factoriza en $16t(10 - t) = 0$, de manera que sus soluciones son $t = 0$ y $t = 10$. La explosión ocurrió en $t = 0$ y la roca se lanzó hacia arriba para regresa al suelo 10 segundos después. ■

Derivadas en economía

Los ingenieros usan los términos *velocidad* y *aceleración* para referirse a las derivadas de las funciones que describen movimiento. Los economistas también tienen un término especial para denominar las razones de cambio y las derivadas: los llaman *marginales*.

En una operación de manufactura, el *costo de producción* $c(x)$ es una función de x, el número de unidades producidas. El **costo marginal de producción** es la razón de cambio del costo con respecto al nivel de producción, de manera que es dc/dx.

Supongamos que $c(x)$ representa la cantidad de dinero necesaria para producir x toneladas de acero en una semana. Producir $x + h$ unidades por semana cuesta más, y la diferencia entre los costos, dividida entre h, es el incremento promedio en costo de producir cada tonelada por semana:

$$\frac{c(x + h) - c(x)}{h} = \begin{array}{l}\text{incremento promedio en el costo por tonelada por semana}\\ \text{para producir las siguientes } h \text{ toneladas de acero.}\end{array}$$

El límite de esta razón cuando $h \to 0$ es el *costo marginal* de producir más acero por semana cuando el nivel producción semanal es de x toneladas (figura 3.18).

$$\frac{dc}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{c(x + h) - c(x)}{h} = \text{costo marginal de producción.}$$

Algunas veces el costo marginal de producción ha sido definido, a grandes rasgos, como el costo extra de producir una unidad:

$$\frac{\Delta c}{\Delta x} = \frac{c(x + 1) - c(x)}{1},$$

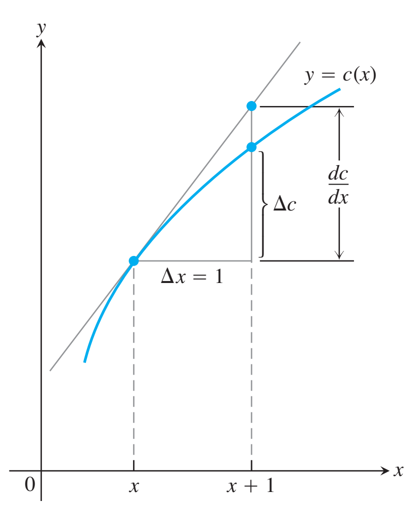


FIGURA 3.19 El costo marginal dc/dx es aproximadamente el costo extra Δc de producir $\Delta x = 1$ unidad más.

que es aproximado mediante el valor de dc/dx en x. Esta aproximación es aceptable si la pendiente de la gráfica en c no cambia rápidamente cerca de x. Entonces, el cociente de diferencias está cerca de su límite dc/dx, que es la elevación de la recta tangente si $\Delta x = 1$ (figura 3.19). La aproximación funciona mejor para valores grandes de x.

Los economistas suelen representar la función de costo total mediante un polinomio cúbico

$$c(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$$

donde δ representa *los costos fijos*, como el alquiler, la calefacción, la capitalización del equipo y los costos de administración. Los demás términos representan *costos variables*, tales como el costo de las materias primas, los impuestos y la mano de obra. Los costos fijos son independientes del número de unidades producidas, mientras que los variables dependen de la cantidad producida. Por lo general, un polinomio cúbico es suficientemente complicado para modelar el comportamiento del costo en un intervalo relevante.

EJEMPLO 6 Costo marginal e ingreso marginal

Supongamos que cuesta

$$c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$$

dólares producir x radiadores cuando la producción es de 8 a 30 unidades, y que

$$r(x) = x^3 - 3x^2 + 12x$$

nos da el ingreso, en dólares, que se genera al vender x radiadores. En un taller de su propiedad usualmente se producen 10 radiadores al día. ¿Aproximadamente cuánto más costará producir un radiador adicional cada día y, de acuerdo con su estimación, en cuánto se incrementa el ingreso al vender 11 radiadores al día?

Solución El costo de producir un radiador más cada día cuando la producción actual es de 10 es, aproximadamente, $c'(10)$:

$$c'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^3 - 6x^2 + 15x\right) = 3x^2 - 12x + 15$$

$$c'(10) = 3(100) - 12(10) + 15 = 195.$$

El costo adicional será más o menos de \$195. El ingreso marginal es

$$r'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^3 - 3x^2 + 12x\right) = 3x^2 - 6x + 12.$$

La función ingreso marginal estima el crecimiento del ingreso que resultará de vender una unidad adicional. Si generalmente vendemos 10 radiadores al día, cabe esperar que nuestro ingreso crecerá aproximadamente a

$$r'(10) = 3(100) - 6(10) + 12 = \$252$$

si aumentamos las ventas a 11 radiadores diarios. ■

EJEMPLO 7 Tasa marginal de impuesto

Para entender mejor el lenguaje de las razones marginales, consideremos las tasas marginales de los impuestos. Si la tasa de impuesto marginal sobre el ingreso de un individuo es 28% y su ingreso se incrementa \$1000, es fácil imaginar que pagará \$280 de impuesto adicional al fisco. Esto no significa que deberá pagar de impuesto el 28% de su ingreso total, sino que, en su nivel de ingresos actual, I, la razón del aumento de impuestos T con respecto al ingreso es $dT/dI = 0.28$. La persona en cuestión pagará \$0.28 más de impuestos por cada unidad monetaria adicional que gane. Por supuesto, si sus ingresos se elevan mucho, podría caer en un rango de contribución más alto, lo cual ocasionaría que su tasa marginal se elevara. ■

Sensibilidad al cambio

Cuando un cambio pequeño en x da lugar a un gran cambio en el valor de una función $f(x)$ decimos que la función es relativamente **sensible** al cambio en x. La derivada $f'(x)$ es una medida de esa sensibilidad.

EJEMPLO 8 Datos genéticos y sensibilidad al cambio

Al trabajar en su jardín con chícharos y otras plantas, el monje austriaco Gregor Johann Mendel (1822–1884) dio la primera explicación científica de hibridación.

Sus cuidadosos registros mostraron que si p (un número entre 0 y 1) es la frecuencia del gen (dominante) de los chícharos que determina que tengan la cáscara lisa, y $(1-p)$ es la frecuencia del gen que determina que tengan la cáscara rugosa, entonces la proporción de chícharos con cáscara lisa en la siguiente generación será de

$$y = 2p(1 - p) + p^2 = 2p - p^2.$$

La gráfica de y contra p que se muestra en la figura 3.20a sugiere que el valor de y es más sensible a un cambio en p cuando p es pequeña que cuando es grande. Este hecho aparece en la gráfica de la derivada en la figura 3.20b, que muestra que dy/dp está cerca de 2 cuando p está cerca de 0, y cerca de 0 cuando p está cerca de 1.

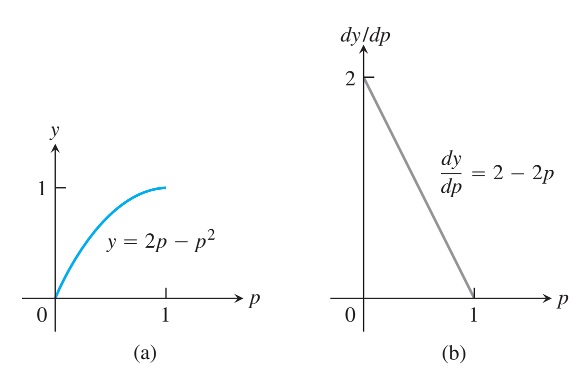


FIGURA 3.20 La gráfica de $y = 2p - p^2$, describe la porción de chícharos de cáscara lisa. (b) La gráfica de dy/dp (ejemplo 8).

Desde el punto de vista de la genética, esto implica que, introducir unos cuantos genes dominantes más en una población altamente recesiva (donde la frecuencia de chícharos con cáscara rugosa sea pequeña, por ejemplo), tendrá efectos más importantes en generaciones posteriores que los que tendría un incremento similar en poblaciones altamente dominantes. ■

EJERCICIOS 3.3

Movimiento a lo largo de una recta coordenada

En los ejercicios 1 a 6, se dan las posiciones $s = f(t)$ de un cuerpo que se mueve en una recta coordenada, tomando s en metros y t en segundos.

a. Encuentre el desplazamiento del cuerpo y la velocidad promedio para el intervalo de tiempo dado.

b. Determine la rapidez y la aceleración del cuerpo en los extremos del intervalo.

c. ¿En qué momento durante el intervalo, si es que esto pasa, cambiará la dirección del cuerpo?

1. $s = t^2 - 3t + 2, \quad 0 \le t \le 2$

2. $s = 6t - t^2, \quad 0 \le t \le 6$

3. $s = -t^3 + 3t^2 - 3t, \quad 0 \le t \le 3$

4. $s = (t^4/4) - t^3 + t^2, \quad 0 \le t \le 3$

5. $s = \dfrac{25}{t^2} - \dfrac{5}{t}, \quad 1 \le t \le 5$

6. $s = \dfrac{25}{t+5}, \quad -4 \le t \le 0$

7. Movimiento de una partícula En el tiempo t la posición de un cuerpo que se mueve a lo largo del eje s es $s = t^3 - 6t^2 + 9t$ m.

a. Determine la aceleración del cuerpo cada vez que la velocidad es cero.

b. Encuentre la rapidez del cuerpo cada vez que la aceleración es cero.

c. Encuentre la distancia total recorrida por el cuerpo entre $t = 0$ y $t = 2$.

8. Movimiento de una partícula En el tiempo $t \ge 0$, la velocidad de un cuerpo que se mueve a lo largo del eje s es $v = t^2 - 4t + 3$.

a. Encuentre la aceleración del cuerpo cada vez que la velocidad es cero.

b. ¿En qué momento el cuerpo se está moviendo hacia delante? ¿En qué momento lo hace hacia atrás?

c. ¿En qué momento aumenta la velocidad del cuerpo? ¿En qué momento disminuye?

Aplicaciones de caída libre

9. Caída libre en Marte y en Júpiter Las ecuaciones de caída libre (s en metros, t en segundos) son $s = 1.86t^2$ en la superficie de Marte, y $s = 11.44t^2$ en la superficie de Júpiter. ¿Cuánto tiempo tardará una roca que cae desde el reposo en alcanzar una velocidad de 27.8 m/seg (alrededor de 100 km/h) en cada planeta?

10. Movimiento de un proyectil lunar Una roca se lanza verticalmente hacia arriba desde la superficie lunar, a una velocidad de 24 m/seg (alrededor de 86 km/h); el proyectil alcanza una altura de $s = 24t - 0.8t^2$ metros en t segundos.

a. Encuentre la velocidad y la aceleración de la roca en el tiempo t. (En este caso, la aceleración es la de la gravedad en la Luna).

b. ¿Cuánto tarda la roca en alcanzar el punto más alto?

c. ¿Qué altura alcanza?

d. ¿Cuánto tarda la roca en alcanzar la mitad de la altura máxima?

e. ¿Cuánto tiempo está la roca en el aire?

11. Encuentre g en un pequeño planeta sin atmósfera En un planeta sin atmósfera, unos exploradores usaron una pistola de resorte para lanzar verticalmente hacia arriba una pelota desde la superficie, con una velocidad de lanzamiento de 15 m/seg. Debido a que la aceleración de la gravedad en la superficie del planeta era g_s m/seg^2, los exploradores esperaban que la pelota alcanzara una altura de $s = 15t - (1/2)g_s t^2$ metros t segundos después. La pelota alcanzó su máxima altura 20 segundos después del lanzamiento. ¿Cuál es el valor de g_s?

12. Bala rápida Una bala calibre 45 disparada hacia arriba desde la superficie lunar, alcanzaría una altura de $s = 832t - 2.6t^2$ pies después de t segundos. En la Tierra, en ausencia de aire, su altura sería de $s = 832t - 16t^2$ pies después de t segundos. ¿Cuánto tiempo estaría la bala en el aire en cada caso? ¿Qué altura máxima alcanzaría la bala en cada caso?

13. Caída libre desde la torre de Pisa Si Galileo hubiera dejado caer una bala de cañón desde la torre de Pisa, a 179 pies sobre el nivel del piso, la altura de la bala a t segundos de la caída habría sido $s = 179 - 16t^2$.

a. ¿Cuáles habrían sido la velocidad, la rapidez y la aceleración de la bala en el tiempo t?

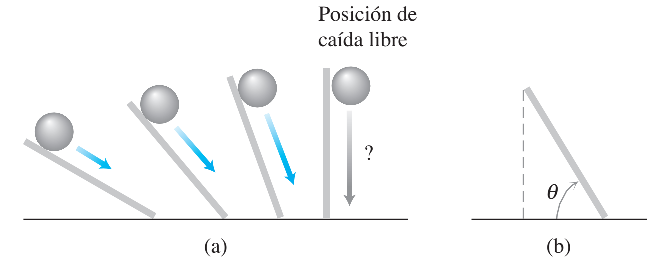
b. ¿Cuánto habría tardado la bala en llegar al suelo?

c. ¿Cuál habría sido la velocidad de la bala en el momento del impacto?

14. La fórmula de la caída libre de Galileo. Galileo desarrolló una fórmula para determinar la velocidad de un cuerpo durante la caída libre, rodando hacia abajo pelotas, desde el reposo, por un tablón inclinado, y buscando una fórmula límite que pronosticara el comportamiento de las mismas cuando el tablón estuviera en posición vertical y aquellas cayeran libremente; vea la parte (a) de la figura siguiente. Galileo descubrió que, para cualquier ángulo dado del tablón, la velocidad de la pelota durante t segundos de movimiento era un múltiplo constante de t. Esto es, la velocidad estaba dada por una fórmula de la forma $v = kt$. El valor de la constante k dependía de la inclinación del tablón.

En notación moderna, parte (b) de la figura, con la distancia en metros y el tiempo en segundos, lo que Galileo determinó experimentalmente fue que, para cualquier ángulo dado θ, la velocidad de la pelota, a t segundos de empezar a rodar, era

$$v = 9.8(\operatorname{sen}\theta)t \text{ m/seg}.$$

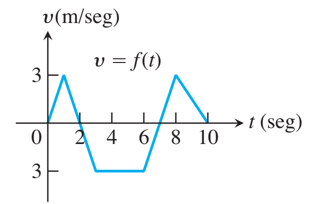


a. ¿Cuál es la ecuación para la velocidad de la pelota en caída libre?

b. A partir del trabajo realizado en el inciso (a), ¿cuál es la aceleración constante que un cuerpo experimenta en caída libre cerca de la superficie de la Tierra?

Conclusiones sobre el movimiento a partir de gráficas

15. La figura siguiente muestra la velocidad $v = ds/dt = f(t)$(m/seg) de un cuerpo moviéndose a lo largo de una recta coordenada



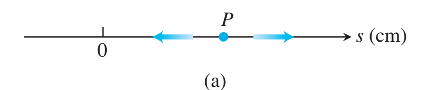
a. ¿Cuándo retrocede el cuerpo?

b. ¿Cuándo (aproximadamente) el cuerpo se está moviendo a velocidad constante?

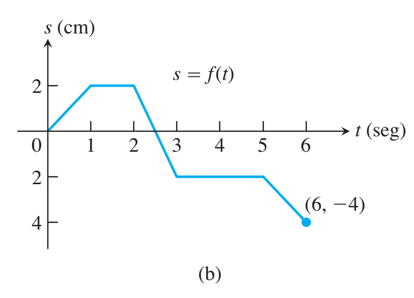
c. Grafique la rapidez del cuerpo para $0 \leq t \leq 10$.

d. Grafique la aceleración, donde esté definida.

16. Una partícula P se mueve sobre la recta numérica que se muestra en la parte (a) de la figura. La parte (b) muestra la posición de P como una función del tiempo t.



(a)



(b)

a. ¿Cuándo se está moviendo P a la izquierda? ¿Cuándo lo hace a la derecha? ¿En qué momento está inmóvil?

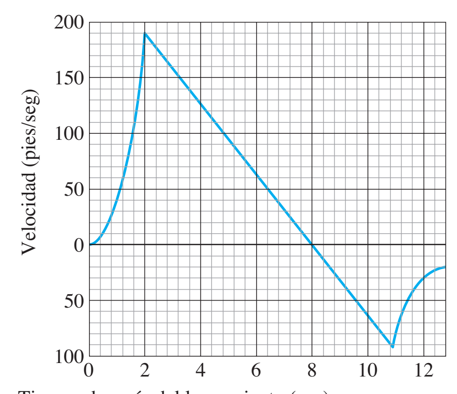
b. Grafique la velocidad y la rapidez de la partícula (donde estén definidas).

17. Lanzamiento de un cohete Cuando se lanza el modelo de un cohete, la carga propulsora se quema durante algunos segundos, acelerando el cohete hacia arriba. Al agotarse el combustible, el cohete sigue subiendo durante algún tiempo y después empieza a caer. En ese momento, una pequeña carga explosiva abre un paracaídas que frena la caída del cohete para evitar que éste se rompa al aterrizar.

La figura muestra los datos de la velocidad del vuelo del cohete. Use los datos para contestar las preguntas siguientes.

a. ¿Qué tan rápido estaba subiendo el cohete cuando el motor se detuvo?

b. ¿Durante cuántos segundos se quemó el combustible?



c. ¿Cuándo alcanzó el cohete el punto más alto? ¿Cuál era su velocidad en ese momento?

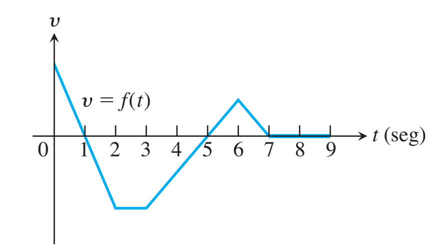
d. ¿Cuándo se abrió el paracaídas? ¿Qué tan rápido caía el cohete en ese momento?

e. ¿Cuánto tiempo cayó el cohete antes de que se abriera el paracaídas?

f. ¿Cuándo alcanzó el cohete la máxima aceleración?

g. ¿En qué momento la aceleración era constante? ¿Cuál era su valor en ese momento (redondee al entero más cercano)?

18. La figura siguiente muestra la velocidad $v = f(t)$ de una partícula que se mueve sobre una recta coordenada.



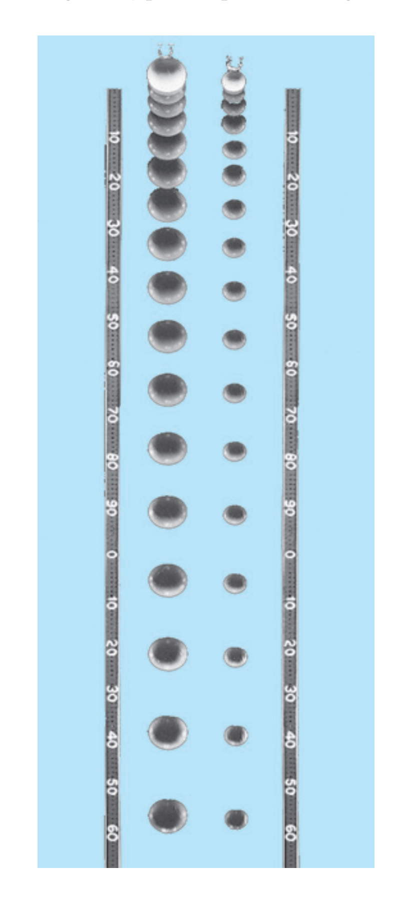
a. ¿Cuándo se mueve la partícula hacia delante? ¿Cuándo lo hace hacia atrás? ¿Cuándo aumenta la velocidad y cuándo la baja?

b. ¿En qué momento la aceleración de la partícula es positiva? ¿En qué momento es negativa? ¿Cuándo es igual a cero?

c. ¿Cuándo se mueve la partícula a su mayor rapidez?

d. ¿En qué momento la partícula queda inmóvil durante más de un instante?

19. Caída de dos pelotas En la siguiente figura se muestra una fotografía con flash múltiple de dos pelotas cayendo desde el reposo. Las reglas verticales están marcadas en centímetros. Use la ecuación $s = 490t^2$ (la ecuación de la caída libre con s en centímetros y t en segundos) para responder las siguientes preguntas.



a. ¿Cuánto tardan las pelotas en caer los primeros 160 cm? ¿Cuál fue su velocidad promedio en ese periodo?

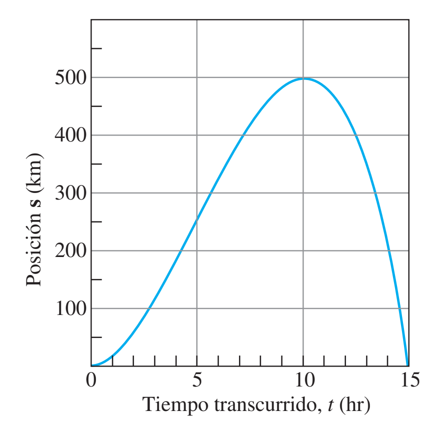
b. ¿Qué tan rápido estaban cayendo las pelotas al alcanzar la marca de 160 cm? ¿Cuál era su aceleración en ese momento?

c. ¿Qué tan rápido se estaba disparando el flash de la cámara (disparos por segundo)?

20. Viaje en autobús La gráfica siguiente muestra la posición s de un autobús que viaja por una carretera. El autobús empezó su trayecto en $t = 0$ y regresó 15 horas después, en $t = 15$.

a. Use la técnica descrita en el ejemplo 3 de la sección 3.1 para graficar la velocidad del autobús $v = ds/dt$ para $0 \leq t \leq 15$. Después repita el procedimiento con la curva de la velocidad, para graficar la aceleración del autobús dv/dt.

b. Suponga que $s = 15t^2 - t^3$. Grafique ds/dt y d^2s/dt^2, y compare sus gráficas con las del inciso (a).



21. Las gráficas de la figura 3.21 muestran la posición s, la velocidad $v = ds/dt$, y la aceleración $a = d^2s/dt^2$ de un cuerpo que se mueve a lo largo de una recta coordenada como funciones del tiempo t. ¿Cuál gráfica es cuál? Justifique sus respuestas.

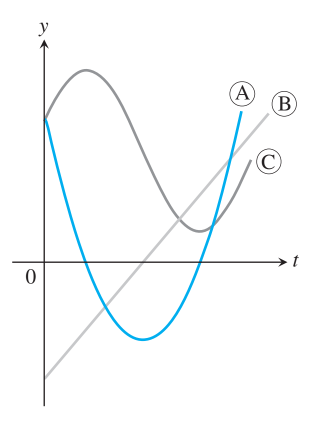


FIGURA 3.21 La gráfica del ejercicio 21.

22. Las gráficas de la figura 3.22 muestran la posición s, la velocidad $v = ds/dt$ y la aceleración $a = d^2s/dt^2$ de un cuerpo que se mueve a lo largo de una recta coordenada como funciones del tiempo t. ¿Cuál gráfica es cuál? Justifique sus respuestas.

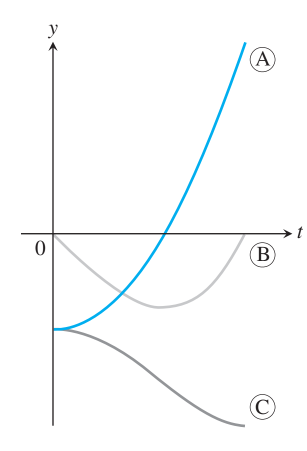


FIGURA 3.22 La gráfica del ejercicio 22.

Economía

23. Costo marginal Suponga que el costo, en dólares, de producir x lavadoras es $c(x) = 2000 + 100x - 0.1x^2$.

a. Encuentre el costo promedio por lavadora en la producción de las primeras 100 unidades.

b. Encuentre el costo marginal cuando se producen 100 unidades.

c. Muestre que el costo marginal cuando se producen 100 lavadoras es aproximadamente igual al costo de producir una lavadora más después de haber producido las 100 primeras, calculando este costo directamente.

24. Ingreso marginal Suponga que el ingreso obtenido al vender x lavadoras es

$$r(x) = 20{,}000\left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

dólares.

a. Determine el ingreso marginal cuando se producen 100 lavadoras.

b. Use la función $r'(x)$ para estimar el incremento en el ingreso como resultado del aumento en la producción, de 100 a 101 lavadoras a la semana.

c. Encuentre el límite de $r'(x)$ cuando $x \to \infty$. ¿Cómo interpreta este número?

Aplicaciones adicionales

25. Población de bacterias Cuando se agregó un bactericida a un cultivo de nutrientes en donde estaban creciendo bacterias, la población de éstas continuó aumentando por algún tiempo, pero después el crecimiento se interrumpió y la población empezó a declinar. El tamaño de la población en el tiempo t (horas) era $b = 10^6 + 10^4t - 10^3t^2$. Encuentre las razones de crecimiento en

a. $t = 0$ horas.

b. $t = 5$ horas.

c. $t = 10$ horas.

26. Drenado de un tanque El número de galones de agua que hay en un tanque t minutos después de que éste empezó a vaciarse es $Q(t) = 200(30 - t)^2$. ¿Qué tan rápido salía el agua al transcurrir 10 min? ¿Cuál es la razón promedio a la que el agua sale durante los primeros 10 min?

T **27. Drenado de un tanque** Para drenar por completo un tanque de almacenamiento se necesitan 12 horas; el fluido del tanque sale al abrir una válvula en su base. La profundidad y del fluido en el tanque t horas después de abrir la válvula está dada por la fórmula

$$y = 6\left(1 - \frac{t}{12}\right)^2 \text{ m}.$$

a. Encuentre la razón $dy/dt(m/h)$ a la que el tanque está drenando en el tiempo t.

b. ¿En qué momento está descendiendo más rápido el nivel del fluido en el tanque? ¿En qué momento lo hace más despacio? ¿Cuáles son los valores de dy/dt en esos tiempos?

c. Grafique juntas y y dy/dt, y discuta el comportamiento de y en relación con los signos y valores de dy/dt.

28. Inflado de un globo El volumen $V = (4/3)\pi r^3$ de un globo esférico cambia de acuerdo con su radio.

a. ¿A qué razón (pie^3/pie) cambia el volumen con respecto al radio cuando $r = 2$ pies?

b. ¿Cuánto crece aproximadamente el volumen cuando el radio cambia de 2 a 2.2 pies?

29. Despegue de un aeroplano Suponga que la distancia recorrida por un aeroplano a lo largo de una pista antes del despegue está dada por $D = (10/9)t^2$, donde D se mide en metros desde el punto de inicio, y t se mide en segundos desde el momento en que se quitan los frenos. El aeroplano despegará en el instante que alcance 200 km/h. ¿Cuánto tiempo tarda en despegar y qué distancia recorrerá en ese tiempo?

30. Brotes de lava volcánica A pesar de que la erupción del volcán hawaiano Kilauea Iki, en noviembre de 1959, empezó con una línea de brotes de lava a lo largo de la pared del cráter, más tarde la actividad se concentró en un solo orificio ubicado en el piso del cráter. En un momento dado, la lava lanzada desde dicho orificio alcanzó una altura de 1900 pies (un récord mundial). ¿Cuál fue la velocidad de salida de la lava en pies por segundo? ¿En millas por hora? (*Sugerencia:* Si v_0 es la velocidad de salida de una partícula de lava, su altura t segundos más tarde será $s = v_0 t - 16t^2$ pies. Empiece por determinar el tiempo en el que $ds/dt = 0$. Desprecie la resistencia del aire).

T En los ejercicios 31 a 34 se da la función de posición $s = f(t)$ de un objeto que se mueve a lo largo del eje s como una función del tiempo t. Grafique f junto con la función velocidad $v(t) = ds/dt = f'(t)$ y la función de aceleración $a(t) = d^2s/dt^2 = f''(t)$. Comente el comportamiento del objeto en relación con los signos y valores de v y a. Incluya en su comentario temas como los siguientes:

a. ¿En qué momento el objeto está momentáneamente en reposo?

b. ¿Cuándo se mueve a la izquierda (abajo) o a la derecha (arriba)?

c. ¿Cuándo cambia de dirección?

d. ¿En qué momento aumenta o disminuye su rapidez?

e. ¿Cuándo se mueve a su máxima velocidad? ¿Cuándo lo hace a la mínima?

f. ¿Cuándo está más lejos del origen?

31. $s = 200t - 16t^2$, $0 \le t \le 12.5$ (un objeto pesado lanzado verticalmente desde la superficie terrestre, a 200 pies/seg)

32. $s = t^2 - 3t + 2$, $0 \le t \le 5$

33. $s = t^3 - 6t^2 + 7t$, $0 \le t \le 4$

34. $s = 4 - 7t + 6t^2 - t^3$, $0 \le t \le 4$

35. Carrera de caballos pura sangre En un hipódromo un caballo de raza pura realiza una competencia de 10 estadios (un estadio equivale a 220 yardas, aunque usaremos en este ejercicio estadios y segundos como unidades). A medida que el caballo pasa cada marca de estadio (F), un juez registra el tiempo transcurrido (t) desde el inicio de la carrera, con los resultados que se muestran en la tabla:

F	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t	0	20	33	46	59	73	86	100	112	124	135

a. ¿Cuánto tarda el caballo en terminar la carrera?

b. ¿Cuál es la rapidez promedio del caballo durante los primeros 5 estadios?

c. ¿Cuál es la rapidez aproximada del caballo cuando pasa por la marca de los 3 estadios?

d. ¿En qué parte de la carrera el caballo corre más rápido?

e. ¿En qué parte de la carrera el caballo acelera más rápido?

3.4 Derivadas de funciones trigonométricas

Muchos de los fenómenos de los que requerimos información muestran un comportamiento más o menos periódico (campos electromagnéticos, ritmos cardiacos, mareas, clima). Las derivadas de senos y cosenos juegan un papel clave en la descripción de cambios periódicos. En esta sección se mostrará cómo derivar las seis funciones trigonométricas básicas.

Derivada de la función seno

Para calcular la derivada de $f(x) = \operatorname{sen} x$, para x medido en radianes, combinamos los límites del ejemplo 5a y del teorema 7 de la sección 2.4, con la identidad para la suma de ángulos:

$$\operatorname{sen}(x + h) = \operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h.$$

Si $f(x) = \operatorname{sen} x$, entonces

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} && \text{Definición de derivada} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(\operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h) - \operatorname{sen} x}{h} && \text{Identidad del seno para la suma de ángulos} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} x (\cos h - 1) + \cos x \operatorname{sen} h}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left(\operatorname{sen} x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} \right) + \lim_{h \to 0} \left(\cos x \cdot \frac{\operatorname{sen} h}{h} \right) \\
&= \operatorname{sen} x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} \\
&= \operatorname{sen} x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 && \text{Ejemplo 5(a) y teorema 7, sección 2.4} \\
&= \cos x.
\end{aligned}
$$

La derivada de la función seno es la función coseno:

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x.$$

EJEMPLO 1 Derivadas que involucran el seno

(a) $y = x^2 - \operatorname{sen} x$:

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= 2x - \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) && \text{Regla de la diferencia} \\
&= 2x - \cos x.
\end{aligned}
$$

(b) $y = x^2 \operatorname{sen} x$:

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= x^2 \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) + 2x \operatorname{sen} x && \text{Regla del producto} \\
&= x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x.
\end{aligned}
$$

(c) $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$:

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{x \cdot \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) - \operatorname{sen} x \cdot 1}{x^2} && \text{Regla del cociente} \\
&= \frac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}.
\end{aligned}
$$

■

Derivada de la función coseno

Con la ayuda de la fórmula de la suma de ángulos para el coseno,

$$\cos(x + h) = \cos x \cos h - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} h,$$

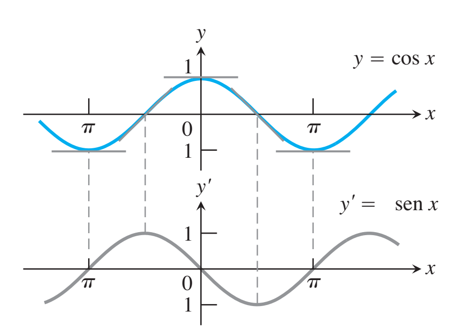


FIGURA 3.23 La curva $y' = -\text{sen}\, x$ como la gráfica de las pendientes de las tangentes a la curva $y = \cos x$.

tenemos

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$

Definición de derivada

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(\cos x\cos h - \text{sen}\, x\,\text{sen}\, h) - \cos x}{h}$$

Identidad de la suma de ángulos para el coseno

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x(\cos h - 1) - \text{sen}\, x\,\text{sen}\, h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\cos x\cdot\frac{\cos h - 1}{h} - \lim_{h\to 0}\text{sen}\, x\cdot\frac{\text{sen}\, h}{h}$$

$$= \cos x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} - \text{sen}\, x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\text{sen}\, h}{h}$$

$$= \cos x\cdot 0 - \text{sen}\, x\cdot 1$$

Ejemplo 5(a) y teorema 7, sección 2.4

$$= -\text{sen}\, x.$$

La derivada de la función coseno es el negativo de la función seno:

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\text{sen}\, x$$

La figura 3.23 muestra una manera de ver este resultado.

EJEMPLO 2 Derivadas que involucran el coseno

(a) $y = 5x + \cos x$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(5x) + \frac{d}{dx}(\cos x)$$

Regla de la suma

$$= 5 - \text{sen}\, x.$$

(b) $y = \text{sen}\, x\cos x$:

$$\frac{dy}{dx} = \text{sen}\, x\frac{d}{dx}(\cos x) + \cos x\frac{d}{dx}(\text{sen}\, x)$$

Regla del producto

$$= \text{sen}\, x(-\text{sen}\, x) + \cos x(\cos x)$$
$$= \cos^2 x - \text{sen}^2 x.$$

(c) $y = \dfrac{\cos x}{1 - \text{sen}\, x}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1 - \text{sen}\, x)\frac{d}{dx}(\cos x) - \cos x\frac{d}{dx}(1 - \text{sen}\, x)}{(1 - \text{sen}\, x)^2}$$

Regla del cociente

$$= \frac{(1 - \text{sen}\, x)(-\text{sen}\, x) - \cos x(0 - \cos x)}{(1 - \text{sen}\, x)^2}$$

$$= \frac{1 - \text{sen}\, x}{(1 - \text{sen}\, x)^2}$$

$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

$$= \frac{1}{1 - \text{sen}\, x}.$$

■

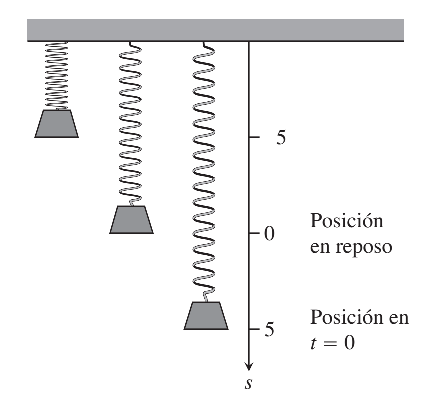


FIGURA 3.24 Un cuerpo que cuelga del extremo de un resorte y después se desplaza, oscila hacia arriba y hacia abajo de la posición de reposo. Su movimiento está descrito por funciones trigonométricas (ejemplo 3).

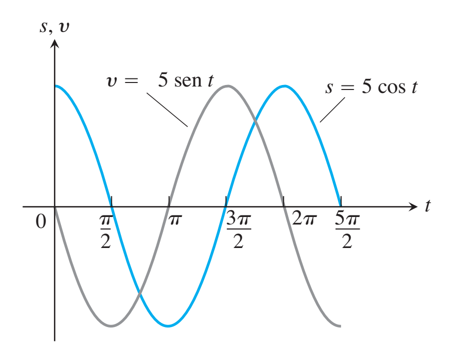


FIGURA 3.25 Las gráficas de la posición y la velocidad del cuerpo del ejemplo 3.

Movimiento armónico simple

El movimiento que describe un objeto bamboleándose libremente hacia arriba y hacia abajo, en el extremo de un resorte o una cuerda elástica, es un ejemplo de *movimiento armónico simple*. El ejemplo siguiente describe un caso en donde no hay fuerzas opuestas como la fricción o la flotación que desaceleren el movimiento.

EJEMPLO 3 Movimiento en un resorte

Un objeto que cuelga de un resorte (figura 3.24) se estira 5 unidades desde su posición de reposo y se suelta en el tiempo $t = 0$ para que se mueva hacia arriba y hacia abajo. Su posición en cualquier tiempo t posterior es

$$s = 5 \cos t.$$

¿Cuáles son su velocidad y su aceleración en el tiempo t?

Solución Tenemos que

Posición: $s = 5 \cos t$

Velocidad: $v = \dfrac{ds}{dt} = \dfrac{d}{dt}(5 \cos t) = -5 \operatorname{sen} t$

Aceleración: $a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d}{dt}(-5 \operatorname{sen} t) = -5 \cos t.$

Observe todo lo que podemos aprender de estas ecuaciones:

1. Conforme pasa el tiempo, el cuerpo se mueve hacia abajo y hacia arriba entre $s = -5$ y $s = 5$ en el eje s. La amplitud del movimiento es 5. El periodo del movimiento es 2π.
2. La velocidad $v = -5 \operatorname{sen} t$ alcanza su mayor magnitud, 5, cuando $\cos t = 0$, como muestran las gráficas de la figura 3.25. Ahora bien, la rapidez del cuerpo, $|v| = 5 |\operatorname{sen} t|$, es mayor cuando $\cos t = 0$, esto es, cuando $s = 0$ (la posición de reposo). La rapidez del cuerpo es cero cuando $\operatorname{sen} t = 0$. Esto ocurre cuando $s = 5 \cos t = \pm 5$, en los extremos del intervalo del movimiento.
3. El valor de la aceleración siempre es exactamente el opuesto del valor de posición. Cuando el cuerpo está arriba de la posición de reposo, la gravedad lo tira hacia abajo. Cuando el cuerpo está debajo de la posición de reposo, el resorte lo jala hacia arriba.
4. La aceleración, $a = -5 \cos t$, es cero solamente en la posición de reposo, donde $\cos t = 0$ y la fuerza de la gravedad y la fuerza del resorte se compensan entre ellas. Cuando el cuerpo está en cualquier otro lado, las dos fuerzas son desiguales y la aceleración no es cero. La aceleración alcanza su máxima magnitud en los puntos más alejados de la posición de reposo, donde $\cos t = \pm 1$. ■

EJEMPLO 4 Sacudida

En el caso del movimiento armónico simple del ejemplo 3, la sacudida es

$$j = \frac{da}{dt} = \frac{d}{dt}(-5 \cos t) = 5 \operatorname{sen} t.$$

La sacudida alcanza su magnitud más grande cuando $\operatorname{sen} t = \pm 1$, no en los extremos del desplazamiento, sino en la posición de reposo, donde la aceleración cambia de dirección y de signo. ■

Derivadas de las demás funciones trigonométricas básicas

Como $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ son funciones diferenciables de x, las funciones relacionadas

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}, \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \text{y} \qquad \csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

son diferenciables en todo valor de x en el que estén definidas. Sus derivadas, calculadas a partir de la regla del cociente, están dadas por las fórmulas siguientes. Observe el signo negativo en las fórmulas de las cofunciones.

Derivadas de las demás funciones trigonométricas

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

Para mostrar los cálculos típicos, obtendremos la derivada de la función tangente. Las demás derivadas se dejan para el ejercicio 50.

EJEMPLO 5

Encontrar $d(\tan x)/dx$.

Solución

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x \dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) - \operatorname{sen} x \dfrac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x} \qquad \text{Regla del cociente}$$

$$= \frac{\cos x \cos x - \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

EJEMPLO 6

Encontrar y'' si $y = \sec x$.

Solución

$$y = \sec x$$

$$y' = \sec x \tan x$$

$$y'' = \frac{d}{dx}(\sec x \tan x)$$

$$= \sec x \frac{d}{dx}(\tan x) + \tan x \frac{d}{dx}(\sec x) \qquad \text{Regla del producto}$$

$$= \sec x(\sec^2 x) + \tan x(\sec x \tan x)$$

$$= \sec^3 x + \sec x \tan^2 x$$

La diferenciabilidad de las funciones trigonométricas en todo su dominio es otra prueba de su continuidad en cualquier punto de su dominio (teorema 1, sección 3.1). De esta manera podemos calcular límites de combinaciones algebraicas y composiciones de funciones trigonométricas por sustitución directa.

EJEMPLO 7 Determinación de un límite trigonométrico

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2 + \sec x}}{\cos(\pi - \tan x)} = \frac{\sqrt{2 + \sec 0}}{\cos(\pi - \tan 0)} = \frac{\sqrt{2+1}}{\cos(\pi - 0)} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$$ ■

EJERCICIOS 3.4

Derivadas

En los ejercicios 1 a 12, encuentre dy/dx.

1. $y = -10x + 3\cos x$
2. $y = \frac{3}{x} + 5 \operatorname{sen} x$
3. $y = \csc x - 4\sqrt{x} + 7$
4. $y = x^2 \cot x - \frac{1}{x^2}$
5. $y = (\sec x + \tan x)(\sec x - \tan x)$
6. $y = (\operatorname{sen} x + \cos x)\sec x$
7. $y = \frac{\cot x}{1 + \cot x}$
8. $y = \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x}$
9. $y = \frac{4}{\cos x} + \frac{1}{\tan x}$
10. $y = \frac{\cos x}{x} + \frac{x}{\cos x}$
11. $y = x^2 \operatorname{sen} x + 2x\cos x - 2\operatorname{sen} x$
12. $y = x^2\cos x - 2x \operatorname{sen} x - 2\cos x$

En los ejercicios 13 a 16, encuentre ds/dt.

13. $s = \tan t - t$
14. $s = t^2 - \sec t + 1$
15. $s = \frac{1 + \csc t}{1 - \csc t}$
16. $s = \frac{\operatorname{sen} t}{1 - \cos t}$

En los ejercicios 17 a 20, determine $dr/d\theta$.

17. $r = 4 - \theta^2 \operatorname{sen}\theta$
18. $r = \theta\operatorname{sen}\theta + \cos\theta$
19. $r = \sec\theta\csc\theta$
20. $r = (1 + \sec\theta)\operatorname{sen}\theta$

En los ejercicios 21 a 24, encuentre dp/dq.

21. $p = 5 + \frac{1}{\cot q}$
22. $p = (1 + \csc q)\cos q$
23. $p = \frac{\operatorname{sen} q + \cos q}{\cos q}$
24. $p = \frac{\tan q}{1 + \tan q}$
25. Determine y'' si
   a. $y = \csc x$.
   b. $y = \sec x$.
26. Determine $y^{(4)} = d^4y/dx^4$ si
   a. $y = -2\operatorname{sen} x$.
   b. $y = 9\cos x$.

Rectas tangentes

En los ejercicios 27 a 30, grafique las curvas en los intervalos dados, junto con sus tangentes en los valores de x dados. Señale cada curva y cada tangente con su ecuación correspondiente.

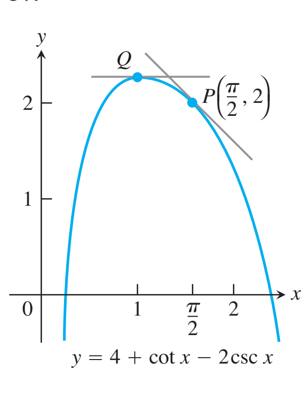
27. $y = \operatorname{sen} x, \quad -3\pi/2 \le x \le 2\pi$
   $x = -\pi, 0, 3\pi/2$
28. $y = \tan x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$
   $x = -\pi/3, 0, \pi/3$
29. $y = \sec x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$
   $x = -\pi/3, \pi/4$
30. $y = 1 + \cos x, \quad -3\pi/2 \le x \le 2\pi$
   $x = -\pi/3, 3\pi/2$

T ¿Las gráficas de las funciones de los ejercicios 31 a 34 tienen alguna tangente horizontal en el intervalo $0 \le x \le 2\pi$? De ser así, ¿en dónde la tienen? Si su respuesta es negativa, explique por qué. Para comprobar visualmente sus hallazgos, grafique las funciones con ayuda de su calculadora graficadora.

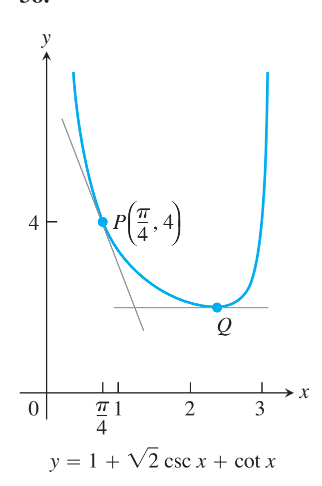
31. $y = x + \operatorname{sen} x$
32. $y = 2x + \operatorname{sen} x$
33. $y = x - \cot x$
34. $y = x + 2\cos x$
35. Encuentre todos los puntos de la curva $y = \tan x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$, donde la recta tangente es paralela a la recta $y = 2x$. Trace juntas la curva y la tangente (o tangentes), señalando cada una con su ecuación correspondiente.
36. Encuentre todos los puntos de la curva $y = \cot x$, $0 < x < \pi$, donde la recta tangente es paralela a la recta $y = -x$. Trace juntas la curva y la tangente (o tangentes), señalando cada una con su ecuación correspondiente.

En los ejercicios 37 y 38, determine una ecuación para **(a)** la tangente a la curva en P, y **(b)** la tangente horizontal a la curva en Q.

37.



38.



Límites trigonométricos

Encuentre los límites en los ejercicios 39 a 44.

39. $\lim_{x \to 2} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)$

40. $\lim_{x \to -\pi/6} \sqrt{1 + \cos(\pi \csc x)}$

41. $\lim_{x \to 0} \sec\left[\cos x + \pi \tan\left(\frac{\pi}{4 \sec x}\right) - 1\right]$

42. $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi + \tan x}{\tan x - 2 \sec x}\right)$

43. $\lim_{t \to 0} \tan\left(1 - \frac{\operatorname{sen} t}{t}\right)$

44. $\lim_{\theta \to 0} \cos\left(\frac{\pi \theta}{\operatorname{sen} \theta}\right)$

Movimiento armónico simple

Las ecuaciones de los ejercicios 45 y 46 dan la posición $s = f(t)$ de un cuerpo que se mueve sobre una recta coordenada (s en metros, t en segundos). Encuentre la velocidad, rapidez, aceleración y sacudida del cuerpo en el tiempo $t = \pi/4$ sec.

45. $s = 2 - 2 \operatorname{sen} t$

46. $s = \operatorname{sen} t + \cos t$

Teoría y ejemplos

47. ¿Hay un valor de c que haga que

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}^2 3x}{x^2}, & x \neq 0 \\ c, & x = 0 \end{cases}$$

sea continua en $x = 0$? Justifique su respuesta.

48. ¿Hay un valor de b que haga que

$$g(x) = \begin{cases} x + b, & x < 0 \\ \cos x, & x \geq 0 \end{cases}$$

sea continua en $x = 0$? ¿Existe alguno que la haga diferenciable en $x = 0$? Justifique sus respuestas.

49. Encuentre $d^{999}/dx^{999}(\cos x)$.

50. Deduzca la fórmula para las derivadas, respecto de x, de

a. $\sec x$. **b.** $\csc x$. **c.** $\cot x$.

T **51.** Grafique $y = \cos x$ para $-\pi \leq x \leq 2\pi$. En la misma pantalla de su calculadora graficadora, grafique

$$y = \frac{\operatorname{sen}(x + h) - \operatorname{sen} x}{h}$$

para $h = 1, 0.5, 0.3$ y 0.1. Después intente hacerlo, en una nueva ventana, para $h = -1, -0.5$ y -0.3. ¿Qué pasa cuando $h \to 0^+$? ¿Qué sucede cuando $h \to 0^-$? ¿Qué fenómeno se ilustra aquí?

T **52.** Grafique $y = -\operatorname{sen} x$ para $-\pi \leq x \leq 2\pi$. En la misma pantalla, grafique

$$y = \frac{\cos(x + h) - \cos x}{h}$$

para $h = 1, 0.5, 0.3$, Después intente hacerlo, en una nueva ventana, para $h = -1, -0.5$ y -0.3. ¿Qué pasa cuando $h \to 0^+$? ¿Qué sucede cuando $h \to 0^-$? ¿Qué fenómeno se ilustra aquí?

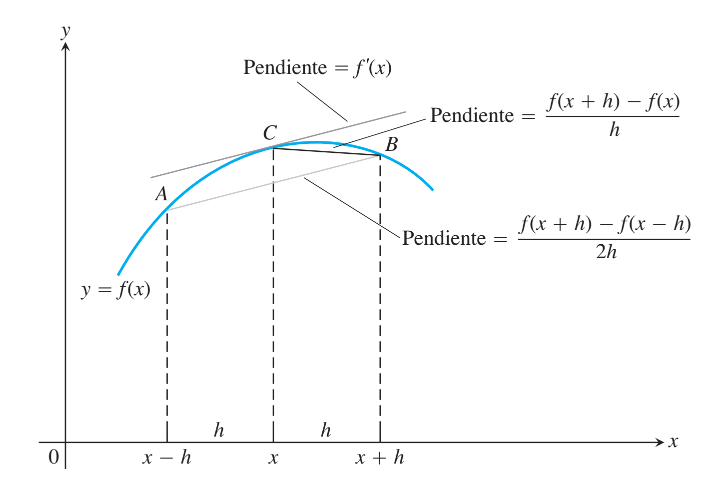
T **53. Cociente de diferencias centradas** El *cociente de diferencias centradas*

$$\frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h}$$

se usa para aproximar $f'(x)$ en cálculo numérico, porque (1) su límite cuando $h \to 0$ es igual a $f'(x)$ si $f'(x)$ existe, y (2) usualmente da una mejor aproximación de $f'(x)$ para un valor dado de h que el cociente de diferencias de Fermat

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

Vea la figura siguiente.



a. Para ver qué tan rápidamente converge el cociente de diferencias centradas de $f(x) = \operatorname{sen} x$ a $f'(x) = \cos x$, grafique $y = \cos x$ junto con

$$y = \frac{\operatorname{sen}(x + h) - \operatorname{sen}(x - h)}{2h}$$

en el intervalo $[-\pi, 2\pi]$ para $h = 1, 0.5$ y 0.3. Compare los resultados con los que obtuvo en el ejercicio 51 para los mismos valores de h.

b. Para ver qué tan rápidamente converge el cociente de diferencias centradas de $f(x) = \cos x$ a $f'(x) = -\operatorname{sen} x$, grafique $y = -\operatorname{sen} x$ junto con

$$y = \frac{\cos(x + h) - \cos(x - h)}{2h}$$

en el intervalo $[-\pi, 2\pi]$ para $h = 1, 0.5$ y 0.3. Compare los resultados con los que obtuvo en el ejercicio 52 para los mismos valores de h.

54. Una advertencia acerca de los cocientes de diferencias centradas (*Continuación del ejercicio 53*). El cociente

$$\frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h}$$

puede tener límite cuando $h \to 0$ aunque f no tenga derivada en x. Como ejemplo de ello, tomamos $f(x) = |x|$ y calculamos

$$\lim_{h \to 0} \frac{|0 + h| - |0 - h|}{2h}.$$

Como verá, el límite existe aun cuando $f(x) = |x|$ no tiene derivada en $x = 0$. *Moraleja:* Antes de usar el cociente de diferencias centradas asegúrese de que la derivada existe.

T **55. Pendientes en la gráfica de la función tangente** Grafique juntas $y = \tan x$ y su derivada en $(-\pi/2, \pi/2)$. ¿La gráfica de la función tangente parece tener una pendiente más pequeña o una más grande? ¿La pendiente es negativa en algún punto? Justifique sus respuestas.

T **56. Pendientes en la gráfica de la función cotangente** Grafique juntas $y = \cot x$ y su derivada para $0 < x < \pi$. ¿La gráfica de la función cotangente parece tener una pendiente más pequeña o una más grande? ¿La pendiente es positiva en algún punto? Justifique sus respuestas.

T **57. Explorando $(\operatorname{sen} kx))/x$** Grafique juntas $y = (\operatorname{sen} 2x)/x$, $y = (\operatorname{sen} 2x)$ y $y = (\operatorname{sen} 4x)/x$ en el intervalo $-2 \le x \le 2$. ¿En dónde parece que cada gráfica corta el eje y? ¿Realmente la gráficas cortan el eje? ¿Qué cree que harían las gráficas de $y = (\operatorname{sen} 5x)/x$ y $y = (\operatorname{sen}(-3x))/x$ cuando $x \to 0$? ¿Por qué? ¿Qué pasaría con la gráfica de $y = (\operatorname{sen} kx)/x$ para otros valores de k? Justifique sus respuestas.

T **58. Radianes *versus* grados: derivadas en modo grados** ¿Qué sucede con las derivadas de sen x y cos x si x se mide en grados en lugar de hacerlo en radianes? Para averiguarlo, siga estos pasos.

a. Con su calculadora graficadora o computadora en el *modo grados*, grafique

$$f(h) = \frac{\operatorname{sen} h}{h}$$

y estime $\lim_{h \to 0} f(h)$. Compare su estimación con $\pi/180$. ¿Hay alguna razón para creer que el límite *debiera* ser $\pi/180$?

b. Con su calculadora graficadora todavía en modo grados, estime

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h}.$$

c. Ahora regrese a la deducción de la fórmula para la derivada del sen x que se comentó en el texto, y lleve a cabo los pasos indicados usando los límites en el modo grados. ¿Qué fórmula obtuvo para la derivada?

d. Deduzca la fórmula de la derivada de cos x usando los límites en el modo grados. ¿Qué fórmula obtuvo para la derivada?

e. Las desventajas de derivar las fórmulas en modo grados se hacen evidentes a medida que se calculan derivadas de orden superior. Inténtelo. ¿Cuáles son las segunda y tercera derivadas, en modo grados, de sen x y cos x?

3.5 Regla de la cadena y ecuaciones paramétricas

Sabemos cómo derivar $y = f(u) = \operatorname{sen} u$ y $u = g(x) = x^2 - 4$, pero, ¿cómo derivar una función compuesta como $F(x) = f(g(x)) = \operatorname{sen}(x^2 - 4)$? Las fórmulas de diferenciación que hemos estudiado hasta aquí no nos dicen cómo calcular $F'(x)$. Entonces, ¿cómo encontrar la derivada de $F = f \circ g$? La respuesta es, con la regla de la cadena, que dice que la derivada de la composición de dos funciones diferenciables es el producto de sus derivadas evaluadas en puntos apropiados. La regla de la cadena es una de las reglas de diferenciación más importantes y más usadas. En esta sección se describirá dicha regla y cómo usarla. Después la aplicaremos para describir curvas en el plano y sus rectas tangentes de otra manera.

Derivada de una función compuesta

Empecemos con ejemplos.

EJEMPLO 1 Relación entre derivadas

La función $y = \frac{3}{2}x = \frac{1}{2}(3x)$ es la composición de las funciones $y = \frac{1}{2}u$ y $u = 3x$. ¿Cómo se relacionan las derivadas de estas funciones?

Solución Tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}, \qquad \frac{dy}{du} = \frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad \frac{du}{dx} = 3.$$

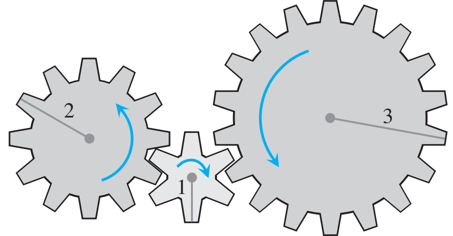
Como $\frac{3}{2} = \frac{1}{2} \cdot 3$, vemos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

¿Es un accidente que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}?$$

Si consideramos la derivada como una razón de cambio, nuestra intuición nos permitirá ver que esta relación es razonable. Si $y = f(u)$ cambia a la mitad de velocidad que u, y $u = g(x)$ cambia tres veces más rápido que x, cabe suponer que y cambiará $3/2$ veces más rápido que x. Este efecto se parece mucho a un engranaje múltiple (figura 3.26). ■



C: y vuelta B: u vuelta A: x vuelta

FIGURA 3.26 Cuando el engrane A da x vueltas, el engrane B da u vueltas y el engrane C da y vueltas. Comparando las circunferencias o contando los dientes, vemos que $y = u/2$ (C gira media vuelta por cada vuelta de B) y $u = 3x$. (B gira tres veces por una de A). De manera que $y = 3x/2$. Así, $dy/dx = 3/2 = (1/2)(3) = (dy/du)(du/dx)$.

EJEMPLO 2

La función

$$y = 9x^4 + 6x^2 + 1 = (3x^2 + 1)^2$$

es la composición de $y = u^2$ y $u = 3x^2 + 1$. Al calcular las derivadas, vemos que

$$\begin{aligned}\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} &= 2u \cdot 6x \\ &= 2(3x^2 + 1) \cdot 6x \\ &= 36x^3 + 12x.\end{aligned}$$

Al calcular la derivada a partir de la fórmula expandida, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(9x^4 + 6x^2 + 1\right) \\ &= 36x^3 + 12x.\end{aligned}$$

Una vez más,

$$\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx}.$$ ■

La derivada de la función compuesta $f(g(x))$ en x es la derivada de f en $g(x)$, multiplicada por la derivada de g en x. Esto se conoce como la regla de la cadena (figura 3.27).

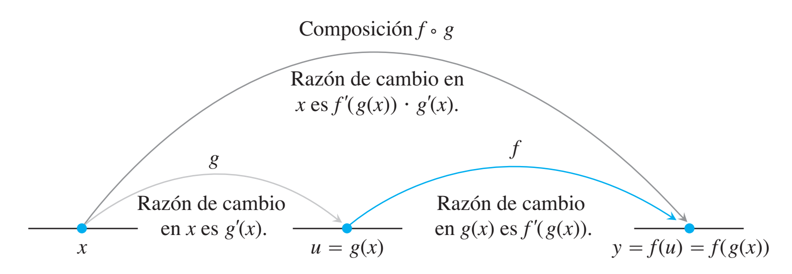


FIGURA 3.27 Multiplicación de razones de cambio. La derivada de $f \circ g$ en x es la derivada de f en $g(x)$ por la derivada de g en x.

TEOREMA 3 La regla de la cadena

Si $f(u)$ es diferenciable en el punto $u = g(x)$, y $g(x)$ es diferenciable en x, entonces la función compuesta $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ es diferenciable en x, y

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

En la notación de Leibniz, si $y = f(u)$ y $u = g(x)$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx},$$

donde dy/du se evalúa en $u = g(x)$.

"Prueba" intuitiva de la regla de la cadena:

Sea Δu el cambio en u correspondiente a un cambio de Δx en x, esto es,

$$\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x)$$

En consecuencia, el cambio correspondiente en y es

$$\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u).$$

Sería tentador escribir

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \tag{1}$$

y tomar el límite cuando $\Delta x \to 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \qquad \text{(Observe que } \Delta u \to 0 \text{ conforme } \Delta x \to 0 \text{ ya que } g \text{ es continua).} \\
&= \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}.
\end{aligned}$$

La única falla en este razonamiento radica en que, en la ecuación (1), podría ocurrir que $\Delta u = 0$ (aun cuando $\Delta x \neq 0$) y, por supuesto, no podemos dividir entre 0. La prueba necesita un enfoque distinto para evitar esta falla; en la sección 3.8 haremos una demostración más precisa. ■

EJEMPLO 3 Aplicación de la regla de la cadena

Un objeto se mueve a lo largo del eje x, de manera que su posición en cualquier tiempo $t \geq 0$ está dada por $x(t) = \cos(t^2 + 1)$. Determinar la velocidad del objeto como una función de t.

Solución Sabemos que la velocidad es dx/dt. En este caso, x es una función compuesta: $x = \cos(u)$ y $u = t^2 + 1$. Tenemos

$$\frac{dx}{du} = -\operatorname{sen}(u) \qquad x = \cos(u)$$

$$\frac{du}{dt} = 2t. \qquad u = t^2 + 1$$

De acuerdo con la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dx}{du} \cdot \frac{du}{dt} \\ &= -\operatorname{sen}(u) \cdot 2t \qquad \frac{dx}{du} \text{ evaluado en } u \\ &= -\operatorname{sen}(t^2 + 1) \cdot 2t \\ &= -2t \operatorname{sen}(t^2 + 1). \end{aligned}$$ ■

Como vimos en el ejemplo 3, una dificultad al utilizar la notación de Leibniz, es que no dice específicamente en dónde deben evaluarse las derivadas.

Regla "de afuera hacia adentro"

Algunas veces ayuda pensar en la regla de la cadena de esta manera: si $y = f(g(x))$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

En palabras, derivar la función de "afuera" (externa), f, y evaluarla en la función de "adentro" (interna), $g(x)$; después multiplicar por la derivada de la "función de adentro" (interna).

EJEMPLO 4 Diferenciación de afuera hacia adentro

Derivar sen $(x^2 + x)$ con respecto a x.

Solución

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sen} \underbrace{(x^2 + x)}_{\text{lo de adentro}} = \cos \underbrace{(x^2 + x)}_{\text{lo de adentro dejarlo igual}} \cdot \underbrace{(2x + 1)}_{\text{derivada de lo de adentro}}$$ ■

Uso repetido de la regla de la cadena

Algunas veces tenemos que usar la regla de la cadena dos o más veces para encontrar una derivada. Veamos un ejemplo de tal situación.

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

Johann Bernoulli
(1667-1748)

EJEMPLO 5 Cadena de tres eslabones

Encontrar la derivada de $g(t) = \tan(5 - \operatorname{sen} 2t)$.

Solución Observe que, en este ejemplo, la tangente es una función de $5 - \operatorname{sen} 2t$, mientras que el seno es una función de $2t$, que a su vez es una función de t. De esta manera y de acuerdo con la regla de la cadena,

$$\begin{aligned}
g'(t) &= \frac{d}{dt}\left(\tan\left(5 - \operatorname{sen} 2t\right)\right) \\
&= \sec^2(5 - \operatorname{sen} 2t) \cdot \frac{d}{dt}\left(5 - \operatorname{sen} 2t\right) && \text{Derivada de } u \text{ con } u = 5 - \operatorname{sen} 2t \\
&= \sec^2(5 - \operatorname{sen} 2t) \cdot \left(0 - \cos 2t \cdot \frac{d}{dt}\left(2t\right)\right) && \text{Derivada de } 5 - \operatorname{sen} u \text{ con } u = 2t \\
&= \sec^2(5 - \operatorname{sen} 2t) \cdot (-\cos 2t) \cdot 2 \\
&= -2(\cos 2t)\sec^2(5 - \operatorname{sen} 2t).
\end{aligned}$$

La regla de la cadena con potencias de una función

Si f es una función diferenciable de u y si u es una función diferenciable de x, sustituyendo $y = f(u)$ en la fórmula de la regla de la cadena

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

nos lleva a la fórmula

$$\frac{d}{dx} f(u) = f'(u)\frac{du}{dx}.$$

Un ejemplo de cómo funciona este procedimiento es el siguiente: si n es un entero positivo o negativo y $f(u) = u^n$, las reglas de las potencias (reglas 2 y 7) nos dicen que $f'(u) = nu^{n-1}$. Si u es una función diferenciable de x, entonces podemos usar la regla de la cadena para extenderla a la **regla de la cadena de potencias:**

$$\frac{d}{dx} u^n = nu^{n-1}\frac{du}{dx}. \qquad \frac{d}{du}\left(u^n\right) = nu^{n-1}$$

EJEMPLO 6 Aplicación de la regla de la cadena de potencias

(a)
$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(5x^3 - x^4)^7 &= 7(5x^3 - x^4)^6 \frac{d}{dx}\left(5x^3 - x^4\right) && \text{Regla de la cadena de potencias con } u = 5x^3 - x^4, n = 7 \\
&= 7(5x^3 - x^4)^6(5 \cdot 3x^2 - 4x^3) \\
&= 7(5x^3 - x^4)^6(15x^2 - 4x^3)
\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3x - 2}\right) &= \frac{d}{dx}(3x - 2)^{-1} \\
&= -1(3x - 2)^{-2}\frac{d}{dx}(3x - 2) && \text{Regla de la cadena de potencias con } u = 3x - 2, n = -1 \\
&= -1(3x - 2)^{-2}(3) \\
&= -\frac{3}{(3x - 2)^2}
\end{aligned}$$

En el inciso (b) también podríamos haber obtenido la derivada con la regla del cociente.

$\text{sen}^n x$ significa $(\text{sen}\, x)^n$, $n \neq -1$.

EJEMPLO 7 Determinación de pendientes de tangentes

(a) Encontrar la pendiente de la recta tangente a la curva $y = \text{sen}^5 x$ en el punto donde $x = \pi/3$.

(b) Demostrar que la pendiente de toda recta tangente a la curva $y = 1/(1 - 2x)^3$ es positiva.

Solución

(a)
$$\frac{dy}{dx} = 5\,\text{sen}^4 x \cdot \frac{d}{dx}\text{sen}\, x \qquad \text{Regla de la cadena de potencias con } u = \text{sen}\, x,\ n = 5$$
$$= 5\,\text{sen}^4 x \cos x$$

La recta tangente tiene pendiente

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\pi/3} = 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{45}{32}.$$

(b)
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(1 - 2x)^{-3}$$
$$= -3(1 - 2x)^{-4} \cdot \frac{d}{dx}(1 - 2x) \qquad \text{Regla de la cadena de potencias con } u = (1 - 2x),\ n = -3$$
$$= -3(1 - 2x)^{-4} \cdot (-2)$$
$$= \frac{6}{(1 - 2x)^4}$$

En cualquier punto (x, y) de la curva, $x \neq 1/2$, y la pendiente de la recta tangente es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6}{(1 - 2x)^4},$$

que es cociente de dos números positivos. ■

EJEMPLO 8 Radianes *versus* grados

Es importante recordar que las fórmulas de las derivadas de $\text{sen}\, x$ y $\cos x$ se obtuvieron bajo la suposición de que x se medía en radianes, *no* en grados. La regla de la cadena nos da una nueva interpretación de la diferencia entre ambas unidades de medida. Como $180° = \pi$ radianes, $x° = \pi x/180$ radianes, donde $x°$ se refiere al ángulo x medido en grados.

De acuerdo con la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dx}\text{sen}(x°) = \frac{d}{dx}\text{sen}\left(\frac{\pi x}{180}\right) = \frac{\pi}{180}\cos\left(\frac{\pi x}{180}\right) = \frac{\pi}{180}\cos(x°).$$

Vea la figura 3.28. De manera similar, la derivada de $\cos(x°)$ es $-(\pi/180)\,\text{sen}(x°)$.

El factor $\pi/180$, estorboso en la primera derivada, representaría una complicación al derivar repetidamente. Esto nos lleva a comprender de inmediato la ventaja de usar radianes.

■

Ecuaciones paramétricas

En lugar de describir una curva expresando la coordenada y de un punto $P(x,y)$ en ésta como una función de x, algunas veces es más conveniente describir la curva expresando *ambas* coordenadas como funciones de una tercera variable t. La figura 3.29 muestra la trayectoria de una partícula en movimiento, descrita por un par de ecuaciones $x = f(t)$ y $y = g(t)$.

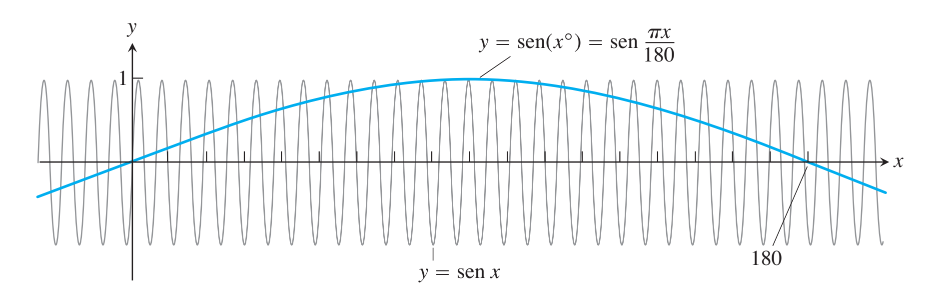


FIGURA 3.28 Sen$(x°)$ oscila solamente $\pi/180$ veces tanto como oscila sen x. Su pendiente máxima es $\pi/180$ en $x = 0$.

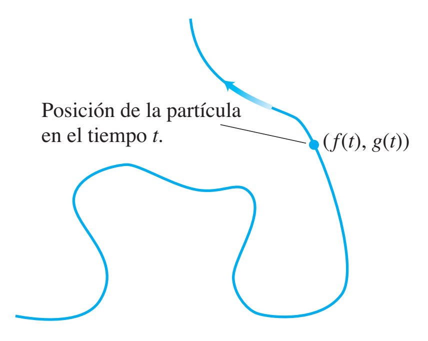


FIGURA 3.29 La trayectoria trazada por la partícula que se mueve en el plano xy no siempre es la gráfica de una función de x o una función de y.

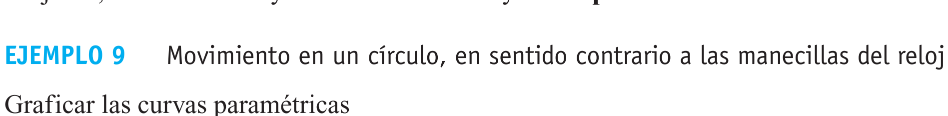
Para estudiar el movimiento, t denota usualmente el tiempo. Ecuaciones como éstas son mejores que una fórmula cartesiana, porque nos indican la posición de la partícula $(x, y) = (f(t), g(t))$ en cualquier tiempo t.

DEFINICIÓN Curva paramétrica
Si x y y están dadas como funciones

$$x = f(t), \qquad y = g(t)$$

en un intervalo de valores de t, entonces el conjunto de puntos $(x, y) = (f(t), g(t))$ definido por estas ecuaciones es una **curva paramétrica**. Las ecuaciones son **ecuaciones paramétricas** de la curva.

La variable t es un **parámetro** de la curva, y su dominio I es el **intervalo del parámetro**. Si I es un intervalo cerrado, $a \leq t \leq b$, el punto $(f(a), g(a))$ es el **punto inicial** de la curva. El punto $(f(b), g(b))$ es el **punto final**. Cuando damos ecuaciones paramétricas y un intervalo del parámetro de una curva, decimos que hemos **parametrizado** la curva. En conjunto, las ecuaciones y el intervalo constituyen una **parametrización** de la curva.



EJEMPLO 9 Movimiento en un círculo, en sentido contrario a las manecillas del reloj

Graficar las curvas paramétricas

(a) $x = \cos t, \qquad y = \operatorname{sen} t, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$

(b) $x = a\cos t, \qquad y = a\operatorname{sen} t, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$

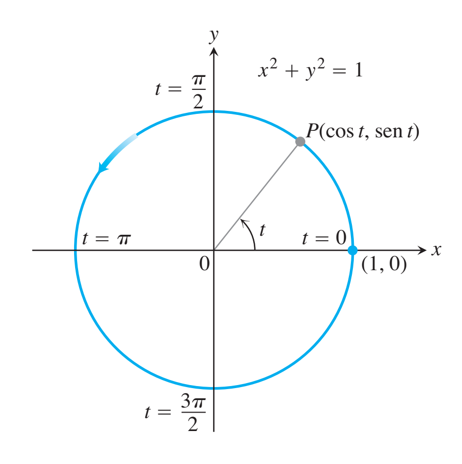


FIGURA 3.30 Las ecuaciones $x = \cos t$ y $y = \operatorname{sen} t$ describen el movimiento sobre el círculo $x^2 + y^2 = 1$. La flecha muestra la dirección de crecimiento de t (ejemplo 9).

Solución

(a) Como $x^2 + y^2 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$, la curva paramétrica está a lo largo del círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$. Conforme t crece de 0 a 2π, el punto $(x, y) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ empieza en (1,0) y traza el círculo completo una vez en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj (figura 3.30).

(b) Para $x = a\cos t, y = a\operatorname{sen} t, 0 \leq t \leq 2\pi$, tenemos $x^2 + y^2 = a^2\cos^2 t + a^2\operatorname{sen}^2 t = a^2$. La parametrización describe un movimiento que empieza en el punto $(a, 0)$ y recorre el círculo $x^2 + y^2 = a^2$ una vez en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, regresando al punto $(a, 0)$ en $t = 2\pi$. ■

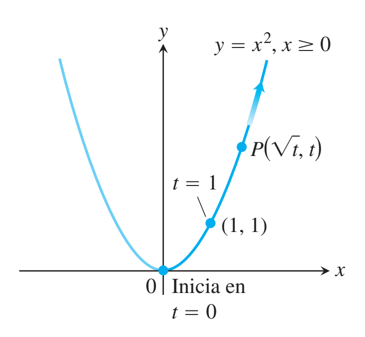


FIGURA 3.31 Las ecuaciones $x = \sqrt{t}$ y $y = t$ y el intervalo $t \geq 0$ describen el movimiento de una partícula que traza la mitad de la parábola derecha $y = x^2$ (ejemplo 10).

EJEMPLO 10 Movimiento a lo largo de una parábola

La posición $P(x,y)$ de una partícula que se mueve en el plano xy está dada por las ecuaciones y el intervalo del parámetro

$$x = \sqrt{t}, \qquad y = t, \qquad t \geq 0.$$

Identificar la trayectoria trazada por la partícula y describir el movimiento.

Solución Intentamos identificar la trayectoria eliminando t de las ecuaciones $x = \sqrt{t}$ y $y = t$. Con algo de suerte, obtendremos una relación algebraica reconocible entre x y y. Encontramos que

$$y = t = \left(\sqrt{t}\right)^2 = x^2.$$

En consecuencia, las coordenadas de la posición de la partícula satisfacen la ecuación $y = x^2$, de manera que la partícula se mueve a lo largo de la parábola $y = x^2$.

Sin embargo, sería un error concluir que la partícula recorre toda la parábola $y = x^2$ en su trayectoria; sólo recorre la mitad de la parábola. La coordenada x de la partícula nunca es negativa. La parábola empieza en (0, 0) cuando $t = 0$, y sube en el primer cuadrante conforme t crece (figura 3.31). El intervalo del parámetro es $[0, \infty)$ y no hay punto final. ■

EJEMPLO 11 Parametrización de un segmento de recta

Encontrar la parametrización para el segmento de recta con extremos en $(-2, 1)$ y $(3, 5)$.

Solución Usando (–2, 1), creamos las ecuaciones paramétricas

$$x = -2 + at, \qquad y = 1 + bt.$$

Estas ecuaciones representan una recta, como podemos ver al resolver cada una de ellas para t e igualarlas para obtener

$$\frac{x+2}{a} = \frac{y-1}{b}.$$

Esta recta pasa por el punto (–2, 1) cuando $t = 0$. Determinamos a y b de manera que la recta pase por (3, 5) cuando $t = 1$.

$$3 = -2 + a \quad \Rightarrow \quad a = 5 \qquad x = 3 \text{ cuando } t = 1.$$
$$5 = 1 + b \quad \Rightarrow \quad b = 4 \qquad y = 5 \text{ cuando } t = 1.$$

Por lo tanto,

$$x = -2 + 5t, \qquad y = 1 + 4t, \qquad 0 \leq t \leq 1$$

es una parametrización del segmento de recta con punto inicial en (–2, 1) y punto final en (3, 5). ■

Pendientes de curvas parametrizadas

Una curva parametrizada $x = f(t)$ y $y = g(t)$ es **diferenciable** en t si f y g son diferenciables en t. En un punto de una curva parametrizada diferenciable donde y también es una función diferenciable de x, las derivadas dy/dt, dx/dt y dy/dx se relacionan mediante la regla de la cadena:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Si $dx/dt \neq 0$, podemos dividir ambos lados de esta ecuación entre dx/dt para despejar dy/dx.

Fórmula paramétrica para dy/dx
Si existen las tres derivadas y $dx/dt \neq 0$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}. \tag{2}$$

EJEMPLO 12 Diferenciación con un parámetro

Si $x = 2t + 3$ y $y = t^2 - 1$, encontrar el valor de dy/dx en $t = 6$.

Solución La ecuación (2) da dy/dx como una función de t:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2t}{2} = t = \frac{x-3}{2}.$$

Cuando $t = 6$, $dy/dx = 6$. Observe que también podemos encontrar la derivada dy/dx como una función de x. ■

EJEMPLO 13 Movimiento a lo largo de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$

Describir el movimiento de una partícula cuya posición $P(x, y)$ en el tiempo t está dada por

$$x = a\cos t, \qquad y = b\,\text{sen}\,t, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Encontrar la recta tangente a la curva en el punto $\left(a/\sqrt{2}, b/\sqrt{2}\right)$, donde $t = \pi/4$. (Ambas constantes, a y b, son positivas.)

Solución Encontramos la ecuación cartesiana para las coordenadas de la partícula eliminando t de las ecuaciones

$$\cos t = \frac{x}{a}, \qquad \text{sen}\,t = \frac{y}{b}.$$

La identidad $\cos^2 t + \text{sen}^2 t = 1$, nos lleva a

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1, \qquad \text{o} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Las coordenadas de la partícula (x, y) satisfacen la ecuación $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$, de manera que la partícula se mueve a lo largo de la elipse. Cuando $t = 0$, las coordenadas de la partícula son

$$x = a\cos(0) = a, \qquad y = b\,\text{sen}(0) = 0,$$

así que el recorrido empieza en $(a, 0)$. Conforme t crece, la partícula sube y se mueve hacia la izquierda, siguiendo una trayectoria en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj. Recorre la elipse una vez, regresando a su punto inicial $(a, 0)$ en $t = 2\pi$.

La pendiente de la recta tangente a la elipse cuando $t = \pi/4$ es

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\pi/4} = \left.\frac{dy/dt}{dx/dt}\right|_{t=\pi/4}$$

$$= \left.\frac{b\cos t}{-a\,\text{sen}\,t}\right|_{t=\pi/4}$$

$$= \frac{b/\sqrt{2}}{-a/\sqrt{2}} = -\frac{b}{a}.$$

La recta tangente es

$$y - \frac{b}{\sqrt{2}} = -\frac{b}{a}\left(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$$

$$y = \frac{b}{\sqrt{2}} - \frac{b}{a}\left(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$$

o

$$y = -\frac{b}{a}x + \sqrt{2}b.$$ ■

Si las ecuaciones paramétricas definen y como una función doblemente diferenciable de x, podemos aplicar la ecuación (2) a la función $dy/dx = y'$ para calcular d^2y/dx^2 como una función de t:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(y') = \frac{dy'/dt}{dx/dt}. \qquad \text{Ecuación (2) con } y' \text{ en lugar de } y$$

Fórmula paramétrica para d^2y/dx^2

Si las ecuaciones $x = f(t)$, $y = g(t)$ definen y como una función doblemente diferenciable de x, entonces cualquier punto donde $dx/dt \neq 0$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt}. \qquad (3)$$

EJEMPLO 14 Determinación de d^2y/dx^2 para una curva parametrizada

Encontrar d^2y/dx^2 como una función de t si $x = t - t^2$, $y = t - t^3$.

Solución

Encontrar d^2y/dx^2 en términos de t
1. Expresar $y' = dy/dx$ en términos de t.
2. Encontrar dy'/dt.
3. Dividir dy'/dt entre dx/dt.

1. Exprese $y' = dy/dx$ en términos de t.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{1 - 3t^2}{1 - 2t}$$

2. Derive y' con respecto a t.

$$\frac{dy'}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1 - 3t^2}{1 - 2t}\right) = \frac{2 - 6t + 6t^2}{(1 - 2t)^2} \qquad \text{Regla del cociente}$$

3. Divida dy'/dt entre dx/dt.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt} = \frac{(2 - 6t + 6t^2)/(1 - 2t)^2}{1 - 2t} = \frac{2 - 6t + 6t^2}{(1 - 2t)^3} \qquad \text{Ecuación (3)}$$ ■

EJEMPLO 15 Entrega de paquetes de emergencia

Un avión de la Cruz Roja lanza paquetes con comida y medicamentos de emergencia para abastecer una zona de desastre. Si el avión descarga los paquetes justo por encima del extremo de un campo abierto de 700 pies de largo, y si el cargamento se mueve a lo largo de la trayectoria

$$x = 120t \quad \text{y} \quad y = -16t^2 + 500, \qquad t \geq 0$$

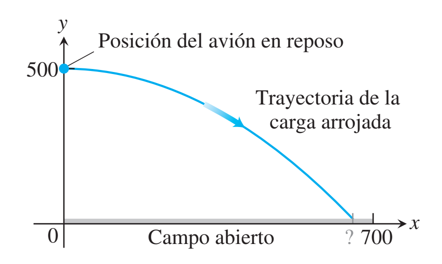


FIGURA 3.32 La trayectoria de la carga arrojada del ejemplo 15.

¿los paquetes caerán en el campo? Las coordenadas de x y y están medidas en pies, y el parámetro t (tiempo desde la descarga) en segundos. Encontrar la ecuación cartesiana para la trayectoria de descenso del cargamento (figura 3.32) y la razón de descenso del cargamento en relación con su movimiento hacia delante cuando toca el suelo.

Solución El cargamento toca el suelo cuando $y = 0$, lo que ocurre en el tiempo t cuando

$$-16t^2 + 500 = 0 \qquad \text{Poniendo } y = 0.$$

$$t = \sqrt{\frac{500}{16}} = \frac{5\sqrt{5}}{2} \text{ seg.} \qquad t \geq 0$$

La coordenada x en el tiempo de la descarga es $x = 0$. En el tiempo en que la carga toca el suelo, la coordenada x es

$$x = 120t = 120\left(\frac{5\sqrt{5}}{2}\right) = 300\sqrt{5} \text{ pies.}$$

Como $300\sqrt{5} \approx 670.8 < 700$, la carga sí aterriza en el campo.

Encontramos una ecuación cartesiana para las coordenadas de la carga, eliminando t de las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{aligned} y &= -16t^2 + 500 && \text{Ecuación paramétrica de } y \\ &= -16\left(\frac{x}{120}\right)^2 + 500 && \text{Sustituimos } t \text{ de la ecuación } x = 120t. \\ &= -\frac{1}{900}x^2 + 500. && \text{Una parábola} \end{aligned}$$

La razón de descenso en relación con el movimiento de la carga hacia delante cuando ésta toca el suelo es

$$\begin{aligned} \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=5\sqrt{5}/2} &= \left.\frac{dy/dt}{dx/dt}\right|_{t=5\sqrt{5}/2} \\ &= \left.\frac{-32t}{120}\right|_{t=5\sqrt{5}/2} \\ &= -\frac{2\sqrt{5}}{3} \approx -1.49. \end{aligned}$$

En consecuencia, los paquetes están descendiendo más o menos 1.5 pies por cada pie de movimiento hacia delante cuando tocan el suelo. ■

$\begin{cases} x(t) = 2 \\ y(t) = 160t - 16t^2 \end{cases}$

y

$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 160t - 16t^2 \end{cases}$

en modo punto

APLICACIÓN TECNOLÓGICA **Simulación de movimiento en una recta vertical**

Las ecuaciones paramétricas

$$x(t) = c, \qquad y(t) = f(t)$$

iluminarán píxeles a lo largo de la recta vertical $x = c$. Si $f(t)$ denota la altura del movimiento de un cuerpo en el tiempo t, graficar $x(t), y(t)) = (c, f(t))$ simulará el movimiento real. Inténtelo con la roca del ejemplo 5, sección 3.3 con, digamos, $x(t) = 2$ y $y(t) = 160t - 16t^2$ en modo de puntos con t pasos de 0.1. ¿A qué se debe que varíe el espaciamiento entre los puntos? ¿Por qué la graficadora parece detenerse al alcanzar la parte superior? (Intente graficar para 0 $0 \leq t \leq 5$ y $5 \leq t \leq 10$ por separado).

Para un segundo experimento, grafique las ecuaciones paramétricas

$$x(t) = t, \qquad y(t) = 160t - 16t^2$$

junto con la recta vertical que simula el movimiento, nuevamente en modo de puntos. Use lo que aprendimos acerca del comportamiento de la roca a partir de los cálculos del ejemplo 5 para escoger un tamaño de ventana donde se vea todo el comportamiento interesante.

Parametrizaciones estándares y reglas de diferenciación

CÍRCULO $x^2 + y^2 = a^2$:

$$x = a\cos t$$
$$y = a \operatorname{sen} t$$
$$0 \le t \le 2\pi$$

ELIPSE $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$:

$$x = a\cos t$$
$$y = b \operatorname{sen} t$$
$$0 \le t \le 2\pi$$

FUNCIÓN $y = f(x)$:

$$x = t$$
$$y = f(t)$$

DERIVADAS

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt}$$

EJERCICIOS 3.5

Cálculo de derivadas

En los ejercicios 1 a 8, dadas $y = f(u)$ y $u = g(x)$, encuentre $dy/dx = f'(g(x))g'(x)$.

1. $y = 6u - 9, \quad u = (1/2)x^4$
2. $y = 2u^3, \quad u = 8x - 1$
3. $y = \operatorname{sen} u, \quad u = 3x + 1$
4. $y = \cos u, \quad u = -x/3$
5. $y = \cos u, \quad u = \operatorname{sen} x$
6. $y = \operatorname{sen} u, \quad u = x - \cos x$
7. $y = \tan u, \quad u = 10x - 5$
8. $y = -\sec u, \quad u = x^2 + 7x$

En los ejercicios 9 a 18, escriba la función en la forma $y = f(u)$ y $u = g(x)$. Después encuentre dy/dx como una función de x.

9. $y = (2x + 1)^5$
10. $y = (4 - 3x)^9$
11. $y = \left(1 - \frac{x}{7}\right)^{-7}$
12. $y = \left(\frac{x}{2} - 1\right)^{-10}$
13. $y = \left(\frac{x^2}{8} + x - \frac{1}{x}\right)^4$
14. $y = \left(\frac{x}{5} + \frac{1}{5x}\right)^5$
15. $y = \sec(\tan x)$
16. $y = \cot\left(\pi - \frac{1}{x}\right)$
17. $y = \operatorname{sen}^3 x$
18. $y = 5\cos^{-4} x$

Determine las derivadas de la funciones en los ejercicios 19 a 38.

19. $p = \sqrt{3 - t}$
20. $q = \sqrt{2r - r^2}$
21. $s = \frac{4}{3\pi}\operatorname{sen} 3t + \frac{4}{5\pi}\cos 5t$
22. $s = \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi t}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\pi t}{2}\right)$
23. $r = (\csc\theta + \cot\theta)^{-1}$
24. $r = -(\sec\theta + \tan\theta)^{-1}$
25. $y = x^2\operatorname{sen}^4 x + x\cos^{-2} x$
26. $y = \frac{1}{x}\operatorname{sen}^{-5} x - \frac{x}{3}\cos^3 x$
27. $y = \frac{1}{21}(3x - 2)^7 + \left(4 - \frac{1}{2x^2}\right)^{-1}$
28. $y = (5 - 2x)^{-3} + \frac{1}{8}\left(\frac{2}{x} + 1\right)^4$
29. $y = (4x + 3)^4(x + 1)^{-3}$
30. $y = (2x - 5)^{-1}(x^2 - 5x)^6$
31. $h(x) = x\tan\left(2\sqrt{x}\right) + 7$
32. $k(x) = x^2\sec\left(\frac{1}{x}\right)$
33. $f(\theta) = \left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{1 + \cos\theta}\right)^2$
34. $g(t) = \left(\frac{1 + \cos t}{\operatorname{sen} t}\right)^{-1}$
35. $r = \operatorname{sen}(\theta^2)\cos(2\theta)$
36. $r = \sec\sqrt{\theta}\tan\left(\frac{1}{\theta}\right)$
37. $q = \operatorname{sen}\left(\frac{t}{\sqrt{t + 1}}\right)$
38. $q = \cot\left(\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right)$

En los ejercicios 39 a 48, encuentre dy/dt

39. $y = \operatorname{sen}^2(\pi t - 2$
40. $y = \sec^2 \pi t$
41. $y = (1 + \cos 2t)^{-4}$
42. $y = (1 + \cot(t/2))^{-2}$

43. $y = \operatorname{sen}(\cos(2t - 5))$

44. $y = \cos\left(5 \operatorname{sen}\left(\frac{t}{3}\right)\right)$

45. $y = \left(1 + \tan^4\left(\frac{t}{12}\right)\right)^3$

46. $y = \frac{1}{6}\left(1 + \cos^2(7t)\right)^3$

47. $y = \sqrt{1 + \cos(t^2)}$

48. $y = 4 \operatorname{sen}\left(\sqrt{1 + \sqrt{t}}\right)$

Segunda derivada

Encuentre y'' en los ejercicios 49 a 52.

49. $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^3$

50. $y = \left(1 - \sqrt{x}\right)^{-1}$

51. $y = \frac{1}{9}\cot(3x - 1)$

52. $y = 9 \tan\left(\frac{x}{3}\right)$

Determinación de valores numéricos de las derivadas

En los ejercicios 53 a 58, encuentre el valor de $(f \circ g)'$ en el valor dado de x.

53. $f(u) = u^5 + 1, \quad u = g(x) = \sqrt{x}, \quad x = 1$

54. $f(u) = 1 - \frac{1}{u}, \quad u = g(x) = \frac{1}{1 - x}, \quad x = -1$

55. $f(u) = \cot\frac{\pi u}{10}, \quad u = g(x) = 5\sqrt{x}, \quad x = 1$

56. $f(u) = u + \frac{1}{\cos^2 u}, \quad u = g(x) = \pi x, \quad x = 1/4$

57. $f(u) = \frac{2u}{u^2 + 1}, \quad u = g(x) = 10x^2 + x + 1, \quad x = 0$

58. $f(u) = \left(\frac{u - 1}{u + 1}\right)^2, \quad u = g(x) = \frac{1}{x^2} - 1, \quad x = -1$

59. Suponga que las funciones f y g y sus derivadas con respecto a x tienen los valores siguientes en $x = 2$ y $x = 3$.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
2	8	2	1/3	−3
3	3	−4	2π	5

Encuentre las derivadas con respecto a x de las combinaciones siguientes en el valor dado de x.

a. $2f(x), \quad x = 2$

b. $f(x) + g(x), \quad x = 3$

c. $f(x) \cdot g(x), \quad x = 3$

d. $f(x)/g(x), \quad x = 2$

e. $f(g(x)), \quad x = 2$

f. $\sqrt{f(x)}, \quad x = 2$

g. $1/g^2(x), \quad x = 3$

h. $\sqrt{f^2(x) + g^2(x)}, \quad x = 2$

60. Suponga que las funciones f y g y sus con derivadas con respecto a x tienen los valores siguientes en $x = 0$ y $x = 1$.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
0	1	1	5	1/3
1	3	−4	−1/3	−8/3

Encuentre las derivadas con respecto a x de las combinaciones siguientes en el valor dado de x.

a. $5f(x) - g(x), \quad x = 1$

b. $f(x)g^3(x), \quad x = 0$

c. $\frac{f(x)}{g(x) + 1}, \quad x = 1$

d. $f(g(x)), \quad x = 0$

e. $g(f(x)), \quad x = 0$

f. $(x^{11} + f(x))^{-2}, \quad x = 1$

g. $f(x + g(x)), \quad x = 0$

61. Determine ds/dt cuando $\theta = 3\pi/2$ si $s = \cos\theta$ y $d\theta/dt = 5$.

62. Encuentre dy/dt cuando $x = 1$ si $y = x^2 + 7x - 5$ y $dx/dt = 1/3$.

Elección en la composición

¿Qué sucede si se puede escribir una función como una composición de distintas maneras? ¿Se obtiene la misma derivada en cada caso? La regla de la cadena dice que sí. Inténtelo con las funciones de los ejercicios 63 y 64.

63. Encuentre dy/dx si $y = x$ usando la regla de la cadena con y como una composición de

a. $y = (u/5) + 7$ y $u = 5x - 35$

b. $y = 1 + (1/u)$ y $u = 1/(x - 1)$.

64. Encuentre dy/dx si $y = x^{3/2}$ usando la regla de la cadena con y como una composición (compuesta) de

a. $y = u^3$ y $u = \sqrt{x}$

b. $y = \sqrt{u}$ y $u = x^3$.

Tangentes y pendientes

65. a. Encuentre la tangente a la curva $y = 2\tan(\pi x/4)$ en $x = 1$.

b. Pendientes en la curva tangente ¿Cuál es el valor mínimo que puede tener la pendiente de la curva en el intervalo $-2 < x < 2$? Justifique su respuesta.

66. Pendientes en las curvas seno

a. Determine las ecuaciones para las tangentes a las curvas $y = \operatorname{sen} 2x$ y $y = -\operatorname{sen}(x/2)$ en el origen. ¿Hay algo especial en la manera como se relacionan las tangentes? Justifique su respuesta.

b. ¿Qué puede decirse acerca de las tangentes de las curvas $y = \operatorname{sen} mx$ y $y = -\operatorname{sen}(x/m)$ en el origen (m es una constante $\neq 0$)? Justifique su respuesta.

c. Para una m dada, ¿cuáles son los valores máximos que pueden tener las pendientes de las curvas $y = \operatorname{sen} mx$ y $y = -\operatorname{sen}(x/m)$? Justifique su respuesta.

d. La función $y = \operatorname{sen} x$ completa un periodo en el intervalo $[0, 2\pi]$, la función $y = \operatorname{sen} 2x$ completa dos periodos, la función $y = \operatorname{sen}(x/2)$ completa medio periodo, y así sucesivamente. ¿Hay alguna relación entre el número de periodos que completa $y = \operatorname{sen} mx$ en $[0, 2\pi]$ y la pendiente de la curva $y = \operatorname{sen} mx$ en el origen? Justifique su respuesta.

Determinación de ecuaciones cartesianas a partir de ecuaciones paramétricas

En los ejercicios 67 a 78 se dan las ecuaciones paramétricas e intervalos del parámetro para el movimiento de una partícula en el plano xy.

Identifique la trayectoria de la partícula, encontrando una ecuación cartesiana para ella. Grafique la ecuación cartesiana. (Las gráficas variarán según la ecuación que se utilice). Indique la parte de la gráfica trazada por la partícula y la dirección del movimiento.

67. $x = \cos 2t, \quad y = \operatorname{sen} 2t, \quad 0 \le t \le \pi$

68. $x = \cos(\pi - t), \quad y = \operatorname{sen}(\pi - t), \quad 0 \le t \le \pi$

69. $x = 4\cos t, \quad y = 2\operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

70. $x = 4\operatorname{sen} t, \quad y = 5\cos t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

71. $x = 3t, \quad y = 9t^2, \quad -\infty < t < \infty$

72. $x = -\sqrt{t}, \quad y = t, \quad t \ge 0$

73. $x = 2t - 5, \quad y = 4t - 7, \quad -\infty < t < \infty$

74. $x = 3 - 3t, \quad y = 2t, \quad 0 \le t \le 1$

75. $x = t, \quad y = \sqrt{1 - t^2}, \quad -1 \le t \le 0$

76. $x = \sqrt{t + 1}, \quad y = \sqrt{t}, \quad t \ge 0$

77. $x = \sec^2 t - 1, \quad y = \tan t, \quad -\pi/2 < t < \pi/2$

78. $x = -\sec t, \quad y = \tan t, \quad -\pi/2 < t < \pi/2$

Determinación de ecuaciones paramétricas

79. Encuentre las ecuaciones paramétricas y un intervalo del parámetro para el movimiento de una partícula que empieza en $(a, 0)$ y traza el círculo $x^2 + y^2 = a^2$

a. una vez en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj.

b. una vez en sentido contrario a las manecillas del reloj.

c. dos veces en el sentido de las manecillas del reloj.

d. dos veces en sentido contrario a las manecillas del reloj.

(Hay muchas maneras de hacerlo, así que sus respuestas podrían diferir de las que se dan al final del libro).

80. Determine las ecuaciones paramétricas y un intervalo del parámetro para el movimiento de una partícula que empieza en $(a, 0)$ y traza la elipse $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$

a. una vez en el sentido de las manecillas del reloj.

b. una vez en sentido contrario a las manecillas del reloj.

c. dos veces en el sentido de las manecillas del reloj.

d. dos veces en sentido contrario a las manecillas del reloj.

(Como en el ejercicio 79, hay muchas respuestas correctas).

En los ejercicios 81 a 86, encuentre una parametrización para la curva indicada.

81. el segmento de recta con extremos (–1, –3) y (4, 1).

82. el segmento de recta con extremos (–1, –3) y (3, –2).

83. la mitad inferior de la parábola $x - 1 = y^2$

84. la mitad izquierda de la parábola $y = x^2 + 2x$

85. el rayo (media recta) con punto inicial (2, 3), que pasa por el punto (–1, –1)

86. el rayo (media recta) con punto inicial (–1, 2), que pasa por el punto (0, 0)

Tangentes a curvas parametrizadas

En los ejercicios 87 a 94, encuentre una ecuación para la recta tangente a la curva en el punto definido por el valor de t dado. También determine el valor de d^2y/dx^2 en ese punto.

87. $x = 2\cos t, \quad y = 2\operatorname{sen} t, \quad t = \pi/4$

88. $x = \cos t, \quad y = \sqrt{3}\cos t, \quad t = 2\pi/3$

89. $x = t, \quad y = \sqrt{t}, \quad t = 1/4$

90. $x = -\sqrt{t + 1}, \quad y = \sqrt{3t}, \quad t = 3$

91. $x = 2t^2 + 3, \quad y = t^4, \quad t = -1$

92. $x = t - \operatorname{sen} t, \quad y = 1 - \cos t, \quad t = \pi/3$

93. $x = \cos t, \quad y = 1 + \operatorname{sen} t, \quad t = \pi/2$

94. $x = \sec^2 t - 1, \quad y = \tan t, \quad t = -\pi/4$

Teoría, ejemplos y aplicaciones

95. Funcionamiento demasiado rápido de maquinaria Suponga que un pistón describe un movimiento recto hacia arriba y hacia abajo, y que su posición en el tiempo t segundos es

$$s = A\cos(2\pi bt),$$

con A y b positivos. El valor de A es la amplitud del movimiento, y el de b es la frecuencia (el número de veces que el pistón se mueve hacia arriba y hacia abajo en cada segundo). ¿Qué efecto tendrá duplicar la frecuencia en la velocidad, aceleración y sacudida del pistón? (Una vez que lo descubra sabrá por qué la maquinaria se descompone cuando funciona demasiado rápido).

96. Temperaturas en Fairbanks, Alaska La gráfica de la figura 3.33 muestra la temperatura promedio, en grados Fahrenheit, en Fairbanks, Alaska, durante un año típico de 365 días. La ecuación que aproxima la temperatura el día x es

$$y = 37\operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{365}(x - 101)\right] + 25.$$

a. ¿En qué día la temperatura se incrementa más rápido?

b. ¿Alrededor de cuántos grados por día aumenta la temperatura cuando el incremento se da más rápido?

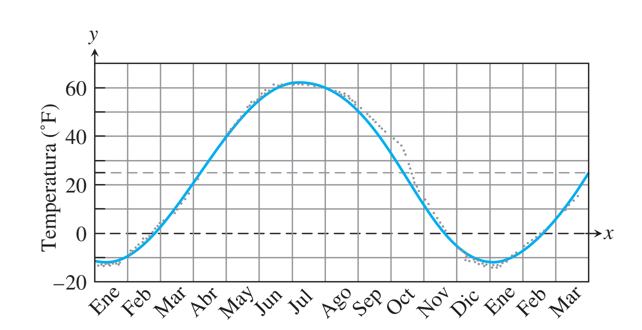


FIGURA 3.33 Temperatura media normal del aire en Fairbanks, Alaska, trazada como puntos de datos, y la función de aproximación seno (ejercicio 96).

97. Movimiento de una partícula La posición de una partícula que se mueve a lo largo de una recta coordenada es $s = \sqrt{1 + 4t}$, con s en metros y t en segundos. Determine la velocidad y la aceleración de la partícula en $t = 6$ seg.

98. Aceleración constante Suponga que la velocidad de un cuerpo en caída es $v = k\sqrt{s}$ m/seg (k es una constante) en el instante que el cuerpo ha caído s m desde el punto de inicio. Muestre que la aceleración del cuerpo es constante.

99. Caída de un meteorito La velocidad de un meteorito pesado que entra en la atmósfera terrestre es inversamente proporcional a $\sqrt{s}$ cuando está a s kilómetros del centro de la Tierra. Muestre que la aceleración del meteorito es inversamente proporcional a s^2.

100. Aceleración de una partícula Una partícula se mueve a lo largo del eje x con velocidad $dx/dt = f(x)$. Muestre que la aceleración de la partícula es $f(x)f'(x)$.

101. La temperatura y el periodo de un péndulo En el caso de oscilaciones de amplitud pequeña (balanceos cortos), podemos modelar sin problema la relación entre el periodo T y la longitud L de un péndulo simple con la ecuación

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}},$$

donde g es la aceleración constante de la gravedad en el lugar donde está el péndulo. Si medimos g en centímetros por segundo al cuadrado, mediremos L en centímetros y T en segundos. Si el péndulo es metálico, su longitud variará con la temperatura, aumentando o disminuyendo a una razón aproximadamente proporcional a L. En símbolos, si u es la temperatura y k la constante de proporcionalidad,

$$\frac{dL}{du} = kL.$$

Suponiendo que éste es el caso, muestre que la razón a la que cambia el periodo del péndulo respecto a la temperatura es $kT/2$.

102. Regla de la cadena Suponga que $f(x) = x^2$ y $g(x) = |x|$. Entonces, ambas composiciones

$$(f \circ g)(x) = |x|^2 = x^2 \quad \text{y} \quad (g \circ f)(x) = |x^2| = x^2$$

son diferenciables en $x = 0$ aun cuando g no sea diferenciable en $x = 0$. ¿Esto contradice la regla de la cadena? Explique.

103. Tangentes Suponga que $u = g(x)$ es diferenciable en $x = 1$, y que $y = f(u)$ es diferenciable en $u = g(1)$. Si la gráfica de $y = f(g(x))$ tiene una tangente horizontal en $x = 1$, ¿podemos concluir algo sobre la tangente a la gráfica de g en $x = 1$ o sobre la tangente a la gráfica de f en $u = g(1)$? Justifique su respuesta.

104. Suponga que $u = g(x)$ es diferenciable en $x = -5$, $y = f(u)$ es diferenciable en $u = g(-5)$ y $(f \circ g)'(-5)$ es negativa. ¿Puede decirse algo sobre de los valores de $g'(-5)$ y $f'(g(-5))$?

T **105. La derivada de sen 2x** Grafique la función $y = 2\cos 2x$ para $-2 \le x \le 3.5$. Después, grafique en la misma pantalla

$$y = \frac{\operatorname{sen} 2(x+h) - \operatorname{sen} 2x}{h}$$

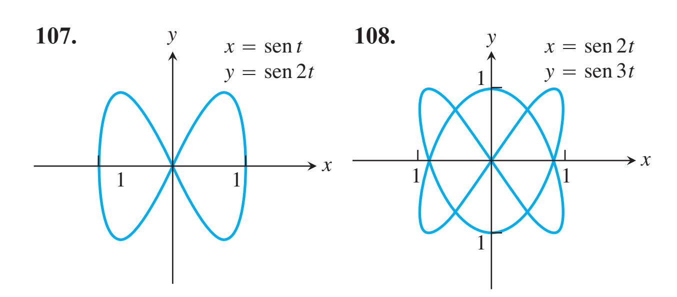
para $h = 1.0, 0.5$, Experimente con otros valores de h, incluyendo valores negativos. ¿Qué pasa cuando $h \to 0$? Explique este comportamiento.

T **106. La derivada de cos(x^2)** Grafique $y = -2x\operatorname{sen}(x^2)$ para $-2 \le x \le 3$. Después, grafique en la misma pantalla

$$y = \frac{\cos((x+h)^2) - \cos(x^2)}{h}$$

para $h = 1.0, 0.7$ y 0.3. Experimente con otros valores de h. ¿Qué pasa cuando $h \to 0$? Explique este comportamiento.

T Las curvas en los ejercicios 107 y 108 se llaman *curvas de Bowditch* o *figuras de Lissajous*. En cada caso, encuentre el punto en el interior del primer cuadrante, donde la tangente de la curva es horizontal y determine las ecuaciones de las dos tangentes en el origen.



Use la regla de la cadena para demostrar que la regla de potencias $(d/dx)x^n = nx^{n-1}$ se cumple para las funciones x^n en los ejercicios 109 y 110.

109. $x^{1/4} = \sqrt{\sqrt{x}}$

110. $x^{3/4} = \sqrt{x\sqrt{x}}$

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

Polinomios trigonométricos

111. Como muestra la figura 3.34, el "polinomio" trigonométrico

$$s = f(t) = 0.78540 - 0.63662\cos 2t - 0.07074\cos 6t$$
$$-0.02546\cos 10t - 0.01299\cos 14t$$

da una buena aproximación de la función serrucho $s = g(t)$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$. ¿Qué tan bien aproxima la derivada de f a la derivada de g en los puntos donde dg/dt está definida? Para encontrarlo, lleve a cabo los pasos siguientes.

a. Grafique dg/dt (donde esté definida) en $[-\pi, \pi]$.

b. Encuentre df/dt.

c. Grafique df/dt. ¿En dónde la aproximación de dg/dt por df/dt parece ser mejor? ¿En dónde parece menos buena? Las aproximaciones mediante polinomios trigonométricos son importantes en las teorías del calor y de oscilacion pero, como veremos en el ejercicio siguiente, no debemos esperar mucho de ellas.

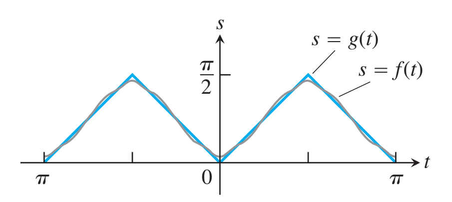


FIGURA 3.34 La aproximación de la función serrucho por un "polinomio" trigonométrico (ejercicio 111).

112. (*Continuación del ejercicio 111*). En el ejercicio 111, el polinomio trigonométrico $f(t)$ que aproxima la función serrucho $g(t)$ en $[-\pi, \pi]$ tenía una derivada que aproximaba la derivada de la función serrucho. Sin embargo, es posible que un polinomio trigonométrico aproxime una función de manera razonable y que, al mismo tiempo, su derivada no aproxime tan bien la derivada de la función. Como ejemplo, el "polinomio"

$$s = h(t) = 1.2732 \text{ sen } 2t + 0.4244 \text{ sen } 6t + 0.25465 \text{ sen } 10t + 0.18189 \text{ sen } 14t + 0.14147 \text{ sen } 18t$$

graficado en la figura 3.35, aproxima la función escalonada $s = k(t)$. No obstante la derivada de h no se parece a la derivada de k.

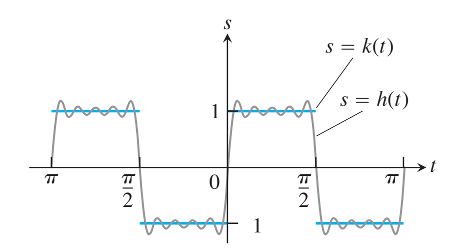


FIGURA 3.35 La aproximación de una función escalonada por un "polinomio" trigonométrico (ejercicio 112).

a. Grafique dk/dt (donde esté definida) en $[-\pi, \pi]$.

b. Encuentre dh/dt.

c. Grafique dh/dt para ver lo mal que se ajusta a la gráfica de dk/dt. Comente lo que ve.

Curvas parametrizadas

Use un software matemático para realizar los pasos siguientes en las curvas parametrizadas de los ejercicios 113-116.

a. Grafique la curva para el intervalo dado de los valores de t.

b. Encuentre dy/dx y d^2y/dx^2 en el punto t_0.

c. Encuentre una ecuación para la recta tangente a la curva en el punto definido por el valor dado t_0. Grafique juntas la curva y la recta tangente.

113. $x = \frac{1}{3}t^3, \quad y = \frac{1}{2}t^2, \quad 0 \le t \le 1, \quad t_0 = 1/2$

114. $x = 2t^3 - 16t^2 + 25t + 5, \quad y = t^2 + t - 3, \quad 0 \le t \le 6, \quad t_0 = 3/2$

115. $x = t - \cos t, \quad y = 1 + \text{sen } t, \quad -\pi \le t \le \pi, \quad t_0 = \pi/4$

116. $x = e^t \cos t, \quad y = e^t \text{ sen } t, \quad 0 \le t \le \pi, \quad t_0 = \pi/2$

3.6 Diferenciación implícita

Casi todas las funciones de las que hemos hablado hasta aquí se han definido mediante una ecuación de la forma $y = f(x)$ que expresa y explícitamente en términos de la variable x. Hemos aprendido reglas para derivar funciones definidas de esta manera. En la sección 3.5 también aprendimos cómo encontrar la derivada dy/dx, cuando la curva está definida paramétricamente, mediante las ecuaciones $x = x(t)$ y $y = y(t)$. Una tercera situación ocurre cuando encontramos ecuaciones como

$$x^2 + y^2 - 25 = 0, \qquad y^2 - x = 0, \qquad \text{o} \quad x^3 + y^3 - 9xy = 0.$$

(Vea las figuras 3.36, 3.37 y 3.38). Estas ecuaciones definen una relación *implícita* entre las variables x y y. En algunos casos, podremos despejar y de tales ecuaciones como una función explícita (o quizás como varias funciones) de x. Cuando no es posible dar a la ecuación $F(x, y) = 0$ la forma $y = f(x)$ para derivarla de la manera usual, tal vez se pueda encontrar dy/dx mediante *diferenciación implícita*. Esto consiste en derivar ambos lados de la ecuación con respecto a x y después resolver la ecuación resultante para y'. En esta sección se describe la técnica, misma que utilizaremos para extender la regla de potencias para diferenciación con el propósito de que incluya exponentes racionales. En los ejemplos y ejercicios de esta sección siempre se supondrá que la ecuación dada determina y implícitamente como una función diferenciable de x.

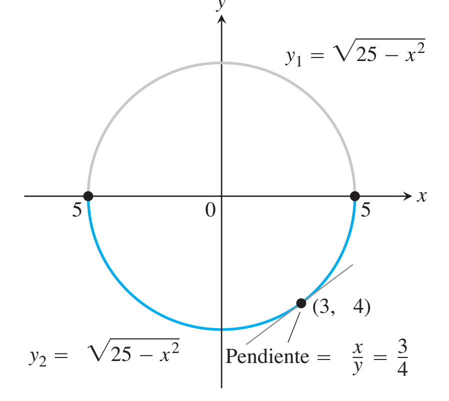


FIGURA 3.36 El círculo combina las gráficas de dos funciones. La gráfica de y_2 es el semicírculo inferior, y pasa por $(3, -4)$.

Funciones definidas implícitamente

Empecemos con un ejemplo.

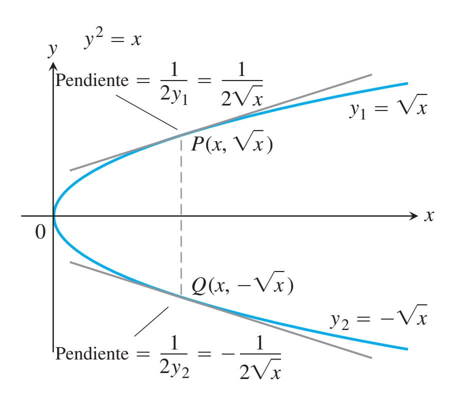


FIGURA 3.37 La ecuación $y^2 - x = 0$ o $y^2 = x$ como se suele escribir, define dos funciones diferenciables de x en el intervalo $x \geq 0$. El ejemplo 1 muestra cómo encontrar las derivadas de estas funciones sin resolver la ecuación $y^2 = x$ para x.

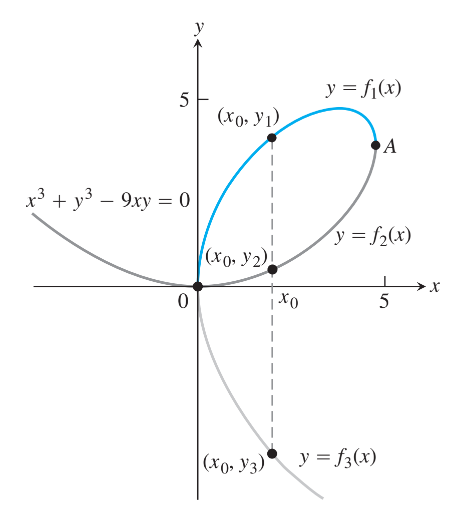


FIGURA 3.38 La curva $x^2 + y^2 - 9xy = 0$ no es la gráfica de ninguna función de x. Sin embargo, la curva se puede dividir en arcos separados que son las gráficas de funciones de x. Esta curva en particular, llamada *folium*, fue descrita por Descartes en 1638.

EJEMPLO 1 Diferenciación implícita

Encontrar dy/dx si $y^2 = x$.

Solución La ecuación $y^2 = x$ define dos funciones diferenciables de x que podemos encontrar, a saber, $y_1 = \sqrt{x}$ y $y_2 = -\sqrt{x}$ (figura 3.37). Sabemos cómo calcular la derivada de cada una de ellas para $x > 0$:

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{y} \quad \frac{dy_2}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Pero supongamos que sólo sabemos que la ecuación $y^2 = x$ define y como una o más funciones diferenciables de x para $x > 0$, sin saber exactamente cómo son estas funciones. ¿Es posible encontrar dy/dx en tales condiciones?

La respuesta es sí. Para encontrar dy/dx simplemente derivamos ambos lados de la ecuación $y^2 = x$ con respecto a x, tratando a $y = f(x)$ como una función diferenciable de x:

$$y^2 = x \qquad \text{La regla de la cadena da } \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}[f(x)]^2 = 2f(x)f'(x) = 2y\frac{dy}{dx}.$$

$$2y\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}.$$

Esta fórmula da las derivadas que calculamos para *ambas* soluciones explícitas, $y_1 = \sqrt{x}$ y $y_2 = -\sqrt{x}$:

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{2y_1} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{y} \quad \frac{dy_2}{dx} = \frac{1}{2y_2} = \frac{1}{2(-\sqrt{x})} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$ ■

EJEMPLO 2 Pendiente de un círculo en un punto

Encontrar la pendiente del círculo $x^2 + y^2 = 25$ en el punto (3, –4).

Solución El círculo no es la gráfica de una sola función de x. Más bien es la combinación de dos gráficas de funciones diferenciables $y_1 = \sqrt{25 - x^2}$ y $y_2 = -\sqrt{25 - x^2}$ (figura 3.36). El punto (3, –4) está en la gráfica de y_2 de manera que podemos encontrar la pendiente calculando explícitamente:

$$\left.\frac{dy_2}{dx}\right|_{x=3} = -\left.\frac{-2x}{2\sqrt{25 - x^2}}\right|_{x=3} = -\frac{-6}{2\sqrt{25 - 9}} = \frac{3}{4}.$$

Pero también podemos resolver el problema más fácilmente, derivando implícitamente la ecuación dada del círculo con respecto a x:

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(25)$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

La pendiente en (3, –4) es $\left.-\frac{x}{y}\right|_{(3,-4)} = -\frac{3}{-4} = \frac{3}{4}.$

Observe que, a diferencia de la fórmula de la pendiente para dy_2/dx, que sólo se aplica a los puntos que están debajo del eje x, la fórmula $dy/dx = -x/y$ se aplica a todos los puntos donde el círculo tiene una pendiente. Observe también que la derivada involucra *ambas* variables, x y y, no sólo a la variable independiente x. ■

Para calcular las derivadas de otras funciones definidas implícitamente, procedemos como en los ejemplos 1 y 2. Tratamos a y como una función implícita diferenciable de x y aplicamos las reglas usuales de diferenciación a ambos lados de la ecuación definida.

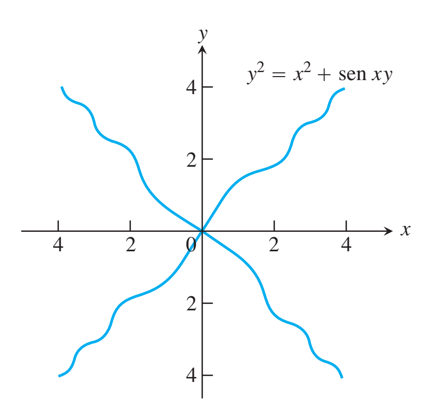


FIGURA 3.39 La gráfica de $y^2 = x^2 + \text{sen}\, xy$ del ejemplo 3. El ejemplo muestra cómo encontrar las pendientes en esta curva definida implícitamente.



EJEMPLO 3 Diferenciar implícitamente

Encontrar dy/dx si $y^2 = x^2 + \text{sen}\, xy$ (figura 3.39).

Solución

$$y^2 = x^2 + \text{sen}\, xy$$

$$\frac{d}{dx}\left(y^2\right) = \frac{d}{dx}\left(x^2\right) + \frac{d}{dx}\left(\text{sen}\, xy\right) \qquad \text{Diferenciar ambos lados con respecto a } x \ldots$$

$$2y\frac{dy}{dx} = 2x + (\cos xy)\frac{d}{dx}(xy) \qquad \ldots \text{ tratar a } y \text{ como una función de } x \text{ y usar la regla de la cadena}$$

$$2y\frac{dy}{dx} = 2x + (\cos xy)\left(y + x\frac{dy}{dx}\right) \qquad \text{Tratar a } xy \text{ como un producto.}$$

$$2y\frac{dy}{dx} - (\cos xy)\left(x\frac{dy}{dx}\right) = 2x + (\cos xy)y \qquad \text{Agrupar los términos con } dy/dx \ldots$$

$$(2y - x\cos xy)\frac{dy}{dx} = 2x + y\cos xy \qquad \ldots \text{ y factorizar } dy/dx.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y\cos xy}{2y - x\cos xy} \qquad \text{Resolver para } dy/dx \text{ dividiendo.}$$

Observe que la fórmula para dy/dx se aplica dondequiera que la curva definida implícitamente tenga una pendiente. Observe asimismo que la derivada no sólo involucra la variable independientemente x, sino a *ambas* variables, x y y. ■

Diferenciación implícita

1. Diferenciar ambos lados con respecto a x, tratando a y como una función diferenciable de x.
2. Agrupar los términos con dy/dx en un lado de la ecuación.
3. Resolver para dy/dx.

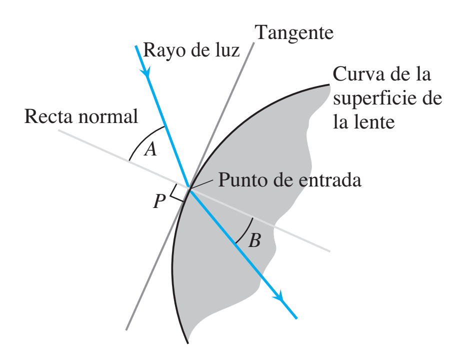


FIGURA 3.40 El perfil de una lente, mostrando la refracción de un rayo de luz conforme pasa a través de su superficie.

Lentes, tangentes y rectas normales

En la ley que describe cómo cambia de dirección la luz conforme entra en una lente, los ángulos importantes son aquellos que hace la luz con la recta perpendicular a la superficie de la lente en el punto de entrada (ángulos A y B en la figura 3.40). La recta se llama la *normal* a la superficie en el punto de entrada. Si vemos la lente de perfil, como en la figura 3.40, la **normal** es la recta perpendicular a la tangente a la curva del perfil en el punto de entrada.

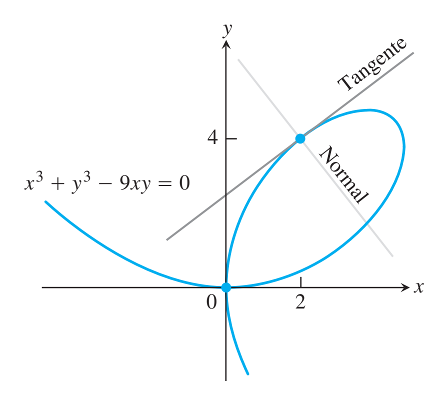


FIGURA 3.41 El ejemplo 4 muestra cómo encontrar las ecuaciones para la tangente y la normal del *folium* de Descartes en (2, 4).

EJEMPLO 4 Tangente y normal al folium de Descartes

Mostrar que el punto (2, 4) está en la curva $x^3 + y^3 - 9xy = 0$. Después, encontrar la tangente y la normal a la curva en ese punto (figura 3.41).

Solución El punto (2, 4) está en la curva, ya que sus coordenadas satisfacen la ecuación dada para ésta: $2^3 + 4^3 - 9(2)(4) = 8 + 64 - 72 = 0$.

Para encontrar la pendiente de la curva en (2, 4), primero usamos diferenciación implícita para encontrar una fórmula para dy/dx:

$$x^3 + y^3 - 9xy = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^3\right) + \frac{d}{dx}\left(y^3\right) - \frac{d}{dx}\left(9xy\right) = \frac{d}{dx}\left(0\right)$$ Diferenciar ambos lados con respecto a x.

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} - 9\left(x\frac{dy}{dx} + y\frac{dx}{dx}\right) = 0$$ Tratar xy como un producto y a y como una función de x.

$$(3y^2 - 9x)\frac{dy}{dx} + 3x^2 - 9y = 0$$

$$3(y^2 - 3x)\frac{dy}{dx} = 9y - 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y - x^2}{y^2 - 3x}.$$ Resolver para dy/dx.

Después evaluamos la derivada en $(x, y) = (2, 4)$:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2,4)} = \left.\frac{3y - x^2}{y^2 - 3x}\right|_{(2,4)} = \frac{3(4) - 2^2}{4^2 - 3(2)} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}.$$

La tangente en (2, 4) es la recta que pasa por (2, 4) con pendiente 4/5:

$$y = 4 + \frac{4}{5}\left(x - 2\right)$$

$$y = \frac{4}{5}x + \frac{12}{5}.$$

La normal a la curva en (2, 4) es la recta perpendicular a la tangente en dicho punto, la recta que pasa por (2, 4) y tiene pendiente $-5/4$:

$$y = 4 - \frac{5}{4}(x - 2)$$

$$y = -\frac{5}{4}x + \frac{13}{2}.$$

■

La fórmula cuadrática nos permite resolver una ecuación de segundo grado como $y^2 - 2xy + 3x^2 = 0$ para y en términos de x. Hay una fórmula para las tres raíces de una ecuación cúbica, que es como la fórmula cuadrática, pero mucho más complicada. Si se usa esta fórmula para resolver la ecuación $x^3 + y^3 = 9xy$ para y en términos de x, las tres funciones determinadas por la ecuación son

$$y = f(x) = \sqrt[3]{-\frac{x^3}{2} + \sqrt{\frac{x^6}{4} - 27x^3}} + \sqrt[3]{-\frac{x^3}{2} - \sqrt{\frac{x^6}{4} - 27x^3}}$$

y

$$y = \frac{1}{2}\left[-f(x) \pm \sqrt{-3}\left(\sqrt[3]{-\frac{x^3}{2} + \sqrt{\frac{x^6}{4} - 27x^3}} - \sqrt[3]{-\frac{x^3}{2} - \sqrt{\frac{x^6}{4} - 27x^3}}\right)\right].$$

En el ejemplo 4 fue mucho más fácil usar diferenciación implícita que calcular dy/dx directamente a partir de las fórmulas anteriores. Para encontrar las pendientes en curvas definidas por ecuaciones de grado superior, por lo general, se requiere diferenciación implícita.

Derivadas de orden superior

También podemos usar la diferenciación implícita para encontrar derivadas de orden superior. Veamos un ejemplo.

EJEMPLO 5 Encontrar implícitamente una segunda derivada

Encontrar d^2y/dx^2 si $2x^3 - 3y^2 = 8$.

Solución Para empezar, derivamos ambos lados de la ecuación con respecto a x para encontrar $y' = dy/dx$.

$$\frac{d}{dx}\left(2x^3 - 3y^2\right) = \frac{d}{dx}(8)$$

$$6x^2 - 6yy' = 0 \qquad \text{Tratar } y \text{ como una función de } x.$$

$$x^2 - yy' = 0$$

$$y' = \frac{x^2}{y}, \qquad \text{cuando } y \neq 0 \quad \text{Resolver para } y'.$$

Ahora aplicamos la regla del cociente para encontrar y''.

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{y}\right) = \frac{2xy - x^2y'}{y^2} = \frac{2x}{y} - \frac{x^2}{y^2}\cdot y'$$

Finalmente, sustituimos $y' = x^2/y$ para expresar y'' en términos de x y y.

$$y'' = \frac{2x}{y} - \frac{x^2}{y^2}\left(\frac{x^2}{y}\right) = \frac{2x}{y} - \frac{x^4}{y^3}, \qquad \text{cuando } y \neq 0$$

■

Potencias racionales de funciones diferenciables

Sabemos que la regla

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

se satisface cuando n es un entero. Usando diferenciación implícita podemos probar que también se satisface cuando n es cualquier número racional.

TEOREMA 4 Regla de potencias para potencias racionales

Si p/q es un número racional, entonces $x^{p/q}$ es diferenciable en todo punto interior del dominio de $x^{(p/q)-1}$, y

$$\frac{d}{dx}x^{p/q} = \frac{p}{q}x^{(p/q)-1}.$$

EJEMPLO 6 Uso de la regla de potencias racionales

(a) $\dfrac{d}{dx}\left(x^{1/2}\right) = \dfrac{1}{2}x^{-1/2} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ para $x > 0$

(b) $\dfrac{d}{dx}\left(x^{2/3}\right) = \dfrac{2}{3}x^{-1/3}$ para $x \neq 0$

(c) $\dfrac{d}{dx}\left(x^{-4/3}\right) = -\dfrac{4}{3}x^{-7/3}$ para $x \neq 0$ ■

Demostración del teorema 4 Sean p y q enteros con $q > 0$ y supongamos que $y = \sqrt[q]{x^p} = x^{p/q}$. Entonces

$$y^q = x^p.$$

Como p y q son enteros (para los que ya tenemos la regla de potencias), y suponiendo que y es una función diferenciable de x, podemos derivar ambos lados de la ecuación con respecto a x y obtener

$$qy^{q-1}\frac{dy}{dx} = px^{p-1}.$$

Si $y \neq 0$, podemos dividir ambos lados de la ecuación entre qy^{q-1} para resolver para dy/dx, obteniendo

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{px^{p-1}}{qy^{q-1}} \\
&= \frac{p}{q}\cdot\frac{x^{p-1}}{(x^{p/q})^{q-1}} && y = x^{p/q} \\
&= \frac{p}{q}\cdot\frac{x^{p-1}}{x^{p-p/q}} && \frac{p}{q}(q-1) = p - \frac{p}{q} \\
&= \frac{p}{q}\cdot x^{(p-1)-(p-p/q)} && \text{Una ley de exponentes} \\
&= \frac{p}{q}\cdot x^{(p/q)-1},
\end{aligned}$$

lo cual prueba la regla. ■

En el capítulo 7, dejaremos el supuesto de diferenciabilidad usado en la prueba del teorema 4; ahí demostraremos la regla de potencias para cualquier exponente real distinto de cero. (Vea la sección 7.3).

Combinando el resultado del teorema 4 con la regla de la cadena, obtenemos una extensión de la regla de la cadena de potencias a potencias racionales de u: Si p/q es un número racional y u es una función diferenciable de x, entonces $u^{p/q}$ es una función diferenciable de x y

$$\frac{d}{dx}u^{p/q} = \frac{p}{q}u^{(p/q)-1}\frac{du}{dx},$$

siempre y cuando $u \neq 0$ si $(p/q) < 1$. La restricción es necesaria, ya que 0 podría estar en el dominio de $u^{p/q}$ pero no en el dominio de $u^{(p/q)-1}$, como veremos en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 7 Uso de las reglas de potencias racionales y de la cadena

(a) $$\frac{d}{dx}\underbrace{\left(1-x^2\right)^{1/4}}_{\text{función definida en }[-1,\,1]} = \frac{1}{4}\left(1-x^2\right)^{-3/4}(-2x) \qquad \text{Regla de la cadena de potencias con } u = 1 - x^2$$

$$= \underbrace{\frac{-x}{2\left(1-x^2\right)^{3/4}}}_{\text{derivada definida sólo en }(-1,\,1)}$$

(b) $$\frac{d}{dx}(\cos x)^{-1/5} = -\frac{1}{5}(\cos x)^{-6/5}\frac{d}{dx}(\cos x)$$

$$= -\frac{1}{5}(\cos x)^{-6/5}(-\operatorname{sen} x)$$

$$= \frac{1}{5}(\operatorname{sen} x)(\cos x)^{-6/5}$$

■

EJERCICIOS 3.6

Derivadas de potencias racionales

Encuentre dy/dx en los ejercicios 1 a 10

1. $y = x^{9/4}$

2. $y = x^{-3/5}$

3. $y = \sqrt[3]{2x}$

4. $y = \sqrt[4]{5x}$

5. $y = 7\sqrt{x+6}$

6. $y = -2\sqrt{x-1}$

7. $y = (2x+5)^{-1/2}$

8. $y = (1-6x)^{2/3}$

9. $y = x(x^2+1)^{1/2}$

10. $y = x(x^2+1)^{-1/2}$

Encuentre la primera derivada de las funciones de los ejercicios 11 a 18.

11. $s = \sqrt[7]{t^2}$

12. $r = \sqrt[4]{\theta^{-3}}$

13. $y = \operatorname{sen}\left[(2t+5)^{-2/3}\right]$

14. $z = \cos\left[(1-6t)^{2/3}\right]$

15. $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{x}}$

16. $g(x) = 2(2x^{-1/2}+1)^{-1/3}$

17. $h(\theta) = \sqrt[3]{1+\cos(2\theta)}$

18. $k(\theta) = (\operatorname{sen}(\theta+5))^{5/4}$

Diferenciación implícita

Use diferenciación implícita para encontrar dy/dx en los ejercicios 19 a 32.

19. $x^2y + xy^2 = 6$

20. $x^3 + y^3 = 18xy$

21. $2xy + y^2 = x + y$

22. $x^3 - xy + y^3 = 1$

23. $x^2(x-y)^2 = x^2 - y^2$

24. $(3xy+7)^2 = 6y$

25. $y^2 = \dfrac{x-1}{x+1}$

26. $x^2 = \dfrac{x-y}{x+y}$

27. $x = \tan y$

28. $xy = \cot(xy)$

29. $x + \tan(xy) = 0$

30. $x + \operatorname{sen} y = xy$

31. $y \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{y}\right) = 1 - xy$

32. $y^2 \cos\left(\dfrac{1}{y}\right) = 2x + 2y$

Encuentre $dr/d\theta$ en los ejercicios 33 a 36.

33. $\theta^{1/2} + r^{1/2} = 1$

34. $r - 2\sqrt{\theta} = \frac{3}{2}\theta^{2/3} + \frac{4}{3}\theta^{3/4}$

35. $\operatorname{sen}(r\theta) = \dfrac{1}{2}$

36. $\cos r + \cot\theta = r\theta$

Segundas derivadas

En los ejercicios 37 a 42, use diferenciación implícita para encontrar dy/dx y después d^2y/dx^2.

37. $x^2 + y^2 = 1$

38. $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$

39. $y^2 = x^2 + 2x$

40. $y^2 - 2x = 1 - 2y$

41. $2\sqrt{y} = x - y$

42. $xy + y^2 = 1$

43. Si $x^3 + y^3 = 16$, encuentre el valor de d^2y/dx^2 en el punto (2, 2).

44. Si $xy + y^2 = 1$, encuentre el valor de d^2y/dx^2 en el punto $(0, -1)$.

Pendientes, tangentes y normales

En los ejercicios 45 y 46, encuentre la pendiente de la curva en los puntos dados.

45. $y^2 + x^2 = y^4 - 2x$ en $(-2, 1)$ y $(-2, -1)$

46. $(x^2 + y^2)^2 = (x - y)^2$ en $(1, 0)$ y $(1, -1)$

En los ejercicios 47 a 56, verifique que el punto dado está en la curva y encuentre las rectas que son **(a)** tangente y **(b)** normal a la curva en el punto dado.

47. $x^2 + xy - y^2 = 1$, $(2, 3)$

48. $x^2 + y^2 = 25$, $(3, -4)$

49. $x^2y^2 = 9$, $(-1, 3)$

50. $y^2 - 2x - 4y - 1 = 0, \quad (-2, 1)$

51. $6x^2 + 3xy + 2y^2 + 17y - 6 = 0, \quad (-1, 0)$

52. $x^2 - \sqrt{3}xy + 2y^2 = 5, \quad (\sqrt{3}, 2)$

53. $2xy + \pi \operatorname{sen} y = 2\pi, \quad (1, \pi/2)$

54. $x \operatorname{sen} 2y = y \cos 2x, \quad (\pi/4, \pi/2)$

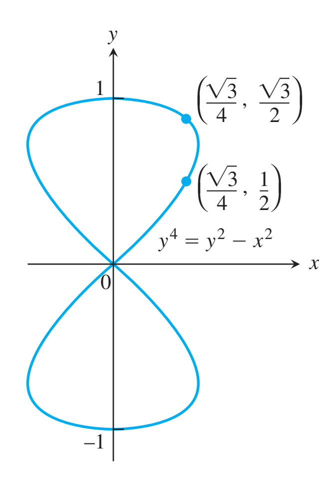
55. $y = 2 \operatorname{sen}(\pi x - y), \quad (1, 0)$

56. $x^2 \cos^2 y - \operatorname{sen} y = 0, \quad (0, \pi)$

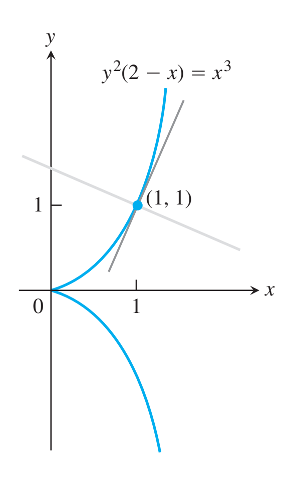
57. Tangentes paralelas Encuentre los dos puntos donde la curva $x^2 + xy + y^2 = 7$ cruza el eje x y muestre que las tangentes a la curva en esos puntos son paralelas. ¿Cuál es la pendiente común de estas tangentes?

58. Tangentes paralelas a los ejes coordenados En la curva $x^2 + xy + y^2 = 7$, encuentre los puntos **(a)** donde la tangente es paralela al eje x y **(b)** donde la tangente es paralela al eje y. En el último caso dx/dy no está definida, pero dy/dx sí. ¿Qué valores tiene dx/dy en esos puntos?

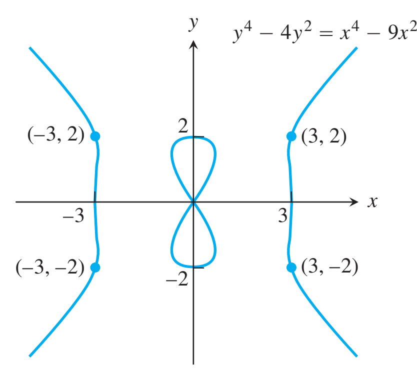
59. La curva ocho Determine las pendientes de la curva $y^4 = y^2 - x^2$ en los dos puntos que se muestran aquí.



60. La cisoide de Diocles (cerca de 200 a. C.) Encuentre las ecuaciones de la tangente y la normal de la cisoide de Diocles: $y^2(2 - x) = x^3$ en $(1, 1)$.



61. La curva del diablo (Gabriel Cramer, autor de la regla de Cramer, 1750) Encuentre las pendientes de la curva del diablo $y^4 - 4y^2 = x^4 - 9x^2$ en los cuatro puntos indicados.



62. El *folium* de Descartes (Vea la figura 3.38)

a. Encuentre la pendiente del *folium* de Descartes, $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ en los puntos $(4, 2)$ y $(2, 4)$.

b. ¿En qué otro punto distinto del origen el *folium* tiene una tangente horizontal?

c. Encuentre las coordenadas del punto A en la figura 3.38, donde el *folium* tiene una tangente vertical.

Parametrizaciones definidas implícitamente

Suponiendo que las ecuaciones de los ejercicios 63 a 66 definen implícitamente x y y como funciones diferenciables $x = f(t), y = g(t)$, determine la pendiente de la curva $x = f(t), y = g(t)$, en el valor dado de t.

63. $x^2 - 2tx + 2t^2 = 4, \quad 2y^3 - 3t^2 = 4, \quad t = 2$

64. $x = \sqrt{5 - \sqrt{t}}, \quad y(t - 1) = \sqrt{t}, \quad t = 4$

65. $x + 2x^{3/2} = t^2 + t, \quad y\sqrt{t + 1} + 2t\sqrt{y} = 4, \quad t = 0$

66. $x \operatorname{sen} t + 2x = t, \quad t \operatorname{sen} t - 2t = y, \quad t = \pi$

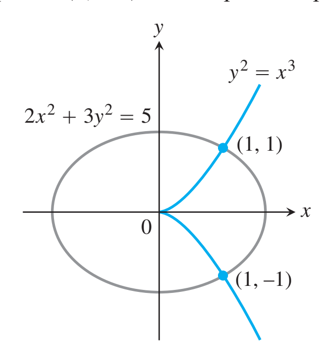
Teoría y ejemplos

67. ¿Cuáles de las siguientes expresiones podrían ser ciertas si $f''(x) = x^{-1/3}$?

a. $f(x) = \frac{3}{2}x^{2/3} - 3$ **b.** $f(x) = \frac{9}{10}x^{5/3} - 7$

c. $f'''(x) = -\frac{1}{3}x^{-4/3}$ **d.** $f'(x) = \frac{3}{2}x^{2/3} + 6$

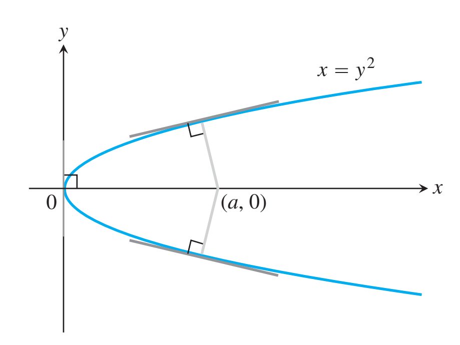
68. ¿Qué tienen de especial las tangentes a las curvas $y^2 = x^3$ y $2x^2 + 3y^2 = 5$ en los puntos $(1, \pm 1)$? Justifique su respuesta.



69. Normal que interseca ¿En qué otro punto la recta normal a la curva $x^2 + 2xy - 3y^2 = 0$ en (1, 1) interseca la curva?

70. Normales paralelas a una recta Encuentre las normales a la curva $xy + 2x - y = 0$ que son paralelas a la recta $2x + y = 0$.

71. Normales a una parábola Demuestre que si es posible dibujar las tres normales desde el punto $(a, 0)$ a la parábola $x = y^2$ que se muestra aquí, entonces a deber ser mayor que 1/2. Una de las normales es el eje x. ¿Para qué valor de a son perpendiculares las otras dos normales?



72. ¿Qué conceptos geométricos están detrás de las restricciones en los dominios de las derivadas de los ejemplos 6(b) y 7(a)?

T En los ejercicios 73 y 74, encuentre dy/dx (tratando y como una función diferenciable de x) y dx/dy (tratando x como una función diferenciable de y) ¿Cómo parecen estar relacionadas dy/dx y dx/dy? Explique la relación geométricamente, en términos de las gráficas.

73. $xy^3 + x^2y = 6$

74. $x^3 + y^2 = \operatorname{sen}^2 y$

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

75. a. Dado que $x^4 + 4y^2 = 1$, encuentre dy/dx de dos maneras: (1) resolviendo para y y derivando la función resultante de la forma usual, y (2) mediante diferenciación implícita. ¿Obtuvo el mismo resultado en ambos casos?

b. Resuelva la ecuación $x^4 + 4y^2 = 1$ para y y grafique juntas las funciones resultantes para obtener la gráfica completa de la ecuación $x^4 + 4y^2 = 1$. Después, agregue las gráficas de las primeras derivadas de estas funciones a su pantalla. ¿Podría predecir el comportamiento general de las gráficas de las primeras derivadas a partir de la observación de la gráfica de $x^4 + 4y^2 = 1$? ¿Podría predecir el comportamiento general de la gráfica de $x^4 + 4y^2 = 1$ a partir de la observación de la gráfica de las derivadas? Justifique sus respuestas.

76. a. Dado que $(x - 2)^2 + y^2 = 4$, encuentre dy/dx de dos maneras: (1) resolviendo para y y derivando las funciones resultantes con respecto a x y (2) mediante diferenciación implícita. ¿Obtuvo el mismo resultado en ambos casos?

b. Resuelva la ecuación $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ para y y grafique juntas las funciones resultantes para obtener la gráfica completa de la ecuación $(x - 2)^2 + y^2 = 4$. Después agregue las gráficas de las primeras derivadas de la función a su pantalla.¿Podría predecir el comportamiento general de las gráficas de las derivadas a partir de la observación de la gráfica de $(x - 2)^2 + y^2 = 4$? ¿Podría predecir el comportamiento general de la gráfica de $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ a partir de la observación de la gráfica de las derivadas? Justifique sus respuestas.

Use un software matemático para realizar los pasos siguientes en los ejercicios 77 a 84.

a. Dibuje la ecuación con el graficador implícito del software. Verifique que el punto dado P satisface la ecuación.

b. Usando diferenciación implícita, encuentre una fórmula para la derivada dy/dx y evalúela en el punto dado P.

c. Use la pendiente determinada en el inciso (b) para encontrar una ecuación para la recta tangente a la curva en P. Después trace juntas, en una sola gráfica, la curva implícita y la recta tangente.

77. $x^3 - xy + y^3 = 7, \quad P(2, 1)$

78. $x^5 + y^3x + yx^2 + y^4 = 4, \quad P(1, 1)$

79. $y^2 + y = \dfrac{2 + x}{1 - x}, \quad P(0, 1)$

80. $y^3 + \cos xy = x^2, \quad P(1, 0)$

81. $x + \tan\left(\dfrac{y}{x}\right) = 2, \quad P\left(1, \dfrac{\pi}{4}\right)$

82. $xy^3 + \tan(x + y) = 1, \quad P\left(\dfrac{\pi}{4}, 0\right)$

83. $2y^2 + (xy)^{1/3} = x^2 + 2, \quad P(1, 1)$

84. $x\sqrt{1 + 2y} + y = x^2, \quad P(1, 0)$

3.7 Razones de cambio o tasas relacionadas

En esta sección veremos problemas cuya incógnita es la razón a la que cambia cierta variable. En cada caso, la tasa es la derivada que tiene que calcularse a partir de conocer la razón a la cual cambia alguna otra variable (o quizás varias variables). Para encontrarla escribimos una ecuación que relacione las variables involucradas, y la derivamos para obtener una ecuación que relacione la tasa que buscamos con las razones de cambio que conocemos. El problema de encontrar una tasa que no se puede medir fácilmente a partir de otras tasas que sí se pueden determinar se llama *problema de razones de cambio relacionas*.

Ecuaciones de tasas relacionadas

Suponga que estamos bombeando aire en un globo esférico. Tanto el volumen como el radio del globo crecen con el tiempo. Si V es el volumen y r es el radio del globo en un instante determinado, entonces

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Usando la regla de la cadena, derivamos para encontrar la ecuación de tasas relacionadas

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}.$$

De manera que si conocemos el radio r del globo y la razón dV/dt en la que el volumen está creciendo en un instante dado, podemos resolver esta última ecuación para dr/dt a fin de encontrar qué tan rápido crece el radio en ese instante. Observe que es más fácil medir directamente la razón de cambio de crecimiento del volumen que medir el crecimiento del radio. La ecuación de tasas relacionadas nos permite calcular dr/dt a partir de dV/dt

A menudo la clave para relacionar variables en problemas de tasas relacionadas consiste en hacer un dibujo que muestre las relaciones geométricas entre ellas, como se ilustra en el ejemplo siguiente.



EJEMPLO 1 Vaciado de un tanque

¿Qué tan rápido baja el nivel de líquido en un tanque cilíndrico vertical, si drenamos aquel a una razón de 3000 L/min?

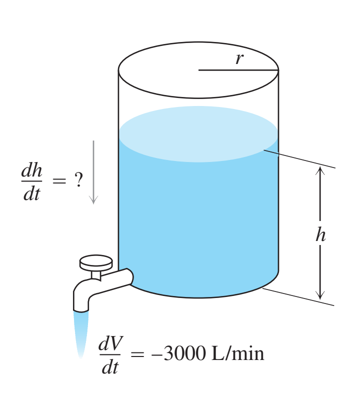


FIGURA 3.42 La razón de cambio del volumen de un fluido en un tanque cilíndrico se relaciona con la razón de cambio del nivel del fluido en el tanque (ejemplo 1).

Solución Hacemos un dibujo para representar un tanque cilíndrico vertical medio lleno, y llamamos r a su radio y h a la altura del líquido (figura 3.42). Denominemos V al volumen del líquido.

Conforme pasa el tiempo, el radio permanece constante, pero V y h cambian. Pensamos en V y h como funciones diferenciables del tiempo y usamos t para representar el tiempo. Sabemos que

$$\frac{dV}{dt} = -3000.$$

Drenamos a razón de 3000 L/min. La razón es negativa, ya que el volumen está decreciendo.

Queremos encontrar

$$\frac{dh}{dt}.$$

¿Qué tan rápido baja el nivel del líquido?

Para encontrar dh/dt, primero escribimos una ecuación que relacione h con V. La ecuación depende de las unidades elegidas para V, r y h. Con V en litros y r y h en metros, la ecuación apropiada para determinar el volumen del cilindro es

$$V = 1000\pi r^2 h$$

ya que un metro cúbico contiene 1000 L.

Como V y h son funciones diferenciables de t, podemos derivar ambos lados de la ecuación $V = 1000\pi r^2 h$ con respecto a t para obtener una ecuación que relacione dh/dt con dV/dt:

$$\frac{dV}{dt} = 1000\pi r^2 \frac{dh}{dt}.$$

r es una constante.

Sustituimos el valor conocido $dV/dt = -3000$ y resolvemos para dh/dt:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{-3000}{1000\pi r^2} = -\frac{3}{\pi r^2}.$$

El nivel del líquido bajará a razón de $3/(\pi r^2)$ m/min.

La ecuación $dh/dt = -3/\pi r^2$ muestra cómo la razón a la que el nivel del líquido baja, depende del radio del tanque. Si r es pequeño, dh/dt será grande; si r es grande, dh/dt será pequeño.

$$\text{Si } r = 1 \text{ m:} \qquad \frac{dh}{dt} = -\frac{3}{\pi} \approx -0.95 \text{ m/min} = -95 \text{ cm/min}.$$

$$\text{Si } r = 10 \text{ m:} \qquad \frac{dh}{dt} = -\frac{3}{100\pi} \approx -0.0095 \text{ m/min} = -0.95 \text{ cm/min}.$$

Estrategia para resolver problemas de razones de cambio o tasas relacionadas

1. *Hacer un dibujo y dar nombre a las variables y a las constantes*. Use t para el tiempo. Suponga que todas las variables son funciones diferenciables de t.
2. *Escribir la información numérica* (en términos de los símbolos que haya escogido).
3. *Escribir lo que se pide encontrar* (usualmente una razón de cambio expresada como derivada).
4. *Escribir una ecuación que relacione las variables*. Puede combinar dos o más ecuaciones para obtener una sola ecuación que relacione la variable cuya razón quiere averiguar con las variables cuyas razones conoce.
5. *Derivar con respecto a t*. Exprese la razón que le interesa determinar en términos de la razón y las variables cuyos valores conoce.
6. *Evaluar*. Use los valores que conoce para encontrar la razón desconocida.

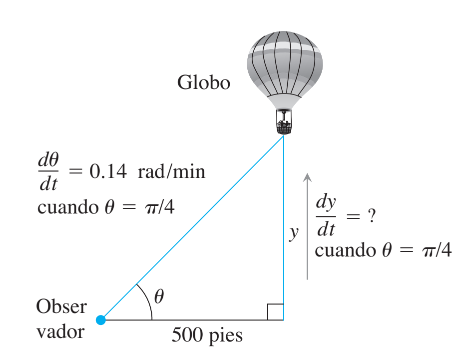


FIGURA 3.43 La razón de cambio de la altura del globo está relacionada con la razón de cambio del ángulo que forman el observador y el suelo (ejemplo 2).

EJEMPLO 2 Un globo ascendente

Un globo de aire caliente que asciende en línea recta desde el nivel del suelo es rastreado por un observador que está a 500 pies del punto de elevación. En el momento que el ángulo de elevación del observador es $\pi/4$, el ángulo crece a razón de 0.14 rad/min. ¿Qué tan rápido se está elevando el globo en ese momento?

Solución Para responder la pregunta anterior, realizamos los seis pasos de la estrategia anterior.

1. *Hacemos un dibujo y damos nombre a las variables y a las constantes* (figura 3.43). Las variables en el dibujo son

   θ = el ángulo, en radianes, que forma el observador con respecto al suelo.

   y = la altura del globo, en pies.

Sea t el tiempo en minutos, y supongamos que θ y y son funciones diferenciables de t.

En el dibujo, la constante es la distancia entre el observador y el punto de despegue del globo (500 pies). No es necesario nombrarla con un símbolo especial.

2. *Escribimos la información numérica adicional*.

$$\frac{d\theta}{dt} = 0.14 \text{ rad/min} \qquad \text{cuando} \qquad \theta = \frac{\pi}{4}$$

3. *Escribimos lo que se pide encontrar*. Queremos determinar dy/dt en el instante en que $\theta = \pi/4$.

4. *Escribimos una ecuación que relaciones las variables y* θ.

$$\frac{y}{500} = \tan\theta \qquad \text{o} \qquad y = 500\tan\theta$$

5. *Derivamos con respecto a t*. Utilizando la regla de la cadena. El resultado nos dice cómo se relaciona dy/dt (la incógnita que queremos determinar) con $d\theta/dt$ (el dato que conocemos).

$$\frac{dy}{dt} = 500\,(\sec^2\theta)\frac{d\theta}{dt}$$

6. *Evaluamos con* $\theta = \pi/4$ *y* $d\theta/dt = 0.14$ *para encontrar* dy/dt.

$$\frac{dy}{dt} = 500\left(\sqrt{2}\right)^2(0.14) = 140 \qquad \sec\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$$

En el momento en cuestión, el globo está subiendo a razón de 140 pies/min. ■

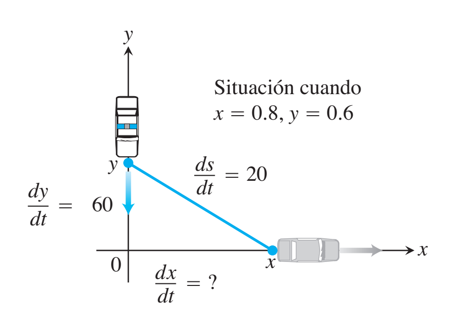


FIGURA 3.44 La rapidez del automóvil se relaciona con la rapidez de la patrulla y la razón de cambio de la distancia entre ambos (ejemplo 3).

EJEMPLO 3 Persecución en la carretera

Una patrulla se aproxima a una intersección en ángulo recto desde el norte, persiguiendo a un automóvil que va a exceso de velocidad, y da vuelta en la esquina hacia el este. Cuando la patrulla se encuentra a 0.6 millas al norte de la intersección y el automóvil está a 0.8 millas al este, los policías determinan con un radar que la distancia entre ellos y el automóvil está aumentando a 20 millas/hora. Si la patrulla se mueve a 60 millas/hora en el instante de la medición, ¿cuál es la velocidad del automóvil?

Solución Dibujamos el automóvil y la patrulla en el plano coordenado, usando el eje x positivo como el lado este de la carretera y el eje y positivo como el lado norte de la misma (figura 3.44). Hacemos que t represente el tiempo y fijamos

x = posición del automóvil en el tiempo t
y = posición de la patrulla en el tiempo t
s = distancia entre el automóvil y la patrulla en el tiempo t

Suponemos que x, y y s son funciones diferenciables de t.

Queremos encontrar dx/dt cuando

$$x = 0.8 \text{ millas},\quad y = 0.6 \text{ millas},\quad \frac{dy}{dt} = -60 \text{ millas/hora},\quad \frac{ds}{dt} = 20 \text{ millas/hora}.$$

Observe que dy/dt es negativo, porque y está decreciendo.

Derivamos la ecuación de la distancia

$$s^2 = x^2 + y^2$$

(también podríamos usar $s = \sqrt{x^2 + y^2}$), y obtenemos

$$2s\frac{ds}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{s}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right).$$

Finalmente usamos $x = 0.8$, $y = 0.6$, $dy/dt = -60$, $ds/dt = 20$, y despejamos dx/dt.

$$20 = \frac{1}{\sqrt{(0.8)^2 + (0.6)^2}}\left(0.8\frac{dx}{dt} + (0.6)(-60)\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{20\sqrt{(0.8)^2 + (0.6)^2} + (0.6)(60)}{0.8} = 70$$

En el momento en cuestión, la velocidad del automóvil es de 70 millas/hora. ■

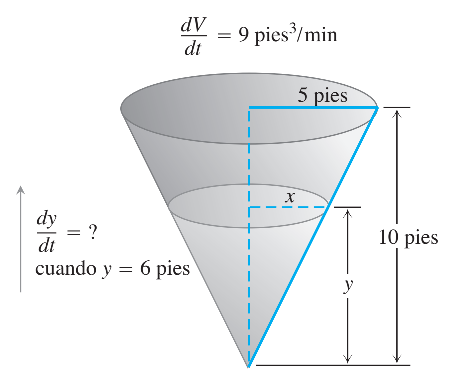


FIGURA 3.45 La geometría del tanque cónico y la razón a la que el agua llena el tanque determina qué tan rápido sube el nivel del agua (ejemplo 4).

EJEMPLO 4 Llenado de un tanque cónico

En un tanque cónico, el agua entra a razón de 9 pies^3/min. El tanque está colocado con el vértice hacia abajo, tiene una altura de 10 pies y el radio de su base mide 5 pies. ¿Qué tan rápido sube el nivel del agua cuando el agua tiene 6 pies de profundidad?

Solución La figura 3.45 muestra un tanque cónico parcialmente lleno. Las variables del problema son:

V = volumen (pies^3) de agua en el tanque en el tiempo t (min)
x = radio (pies) de la superficie del agua en el tiempo t
y = profundidad (pies) del agua en el tanque en el tiempo t

Suponemos que V, x y y son funciones diferenciables de t. Las constantes son las dimensiones del tanque. Nos interesa determinar dy/dt cuando

$$y = 6 \text{ pies} \quad \text{y} \quad \frac{dV}{dt} = 9 \text{ pies}^3/\text{min}.$$

El agua forma un cono con volumen

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 y.$$

La ecuación involucra tanto a x como a V y y. Debido a que no se da información acerca de x ni de dx/dt en el tiempo en cuestión, necesitamos eliminar x. En la figura 3.45 los triángulos semejantes nos dan la manera de expresar x en términos de y:

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{10} \quad \text{o} \quad x = \frac{y}{2}.$$

De donde

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{y}{2}\right)^2 y = \frac{\pi}{12}y^3$$

para obtener la derivada

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{12}\cdot 3y^2\frac{dy}{dt} = \frac{\pi}{4}y^2\frac{dy}{dt}.$$

Finalmente, usamos $y = 6$ y $dV/dt = 9$ para despejar dy/dt.

$$9 = \frac{\pi}{4}(6)^2\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\pi} \approx 0.32$$

En el momento en cuestión, el nivel del agua se eleva alrededor de 0.32 pies/min. ■

EJERCICIOS 3.7

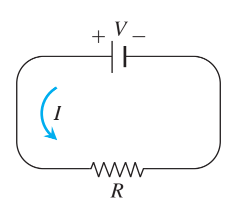
1. **Área** Suponga que el radio r y el área $A = \pi r^2$ de un círculo son funciones diferenciables de t. Escriba una ecuación que relacione dA/dt con dr/dt.

2. **Área de la superficie** Suponga que el radio r y el área de la superficie $S = 4\pi r^2$ de una esfera son funciones diferenciables de t. Escriba una ecuación que relacione dS/dt con dr/dt.

3. **Volumen** El radio r y la altura h de un cilindro circular recto se relacionan con el volumen V del cilindro mediante la fórmula $V = \pi r^2 h$.
   a. ¿Cómo se relaciona dV/dt con dh/dt si r es constante?
   b. ¿Cómo se relaciona dV/dt con dr/dt si h es constante?
   c. ¿Cómo se relaciona dV/dt con dr/dt y dh/dt si r y h no son constantes?

4. **Volumen** El radio r y la altura h de un cono circular recto se relacionan con el volumen V del cono mediante la fórmula $V = (1/3)\pi r^2 h$.
   a. ¿Cómo se relaciona dV/dt con dh/dt si r es constante?
   b. ¿Cómo se relaciona dV/dt con dr/dt si h es constante?
   c. ¿Cómo se relaciona dV/dt con dr/dt y dh/dt si r y h no son constantes?

5. **Cambio de voltaje** El voltaje V (en volts), la corriente I (en amperes) y la resistencia R (en ohms) de un circuito eléctrico como el que se muestra aquí se relacionan mediante la ecuación $V = IR$. Suponga que V está creciendo a una tasa de 1 volt/seg, mientras que I está decreciendo a una tasa de 1/3 amperes/seg. Sea t el tiempo en segundos.



   a. ¿Cuál es el valor de dV/dt?
   b. ¿Cuál es el valor de dI/dt?
   c. ¿Qué ecuación relaciona dR/dt con dV/dt y dI/dt?
   d. Encuentre la razón a la que cambia R cuando $V = 12$ volts e $I = 2$ amperes. ¿R está creciendo o decreciendo?

6. **Corriente eléctrica** La corriente P (en watts) de un circuito eléctrico se relaciona con la resistencia R (en ohms) y la corriente I (en amperes) del circuito mediante la ecuación $P = RI^2$.
   a. ¿Cómo se relacionan dP/dt, dR/dt y dI/dt si P, R e I no son constantes.
   b. ¿Cómo se relaciona dR/dt con dI/dt si P es constante?

7. **Distancia** Sean x y y funciones diferenciables de t y sea $s = \sqrt{x^2 + y^2}$ la distancia entre los puntos $(x, 0)$ y $(0, y)$ en el plano xy.
   a. ¿Cómo se relaciona ds/dt con dx/dt si y es constante?
   b. ¿Cómo se relaciona ds/dt con dx/dt y dy/dt si x y y no son constantes?
   c. ¿Cómo se relaciona dx/dt con dy/dt si s es constante?

8. **Diagonales** Si x, y y z son las longitudes de las aristas de una caja rectangular, la longitud común de las diagonales de la caja es $s = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
   a. Suponiendo que x, y y z son funciones diferenciables de t, ¿cómo se relaciona ds/dt con dx/dt, dy/dt y dz/dt?
   b. ¿Cómo se relaciona ds/dt con dy/dt y dz/dt si x es constante?
   c. ¿Cómo se relaciona dx/dt, dy/dt y dz/dt si s es constante?

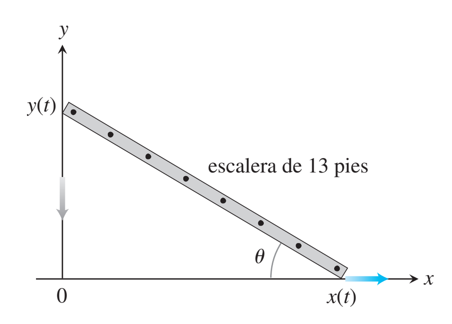
9. **Área** El área A de un triángulo con lados de longitudes a y b que encierran un ángulo de medida θ es
$$A = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} \theta .$$
   a. ¿Cómo se relaciona dA/dt con $d\theta/dt$ si a y b son constantes?
   b. ¿Cómo se relaciona dA/dt con $d\theta/dt$ y da/dt si solamente b es constante?
   c. ¿Cómo se relaciona dA/dt con $d\theta/dt$, da/dt y db/dt si a, b y θ no son constantes?

10. **Calentamiento de un plato** Cuando un plato circular de metal se está calentando en un horno, su radio aumenta a razón de 0.01 cm/min. ¿A qué razón aumenta el área del plato cuando su radio mide 50 cm?

11. **Cambio de las dimensiones de un rectángulo** La longitud l de un rectángulo está decreciendo a razón de 2 cm/seg mientras que su ancho, w, está creciendo a razón de 2 cm/seg. Si $l = 12$ cm y $w = 5$ cm, encuentre las razones de cambio de **(a)** el área, **(b)** el perímetro y **(c)** las longitudes de las diagonales del rectángulo. ¿Cuáles de estas magnitudes están creciendo y cuáles están decreciendo?

12. **Cambio de las dimensiones en una caja rectangular** Suponga que las aristas x, y y z de una caja rectangular cerrada están cambiando a las tasas siguientes:
$$\frac{dx}{dt} = 1 \text{ m/seg}, \quad \frac{dy}{dt} = -2 \text{ m/seg}, \quad \frac{dz}{dt} = 1 \text{ m/seg}.$$
Encuentre las tasas a las que **(a)** el volumen, **(b)** el área de la superficie y **(c)** la longitud de la diagonal $s = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ de la caja están cambiando en el instante en que $x = 4$, $y = 3$ y $z = 2$.

13. **Escalera que cae** Una escalera de 13 pies está apoyada contra una casa cuando su base empieza a resbalarse. En el momento en que la base está a 12 pies de la casa, la base se está moviendo a una razón de 5 pies/seg.
   a. ¿Qué tan rápido se está resbalando por la pared la parte superior de la escalera en ese momento?
   b. ¿A qué tasa está cambiando el área del triangulo formado por la escalera, la pared y el suelo en ese momento?
   c. ¿A qué tasa está cambiando el ángulo θ entre la escalera y el suelo en ese momento?



14. Tránsito aéreo comercial Dos aviones comerciales están volando a 40,000 pies a lo largo de recorridos en línea recta que se cortan en ángulos rectos. El avión A se aproxima al punto de intersección a una velocidad de 442 nudos (millas náuticas por hora; una milla náutica equivale a 2000 yardas). El avión B se aproxima a la intersección a 481 nudos. ¿A qué tasa está cambiando la distancia entre los aviones cuando A está a 5 millas náuticas del punto de intersección y B está a 12 millas náuticas del mismo?

15. Vuelo de un papalote Una niña vuela un papalote que está a 300 pies de altura; el viento aleja el papalote horizontalmente a razón de 25 pies/seg. ¿Qué tan rápido debe soltar la cuerda la niña cuando el papalote está a 500 pies de ella?

16. Perforación de un cilindro El mecánico de la Automotriz Lincoln está volviendo a perforar un cilindro de 6 pulgadas de profundidad para poner un pistón nuevo. La máquina que están usando incrementa el radio del cilindro una milésima de pulgada cada 3 minutos. ¿Qué tan rápido aumenta el volumen del cilindro cuando la perforación (diámetro) mide 3.800 pulgadas?

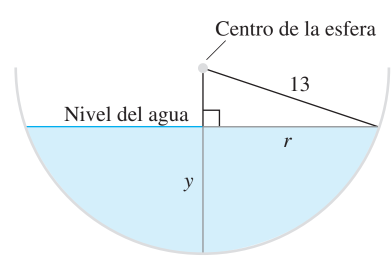
17. Pila de arena La arena cae a la parte superior de una pila cónica desde una banda transportadora, a una razón de 10 m^3/min La altura de la pila siempre es tres octavos del diámetro de la base. ¿Qué tan rápido cambian **(a)** la altura, y **(b)** el radio cuando la pila tiene 4 m de altura? Dé su respuesta en centímetros por minuto.

18. Vaciado de un depósito cónico Se está extrayendo agua de un depósito cónico de concreto (el vértice está hacia abajo) de radio 45 m y altura 6 m; el agua sale a razón de 50 m^3/min

a. ¿Qué tan rápido (en centímetros por minuto) baja el nivel del líquido cuando el agua tiene 5 m de profundidad?

b. ¿Qué tan rápido cambia el radio de la superficie del agua en ese momento? Dé su respuesta en centímetros por minuto.

19. Vaciado de un depósito hemisférico De un depósito de forma hemisférica con radio 13 m, ilustrado aquí de perfil, el agua fluye a razón de 6 m^3/min. Responda las siguientes preguntas, dado que el volumen del agua en el depósito hemisférico de radio R es $V = (\pi/3)y^2(3R - y)$ cuando el agua tiene y metros de profundidad.



a. ¿A qué razón cambia el nivel del líquido cuando el agua tiene 8 m de profundidad?

b. ¿Cuál es el radio r de la superficie del agua cuando ésta tiene y m de profundidad?

c. ¿A qué razón cambia el radio r cuando el agua tiene 8 m de profundidad?

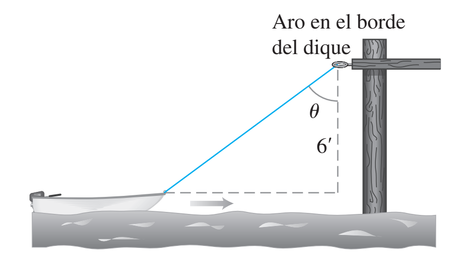
20. Gotas de lluvia Suponga que una gota de lluvia es una esfera perfecta y que, al condensarse, recoge humedad a una razón proporcional a su área superficial. Demuestre que en estas circunstancias el radio de la gota crece a una razón constante.

21. El radio de un globo inflado Se utiliza helio para inflar un globo esférico a razón de 100π pie^3/min. ¿Qué tan rápido aumenta el radio del globo en el instante en que el radio mide 5 pies? ¿Qué tan rápido aumenta el área superficial?

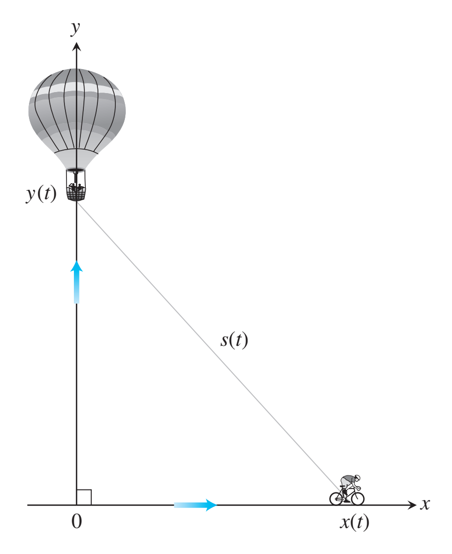
22. Arrastre de un bote Se utiliza una cuerda para arrastrar un bote hacia el muelle. Un extremo de la cuerda está atada a la proa de la embarcación, y el otro a un aro ubicado en el muelle, en un punto 6 pies arriba de la proa. La cuerda se jala a una razón de 2 pies/seg.

a. ¿Qué tan rápido se acerca el bote al muelle cuando la cuerda mide 10 pies?

b. ¿A qué razón cambia el ángulo θ en ese momento? (Vea la figura).



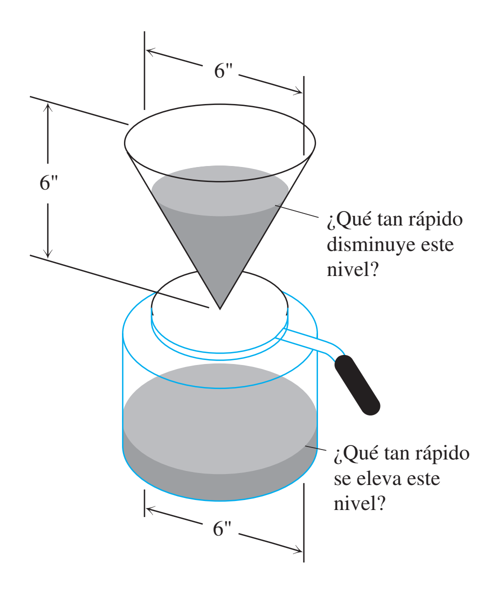
23. Un globo y una bicicleta Un globo se eleva verticalmente desde una superficie plana, a una razón constante de 1 pie/seg. Justo cuando el globo está a 65 pies sobre dicha superficie, una bicicleta que se mueve a una velocidad constante de 17 pies/seg pasa debajo de él. ¿Qué tan rápido aumenta la distancia $s(t)$ entre la bicicleta y el globo 3 segundos después?



24. Preparación de café El café está pasando a través de un filtro cónico hasta una cafetera cilíndrica, a una razón de 10 pulg^3/min.

a. ¿Qué tan rápido sube el nivel de líquido en la cafetera cuando el café del cono tiene 5 pulgadas de profundidad?

b. ¿Qué tan rápido disminuye el nivel del cono en ese momento?



25. Gasto cardiaco A finales de la década de 1860, Adolf Fick, profesor de fisiología de la Facultad de Medicina de Würzberg, Alemania, desarrolló uno de los métodos que usamos hoy en día para medir cuánta sangre bombea el corazón por minuto. El gasto cardiaco que realiza su organismo al momento de leer esta frase es probablemente de más o menos 7 L/min. En reposo, el gasto puede ser un poco menor, aproximadamente de 6 L/min. Si usted fuera un corredor de maratón, su gasto cardiaco durante la competencia podría llegar a 30 L/min.

El gasto cardiaco puede calcularse con la fórmula

$$y = \frac{Q}{D},$$

donde Q es la cantidad de mililitros de CO_2 que se exhala en un minuto y D es la diferencia entre la concentración de CO_2 (mL/L) en la sangre bombeada a los pulmones y la concentración de CO_2 en la sangre que regresa de los pulmones. Con $Q = 233$ mL/min y $D = 97 - 56 = 41$ mL/L,

$$y = \frac{233 \text{ mL/min}}{41 \text{ mL/L}} \approx 5.68 \text{ L/min},$$

bastante cercano a los 6 L/min que casi todas las personas tienen en condición basal (es decir, en reposo). (Datos cortesía del Dr. J. Kenneth Herd, del Quillan College of Medicine, East Tennessee State University.)

Suponga que cuando $Q = 233$ y $D = 41$, también sabemos que D está decreciendo a una razón de 2 unidades por minuto, pero Q permanece sin cambios. ¿Qué está pasando con el gasto cardiaco?

26. Costo, ingresos y utilidades Una compañía puede fabricar x artículos a un costo de $c(x)$ miles de dólares, un ingreso por ventas de $r(x)$ miles de dólares y utilidades de $p(x) = r(x) - c(x)$ miles de dólares. Encuentre dc/dt, dr/dt y dp/dt para los siguientes valores de x y de dx/dt.

a. $r(x) = 9x$, $c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$ y $dx/dt = 0.1$ cuando $x = 2$

b. $r(x) = 70x$, $c(x) = x^3 - 6x^2 + 45/x$ y $dx/dt = 0.05$ cuando $x = 1.5$

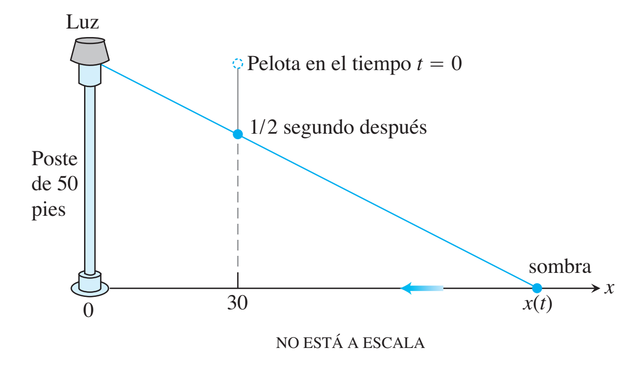
27. Movimiento a lo largo de una parábola Una partícula se mueve a lo largo de la parábola $y = x^2$ en el primer cuadrante, de manera que sus coordenadas x (medidas en metros) crecen a una razón estable de 10 m/seg. ¿Qué tan rápido cambia el ángulo de inclinación θ de la recta que une la partícula con el origen cuando $x = 3$ m?

28. Movimiento a lo largo de otra parábola Una partícula se mueve de derecha a izquierda a lo largo de la parábola $y = \sqrt{-x}$, de manera que sus coordenadas x (medidas en metros) decrecen a razón de 8 m/seg. ¿Qué tan rápido cambia el ángulo de inclinación θ de la recta que une la partícula con el origen cuando $x = -4$?

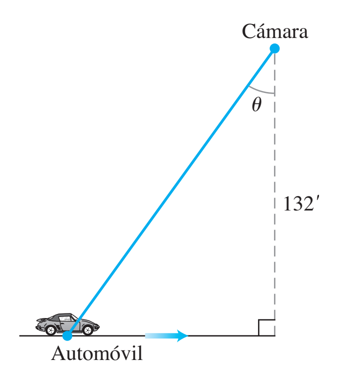
29. Movimiento en el plano Las coordenadas de una partícula en el plano métrico xy son funciones diferenciables del tiempo t con $dx/dt = -1$ m/seg y $dy/dt = -5$ m/seg. ¿Qué tan rápido cambia la distancia entre la partícula y el origen cuando pasa por el punto (5, 12)?

30. Movimiento de una sombra Un hombre de 6 pies de alto camina a una razón de 5 pies/seg hacia un farol cuya luz está a 16 pies del piso. ¿A qué razón se mueve la punta de su sombra? ¿A qué razón cambia la longitud de su sombra cuando está a 10 pies de la base del farol?

31. Otro movimiento de una sombra Una luz brilla desde el extremo de un poste de 50 pies de altura. Se lanza una pelota a la misma altura desde un punto ubicado a 30 pies de distancia de la luz. (Vea la figura). ¿Qué tan rápido se mueve la sombra de la pelota a lo largo del suelo 1/2 segundo después? (Suponga que la pelota cae una distancia $s = 16t^2$ pies en t segundos).



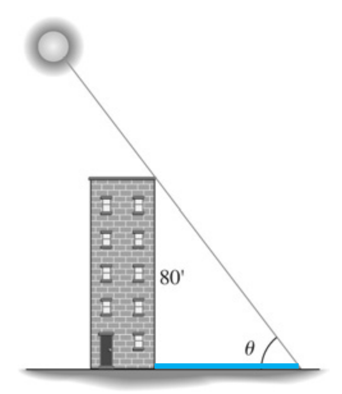
32. Filmación del movimiento de un automóvil Imagine que está filmando una carrera de automóviles desde una tribuna ubicada a 132 pies de la pista; su lente está siguiendo un automóvil que se mueve a 180 millas/h (264 pies/seg). ¿Qué tan rápido cambiará el ángulo θ de su cámara cuando el automóvil esté justo enfrente de usted? ¿Qué tan rápido cambiará medio segundo después?



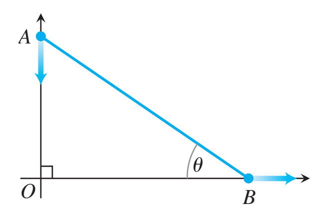
33. Una capa de hielo derritiéndose Una bola de acero esférica, con un diámetro de 8 pulgadas, se cubre con una capa de hielo de espesor uniforme. Si el hielo se derrite a una razón de 10 pulgadas^3/min, ¿qué tan rápido disminuye el grosor de la capa de hielo cuando tiene 2 pulgadas de espesor? ¿Qué tan rápido decrece el área superficial exterior del hielo?

34. Patrulla de caminos Un avión de la policía vuela a 3 millas de altura, con una velocidad constante de 120 millas/hora. El piloto ve un automóvil que se acerca y, utilizando un radar, determina que en el instante en que la distancia real entre el automóvil y el avión es de 5 millas, ésta decrece a razón de 160 millas/hora. Encuentre la velocidad a la que se desplaza el automóvil por la carretera.

35. Sombra de un edificio A la hora en que el sol pasa exactamente por encima, la sombra de un edificio que mide 80 pies de altura es de 60 pies de largo al nivel del piso. En ese momento, el ángulo θ que el sol forma con el piso está creciendo a una razón de $0.27°/\text{min}$. ¿A qué razón está decreciendo la sombra? (Recuerde usar radianes. Exprese su respuesta en pulgadas por minuto, redondeando a la décima más cercana).



36. Caminantes *A* y *B* caminan sobre calles rectas que se cruzan en ángulo recto. *A* se aproxima a la intersección a 2 m/seg; *B* se aleja de la intersección a 1 m/seg. ¿A qué razón cambia el ángulo θ cuando *A* está a 10 m de la intersección y *B* está a 20 m de la misma? Exprese su respuesta en grados por segundo, redondeando al grado más cercano.

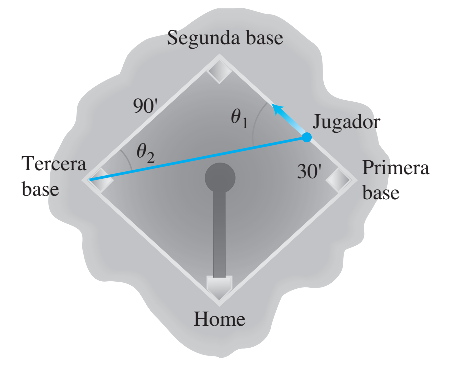


37. Jugadores de béisbol Un diamante de béisbol es un cuadrado de 90 pies de lado. Un jugador corre de la primera a la segunda base a una razón de 16 pies/seg.

a. ¿A qué razón cambia la distancia entre el jugador y la tercera base cuando aquel está a 30 pies de la primera base?

b. ¿A qué razón cambian los ángulos θ_1 y θ_2 (vea la figura) en ese momento?

c. El jugador se desliza en la segunda base a una razón de 15 pies/seg. ¿A qué razón cambian los ángulos θ_1 y θ_2 cuando el jugador toca la base?



38. Buques Dos buques navegan en línea recta desde un punto *O* a lo largo de rutas que forman un ángulo de 120°. El buque *A* se mueve a 14 nudos (millas náuticas por hora; un milla náutica mide 2000 yardas.) El buque *B* se mueve a 21 nudos. ¿Qué tan rápido se alejan los buques cuando $OA = 5$ y $OB = 3$ millas náuticas?

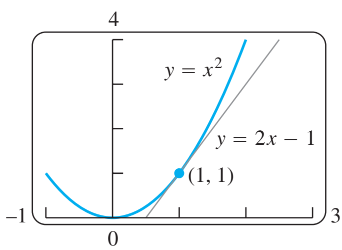
3.8 Linealización y diferenciales

Algunas veces podemos aproximar funciones complicadas mediante otras más sencillas, que dan la precisión que queremos para aplicaciones específicas y son más fáciles de trabajar. Las funciones de aproximación que se analizan en esta sección se llaman *linealizaciones* y se basan en las rectas tangentes. En el capítulo 11 se discuten otras funciones de aproximación, como las funciones polinomiales.

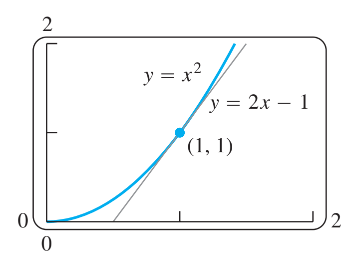
Introduciremos nuevas variables dx y dy, llamadas *diferenciales* y las definiremos de manera que la notación de Leibniz para la derivada dy/dx sea una razón válida. Usaremos dy para estimar el error en mediciones y sensibilidades al cambio de una función. Una aplicación de estas ideas nos dará una demostración precisa de la regla de la cadena (sección 3.5).

Linealización

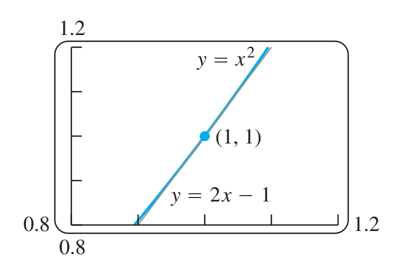
Como podemos ver en la figura 3.46, cuando nos acercamos al punto de tangencia, la tangente a la curva $y = x^2$ está muy cerca de ella. Para un pequeño intervalo alrededor del punto, los valores y a lo largo de la recta tangente son una buena aproximación de los valores y de la curva. Para observar este fenómeno, haga un acercamiento en el punto de tangencia de ambas gráficas o busque en tablas los valores de la diferencia entre $f(x)$ y su recta tangente cerca de la coordenada x del punto de tangencia. Localmente, toda curva diferenciable se comporta como una recta.



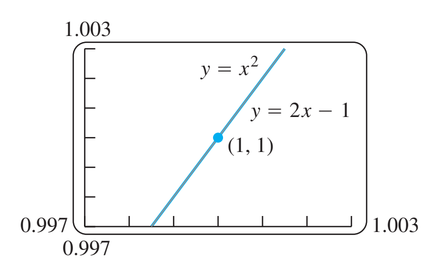
$y = x^2$ y su tangente $y = 2x - 1$ en (1, 1).



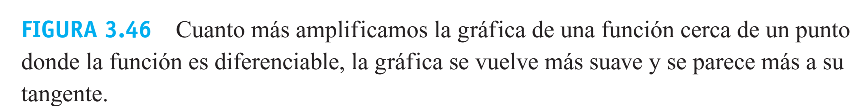
Tangente y curva muy pegadas cerca de (1, 1).



Tangente y curva muy pegadas dentro de todo el intervalo x que se muestra.



Tangente y curva todavía más pegadas. La pantalla de la computadora no puede distinguir la tangente de la curva en este intervalo x.


FIGURA 3.46 Cuanto más amplificamos la gráfica de una función cerca de un punto donde la función es diferenciable, la gráfica se vuelve más suave y se parece más a su tangente.

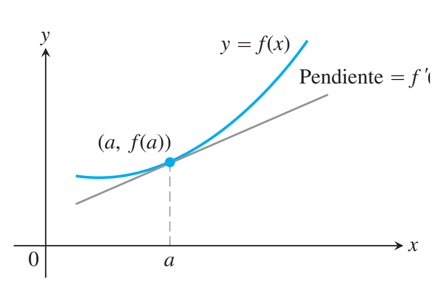
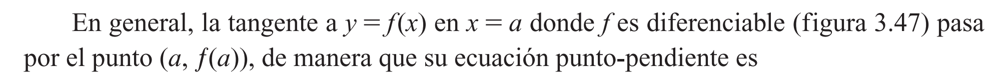


FIGURA 3.47 La tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = a$ es la recta $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$.


En general, la tangente a $y = f(x)$ en $x = a$ donde f es diferenciable (figura 3.47) pasa por el punto $(a, f(a))$, de manera que su ecuación punto-pendiente es

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Así, su recta tangente es la gráfica de la función lineal

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Mientras esta recta permanezca cerca de la gráfica de f, $L(x)$ da una buena aproximación de $f(x)$.

DEFINICIONES Linealización, aproximación lineal estándar
Si f es diferenciable en $x = a$, entonces la función de aproximación

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

es la **linealización** de f en a. La aproximación

$$f(x) \approx L(x)$$

de f por L es la **aproximación lineal estándar** de f en a. El punto $x = a$ es el **centro** de la aproximación.

EJEMPLO 1 Determinación de una linealización

Encontrar la linealización de $f(x) = \sqrt{1 + x}$ en $x = 0$ (figura 3.48).

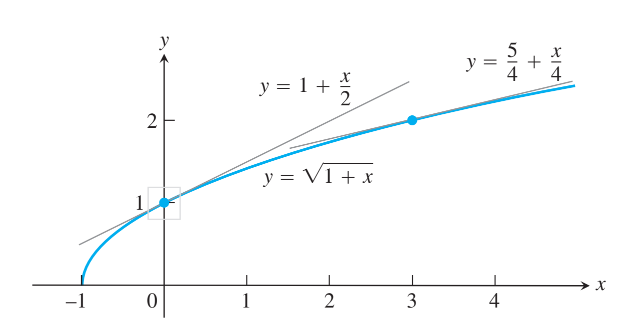


FIGURA 3.48 La gráfica de $y = \sqrt{1 + x}$ y la linealización en $x = 0$ y $x = 3$. La figura 3.49 muestra una vista amplificada de una ventana pequeña alrededor de 1 en el eje y.

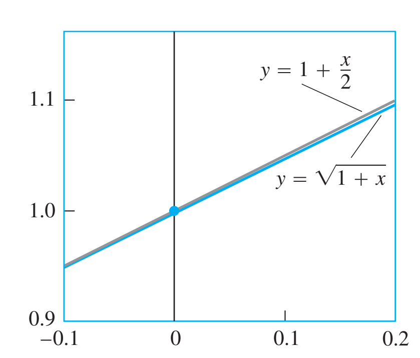


FIGURA 3.49 Vista amplificada de la ventana de la figura 3.48.

Solución Como

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 + x\right)^{-1/2},$$

tenemos $f(0) = 1$ y $f'(0) = 1/2$, de donde la linealización es

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a) = 1 + \frac{1}{2}\left(x - 0\right) = 1 + \frac{x}{2}.$$

Vea la figura 3.49. ■

Vea qué precisa es la aproximación $\sqrt{1 + x} \approx 1 + (x/2)$ del ejemplo 1 para valores de x cercanos a 0.

Cuando nos alejamos del cero, perdemos exactitud. Por ejemplo, para $x = 2$, la linealización da 2 como la aproximación de $\sqrt{3}$, que ni siquiera es exacta en el primer lugar decimal.

No se deje engañar por los cálculos anteriores, pensando que cualquier cosa que hagamos con una linealización se logra mejor con una calculadora. En la práctica, nunca usaremos linealización para encontrar una raíz cuadrada. La utilidad de la linealización radica en su habilidad para reemplazar una fórmula complicada por una más sencilla en todo un intervalo de valores. Si tenemos que trabajar con $\sqrt{1 + x}$ para x cercanos a 0 y podemos tolerar el pequeño error involucrado, podemos trabajar en su lugar con $1 + (x/2)$. Por su-

Aproximación	Valor real	|Valor real−aproximación|
$\sqrt{1.2} \approx 1 + \frac{0.2}{2} = 1.10$	1.095445	$< 10^{-2}$
$\sqrt{1.05} \approx 1 + \frac{0.05}{2} = 1.025$	1.024695	$< 10^{-3}$
$\sqrt{1.005} \approx 1 + \frac{0.005}{2} = 1.00250$	1.002497	$< 10^{-5}$

puesto, es preciso que conozcamos el tamaño del error. Hablaremos más acerca de la estimación del error en el capítulo 11.

Una aproximación lineal normalmente pierde exactitud lejos de su centro. Como sugiere la figura 3.48, la aproximación de $\sqrt{1 + x} \approx 1 + (x/2)$ será posiblemente demasiado burda para resultar útil cerca de $x = 3$. Ahí necesitamos una linealización en $x = 3$.

EJEMPLO 2 Determinación de una linealización en otro punto

Encontrar una linealización de $f(x) = \sqrt{1 + x}$ en $x = 3$.

Solución Evaluamos la ecuación definiendo $L(x)$ en $a = 3$. Con

$$f(3) = 2, \qquad f'(3) = \frac{1}{2}(1 + x)^{-1/2}\Big|_{x=3} = \frac{1}{4},$$

tenemos

$$L(x) = 2 + \frac{1}{4}(x - 3) = \frac{5}{4} + \frac{x}{4}.$$ ■

En $x = 3.2$, la linealización del ejemplo 2 da

$$\sqrt{1 + x} = \sqrt{1 + 3.2} \approx \frac{5}{4} + \frac{3.2}{4} = 1.250 + 0.800 = 2.050,$$

lo cual difiere del valor real $\sqrt{4.2} \approx 2.04939$ en menos de un milésimo. La linealización del ejemplo 1 da

$$\sqrt{1 + x} = \sqrt{1 + 3.2} \approx 1 + \frac{3.2}{2} = 1 + 1.6 = 2.6,$$

un resultado que se aleja en más de 25 por ciento.

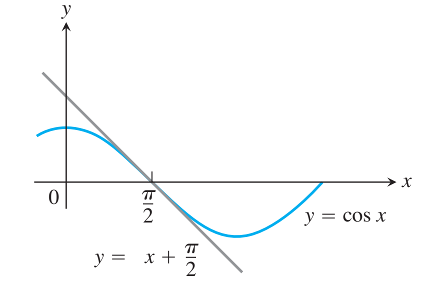


FIGURA 3.50 La gráfica de $f(x) = \cos x$ y su linealización en $x = \pi/2$. Cerca de $x = \pi/2$, $\cos x \approx -x + (\pi/2)$ (ejemplo 3).

EJEMPLO 3 Determinación de una linealización para la función coseno

Encontrar una linealización de $f(x) = \cos x$ en $x = \pi/2$ (figura 3.50).

Solución Como $f(\pi/2) = \cos(\pi/2) = 0$, $f'(x) = -\operatorname{sen} x$ y $f'(\pi/2) = -\operatorname{sen}(\pi/2) = -1$, tenemos

$$\begin{aligned} L(x) &= f(a) + f'(a)(x - a) \\ &= 0 + (-1)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -x + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$ ■

Una aproximación lineal importante para raíces y potencias es

$$(1 + x)^k \approx 1 + kx \qquad (x \text{ cercano a 0; } k \text{ cualquier número})$$

(ejercicio 15). Esta aproximación, buena para valores de x suficientemente cercanos a cero, tiene muchas aplicaciones. Por ejemplo, cuando x es pequeña,

$$\sqrt{1 + x} \approx 1 + \frac{1}{2}x \qquad k = 1/2$$

$$\frac{1}{1 - x} = (1 - x)^{-1} \approx 1 + (-1)(-x) = 1 + x \qquad k = -1;\ \text{reemplazar } x \text{ por } -x.$$

$$\sqrt[3]{1 + 5x^4} = (1 + 5x^4)^{1/3} \approx 1 + \frac{1}{3}\left(5x^4\right) = 1 + \frac{5}{3}x^4 \qquad k = 1/3;\ \text{reemplazar } x \text{ por } 5x^4.$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = (1 - x^2)^{-1/2} \approx 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-x^2) = 1 + \frac{1}{2}x^2 \qquad k = -1/2;\ \text{reemplazar } x \text{ por } -x^2.$$

Diferenciales

Algunas veces utilizamos la notación de Leibniz, dy/dx, para representar la derivada de y con respecto a x. A pesar de su apariencia, ésta no es una razón. A continuación introduciremos dos variables nuevas, dx y dy, con la propiedad de que, si su razón existe, ésta será igual a la derivada.

DEFINICIÓN Diferencial

Sea $y = f(x)$ una función diferenciable. La **diferencial dx** es una variable independiente. La **diferencial dy** es

$$dy = f'(x)\,dx.$$

A diferencia de la variable independiente dx, la variable dy siempre es una variable dependiente. Depende de x y de dx. Si se da un valor específico a dx y x es un número particular en el dominio de la función f, entonces el valor numérico de dy está determinado.

EJEMPLO 4 Determinación de la diferencial dy

(a) Encontrar dy si $y = x^5 + 37x$.

(b) Encontrar el valor de dy cuando $x = 1$ y $dx = 0.2$.

Solución

(a) $dy = (5x^4 + 37)\,dx$

(b) Sustituyendo $x = 1$ y $dx = 0.2$ en la expresión para dy, tenemos

$$dy = (5 \cdot 1^4 + 37)0.2 = 8.4.$$

■

En la figura 3.51 se muestra el significado geométrico de las diferenciales. Sea $x = a$, y fijamos $dx = \Delta x$. El cambio correspondiente en $y = f(x)$ es

$$\Delta y = f(a + dx) - f(a).$$

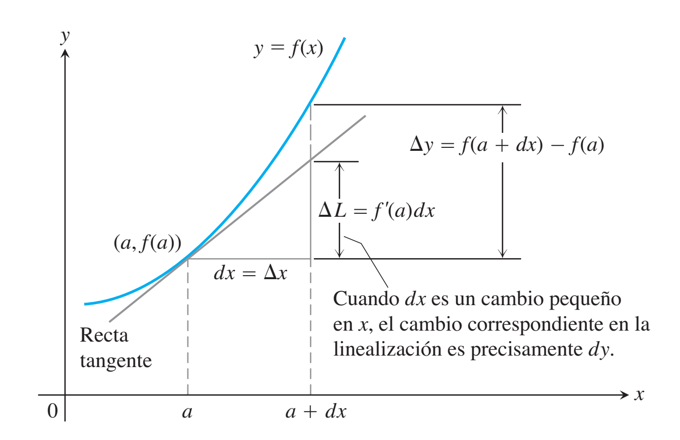


FIGURA 3.51 Geométricamente, la diferencial dy es el cambio ΔL en la linealización de f cuando $x = a$ cambia por una cantidad $dx = \Delta x$.

El cambio correspondiente en la recta tangente L es

$$\begin{aligned}\Delta L &= L(a + dx) - L(a)\\ &= \underbrace{f(a) + f'(a)[(a + dx) - a]}_{L(a+dx)} - \underbrace{f(a)}_{L(a)}\\ &= f'(a)\,dx.\end{aligned}$$

Esto es, el cambio en la linealización de f es precisamente el valor de la diferencial dy cuando $x = a$ y $dx = \Delta x$. En consecuencia, dy representa la magnitud que la recta tangente sube o baja cuando x cambia en una cantidad $dx = \Delta x$.

Si $dx \neq 0$, entonces el cociente de la diferencial dy entre la diferencial dx es igual a la derivada $f'(x)$, ya que

$$dy \div dx = \frac{f'(x)\,dx}{dx} = f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Algunas veces escribimos

$$df = f'(x)\,dx$$

en lugar de $dy = f'(x)\,dx$, llamando a df la **diferencial de *f***. Por ejemplo, si $f(x) = 3x^2 - 6$, entonces

$$df = d(3x^2 - 6) = 6x\,dx.$$

Toda fórmula de diferenciación, como

$$\frac{d(u + v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \quad \text{o} \quad \frac{d(\operatorname{sen} u)}{dx} = \cos u \frac{du}{dx}$$

tiene una forma diferencial correspondiente, como

$$d(u + v) = du + dv \quad \text{o} \quad d(\operatorname{sen} u) = \cos u\,du.$$

EJEMPLO 5 Determinación de diferenciales de funciones

(a) $d(\tan 2x) = \sec^2(2x)\, d(2x) = 2\sec^2 2x\, dx$

(b) $d\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = \dfrac{(x+1)\,dx - x\,d(x+1)}{(x+1)^2} = \dfrac{x\,dx + dx - x\,dx}{(x+1)^2} = \dfrac{dx}{(x+1)^2}$ ■

Estimación con diferenciales

Supongamos que conocemos el valor de una función diferenciable $f(x)$ en un punto a, y que queremos predecir cuánto cambiará este valor si nos movemos a un punto cercano $a + dx$. Si dx es pequeño, entonces podemos ver, de acuerdo con la figura 3.51, que Δy es aproximadamente igual a dy. Como

$$f(a + dx) = f(a) + \Delta y,$$

la aproximación diferencial nos da

$$f(a + dx) \approx f(a) + dy$$

donde $dx = \Delta x$. De esta manera, la aproximación $\Delta y \approx dy$ se puede usar para calcular $f(a + dx)$ cuando se conoce $f(a)$ y dx es pequeña.

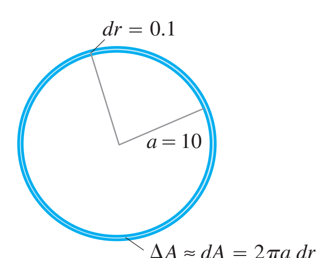


FIGURA 3.52 Cuando dr es pequeño en comparación con a, como sucede cuando $dr = 0.1$ y $a = 10$, la diferencial $dA = 2\pi a\, dr$ da una manera de estimar el área del círculo con radio $r = a + dr$ (ejemplo 6).

EJEMPLO 6 Estimación con diferenciales

El radio r de un círculo crece de $a = 10$ m a 10.1 m (figura 3.52). Usar dA para estimar el crecimiento del área A del círculo. Estimar el área del círculo agrandado y comparar la estimación con el área real.

Solución Como $A = \pi r^2$, el incremento estimado es

$$dA = A'(a)\, dr = 2\pi a\, dr = 2\pi(10)(0.1) = 2\pi \text{ m}^2.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} A(10 + 0.1) &\approx A(10) + 2\pi \\ &= \pi(10)^2 + 2\pi = 102\pi. \end{aligned}$$

El área del círculo de radio 10.1 m es aproximadamente 102π m^2.

El área real es

$$\begin{aligned} A(10.1) &= \pi(10.1)^2 \\ &= 102.01\pi \text{ m}^2. \end{aligned}$$

El error en nuestra estimación es 0.01π m^2, que es la diferencia $\Delta A - dA$. ■

Error en la aproximación diferencial

Sea $f(x)$ diferenciable en $x = a$, y supongamos que $dx = \Delta x$ es un incremento de x. Tenemos dos maneras de describir el cambio de f cuando x cambia de a a $a + \Delta x$:

El cambio real:	$\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a)$
La diferencial estimada:	$df = f'(a)\, \Delta x.$

¿Qué tan bien aproxima df a Δf?

Medimos el error de aproximación restando df de Δf:

$$\begin{aligned}
\text{Error de aproximación} &= \Delta f - df \\
&= \Delta f - f'(a)\Delta x \\
&= \underbrace{f(a + \Delta x) - f(a)}_{\Delta f} - f'(a)\Delta x \\
&= \underbrace{\left(\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} - f'(a)\right)}_{\text{Llamamos a esta parte } \epsilon} \cdot \Delta x \\
&= \epsilon \cdot \Delta x .
\end{aligned}$$

Cuando $\Delta x \rightarrow 0$, el cociente de diferencias

$$\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

se aproxima a $f'(a)$ (recuerde la definición de $f'(a)$), de manera que la cantidad entre paréntesis se vuelve un número muy pequeño (que es por lo que lo llamamos θ). De hecho, $\epsilon \rightarrow 0$ cuando $\Delta x \rightarrow 0$. Ahora Δx si es pequeño, el error de aproximación $\epsilon \Delta x$ es aún más pequeño.

$$\underbrace{\Delta f}_{\substack{\text{cambio} \\ \text{real}}} = \underbrace{f'(a)\Delta x}_{\substack{\text{cambio} \\ \text{estimado}}} + \underbrace{\epsilon\, \Delta x}_{\text{error}}$$

A pesar de que no sabemos que tan pequeño es el error y no podremos saberlo con mayor precisión sino hasta el capítulo 11, aquí hay algo que vale la pena observar, a saber, la *forma* que toma la ecuación.

Cambio en $y = f(x)$ cerca de $x = a$

Si $y = f(x)$ es diferenciable en $x = a$ y x cambia de a a $a + \Delta x$, el cambio Δy en f está dado por una ecuación de la forma

$$\Delta y = f'(a)\, \Delta x + \epsilon\, \Delta x \tag{1}$$

en donde $\epsilon \rightarrow 0$ cuando $\Delta x \rightarrow 0$.

En el ejemplo 6 encontramos que

$$\Delta A = \pi(10.1)^2 - \pi(10)^2 = (102.01 - 100)\pi = (\underbrace{2\pi}_{dA} + \underbrace{0.01\pi}_{\text{error}})\ \text{m}^2$$

de manera que el error de aproximación es $\Delta A - dA = \epsilon\, \Delta r = 0.01\pi$ y $\epsilon = 0.01\pi/\Delta r = 0.01\pi/0.1 = 0.1\pi$ m.

La ecuación (1) nos permite dar una demostración completa de la regla de la cadena.

Demostración de la regla de la cadena

Nuestro objetivo es demostrar que si $f(u)$ es una función diferenciable de u y $u = g(x)$ es una función diferenciable de x, entonces la composición $y = f(g(x))$ es una función di-

ferenciable de x. Con mayor precisión, si g es diferenciable en x_0 y f es diferenciable en $g(x_0)$, entonces la composición es diferenciable en x_0 y

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Sea Δx el incremento de x, y sean Δu y Δy los incrementos correspondientes en u y y. Aplicando la ecuación (1) tenemos

$$\Delta u = g'(x_0)\Delta x + \epsilon_1 \Delta x = (g'(x_0) + \epsilon_1)\Delta x,$$

donde $\epsilon_1 \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$. De manera similar,

$$\Delta y = f'(u_0)\Delta u + \epsilon_2 \Delta u = (f'(u_0) + \epsilon_2)\Delta u,$$

donde $\epsilon_2 \to 0$ cuando $\Delta u \to 0$. También observamos que $\Delta u \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$. Combinando estas ecuaciones para Δu y Δy obtenemos

$$\Delta y = (f'(u_0) + \epsilon_2)(g'(x_0) + \epsilon_1)\Delta x,$$

de manera que

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0)g'(x_0) + \epsilon_2 g'(x_0) + f'(u_0)\epsilon_1 + \epsilon_2\epsilon_1.$$

Como ϵ_1 y ϵ_2 tiende a cero si Δx tiende a cero, tres de los cuatro términos de la derecha desaparecen en el límite, dejando

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0)g'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Con esto concluye la prueba. ■

Sensibilidad al cambio

La ecuación $df = f'(x)\,dx$ nos dice que tan *sensible* es el resultado de f ante un cambio en los datos para diferentes valores de x. A mayor valor de f' en x, mayor efecto del cambio dado – dx. Cuando nos movemos de a a un punto cercano $a + dx$, podemos describir el cambio en f de tres maneras:

	Real	**Estimado**
Cambio absoluto	$\Delta f = f(a + dx) - f(a)$	$df = f'(a)\,dx$
Cambio relativo	$\dfrac{\Delta f}{f(a)}$	$\dfrac{df}{f(a)}$
Cambio porcentual	$\dfrac{\Delta f}{f(a)} \times 100$	$\dfrac{df}{f(a)} \times 100$

EJEMPLO 7 Determinación de la profundidad de un pozo

Queremos calcular la profundidad en un pozo a partir de la ecuación $s = 16t^2$ midiendo el tiempo que tarda una roca pesada en golpear el agua en el fondo del pozo. ¿Qué tan sensible serán sus cálculos si se comete un error de 0.1 seg en la medida del tiempo?

Solución El tamaño de ds en la ecuación

$$ds = 32t\,dt$$

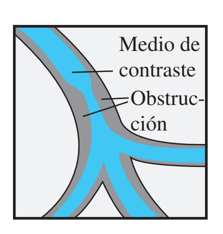
depende de qué tan grande es t. Si $t = 2$ seg, el cambio causado por $dt = 0.1$ es más o menos de

$$ds = 32(2)(0.1) = 6.4 \text{ pies}.$$

Tres segundos después, en $t = 5$ seg, el cambio causado por el mismo dt es

$$ds = 32(5)(0.1) = 16 \text{ pies}.$$

Para el error dado en la medida del tiempo, la profundidad estimada del pozo difiere de la profundidad real en una distancia que se incrementa a medida que el tiempo que tarda la roca en pegar en el agua del fondo del pozo es mayor. ■



Angiografía

Se inyecta un medio de contraste en la arteria parcialmente obstruida para hacer visible el interior bajo los rayos X. Esto revela la localización y severidad de la obstrucción.



Angioplastía

Un globo colocado en la punta del catéter es inflado dentro de la arteria para dilatarla en el lugar obstruido.



EJEMPLO 8 Desbloqueo de arterias

Al final de la década de 1830 el fisiólogo francés Jean Poiseuille descubrió la fórmula que usamos hoy en día para predecir cuánto se tiene que expandir el radio de una arteria parcialmente obstruida para restaurar el flujo normal. Esta fórmula,

$$V = kr^4,$$

dice que el volumen V del fluido que corre por una cañería o tubo pequeño en una unidad de tiempo a presión constante, es una constante por el radio del tubo elevado a la cuarta potencia. ¿Cómo afecta a V un crecimiento de 10% de r?

Solución Las diferenciales de V y r se relacionan mediante la ecuación

$$dV = \frac{dV}{dr}\,dr = 4kr^3\,dr.$$

El cambio relativo en V es

$$\frac{dV}{V} = \frac{4kr^3\,dr}{kr^4} = 4\frac{dr}{r}.$$

El cambio relativo en V es 4 veces el cambio relativo en r; de manera que un crecimiento de 10% en r producirá 40% de crecimiento en el flujo. ■



EJEMPLO 9 Conversión de masa en energía

La segunda ley de Newton,

$$F = \frac{d}{dt}(mv) = m\frac{dv}{dt} = ma,$$

se basa en la hipótesis de que la masa es constante, pero sabemos que esto no es estrictamente cierto, porque la masa de un cuerpo crece de acuerdo con la velocidad. En la fórmula corregida de Einstein, la masa tiene el valor

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

donde m_0 "masa en reposo" representa la masa del cuerpo que no se mueve, y c es la velocidad de la luz, que es aproximadamente 300,000 km/seg. Use la aproximación

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \approx 1 + \frac{1}{2}x^2 \qquad (2)$$

para estimar el incremento de la masa Δm que resulta de la velocidad añadida, v.

Solución Cuando v es muy pequeña comparada con c, v^2/c^2 está cerca de cero y es correcto usar la aproximación

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right) \qquad \text{ecuación (2), con } x = \frac{v}{c}$$

para obtener

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx m_0\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)\right] = m_0 + \frac{1}{2}m_0 v^2\left(\frac{1}{c^2}\right),$$

o

$$m \approx m_0 + \frac{1}{2}m_0 v^2\left(\frac{1}{c^2}\right). \tag{3}$$

La ecuación (3) expresa el crecimiento en la masa que resulta de la velocidad añadida, v.

Interpretación de la energía

En la física newtoniana, $(1/2)m_0 v^2$ es la energía cinética (EC) del cuerpo; si rescribimos la ecuación (3) en la forma

$$(m - m_0)c^2 \approx \frac{1}{2}m_0 v^2,$$

vemos que

$$(m - m_0)c^2 \approx \frac{1}{2}m_0 v^2 = \frac{1}{2}m_0 v^2 - \frac{1}{2}m_0(0)^2 = \Delta(\text{EC}),$$

o

$$(\Delta m)c^2 \approx \Delta(\text{EC}).$$

De manera que el cambio en la energía cinética $\Delta(\text{EC})$ al ir de la velocidad 0 a la velocidad v es aproximadamente igual a $(\Delta m)c^2$, es decir, el cambio en la masa por el cuadrado de la velocidad de la luz. Usando $c \approx 3 \times 10^8$ m/seg, vemos que un cambio pequeño en la masa puede crear un cambio grande en la energía. ■

EJERCICIOS 3.8

Determinación de linealizaciones

En los ejercicios 1 a 4, encuentre la linealización $L(x)$ de $f(x)$ en $x = a$.

1. $f(x) = x^3 - 2x + 3, \quad a = 2$

2. $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}, \quad a = -4$

3. $f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad a = 1$

4. $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad a = -8$

Linealización por aproximación

Obtener linealizaciones que reemplacen las funciones de los ejercicios 5 a 10 en intervalos que incluyan los puntos dados x_0. Para facilitar el trabajo, es necesario centrarcada linealización no en x_0, sino en el entero más próximo $x = a$, en el cual la función y su derivada sean fáciles de calcular. ¿Qué linealización utiliza en cada caso?

5. $f(x) = x^2 + 2x, \quad x_0 = 0.1$

6. $f(x) = x^{-1}, \quad x_0 = 0.9$

7. $f(x) = 2x^2 + 4x - 3, \quad x_0 = -0.9$

8. $f(x) = 1 + x, \quad x_0 = 8.1$

9. $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x_0 = 8.5$

10. $f(x) = \frac{x}{x + 1}, \quad x_0 = 1.3$

Linealización de funciones trigonométricas

En los ejercicios 11 a 14, encuentre la linealización de f en $x = a$. Después grafique juntas la linealización y f.

11. $f(x) = \operatorname{sen} x$ a (a) $x = 0$, (b) $x = \pi$

12. $f(x) = \cos x$ a (a) $x = 0$, (b) $x = -\pi/2$

13. $f(x) = \sec x$ a (a) $x = 0$, (b) $x = -\pi/3$

14. $f(x) = \tan x$ a (a) $x = 0$, (b) $x = \pi/4$

La aproximación $(1 + x)^k \approx 1 + kx$

15. Demuestre que la linealización de $f(x) = (1 + x)^k$ en $x = 0$ es $L(x) = 1 + kx$.

16. Use la aproximación lineal $(1 + x)^k \approx 1 + kx$ para encontrar una aproximación de la función $f(x)$ para valores de x cercanos a cero.

a. $f(x) = (1 - x)^6$ **b.** $f(x) = \dfrac{2}{1 - x}$

c. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x}}$ **d.** $f(x) = \sqrt{2 + x^2}$

e. $f(x) = (4 + 3x)^{1/3}$ **f.** $f(x) = \sqrt[3]{\left(1 - \dfrac{1}{2 + x}\right)^2}$

17. Más rápido que una calculadora Use la aproximación $(1 + x)^k \approx 1 + kx$ para estimar lo siguiente:

a. $(1.0002)^{50}$ **b.** $\sqrt[3]{1.009}$

18. Encuentre la linealización de $f(x) = \sqrt{x + 1} + \operatorname{sen} x$ en $x = 0$. ¿Cómo se relaciona con las linealizaciones individuales de $\sqrt{x + 1}$ y $\operatorname{sen} x$ en $x = 0$?

Derivadas en forma diferencial

En los ejercicios 19 a 30, encuentre dy.

19. $y = x^3 - 3\sqrt{x}$ **20.** $y = x\sqrt{1 - x^2}$

21. $y = \dfrac{2x}{1 + x^2}$ **22.** $y = \dfrac{2\sqrt{x}}{3(1 + \sqrt{x})}$

23. $2y^{3/2} + xy - x = 0$ **24.** $xy^2 - 4x^{3/2} - y = 0$

25. $y = \operatorname{sen}(5\sqrt{x})$ **26.** $y = \cos(x^2)$

27. $y = 4\tan(x^3/3)$ **28.** $y = \sec(x^2 - 1)$

29. $y = 3\csc(1 - 2\sqrt{x})$ **30.** $y = 2\cot\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

Error de aproximación

En los ejercicios 31 a 36, cada función $f(x)$ cambia su valor cuando x cambia de x_0 a $x_0 + dx$. Encuentre

a. el cambio $\Delta f = f(x_0 + dx) - f(x_0)$;

b. el valor de la estimación $df = f'(x_0)\,dx$; y

c. el error de aproximación $|\Delta f - df|$.

31. $f(x) = x^2 + 2x$, $x_0 = 1$, $dx = 0.1$

32. $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$, $x_0 = -1$, $dx = 0.1$

33. $f(x) = x^3 - x$, $x_0 = 1$, $dx = 0.1$

34. $f(x) = x^4$, $x_0 = 1$, $dx = 0.1$

35. $f(x) = x^{-1}$, $x_0 = 0.5$, $dx = 0.1$

36. $f(x) = x^3 - 2x + 3$, $x_0 = 2$, $dx = 0.1$

Estimaciones diferenciales del cambio

En los ejercicios 37 a 42, escriba una fórmula diferencial que estime el cambio dado en el volumen o en el área de la superficie.

37. El cambio en el volumen $V = (4/3)\pi r^3$ de una esfera cuando el radio cambia de r_0 a $r_0 + dr$

38. El cambio en el volumen $V = x^3$ de un cubo cuando la longitud de la arista cambia de x_0 a $x_0 + dx$

39. El cambio en el área de la superficie $S = 6x^2$ de un cubo cuando la longitud de la arista cambia de x_0 a $x_0 + dx$.

40. El cambio en el área de la superficie lateral $S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$ de un cono circular recto cuando el radio cambia de r_0 a $r_0 + dr$ y la altura no cambia.

41. El cambio en el volumen $V = \pi r^2 h$ de un cilindro circular recto cuando el radio cambia de r_0 a $r_0 + dr$ y la altura no cambia.

42. El cambio en el área de la superficie lateral $S = 2\pi rh$ de un cilindro circular recto cuando la altura cambia de h_0 a $h_0 + dh$ y el radio no cambia.

Aplicaciones

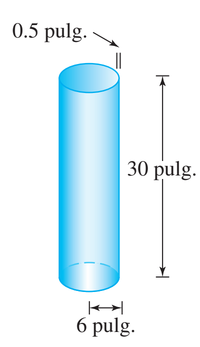
43. El radio de un círculo crece de 2.00 a 2.02 m.

a. Estime el cambio del área resultante.

b. Exprese la estimación como un porcentaje del área del círculo original.

44. El diámetro de un árbol era de 10 pulgadas. Durante el año siguiente, la circunferencia aumentó 2 pulgadas. ¿Aproximadamente cuánto aumentó el diámetro del árbol? ¿Cuánto se incrementó el área de la sección transversal?

45. Estimación de volumen Estime el volumen de material en un casco cilíndrico con altura 30 pulgadas, radio 6 pulgadas y espesor del casco 0.5 pulgadas.



46. Estimación de la altura de un edificio Un topógrafo, parado a 30 pies de la base de un edificio, mide un ángulo de elevación de 75° desde la parte superior del edificio. ¿Con qué exactitud debe medirse el ángulo para que el porcentaje de error al estimar la altura del edificio sea menor a 4 por ciento?

47. Tolerancia La altura y el radio de un cilindro circular recto son iguales, de manera que el volumen del cilindro es $V = \pi h^3$. El volumen debe calcularse con un error de no más de 1% del valor real. Encuentre aproximadamente el mayor error que se puede tolerar en la medición de h, expresado como un porcentaje de h.

48. Tolerancia

a. ¿Con qué exactitud debe medirse el diámetro interior de un tanque cilíndrico de almacenamiento de 10 m de altura para calcular el volumen del tanque dentro de 1% del valor real?

b. ¿Con qué exactitud debe medirse el diámetro exterior, para calcular la cantidad de pintura que se necesita para pintar la pared del tanque, dentro de 5% de la cantidad real?

49. Acuñación de monedas El gobierno federal contrata los servicios de cierta fábrica para acuñar monedas. ¿Cuánta variación dr en el radio de las monedas puede tolerarse si el peso de las mismas debe diferir menos que 1/1000 de su peso ideal? Suponga que el espesor no varía.

50. Esbozo del cambio en el volumen de un cubo El volumen $V = x^3$ de un cubo con aristas de longitud x crece una cantidad ΔV cuando x crece una cantidad Δx. Demuestre con un croquis cómo representar geométricamente ΔV como la suma de los volúmenes de:

a. Tres franjas de dimensiones x por x por Δx.

b. Tres barras de dimensiones x por Δx por Δx.

c. Un cubo de dimensiones Δx por Δx por Δx.

La fórmula diferencial $dV = 3x^2\,dx$ estima el cambio en V con las tres franjas.

51. El efecto que tienen maniobras de vuelo en el corazón La cantidad de trabajo realizada por la principal cámara de bombeo del corazón, el ventrículo izquierdo, está dado por la ecuación

$$W = PV + \frac{V\delta v^2}{2g},$$

donde W es el trabajo por unidad de tiempo, P es la presión promedio de la sangre, V es el volumen de sangre bombeado hacia fuera por unidad de tiempo, δ es el peso de la densidad de la sangre, v es la velocidad promedio de la sangre saliente y g es la aceleración de la gravedad.

Cuando P, V, δ y v permanecen constantes, W se convierte en una función de g y la ecuación toma la forma simplificada

$$W = a + \frac{b}{g} \quad (a, b \text{ constantes}).$$

Como miembro del equipo médico de la NASA, usted quiere saber qué tan sensible es W a los cambios en g causados por las maniobras de vuelo, y esto depende del valor inicial de g. Como parte de su investigación, decide comparar los efectos que tiene en W un cambio en dg, dado en la Luna, donde $g = 5.2$ pies/seg^2, con el efecto que el mismo cambio dg tendría en la Tierra, donde $g = 32$ pies/seg^2. Use la ecuación simplificada que se mencionó antes para encontrar la razón de dW_{Luna} a dW_{Tierra}.

52. Medición de la aceleración de la gravedad Cuando la longitud L del péndulo de un reloj se mantiene constante controlando su temperatura, el periodo T del péndulo depende de la aceleración de la gravedad g. Así, el periodo variará ligeramente al cambiar el reloj de un lugar a otro en la superficie de la Tierra, dependiendo del cambio en g. Sin perder de vista a ΔT, podemos estimar la variación en g a partir de la ecuación $T = 2\pi(L/g)^{1/2}$ que relaciona T, g y L.

a. Con L constante y g como la variable independiente, calcule dT y úsela para contestar los incisos (b) y (c).

b. ¿T crece o decrece cuando g se incrementa? ¿El péndulo de un reloj puede aumentar o disminuir rapidez su velocidad? Explique.

c. Un reloj con un péndulo de 100 cm es trasladado de una localidad donde $g = 980$ cm/seg^2 a una nueva ubicación. Esto aumenta el periodo en $dT = 0.001$ seg. Encuentre dg y estime el valor de g en la nueva ubicación.

53. La arista de un cubo mide 10 cm, con un error de 1 por ciento. Se tiene que calcular el volumen del cubo a partir de esta medida. Estime el porcentaje de error en el cálculo del volumen.

54. ¿Con qué exactitud debe medirse el lado de un cuadrado para estar seguros de calcular el área dentro del 2% de su valor real?

55. El diámetro de una esfera se mide como 100 ± 1 cm, y el volumen se calcula a partir de esta medición. Estime el porcentaje de error en el cálculo del volumen.

56. Estime el porcentaje de error aceptable en la medida del diámetro D de una esfera, si el volumen se calcula correctamente dentro de 3 por ciento.

57. (*Continuación de ejemplo 7*). Demuestre que un error de 5% en la medición de t provoca un error de aproximadamente 10% en el cálculo de s a partir de la ecuación $s = 16t^2$.

58. (*Continuación de ejemplo 8*). ¿En qué porcentaje hay que aumentar r para incrementar V en 50 por ciento?

Teoría y ejemplos

59. Demuestre que la aproximación de $\sqrt{1+x}$ por su linealización en el origen debe mejorar cuando $x \to 0$ probando que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}}{1 + (x/2)} = 1.$$

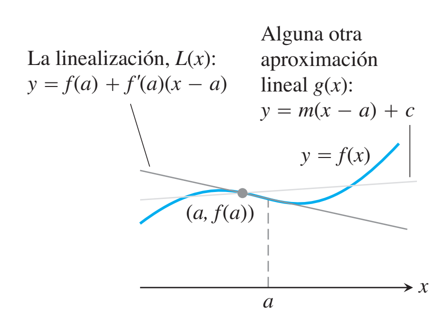
60. Demuestre que la aproximación de $\tan x$ por su linealización en el origen debe mejorar cuando $x \to 0$, probando

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1.$$

61. La linealización es la mejor aproximación lineal (Ésta es la razón por lo que usamos la linealización). Suponga que $y = f(x)$ es diferenciable en $x = a$, y que $g(x) = m(x - a) + c$ es una función lineal en donde m y c son constantes. Si el error $E(x) = f(x) - g(x)$ es suficientemente pequeño cerca de $x = a$, podemos pensar en usar g como una aproximación lineal de f en lugar de la linealización $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$. Demuestre que si le imponemos a g las condiciones

1. $E(a) = 0$ — La aproximación del error es cero en $x = a$.
2. $\lim_{x\to a} \frac{E(x)}{x - a} = 0$ — El error es despreciable cuando lo comparamos con $x - a$.

Entonces, $g(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$. De esta manera, la linealización $L(x)$ da la única aproximación lineal cuyo error es cero en $x = a$ y despreciable cuando la comparamos con $x - a$.



62. Aproximaciones cuadráticas

a. Sea $Q(x) = b_0 + b_1(x - a) + b_2(x - a)^2$ una aproximación cuadrática de $f(x)$ en $x = a$ con las propiedades

i. $Q(a) = f(a)$

ii. $Q'(a) = f'(a)$

iii. $Q''(a) = f''(a)$

Determine los coeficientes b_0, b_1 y b_2.

b. Encuentre la aproximación cuadrática de $f(x) = 1/(1 - x)$ en $x = 0$.

T **c.** Grafique $f(x) = 1/(1 - x)$ y su aproximación cuadrática en $x = 0$. Después haga un acercamiento en el punto (0,1) de ambas gráficas. Comente sus hallazgos.

T **d.** Encuentre la aproximación cuadrática de $g(x) = 1/x$ en $x = 1$. Grafique juntas g y su aproximación cuadrática. Comente sus hallazgos.

T **e.** Encuentre la aproximación cuadrática de $h(x)\sqrt{1 + x}$ en $x = 0$. Grafique juntas h y su aproximación cuadrática. Comente sus hallazgos.

f. ¿Cuáles son las linealizaciones de f, g y h en los respectivos puntos de los incisos (b), (d) y (e).

T **63. Lectura de derivadas a partir de las gráficas** La idea de que las curvas diferenciables se aplanan cuando se amplían puede ser usada para estimar los valores de las derivadas de funciones en puntos particulares. Ampliamos la curva hasta que la porción que vemos parece una recta que pasa por el punto en cuestión, y entonces usamos la cuadrícula coordenada de la pantalla para leer la pendiente de la curva como la pendiente de la recta a la que se parece.

a. Para ver cómo funciona el proceso, inténtelo primero con la función $y = x^2$ en $x = 1$. La pendiente que lea debe ser 2.

b. Después inténtelo con la curva en $y = e^x$ en $x = 1$, $x = 0$ y $x = -1$. En cada caso, compare su estimación de la derivada con el valor de e^x en el punto. ¿Qué patrón ve? Pruébelo con otros valores de x.
En el capítulo 7 se explica lo que sucede en este caso.

64. Suponga que la gráfica de una función diferenciable $f(x)$ tiene una tangente horizontal en $x = a$. ¿Se puede decir algo acerca de la linealización de f en $x = a$? Justifique su respuesta.

65. ¿A qué velocidad relativa debe acelerarse un cuerpo en reposo para aumentar su masa en 1 por ciento?

T **66. Sacar raíz repetidamente**

a. Teclee 2 en su calculadora y saque raíces cuadradas sucesivamente presionando la tecla de raíz cuadrada varias veces (o eleve a la potencia 0.5 repetidamente el número mostrado). ¿Qué patrón surge? Explique qué está pasando. ¿Qué sucede si se sacan raíces décimas?

b. Repita el procedimiento con 0.5 en lugar de 2 como dato original. ¿Qué sucede ahora? ¿Puede usar cualquier número positivo x en lugar de 2? Explique qué está pasando.

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

Comparación de funciones con sus linealizaciones

En los ejercicios 67 a 70, use un software matemático para estimar la magnitud del error al usar la linealización en lugar de la función en un intervalo específico I. Realice los pasos siguientes:

a. Dibuje la función f en I.

b. Encuentre la linealización L de la función en el punto a.

c. Dibuje juntas f y L en un solo plano.

d. Dibuje el error absoluto $|f(x) - L(x)|$ en I y encuentre su valor máximo.

e. A partir de la gráfica del inciso (d), estime tan grande como pueda $\delta > 0$ para que se satisfaga

$$|x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L(x)| < \epsilon$$

para $\epsilon = 0.5, 0.1$ y 0.01. Después verifique gráficamente para ver si su estimación de δ sigue siendo correcta.

67. $f(x) = x^3 + x^2 - 2x, \quad [-1, 2], \quad a = 1$

68. $f(x) = \dfrac{x - 1}{4x^2 + 1}, \quad \left[-\dfrac{3}{4}, 1\right], \quad a = \dfrac{1}{2}$

69. $f(x) = x^{2/3}(x - 2), \quad [-2, 3], \quad a = 2$

70. $f(x) = \sqrt{x} - \operatorname{sen} x, \quad [0, 2\pi], \quad a = 2$

Capítulo 3 Preguntas de repaso

1. ¿Qué es la derivada de una función f? ¿Cómo se relaciona su dominio con el dominio de f? Dé ejemplos.
2. ¿Qué papel juega la derivada en las definiciones de pendientes, tangentes y razones de cambio?
3. ¿Cómo se puede graficar la derivada de una función cuando lo único que se tiene es una tabla de los valores de la función?
4. ¿Qué significa que una función sea diferenciable en un intervalo abierto? ¿Qué significa que sea diferenciable en un intervalo cerrado?
5. ¿Cómo se relacionan las derivadas y las derivadas laterales?
6. Describa geométricamente cuándo una función típicamente *no* tiene derivada en un punto.
7. ¿Cómo se relacionan la diferenciabilidad de una función en un punto y su continuidad en dicho punto, si la hay?
8. La siguiente función escalonada unitaria

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

¿Puede ser la derivada de alguna otra función en $[-1, 1]$? Explique.

9. ¿Qué reglas conoce para calcular derivadas? Dé algunos ejemplos.
10. Explique cómo las tres fórmulas

a. $\dfrac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

b. $\dfrac{d}{dx}(cu) = c\dfrac{du}{dx}$

c. $\dfrac{d}{dx}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = \dfrac{du_1}{dx} + \dfrac{du_2}{dx} + \cdots + \dfrac{du_n}{dx}$

nos permiten diferenciar una función polinomial.

11. Además de las tres fórmulas dadas en la pregunta 10, ¿cuál otra necesitamos para diferenciar una función racional?
12. ¿Qué es una segunda derivada? ¿Qué es una tercera derivada? ¿Cuántas derivadas tienen las funciones que conoce? Dé ejemplos.
13. ¿Cuál es la relación entre el promedio de una función y las razones de cambio instantáneas? Dé un ejemplo.
14. ¿Cómo surgen las derivadas en el estudio del movimiento? ¿Qué se puede saber acerca del movimiento de un cuerpo a lo largo de una recta a partir del análisis de las derivadas de la función posición del cuerpo? Dé ejemplos.
15. ¿Cómo surgen las derivadas en economía?
16. Dé ejemplos de otras aplicaciones de las derivadas.
17. ¿Qué tienen que ver los límites $\lim_{h\to 0}((\operatorname{sen} h)/h)$ y $\lim_{h\to 0}((\cos h - 1)/h)$ con las derivadas de las funciones seno y coseno? ¿Cuáles *son* las derivadas de estas funciones?
18. ¿Cómo es posible encontrar las derivadas de tan x, cot x, sec x y csc x una vez que se conocen las derivadas de sen x y cos x? ¿Cuáles *son* las derivadas de estas funciones?
19. ¿En qué puntos las seis funciones trigonométricas son continuas? ¿Cómo lo sabe?
20. ¿Cuál es la regla para calcular la derivada de la composición de dos funciones diferenciables? ¿Cómo se evalúa dicha derivada? Dé ejemplos.
21. ¿Cuál es la fórmula para la pendiente dy/dx de una curva parametrizada $x = f(t), y = g(t)$? ¿Cuándo se aplica la fórmula? ¿Cuándo es posible esperar poder encontrar también d^2y/dx^2? Dé ejemplos.
22. Si u es una función diferenciable de x, ¿cómo se encuentra $(d/dx)(u^n)$ si n es un entero? ¿Cómo se encuentra si n es un número racional? Dé ejemplos.
23. ¿Qué es la diferenciación implícita? ¿Cuándo es necesaria? Dé ejemplos.
24. ¿Cómo surgen los problemas de razones de cambio relacionadas? Dé ejemplos.
25. Esboce una estrategia para resolver problemas de razones relacionadas. Ilustre con un ejemplo.
26. ¿Qué es la linealización $L(x)$ de una función $f(x)$ en un punto $x = a$? ¿Qué se requiere de f en a para que exista la linealización? ¿Para qué se usan las linealizaciones? Dé ejemplos.
27. Si x se mueve de a a un valor cercano $a + dx$, ¿cómo se puede estimar el cambio correspondiente en el valor de una función diferenciable $f(x)$? ¿Cómo se puede estimar el cambio relativo? ¿Cómo se puede estimar el cambio porcentual? Dé un ejemplo.

Capítulo 3 Ejercicios de práctica

Derivadas de funciones

Encuentre las derivadas de las funciones de los ejercicios 1 a 40.

1. $y = x^5 - 0.125x^2 + 0.25x$
2. $y = 3 - 0.7x^3 + 0.3x^7$
3. $y = x^3 - 3(x^2 + \pi^2)$
4. $y = x^7 + \sqrt{7x} - \dfrac{1}{\pi + 1}$
5. $y = (x + 1)^2(x^2 + 2x)$
6. $y = (2x - 5)(4 - x)^{-1}$
7. $y = (\theta^2 + \sec\theta + 1)^3$
8. $y = \left(-1 - \dfrac{\csc\theta}{2} - \dfrac{\theta^2}{4}\right)^2$
9. $s = \dfrac{\sqrt{t}}{1 + \sqrt{t}}$
10. $s = \dfrac{1}{\sqrt{t} - 1}$

11. $y = 2\tan^2 x - \sec^2 x$

12. $y = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \dfrac{2}{\operatorname{sen} x}$

13. $s = \cos^4(1 - 2t)$

14. $s = \cot^3\left(\dfrac{2}{t}\right)$

15. $s = (\sec t + \tan t)^5$

16. $s = \csc^5(1 - t + 3t^2)$

17. $r = \sqrt{2\theta \operatorname{sen}\theta}$

18. $r = 2\theta\sqrt{\cos\theta}$

19. $r = \operatorname{sen}\sqrt{2\theta}$

20. $r = \operatorname{sen}\left(\theta + \sqrt{\theta + 1}\right)$

21. $y = \dfrac{1}{2}x^2\csc\dfrac{2}{x}$

22. $y = 2\sqrt{x}\operatorname{sen}\sqrt{x}$

23. $y = x^{-1/2}\sec(2x)^2$

24. $y = \sqrt{x}\csc(x + 1)^3$

25. $y = 5\cot x^2$

26. $y = x^2\cot 5x$

27. $y = x^2\operatorname{sen}^2(2x^2)$

28. $y = x^{-2}\operatorname{sen}^2(x^3)$

29. $s = \left(\dfrac{4t}{t + 1}\right)^{-2}$

30. $s = \dfrac{-1}{15(15t - 1)^3}$

31. $y = \left(\dfrac{\sqrt{x}}{1 + x}\right)^2$

32. $y = \left(\dfrac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x} + 1}\right)^2$

33. $y = \sqrt{\dfrac{x^2 + x}{x^2}}$

34. $y = 4x\sqrt{x + \sqrt{x}}$

35. $r = \left(\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta - 1}\right)^2$

36. $r = \left(\dfrac{1 + \operatorname{sen}\theta}{1 - \cos\theta}\right)^2$

37. $y = (2x + 1)\sqrt{2x + 1}$

38. $y = 20(3x - 4)^{1/4}(3x - 4)^{-1/5}$

39. $y = \dfrac{3}{(5x^2 + \operatorname{sen} 2x)^{3/2}}$

40. $y = (3 + \cos^3 3x)^{-1/3}$

Diferenciación implícita

En los ejercicios 41 a 48, encuentre dy/dx.

41. $xy + 2x + 3y = 1$

42. $x^2 + xy + y^2 - 5x = 2$

43. $x^3 + 4xy - 3y^{4/3} = 2x$

44. $5x^{4/5} + 10y^{6/5} = 15$

45. $\sqrt{xy} = 1$

46. $x^2y^2 = 1$

47. $y^2 = \dfrac{x}{x + 1}$

48. $y^2 = \sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}}$

En los ejercicios 49 y 50, encuentre dp/dq.

49. $p^3 + 4pq - 3q^2 = 2$

50. $q = (5p^2 + 2p)^{-3/2}$

En los ejercicios 51 y 52, encuentre dr/ds.

51. $r\cos 2s + \operatorname{sen}^2 s = \pi$

52. $2rs - r - s + s^2 = -3$

53. Determine d^2y/dx^2 mediante diferenciación implícita:

a. $x^3 + y^3 = 1$ **b.** $y^2 = 1 - \dfrac{2}{x}$

54. a. Empleando diferenciación implícita, $x^2 - y^2 = 1$ demuestre $dy/dx = x/y$.

b. Después pruebe que $d^2y/dx^2 = -1/y^3$.

Valores numéricos de derivadas

55. Suponga que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ y sus primeras derivadas tienen los valores siguientes en $x = 0$ y $x = 1$.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
0	1	1	-3	$1/2$
1	3	5	$1/2$	-4

Encuentre la primera derivada de las combinaciones siguientes en el valor dado de x.

a. $6f(x) - g(x), \quad x = 1$

b. $f(x)g^2(x), \quad x = 0$

c. $\dfrac{f(x)}{g(x) + 1}, \quad x = 1$

d. $f(g(x)), \quad x = 0$

e. $g(f(x)), \quad x = 0$

f. $(x + f(x))^{3/2}, \quad x = 1$

g. $f(x + g(x)), \quad x = 0$

56. Suponga que la función $f(x)$ y su primera derivada tienen los valores siguientes en $x = 0$ y $x = 1$.

x	$f(x)$	$f'(x)$
0	9	-2
1	-3	$1/5$

Encuentre la primera derivada de las combinaciones siguientes en el valor dado de x.

a. $\sqrt{x}\,f(x), \quad x = 1$

b. $\sqrt{f(x)}, \quad x = 0$

c. $f(\sqrt{x}), \quad x = 1$

d. $f(1 - 5\tan x), \quad x = 0$

e. $\dfrac{f(x)}{2 + \cos x}, \quad x = 0$

f. $10\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)f^2(x), \quad x = 1$

57. Encuentre el valor de dy/dt en $t = 0$, si $y = 3\operatorname{sen} 2x$ y $x = t^2 + \pi$.

58. Encuentre el valor de ds/du en $u = 2$, si $s = t^2 + 5t$ y $t = (u^2 + 2u)^{1/3}$.

59. Determine el valor de dw/ds en $s = 0$, si $w = \operatorname{sen}(\sqrt{r} - 2)$ y $r = 8\operatorname{sen}(s + \pi/6)$.

60. Encuentre el valor de dr/dt en $t = 0$ si $r = (\theta^2 + 7)^{1/3}$ y $\theta^2 t + \theta = 1$.

61. Si $y^3 + y = 2\cos x$, encuentre el valor de d^2y/dx^2 el punto (0,1).

62. Si $x^{1/3} + y^{1/3} = 4$, determine el valor de d^2y/dx^2 el punto (8, 8).

Definición de derivada

En los ejercicios 63 y 64, encuentre la derivada usando la definición.

63. $f(t) = \dfrac{1}{2t + 1}$

64. $g(x) = 2x^2 + 1$

65. a. Grafique la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 \le x < 0 \\ -x^2, & 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

b. ¿f es continua en $x = 0$?

c. ¿f es diferenciable en $x = 0$?

Justifique sus respuestas.

66. a. Grafique la función

$$f(x) = \begin{cases} x, & -1 \le x < 0 \\ \tan x, & 0 \le x \le \pi/4. \end{cases}$$

b. ¿f es continua en $x = 0$?

c. ¿f es diferenciable en $x = 0$?

Justifique sus respuestas.

67. a. Grafique la función

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, & 1 < x \le 2. \end{cases}$$

b. ¿f es continua en $x = 1$?

c. ¿f es diferenciable en $x = 1$?

Justifique sus respuestas.

68. ¿Para qué valor o valores de la constante m, si hay alguno,

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} 2x, & x \le 0 \\ mx, & x > 0 \end{cases}$$

a. continua en $x = 0$?

b. diferenciable en $x = 0$?

Justifique sus respuestas.

Pendientes, tangentes y normales

69. Tangentes con pendiente específica. ¿Hay algún punto en la curva $y = (x/2) + 1/(2x - 4)$ donde la pendiente sea $-3/2$? De ser así, encuéntrelo(s).

70. Tangentes con pendiente específica. ¿Hay algún punto en la curva $y = x - 1/(2x)$ donde la pendiente sea 3? De ser así, encuéntrelo(s).

71. Tangentes horizontales Encuentre los puntos de la curva $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 20$ donde la tangente es paralela al eje x.

72. Intersección de la tangente con los ejes Encuentre la intersección con el eje x y con el eje y de la recta que es tangente a la curva $y = x^3$ en el punto $(-2, -8)$.

73. Tangentes perpendiculares o paralelas a rectas Encuentre los puntos de la curva $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 20$ donde la tangente es

a. perpendicular a la recta $y = 1 - (x/24)$.

b. paralela a la recta $y = \sqrt{2} - 12x$.

74. Intersección de tangentes Demuestre que las tangentes a la curva $y = (\pi \operatorname{sen} x)/x$ en $x = \pi$ y $x = -\pi$ se intersecan en ángulos rectos.

75. Normales paralelas a una recta Encuentre los puntos en la curva $y = \tan x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$, donde la normal es paralela a la recta $y = -x/2$. Trace juntas la curva y las normales, y etiquete cada una con su ecuación.

76. Rectas tangente y normal Encuentre las ecuaciones para la tangente y la normal a la curva $y = 1 + \cos x$ en el punto $(\pi/2, 1)$. Dibuje juntas la curva, la tangente y la normal, y señale cada una con su ecuación.

77. Parábola tangente La parábola $y = x^2 + C$ debe ser tangente a la recta $y = x$. Encuentre C.

78. Pendiente de la tangente Demuestre que la tangente a la curva $y = x^3$ en cualquier punto (a, a^3) corta a la curva nuevamente en un punto donde la pendiente es cuatro veces la pendiente en (a, a^3).

79. Curva tangente ¿Para qué valores de c la curva $y = c/(x + 1)$ es tangente a la recta que pasa por los puntos $(0, 3)$ y $(5, -2)$?

80. Normal a un círculo Demuestre que la recta normal en cualquier punto del círculo $x^2 + y^2 = a^2$ pasa por el origen.

Tangentes y normales a curvas definidas implícitamente

En los ejercicios 81 a 86, encuentre las ecuaciones de las rectas que son tangente y normal a la curva en el punto dado.

81. $x^2 + 2y^2 = 9$, $(1, 2)$

82. $x^3 + y^2 = 2$, $(1, 1)$

83. $xy + 2x - 5y = 2$, $(3, 2)$

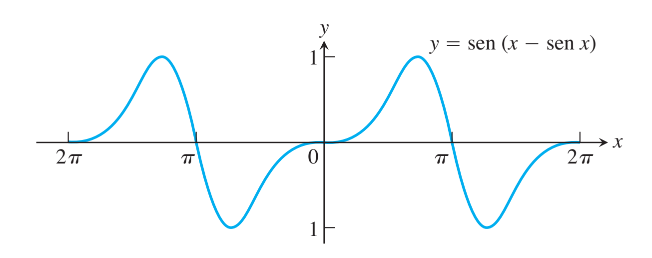
84. $(y - x)^2 = 2x + 4$, $(6, 2)$

85. $x + \sqrt{xy} = 6$, $(4, 1)$

86. $x^{3/2} + 2y^{3/2} = 17$, $(1, 4)$

87. Encuentre la pendiente de la curva $x^3y^3 + y^2 = x + y$ en los puntos $(1, 1)$ y $(1, -1)$.

88. La gráfica que se muestra sugiere que la curva $y = \operatorname{sen}(x - \operatorname{sen} x)$ debe tener tangentes horizontales al eje x. ¿Es así? Justifique su respuesta.



Tangentes a curvas parametrizadas

En los ejercicios 89 y 90, encuentre la ecuación para la recta en el plano xy que es tangente a la curva en el punto correspondiente al valor dado de t. También encuentre el valor de d^2y/dx^2 en ese punto.

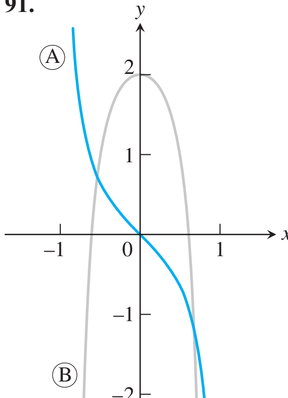
89. $x = (1/2) \tan t$, $y = (1/2) \sec t$, $t = \pi/3$

90. $x = 1 + 1/t^2$, $y = 1 - 3/t$, $t = 2$

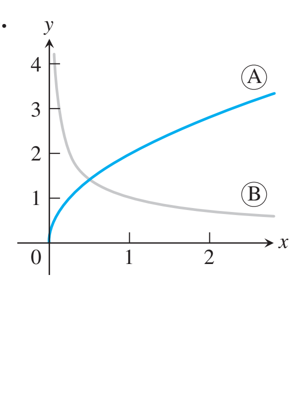
Análisis de gráficas

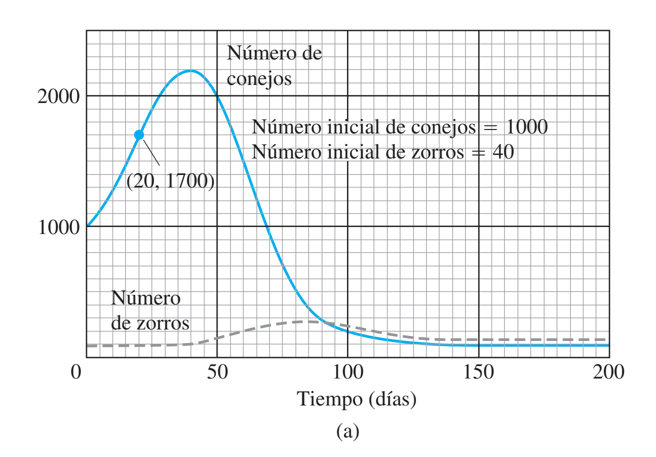
Cada una de las figuras en los ejercicios 91 y 92 muestra dos gráficas, la de una función $y = f(x)$ y la de su derivada $f'(x)$. ¿Cuál gráfica es cuál? ¿Cómo lo sabe?

91.

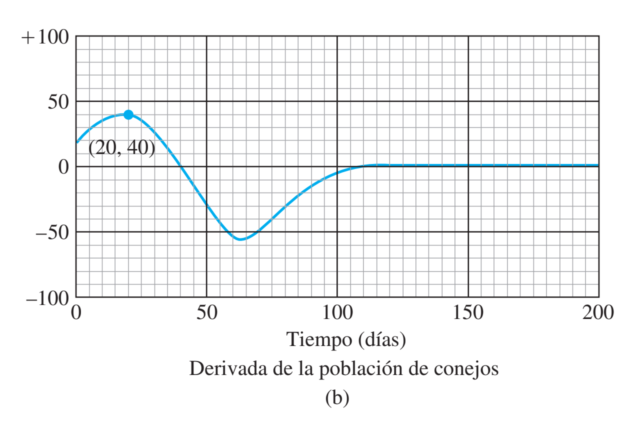


92.





(a)



Derivada de la población de conejos
(b)

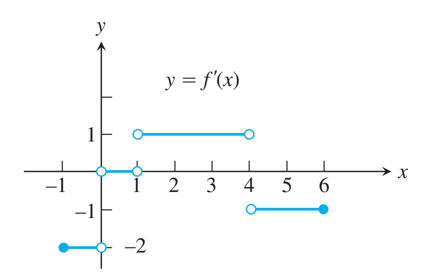
FIGURA 3.53 Conejos y zorros en una cadena alimenticia depredador-presa en el ártico.

93. Use la información siguiente para graficar la función $y = f(x)$ para $-1 \leq x \leq 6$.

i. La gráfica de f está formada por segmentos de recta unidos extremo con extremo.

ii. La gráfica empieza en el punto $(-1, 2)$.

iii. La derivada de f, donde está definida, coincide con la función escalonada que aquí se muestra.



94. Repita el ejercicio 93, suponiendo que la gráfica empieza en $(-1, 0)$ en lugar de hacerlo en $(-1, 2)$.

Los ejercicios 95 y 96 se hacen a partir de las gráficas de la figura 3.53 (columna derecha). Las gráficas de la parte (a) muestran los números de conejos y zorros en una región ártica pequeña. Están trazadas como funciones del tiempo durante 200 días. Al principio el número de conejos crece al irse reproduciendo. Pero los zorros se alimentan de conejos, y conforme el número de zorros crece, el nivel de la población de conejos se nivela y después baja. La figura 3.53b muestra la gráfica de la derivada de la población de conejos. La hicimos graficando las pendientes.

95. a. ¿Cuál es el valor de la derivada de la población de conejos en la figura 3.53 cuando el número de conejos es la más grande? ¿Cuál es su valor cuando el número de conejos es el más pequeño?

b. ¿Cuál es el tamaño de la población de conejos en la figura 3.53 cuando su derivada es la más grande? ¿Cuál es el su valor cuando la derivada es la más pequeña (valores negativos)?

96. ¿En qué unidades deben medirse las pendientes de las curvas de las poblaciones de conejos y zorros?

Límites trigonométricos

97. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{2x^2 - x}$

98. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x - \tan 7x}{2x}$

99. $\lim\limits_{r \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} r}{\tan 2r}$

100. $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} \theta)}{\theta}$

101. $\lim\limits_{\theta \to (\pi/2)^-} \dfrac{4\tan^2 \theta + \tan \theta + 1}{\tan^2 \theta + 5}$

102. $\lim\limits_{\theta \to 0^+} \dfrac{1 - 2\cot^2 \theta}{5\cot^2 \theta - 7\cot \theta - 8}$

103. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \operatorname{sen} x}{2 - 2\cos x}$

104. $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{1 - \cos \theta}{\theta^2}$

Demuestre cómo se extienden las funciones de los ejercicios 105 y 106 para que sean continuas en el origen.

105. $g(x) = \dfrac{\tan(\tan x)}{\tan x}$

106. $f(x) = \dfrac{\tan(\tan x)}{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)}$

Razones de cambio o tasas relacionadas

107. Cilindro circular recto El área total de la superficie S de un cilindro circular recto está relacionada con el radio de la base r y la altura h mediante la ecuación $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$.

a. ¿Cómo se relaciona dS/dt con dr/dt si h es constante?

b. ¿Cómo se relaciona dS/dt con dh/dt si r es constante?

c. ¿Cómo se relaciona dS/dt con dr/dt y dh/dt si ni r ni h son constantes?

d. ¿Cómo se relaciona dr/dt con dh/dt si S es constante?

108. Cono circular recto El área lateral de la superficie S de un cono circular recto está relacionada con el radio de la base r y la altura h mediante la ecuación $S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$.

a. ¿Cómo se relaciona dS/dt con dr/dt si h es constante?

b. ¿Cómo se relaciona dS/dt con dh/dt si r es constante?

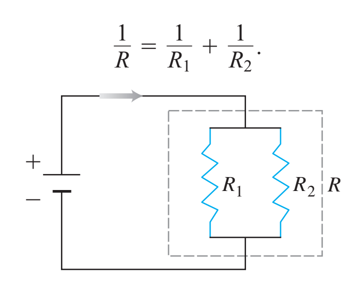
c. ¿Cómo se relaciona dS/dt con dr/dt si ni r ni h son constantes?

109. Cambio del área de un círculo El radio de un círculo cambia a una razón de $-2/\pi$ m/sec. ¿A qué razón cambia el área del círculo cuando $r = 10$ m?

110. Cambio de la arista de un cubo El volumen de un cubo crece a razón de 1200 cm^3/min en el instante en que sus aristas tienen una longitud de 20 cm. ¿A qué razón cambian las longitudes de las aristas en ese instante?

111. Resistencias conectadas en paralelo Si dos resistencias de R_1 y R_2 ohms están conectadas en paralelo en un circuito eléctrico para formar una resistencia de R ohms; el valor de R se puede encontrar a partir de la ecuación

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$



Si R_1 decrece a razón de 1 ohm/seg y R_2 aumenta a razón de 0.5 ohm/seg, ¿a qué razón cambia R cuando $R_1 = 75$ ohms y $R_2 = 50$ ohms?

112. Impedancia en un circuito en serie La impedancia Z (ohms) en un circuito en serie está relacionada con la resistencia R (ohms) y la reactancia X (ohms) mediante la ecuación $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$. Si R crece a 3 ohms/seg y X decrece a 2 ohms/seg, ¿a qué razón cambia Z cuando $R = 10$ ohms y $X = 20$ ohms?

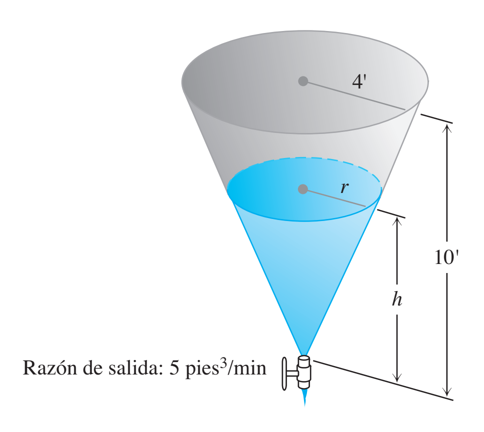
113. Velocidad de una partícula en movimiento Las coordenadas de una partícula en movimiento en el plano xy son funciones diferenciables del tiempo t con $dx/dt = 10$ m/seg y $dy/dt = 5$ m/seg. ¿Qué tan rápido se aleja la partícula del origen cuando pasa por el punto (3, –4)?

114. Movimiento de una partícula Una partícula se mueve a lo largo de la curva $y = x^{3/2}$ en el primer cuadrante de tal manera que su distancia al origen crece a razón de 11 unidades por segundo. Encuentre dx/dt cuando $x = 3$.

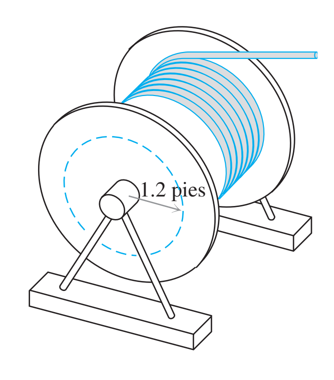
115. Drenado de un tanque El agua fluye del tanque cónico que se muestra en la figura siguiente a razón de 5 pies cúbicos/min.

a. ¿Cuál es la relación entre las variables h y r en la figura?

b. ¿Qué tan rápido baja el nivel del agua cuando $h = 6$ pies?



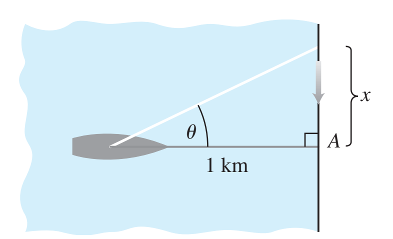
116. Carrete rodante Se saca un cable de televisión de un carrete grande para atarlo al poste telefónico a lo largo de una calle; el carrete se desenrolla en capas de radio constante (vea la figura). Si el camión que jala el cable se mueve a 6 pies/seg (ligeramente a más de 4 millas/hora), use la ecuación $s = r\theta$ para encontrar qué tan rápido da vueltas el carrete (radianes por segundo) cuando se desenrolla la capa de radio 1.2 pies.



117. Movimiento de un faro La figura muestra un bote a 1 km de la costa, iluminándola con un faro buscador. La luz da vuelta a una razón constante de $d\theta/dt = -0.6$ rad/sec.

a. ¿Qué tan rápido se mueve la luz a lo largo de la costa cuando alcanza el punto A?

b. ¿Cuántas revoluciones por minuto son 0.6 rad/seg?



118. Puntos que se mueven sobre los ejes Los puntos A y B se mueven a lo largo de los ejes x y y respectivamente, de manera que la distancia r (en metros) a lo largo de la perpendicular desde el origen a la recta AB permanece constante. ¿Qué tan rápido cambia OA? ¿OA está creciendo o decreciendo cuando $OB = 2r$ y B se mueve hacia O a una razón de $0.3r$ m/seg?

Linealización

119. Encuentre las linealizaciones de

a. $\tan x$ en $x = -\pi/4$ **b.** $\sec x$ en $x = -\pi/4$.

Grafique juntas las curvas y las linealizaciones.

120. Puede obtener una aproximación lineal útil de la función $f(x) = 1/(1 + \tan x)$ en $x = 0$ combinando las aproximaciones

$$\frac{1}{1+x} \approx 1 - x \qquad \text{y} \qquad \tan x \approx x$$

para obtener

$$\frac{1}{1+\tan x} \approx 1 - x.$$

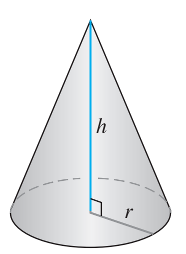
Demuestre que este resultado es la aproximación lineal estándar de $1/(1 + \tan x)$ en $x = 0$.

121. Encuentre la linealización de $f(x) = \sqrt{1+x} + \operatorname{sen} x - 0.5$ en $x = 0$.

122. Encuentre la linealización de $f(x) = 2/(1 - x) + \sqrt{1+x} - 3.1$ en $x = 0$.

Estimaciones diferenciales del cambio

123. Área de la superficie de un cono Escriba una fórmula que estime el cambio que ocurre en el área de la superficie lateral de un cono circular recto cuando la altura cambia de h_0 a $h_0 + dh$ y el radio no se modifica.



$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$

(Área superficial lateral)

124. Error Compuesto

a. ¿Con qué exactitud debe medirse la arista de un cubo para estar seguros de calcular el área de la superficie del cubo con un error no mayor de 2 por ciento?

b. Suponga que la arista se mide con la exactitud requerida en el inciso (a). ¿Con cuánta precisión puede calcularse el volumen del cubo a partir de la medición de la arista? Para saberlo, estime el porcentaje de error en los cálculos del volumen que pueden resultar de usar la medición de la arista.

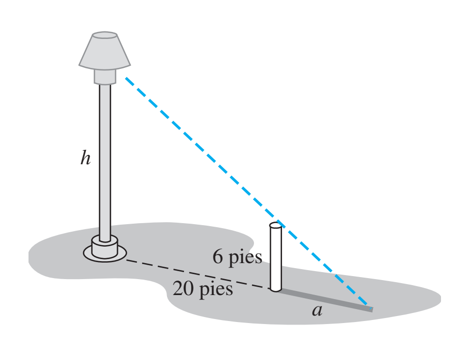
125. Compensación del error La circunferencia del ecuador de una esfera se mide como 10 cm, con un posible error de 0.4 cm. Después se usa esta medida para calcular el radio. Luego se usa el radio para calcular el área superficial y el volumen de la esfera. Estime los porcentajes de los errores en los valores calculados de

a. el radio

b. el área superficial

c. el volumen.

126. Determinación de una altura Para encontrar la altura del poste de luz (vea la figura), se pone un palo de 6 pies de longitud a 20 pies del poste, y se mide la longitud a de su sombra, encontrando que ésta es de 15 pies, con una pulgada de más o de menos. Calcule la altura del poste de luz usando el valor $a = 15$ y estimando el error posible en el resultado.



Capítulo 3 Ejercicios adicionales y avanzados

1. Una ecuación como $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ se llama **identidad**, ya que se satisface para todos los valores de θ. Una ecuación como $\operatorname{sen}\theta = 0.5$ no es una identidad, porque sólo se satisface para ciertos valores de θ, no para todos. Si diferenciamos ambos lados de una identidad en θ con respecto a θ, el resultado es una ecuación nueva que también será una identidad.

Derive las siguientes para probar que las ecuaciones resultantes se satisfacen para toda θ.

a. $\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$

b. $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$

2. Si se deriva la identidad $\operatorname{sen}(x + a) = \operatorname{sen} x\cos a + \cos x\operatorname{sen} a$ con respecto a x, ¿la ecuación resultante es una identidad? ¿Se aplica este principio a la ecuación $x^2 - 2x - 8 = 0$? Explique.

3. a. Encuentre los valores para las constantes a, b y c que hagan que

$$f(x) = \cos x \quad \text{y} \quad g(x) = a + bx + cx^2$$

satisfagan las condiciones

$$f(0) = g(0), \quad f'(0) = g'(0), \quad \text{y} \quad f''(0) = g''(0).$$

b. Encuentre los valores para b y c que hagan que

$$f(x) = \operatorname{sen}(x + a) \quad \text{y} \quad g(x) = b \operatorname{sen} x + c \cos x$$

satisfagan las condiciones

$$f(0) = g(0) \quad \text{y} \quad f'(0) = g'(0).$$

c. Para los valores determinados de a, b y c, ¿qué sucede con la tercera y cuarta derivadas de f y g en cada uno de las incisos (a) y (b)?

4. Soluciones de ecuaciones diferenciales

a. Demuestre que $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, y $y = a \cos x + b \operatorname{sen} x$ (a y b constantes) satisfacen la ecuación

$$y'' + y = 0.$$

b. ¿Cómo modificaría las funciones del inciso (a) para que satisfagan la ecuación

$$y'' + 4y = 0?$$

Generalice este resultado.

5. Un círculo osculador Encuentre los valores de h, k y a que hacen que el círculo $(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2$ sea tangente a la parábola $y = x^2 + 1$ en el punto (1, 2), y que las segundas derivadas d^2y/dx^2 tengan el mismo valor en ambas curvas en ese punto. Círculos como éste, que son tangentes a una curva y tienen la misma segunda derivada que la curva en el punto de tangencia, se llaman *círculos osculadores* (del latín *osculari*, que significa "besar"). Nos lo encontraremos nuevamente en el capítulo 13.

6. Ingreso marginal Un autobús tiene capacidad para 60 personas. El número x de personas por viaje que acostumbra transportar el autobús está relacionado con el pasaje (p dólares), de acuerdo con la ley $p = [3 - (x/40)]^2$. Escriba una expresión para el ingreso total $r(x)$ por viaje que recibe la empresa de autobuses. ¿Qué número de personas por viaje harán que el ingreso marginal dr/dx sea igual a cero? ¿Cuál es el precio del pasaje correspondiente? (Este precio es el que maximiza el ingreso, de manera que la empresa de autobuses probablemente deba replantear su política de precios).

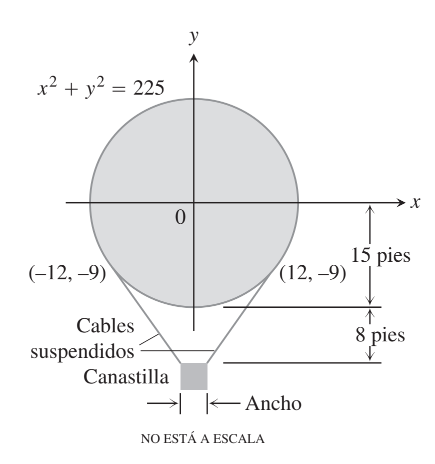
7. Producción industrial

a. Los economistas suelen usar la expresión "razón de crecimiento" en términos relativos en lugar de absolutos. Por ejemplo, sea $u = f(t)$ el número de personas en la fuerza laboral en el tiempo t en una industria determinada. (Tratamos esta función como si fuera diferenciable, a pesar que es una función escalonada de valores enteros).

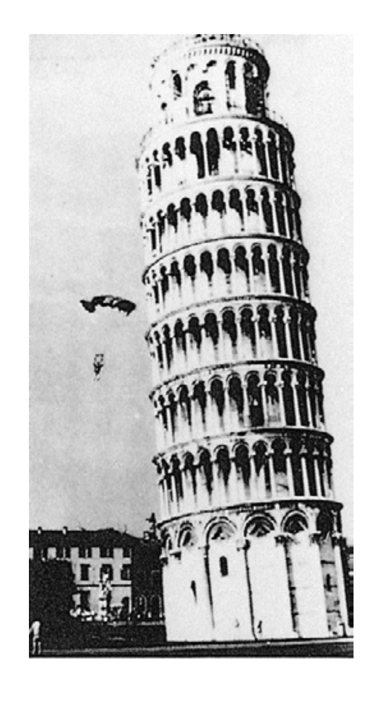
Sea $v = g(t)$ el promedio de producción por persona de la fuerza laboral en el tiempo t. Entonces la producción total es $y = uv$. Si la fuerza laboral crece a razón de 4% por año ($du/dt = 0.04u$) y la producción por trabajador crece a razón de 5% por año ($dv/dt = 0.05v$), encuentre la razón de crecimiento de la producción total y.

b. Suponga que la fuerza laboral en el inciso (a) decrece a razón de 2% por año, mientras la producción por persona crece a razón de 3% por año. ¿La producción total crece o decrece, y a qué razón?

8. Diseño de una canastilla El diseñador de un globo esférico de aire caliente que mide 30 pies de diámetro, quiere colgar la canastilla a 8 pies debajo de la parte inferior del globo utilizando cables tangentes a la superficie del globo, como se muestra en la figura. Se ilustran dos cables que van de las aristas superiores de la canastilla a sus puntos de tangencia, (–12, –9) y (12, –9). ¿Qué ancho debe tener la canastilla?



9. Pisa en paracaídas La fotografía muestra el salto con paracaídas que Mike McCarthy realizó desde la parte superior de la Torre de Pisa el 5 de agosto de 1988. Haga un dibujo para mostrar la forma de la gráfica de su rapidez durante el salto.



El londinense Mike McCarthy saltó desde la Torre de Pisa y después abrió su paracaídas en lo que él dijo era el récord mundial de salto de paracaídas más bajo a 179 pies. (*Fuente: Boston Globe,* 6 de agosto, 1988).

10. Movimientos de una partícula La posición en el tiempo $t \geq 0$ de una partícula que se mueve a lo largo de una recta coordenada es

$$s = 10\cos(t + \pi/4).$$

a. ¿Cuál es la posición inicial de la partícula ($t = 0$)?

b. ¿Cuáles son los puntos más lejanos a la izquierda y a la derecha del origen alcanzados por la partícula?

c. Encuentre la velocidad y la aceleración de la partícula en los puntos del inciso (b).

d. ¿Cuándo alcanza la partícula el origen por primera vez? ¿Cuáles son su velocidad, su rapidez y su aceleración en ese momento?

11. Disparo de un sujetador de papel En la Tierra fácilmente se puede disparar un sujetador de papel 64 pies hacia arriba con una liga. El sujetador, t segundos después del disparo, está $s = 64t - 16t^2$ pies arriba de la mano que lo lanzó.

a. ¿Cuánto tiempo tarda el sujetador en alcanzar su máxima altura? ¿Con qué velocidad deja la mano que lo lanza?

b. En la Luna, la misma aceleración mandaría el sujetador de papel a una altura de $s = 64t - 2.6t^2$ pies en t segundos. ¿Más o menos cuánto tiempo tarda el sujetador de papel en alcanzar su altura máxima y qué tan alto llegaría?

12. Velocidades de dos partículas En el tiempo t segundos, las posiciones de dos partículas en una recta coordenada son $s_1 = 3t^3 - 12t^2 + 18t + 5$ m y $s_2 = -t^3 + 9t^2 - 12t$ m. ¿Cuándo tienen las dos partículas la misma velocidad?

13. Velocidad de una partícula Una partícula de masa constante m se mueve a lo largo del eje x. Su velocidad v y su posición x satisfacen la ecuación

$$\frac{1}{2}m(v^2 - v_0{}^2) = \frac{1}{2}k(x_0{}^2 - x^2),$$

donde k, v_0 y x_0 son constantes. Demuestre que siempre que $v \neq 0$,

$$m\frac{dv}{dt} = -kx.$$

14. Velocidad promedio e instantánea

a. Demuestre que si la posición x de un punto en movimiento está dada por una función cuadrática de t, $x = At^2 + Bt + C$, entonces la velocidad promedio en cualquier intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ es igual a la velocidad instantánea en el punto medio del intervalo de tiempo.

b. ¿Cuál es el significado geométrico del resultado que obtuvo en el inciso (a)?

15. Encuentre todos los valores de las constantes m y b para los que la función

$$y = \begin{cases} \operatorname{sen} x, & x < \pi \\ mx + b, & x \geq \pi \end{cases}$$

es

a. continua en $x = \pi$.

b. diferenciable en $x = \pi$.

16. ¿La función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

tiene derivada en $x = 0$? Explique

17. a. ¿Para qué valores de a y b será diferenciable

$$f(x) = \begin{cases} ax, & x < 2 \\ ax^2 - bx + 3, & x \geq 2 \end{cases}$$

para todo valor de x?

b. Analice la geometría de la gráfica resultante de f.

18. a. ¿Para qué valores de a y b

$$g(x) = \begin{cases} ax + b, & x \leq -1 \\ ax^3 + x + 2b, & x > -1 \end{cases}$$

será diferenciable para todo valor de x?

b. Analice la geometría de la gráfica resultante de g.

19. Funciones diferenciables impares ¿Hay algo especial en la derivada de una función diferenciable impar de x? Justifique su respuesta.

20. Funciones diferenciables pares ¿Hay algo especial en la derivada de una función diferenciable par de x? Justifique su respuesta.

21. Suponga que las funciones f y g están definidas en todo un intervalo abierto que contiene al punto x_0, que f es diferenciable en x_0, que $f(x_0) = 0$, y que g es continua en x_0. Demuestre que el producto fg es diferenciable en x_0. Este proceso prueba, por ejemplo, que a pesar de que $|x|$ no es diferenciable en $x = 0$, el producto $x|x|$ sí lo es en ese punto.

22. (*Continuación del ejercicio 21*) Use el resultado del ejercicio 21 para probar que las funciones siguientes son diferenciables en $x = 0$.

a. $|x| \operatorname{sen} x$ **b.** $x^{2/3} \operatorname{sen} x$ **c.** $\sqrt[3]{x}(1 - \cos x)$

d. $h(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

23. ¿La derivada de

$$h(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

es continua en $x = 0$? ¿La derivada de $k(x) = xh(x)$ lo es? Justifique sus respuestas.

24. Suponga que una función f satisface las condiciones siguientes para todos los valores reales de x y y:

i. $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$.

ii. $f(x) = 1 + xg(x)$, cuando $\lim_{x \to 0} g(x) = 1$.

Demuestre que la derivada $f'(x)$ existe en todo valor de x y que $f'(x) = f(x)$.

25. La generalización de la regla del producto Use inducción matemática para probar que si $y = u_1 u_2 \cdots u_n$ es un producto finito de funciones diferenciables, entonces y es diferenciable en su dominio común y

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du_1}{dx}u_2 \cdots u_n + u_1\frac{du_2}{dx} \cdots u_n + \cdots + u_1 u_2 \cdots u_{n-1}\frac{du_n}{dx}.$$

26. Regla de Leibniz para derivadas de orden superior de productos La regla de Leibniz para derivadas de orden superior de productos de funciones diferenciables dice que

a. $$\frac{d^2(uv)}{dx^2} = \frac{d^2u}{dx^2}v + 2\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + u\frac{d^2v}{dx^2}$$

b. $$\frac{d^3(uv)}{dx^3} = \frac{d^3u}{dx^3}v + 3\frac{d^2u}{dx^2}\frac{dv}{dx} + 3\frac{du}{dx}\frac{d^2v}{dx^2} + u\frac{d^3v}{dx^3}$$

c. $$\frac{d^n(uv)}{dx^n} = \frac{d^nu}{dx^n}v + n\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}\frac{dv}{dx} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{d^{n-k}u}{dx^{n-k}}\frac{d^kv}{dx^k} + \cdots + u\frac{d^nv}{dx^n}.$$

Las ecuaciones en las partes (a) y (b) son casos especiales de la ecuación en la parte (c). Obtenga la ecuación de la parte (c) por inducción matemática usando

$$\binom{m}{k} + \binom{m}{k+1} = \frac{m!}{k!(m-k)!} + \frac{m!}{(k+1)!(m-k-1)!}.$$

27. El periodo de un reloj de péndulo El periodo T de un reloj de péndulo (tiempo para una oscilación completa) está dado por la fórmula $T^2 = 4\pi^2 L/g$, donde T está medido en segundos, $g = 32.2$ pies/seg^2 y L, la longitud del péndulo, está medida en pies. Encuentre aproximadamente:

a. la longitud del péndulo de un reloj cuyo periodo es $T = 1$ seg.

b. el cambio dT en T si el péndulo del inciso (a) se alarga 0.01 pies.

c. el tiempo que se adelanta o atrasa el reloj en un día como resultado del cambio de periodo por la cantidad dT encontrada en el inciso (b).

28. Cubo de hielo Suponga que un cubo de hielo conserva su forma cúbica conforme se derrite. Si llamamos a la longitud de sus aristas s, su volumen es $V = s^3$ y su área superficial es $6s^2$. Suponga que V y s son funciones diferenciables del tiempo t. También suponga que el volumen del cubo disminuye a una razón que es proporcional a su área superficial. (Esta última suposición parece bastante razonable cuando pensamos que el hielo se derrite en la superficie: al cambiar la cantidad de superficie cambia la cantidad de hielo expuesto para derretirse). En términos matemáticos,

$$\frac{dV}{dt} = -k(6s^2), \qquad k > 0.$$

El signo menos significa que el volumen está disminuyendo. Suponga que el factor de proporcionalidad k es constante. (Probablemente depende de muchos factores, tales como la humedad relativa del aire circundante, la temperatura del aire y la incidencia o ausencia de luz solar, por nombrar sólo algunos). Asuma que hay un conjunto de condiciones particulares por las que el cubo pierde 1/4 de su volumen durante la primera hora, y que el volumen es V_0 cuando t = 0. ¿Cuánto tardará en derretirse el cubo de hielo?

Capítulo 3 Proyectos de aplicación tecnológica

Módulo Mathematica/Maple

Convergencia de pendientes secantes a la función derivada

Verá la recta secante entre puntos consecutivos en una curva, y observará qué pasa cuando la distancia entre ellos se hace pequeña. La función, los puntos dados y las rectas secantes están trazados en una sola gráfica, mientras que una segunda gráfica compara las pendientes de las rectas secantes con la función derivada.

Módulo Mathematica/Maple

Derivadas, pendientes, rectas tangentes y animación

Partes I-III. Verá la derivada en un punto, la linealización de una función y la derivada de una función. Aprenderá cómo trazar la función y seleccionar tangentes en la misma gráfica.

Parte IV (Trazo de muchas tangentes)

Parte V (Animación) Las partes IV y V del módulo se pueden usar para animar rectas tangentes moviéndose a lo largo de la gráfica de una función.

Módulo Mathematica/Maple

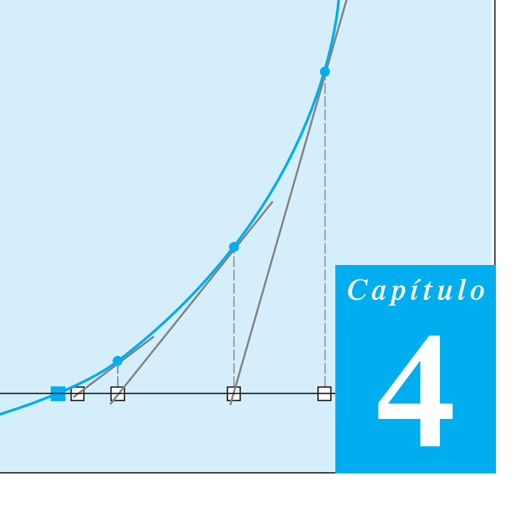
Convergencia de pendientes secantes a la función derivada

Verá derivadas laterales derecha e izquierda.

Módulo Mathematica/Maple

Movimiento a lo largo de una recta: Posición → Velocidad → Aceleración

Observe dramáticas imágenes animadas de las relaciones obtenidas entre las funciones posición, velocidad y aceleración. Las figuras del texto se pueden animar.



Capítulo 4

APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

INTRODUCCIÓN En este capítulo estudiaremos algunas de las importantes aplicaciones de las derivadas. Aprenderemos cómo se usan para encontrar los valores extremos de funciones, para determinar y analizar las formas de las gráficas, para calcular los límites de fracciones cuyos numeradores y denominadores tienden a cero o a infinito, y para encontrar numéricamente el punto en donde una función es igual a cero. También consideraremos el proceso para recuperar una función a partir de su derivada. La clave para muchas de estas acciones es el teorema del valor medio, un teorema cuyos corolarios representan la entrada al cálculo integral que analizaremos en el capítulo 5.

4.1 Valores extremos de una ecuación

En esta sección se muestra cómo localizar e identificar valores extremos de una función continua a partir de su derivada. Una vez que podamos hacerlo, seremos capaces de resolver una gran variedad de *problemas de optimización*, en los cuales el objetivo es encontrar el camino óptimo (el mejor) para hacer algo en la situación dada.

DEFINICIONES Máximo absoluto, mínimo absoluto

Sea f una función con dominio D. Decimos que f tiene un valor **máximo absoluto** en D en un punto c si

$$f(x) \leq f(c) \qquad \text{para toda } x \text{ en } D$$

y un valor **mínimo absoluto** en D en un punto c si

$$f(x) \geq f(c) \qquad \text{para toda } x \text{ en } D.$$

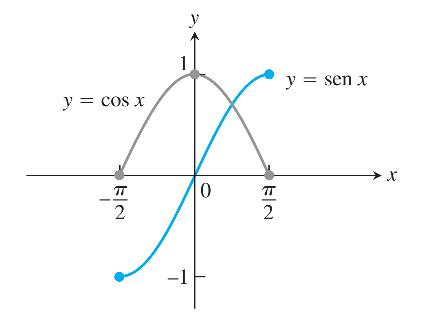


FIGURA 4.1 Extremo absoluto para las funciones seno y coseno en $[-\pi/2, \pi/2]$. Estos valores pueden depender del dominio de la función.

Los valores máximo y mínimo absoluto se llaman **extremos** absolutos. Los extremos absolutos también suelen denominarse extremos **globales**, para distinguirlos de los *extremos locales*, que se definen a continuación.

Por ejemplo, en el intervalo cerrado $[-\pi/2, \pi/2]$ la función $f(x) = \cos x$ alcanza un valor máximo absoluto igual a 1 (una vez) y un valor mínimo absoluto igual a 0 (dos veces). En el mismo intervalo, la función $g(x) = \operatorname{sen} x$ alcanza un valor máximo igual a 1 y un valor mínimo igual a -1 (figura 4.1).

Funciones con la misma regla de correspondencia pueden tener extremos distintos, dependiendo del dominio.

EJEMPLO 1 Exploración de extremos absolutos

En sus dominios, los extremos absolutos de las funciones siguientes pueden verse en la figura 4.2.

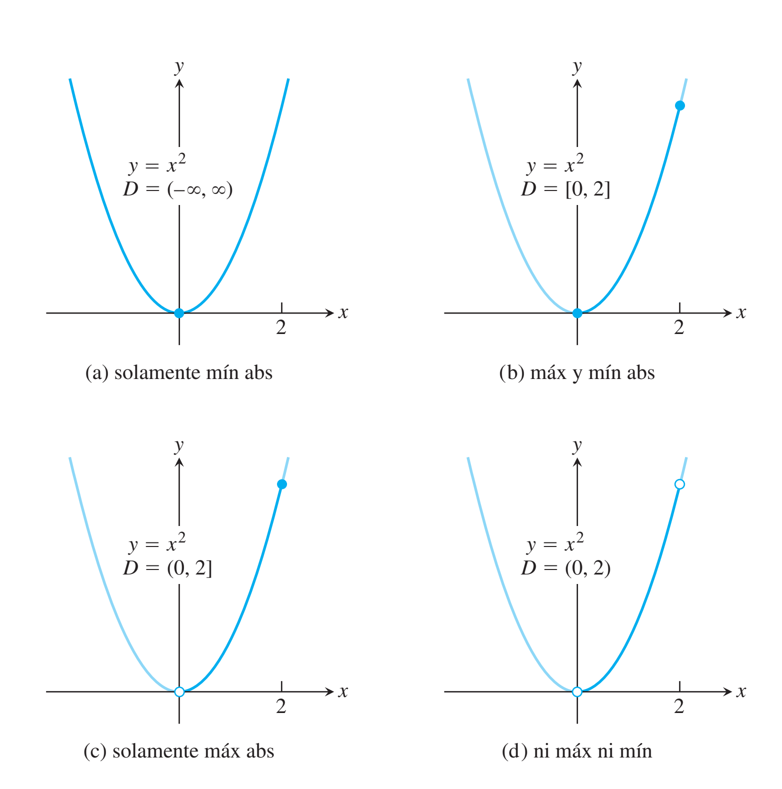


FIGURA 4.2 Gráficas para el ejemplo 1.

Regla de la función	Dominio D	Extremos absolutos en D
(a) $y = x^2$	$(-\infty, \infty)$	Sin máximo absoluto Mínimo absoluto 0 en $x = 0$.
(b) $y = x^2$	$[0, 2]$	Máximo absoluto 4 en $x = 2$. Mínimo absoluto 0 en $x = 0$.
(c) $y = x^2$	$(0, 2]$	Máximo absoluto 4 en $x = 2$. Sin mínimo absoluto
(d) $y = x^2$	$(0, 2)$	Sin extremos absolutos.

■

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

Daniel Bernoulli
(1700–1789)

El teorema siguiente afirma que una función que es continua en todo punto de un intervalo cerrado $[a, b]$ tiene un valor máximo absoluto y uno mínimo absoluto en el intervalo. Siempre buscamos estos valores cuando graficamos una función.

TEOREMA 1 Teorema del valor extremo
Si f es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f alcanza tanto un valor máximo absoluto M como un valor mínimo absoluto m en $[a, b]$. Esto es, existen números x_1 y x_2 en $[a, b]$ con $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$, y $m \leq f(x) \leq M$ para cualquier otra x en $[a, b]$ (figura 4.3).

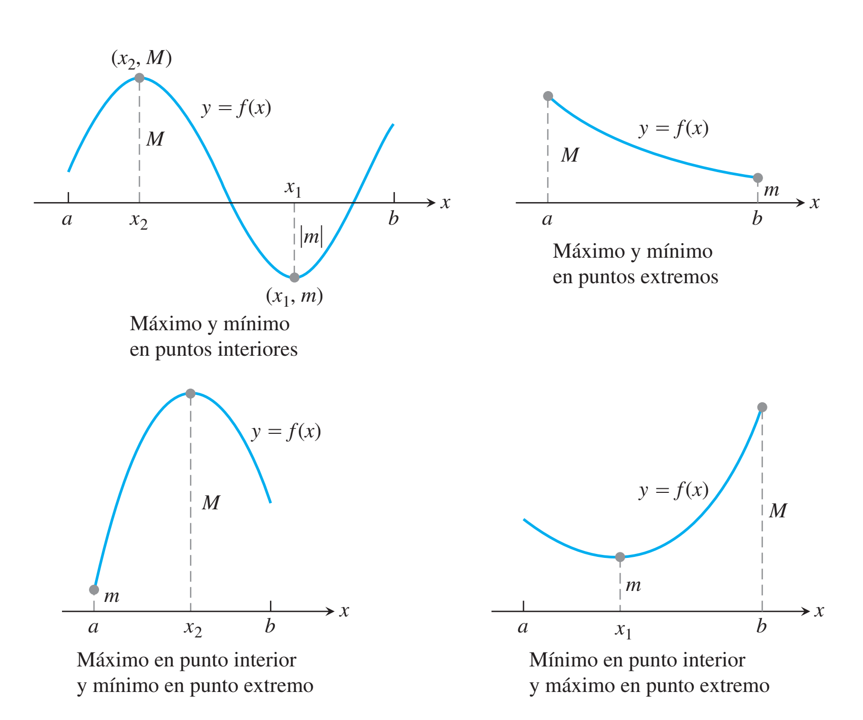


FIGURA 4.3 Algunas posibilidades de máximo y mínimo para una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$.

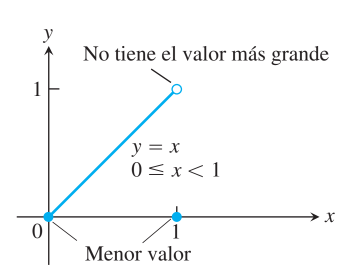


FIGURA 4.4 Un solo punto de discontinuidad puede impedir que una función tenga un valor máximo o mínimo en un intervalo cerrado. La función

$$y = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

es continua en todo punto de $[0, 1]$, excepto en $x = 1$, ya que su gráfica sobre $[0, 1]$ no tiene un punto mayor que el de los demás.

La demostración del teorema del valor extremo requiere un conocimiento detallado del sistema de los números reales (vea el Apéndice 4), y no la haremos aquí. La figura 4.3 ilustra posibles localizaciones para los extremos absolutos de una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$. Como observamos para la función $y = \cos x$, es posible que un mínimo absoluto (o máximo absoluto) se alcance en dos o más puntos distintos del intervalo.

Las condiciones del teorema 1, en el sentido de que el intervalo sea cerrado y finito, y que la función sea continua, son ingredientes fundamentales. Sin ellos la conclusión del teorema no se cumple necesariamente. El ejemplo 1 muestra que un valor extremo absoluto podría no existir si el intervalo no es cerrado y finito. La figura 4.4 muestra que el requerimiento de continuidad no puede obviarse.

Valores extremos locales (relativos)

La figura 4.5 muestra una gráfica con cinco puntos donde una función tiene valores extremos en su dominio $[a, b]$. El mínimo absoluto de la función se alcanza en a, aunque en e el valor de la función es menor que en cualquier otro punto *cercano*. La curva sube hacia la

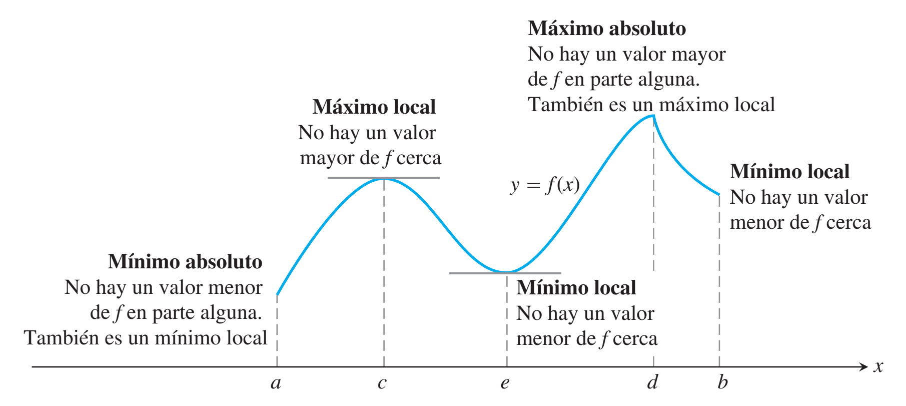


FIGURA 4.5 Cómo clasificar máximos y mínimos.

izquierda y baja hacia la derecha alrededor de c, haciendo a $f(c)$ un máximo local. La función alcanza su máximo absoluto en d.

DEFINICIONES Máximo local, mínimo local

Una función f tiene un valor **máximo local** en un punto interior c de su dominio si

$$f(x) \leq f(c) \qquad \text{para toda } x \text{ en algún intervalo abierto que contenga a } c.$$

Una función f tiene un valor **mínimo local** en un punto interior c de su dominio si

$$f(x) \geq f(c) \qquad \text{para toda } x \text{ en algún intervalo abierto que contenga a } c.$$

Podemos extender las definiciones de extremos locales a los puntos extremos de los intervalos, definiendo que f tiene un valor **máximo local** o **mínimo local** *en el punto extremo c* si la desigualdad apropiada se cumple para toda x en algún intervalo semiabierto en su dominio que contenga a c. En la figura 4.5 la función f tiene máximos locales en c y d, y mínimos locales en a, e y b. Los extremos locales también se llaman **extremos relativos**.

Un máximo absoluto también es un máximo local. Al ser el valor más grande de todos, también es el valor más grande en una vecindad inmediata. Por lo tanto, *una lista de todos los máximos locales incluirá automáticamente el máximo absoluto, si hay alguno.* De manera similar, *una lista de todos los mínimos locales incluirá al mínimo absoluto*, *si lo hay.*

Determinación de extremos

El teorema siguiente explica por qué usualmente es necesario investigar solamente algunos valores para encontrar los extremos de una función.

TEOREMA 2 El teorema de la primera derivada para valores extremos locales

Si f tiene un valor máximo o mínimo local en un punto interior c de su dominio, y si f' está definida en c, entonces

$$f'(c) = 0.$$

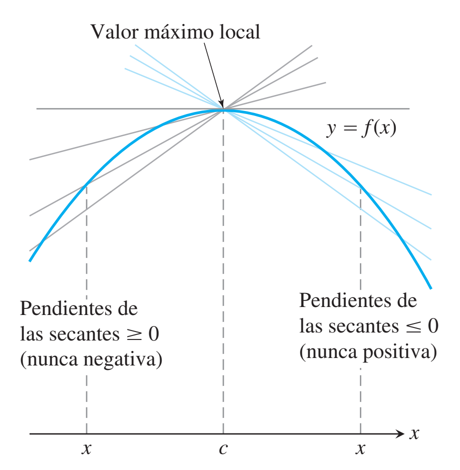


FIGURA 4.6 Una curva con un valor máximo local. Con la pendiente en c, simultáneamente el límite de números no positivos y números no negativos es cero.

Demostración Para probar que $f'(c)$ es cero en un extremo local, primero demostraremos que $f'(c)$ no puede ser positiva, y luego que $f'(c)$ no puede ser negativa. El único número que no es ni positivo ni negativo es el cero, de manera que ese debe ser el valor de $f'(c)$.

Para empezar, supongamos que f tiene un valor máximo local en $x = c$ (figura 4.6), de manera que $f(x) - f(c) \leq 0$ para todos los valores de x suficientemente cercanos a c. Como c es un punto interior del dominio de f, $f'(c)$ está definida por el límite bilateral

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Esto significa que ambos limites laterales, derecho e izquierdo, existen en $x = c$ y que son iguales a $f'(c)$. Cuando examinamos estos límites por separado, encontramos que

$$f'(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0. \qquad \text{Ya que } (x - c) > 0 \text{ y } f(x) \leq f(c) \qquad (1)$$

De manera similar,

$$f'(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0. \qquad \text{Ya que } (x - c) < 0 \text{ y } f(x) \leq f(c) \qquad (2)$$

En conjunto, las ecuaciones (1) y (2) implican que $f'(c) = 0$.

Esto prueba el teorema para valores máximos locales. Para demostrarlo para valores mínimos locales, simplemente usamos $f(x) \geq f(c)$, que invierte las desigualdades en las ecuaciones (1) y (2). ■

El teorema 2 dice que la primera derivada de una función siempre es cero en un punto interior donde la función tiene un valor extremo local y la derivada está definida. Por lo tanto, los únicos lugares donde una función f puede tener un valor extremo (local o global) son

1. puntos interiores donde $f' = 0$,
2. puntos interiores donde f' no esté definida,
3. puntos extremos del dominio de f.

La definición siguiente nos ayuda a resumir.

DEFINICIÓN Punto crítico
Un punto interior del dominio de una función f donde f' es cero o no está definida es un **punto crítico** de f.

En consecuencia, los únicos puntos del dominio donde una función puede tener valores extremos, son los puntos críticos o los puntos extremos.

Hay que tener cuidado de no malinterpretar el teorema 2, porque su recíproco es falso. Una función diferenciable puede tener un punto crítico en $x = c$ sin tener ahí un valor extremo local. Por ejemplo, la función $f(x) = x^3$ tiene un punto crítico en el origen y vale cero ahí, pero es positiva a la derecha del origen y negativa a la izquierda. De manera que no puede tener un valor extremo local en el origen. En cambio, tiene ahí un *punto de inflexión*. Esta idea se definirá y discutirá con más detalle en la sección 4.4.

Casi todos los problemas que involucran valores extremos, exigen encontrar valores extremos de funciones continuas en intervalos cerrados y finitos. El teorema 1 nos asegura que tales valores existen; el teorema 2 nos dice que se alcanzan sólo en los puntos críticos o en los puntos extremos del intervalo. Con frecuencia podemos simplemente hacer

una lista de estos puntos y calcular los valores correspondientes de la función para encontrar cuáles son los valores más grandes y más pequeños, y en dónde están localizados.

> **Cómo encontrar los extremos absolutos de una función continua f en un intervalo cerrado finito**
>
> **1.** Evaluar f en todos los puntos críticos y en los puntos extremos del intervalo.
>
> **2.** Tomar el mayor y el menor de estos valores.

EJEMPLO 2 Determinación de extremos absolutos

Encontrar los valores máximo y mínimo absolutos de $f(x) = x^2$ en $[-2, 1]$.

Solución La función es diferenciable sobre todo su dominio, de manera que el único punto crítico es donde $f'(x) = 2x = 0$, a saber, $x = 0$. Necesitamos verificar los valores de la función en $x = 0$ y en los puntos extremos del intervalo, $x = -2$ y $x = 1$:

Valor en el punto crítico: $f(0) = 0$

Valores en los puntos extremos del intervalo: $f(-2) = 4$

$f(1) = 1$

La función tiene un valor máximo absoluto igual a 4 en $x = -2$ y un valor mínimo absoluto igual a 0 en $x = 0$. ∎

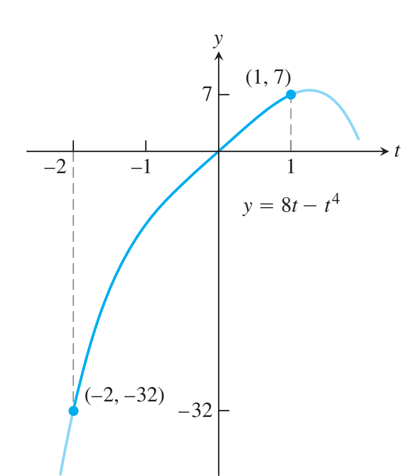


FIGURA 4.7 Los valores extremos de $g(t) = 8t - t^4$ en $[-2, 1]$ (ejemplo 3).

EJEMPLO 3 Extremos absolutos en los puntos extremos del intervalo

Encontrar los valores extremos absolutos de $g(t) = 8t - t^4$ en $[-2, 1]$.

Solución La función es diferenciable sobre todo su dominio, de manera que el único punto crítico ocurre donde $g'(t) = 0$. Resolviendo esta ecuación, obtenemos

$$8 - 4t^3 = 0 \qquad \text{o} \qquad t = \sqrt[3]{2} > 1,$$

un punto que no está en el dominio dado. Así, los extremos absolutos de la función se alcanzan en los extremos del intervalo, $g(-2) = -32$ (máximo absoluto) y $g(1) = 7$ (mínimo absoluto). Vea la figura 4.7. ∎

EJEMPLO 4 Extremos absolutos en un intervalo cerrado

Encontrar los valores máximo y mínimo absolutos de $f(x) = x^{2/3}$ en el intervalo $[-2, 3]$.

Solución Evaluamos la función en los puntos críticos y en los extremos del intervalo, y tomamos el máximo y el mínimo de los valores resultantes.

La primera derivada

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

La primera derivada $x = 0$. Los valores de f en este punto crítico y en los extremos del intervalo son

Valor del punto crítico: $f(0) = 0$

Valores en los puntos extremos del intervalo: $f(-2) = (-2)^{2/3} = \sqrt[3]{4}$

$f(3) = (3)^{2/3} = \sqrt[3]{9}.$

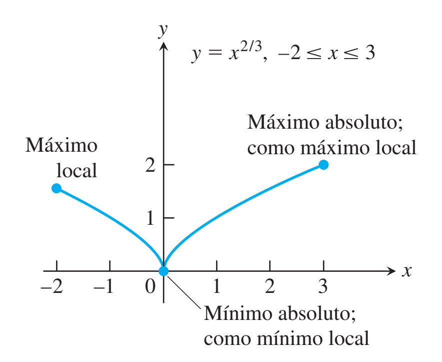
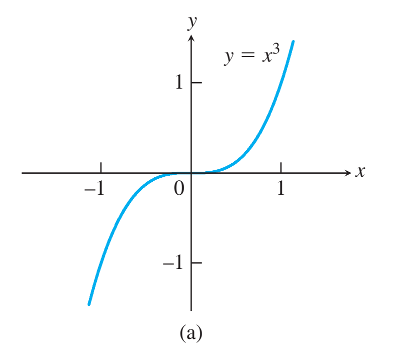


FIGURA 4.8 Los valores extremos de $f(x) = x^{2/3}$ en $[-2, 3]$ se alcanzan en $x = 0$ y $x = 3$ (ejemplo 4).

De acuerdo con esta lista, podemos ver que el valor máximo absoluto de la función es $\sqrt[3]{9} \approx 2.08$, y se alcanza en el extremo derecho del intervalo $x = 3$. El valor mínimo absoluto es 0, y se alcanza en el punto interior $x = 0$. (Figura 4.8.). ■

Si bien los extremos de la función pueden alcanzarse solamente en los puntos críticos y en los extremos del intervalo, no todo punto critico o extremo indica la presencia de un valor extremo. La figura 4.9 ilustra esto para puntos interiores.

Completamos esta sección con un ejemplo que ilustra cómo se utilizan los conceptos que hemos estudiado para resolver un problema de optimización en el mundo real.



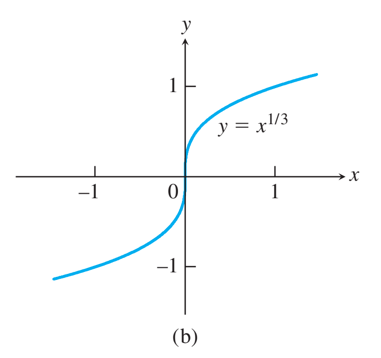


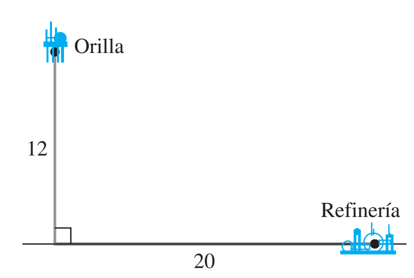
FIGURA 4.9 Puntos críticos sin valores extremos. (a) $y' = 3x^2$ es 0 en $x = 0$, pero $y = x^3$ no tiene extremos ahí. (b) $y' = (1/3)x^{-2/3}$ no está definida en $x = 0$, pero $y = x^{1/3}$ no tiene extremos ahí.

EJEMPLO 5 Bombeo de petróleo desde una plataforma de perforación a una refinería

Una plataforma de perforación a 12 millas de la costa debe ser conectada mediante un oleoducto a una refinería que está a 20 millas en línea recta desde el punto de la costa más cercano a la plataforma. Si instalar la tubería debajo del agua cuesta \$500,000 por milla, y en tierra cuesta \$300,000 por milla, ¿qué combinación de instalación subacuática y terrestre da la conexión más barata?

Solución Intentaremos algunas posibilidades para entender el problema:

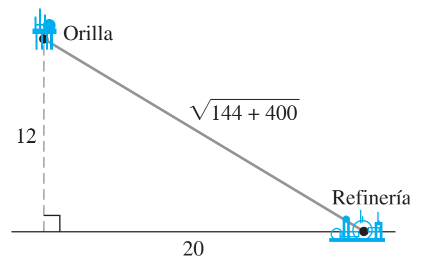
(a) *La menor cantidad de tubería debajo del agua*



La tubería subacuática es más cara, de manera que usamos la menor cantidad posible. La instalación va en línea recta hasta la orilla (12 millas) y después se usa tubería terrestre para las 20 millas que restan hasta la refinería:

$$\begin{aligned}\text{Costo} &= 12(500{,}000) + 20(300{,}000)\\ &= 12{,}000{,}000\end{aligned}$$

(b) *Toda la tubería debajo del agua (ruta más directa)*

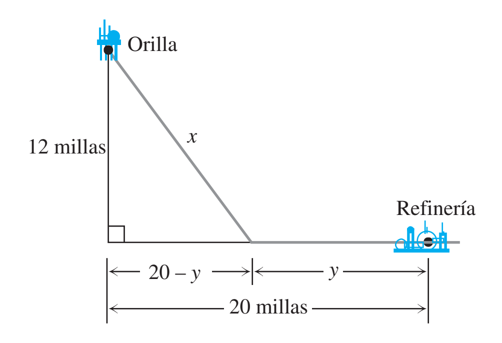


Vamos directo a la refinería por debajo del agua.

$$\begin{aligned}\text{Costo} &= \sqrt{544}\,(500{,}000)\\ &\approx 11{,}661{,}900\end{aligned}$$

Esto es más barato que el plan (a)

(c) *Una solución intermedia*



Ahora introducimos como variables la longitud x de la tubería debajo del agua, y la longitud y de la tubería en tierra. El ángulo recto opuesto a la plataforma es la clave para expresar la relación entre x y y; de acuerdo con el teorema de Pitágoras, tenemos

$$x^2 = 12^2 + (20 - y)^2$$

$$x = \sqrt{144 + (20 - y)^2}. \tag{3}$$

Solamente la raíz positiva tiene significado en este modelo.

El costo de la tubería es

$$c = 500{,}000x + 300{,}000y.$$

Para expresar c como una función de una sola variable, podemos sustituir x, usando la ecuación (3):

$$c(y) = 500{,}000\sqrt{144 + (20 - y)^2} + 300{,}000y.$$

Nuestra meta ahora es encontrar el valor mínimo de $c(y)$ en el intervalo $0 \leq y \leq 20$. De acuerdo con la regla de la cadena, la primera derivada de $c(y)$ con respecto a y es:

$$c'(y) = 500{,}000 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2(20 - y)(-1)}{\sqrt{144 + (20 - y)^2}} + 300{,}000$$

$$= -500{,}000 \frac{20 - y}{\sqrt{144 + (20 - y)^2}} + 300{,}000.$$

Haciendo c' igual a cero, obtenemos

$$500{,}000\,(20 - y) = 300{,}000\sqrt{144 + (20 - y)^2}$$

$$\frac{5}{3}\left(20 - y\right) = \sqrt{144 + (20 - y)^2}$$

$$\frac{25}{9}\left(20 - y\right)^2 = 144 + (20 - y)^2$$

$$\frac{16}{9}\left(20 - y\right)^2 = 144$$

$$(20 - y) = \pm\frac{3}{4} \cdot 12 = \pm 9$$

$$y = 20 \pm 9$$

$$y = 11 \quad \text{o} \quad y = 29.$$

Solamente $y = 11$ está en el intervalo de interés. Los valores de c en este único punto crítico y en los extremos del intervalo son

$$c(11) = 10{,}800{,}000$$
$$c(0) = 11{,}661{,}900$$
$$c(20) = 12{,}000{,}000$$

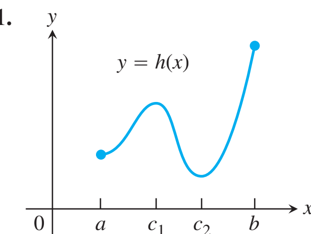
La conexión más barata cuesta $10,800,000, y la realizamos tendiendo una línea subacuática hacia el punto de la costa que está a 11 millas de la refinería. ■

EJERCICIOS 4.1

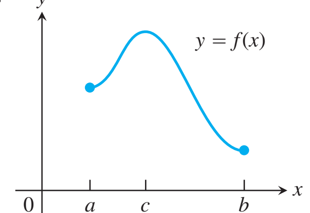
Determinación de extremos a partir de las gráficas

En los ejercicios 1 a 6, determine a partir de la gráfica si la función tiene valores extremos absolutos en $[a, b]$. Después explique la consistencia de su respuesta con el teorema 1.

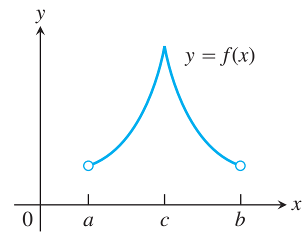
1.



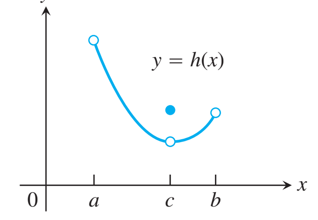
2.



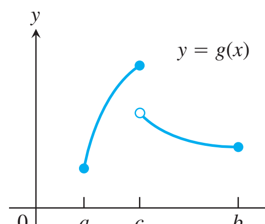
3.



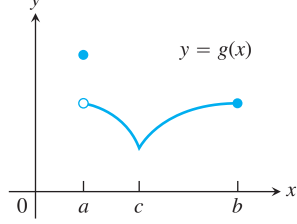
4.



5.

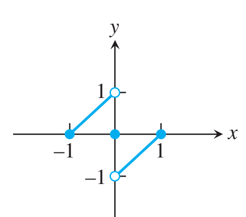


6.

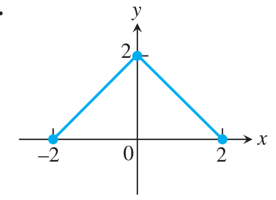


En los ejercicios 7 a 10, encuentre los valores extremos y determine en dónde se alcanzan.

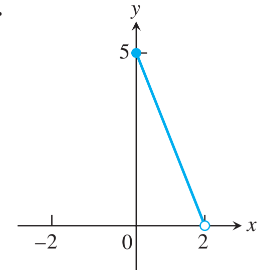
7.



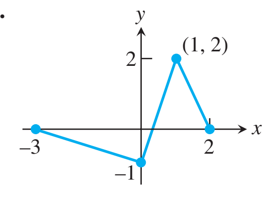
8.



9.



10.



En los ejercicios 11 a 14, relacione cada tabla con una de las gráficas.

11.

x	$f'(x)$
a	0
b	0
c	5

12.

x	$f'(x)$
a	0
b	0
c	-5

13.

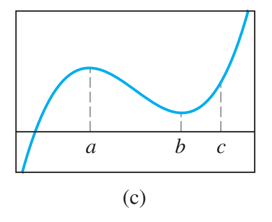
x	$f'(x)$
a	no existe
b	0
c	-2

14.

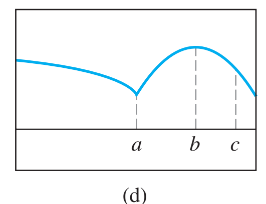
x	$f'(x)$
a	no existe
b	no existe
c	-1.7

(a)

(b)



(c)



(d)

Extremos absolutos en intervalos cerrados finitos

En los ejercicios 15 a 30, encuentre los valores máximo y mínimo absolutos de cada función en el intervalo dado. Después grafique la función. Identifique en la gráfica los puntos en dónde se alcanzan los extremos absolutos e incluya sus coordenadas.

15. $f(x) = \frac{2}{3}x - 5, \quad -2 \le x \le 3$

16. $f(x) = -x - 4, \quad -4 \le x \le 1$

17. $f(x) = x^2 - 1, \quad -1 \le x \le 2$

18. $f(x) = 4 - x^2, \quad -3 \le x \le 1$

19. $F(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad 0.5 \le x \le 2$

20. $F(x) = -\frac{1}{x}, \quad -2 \le x \le -1$

21. $h(x) = \sqrt[3]{x}, \quad -1 \le x \le 8$

22. $h(x) = -3x^{2/3}, \quad -1 \le x \le 1$

23. $g(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad -2 \le x \le 1$

24. $g(x) = -\sqrt{5 - x^2}, \quad -\sqrt{5} \le x \le 0$

25. $f(\theta) = \operatorname{sen}\theta, \quad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{5\pi}{6}$

26. $f(\theta) = \tan\theta, \quad -\frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{\pi}{4}$

27. $g(x) = \csc x, \quad \frac{\pi}{3} \le x \le \frac{2\pi}{3}$

28. $g(x) = \sec x, \quad -\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{6}$

29. $f(t) = 2 - |t|, \quad -1 \le t \le 3$

30. $f(t) = |t - 5|, \quad 4 \le t \le 7$

En los ejercicios 31 a 34, encuentre los valores máximo y mínimo absolutos de la función y diga en dónde se alcanzan.

31. $f(x) = x^{4/3}, \quad -1 \le x \le 8$

32. $f(x) = x^{5/3}, \quad -1 \le x \le 8$

33. $g(\theta) = \theta^{3/5}, \quad -32 \le \theta \le 1$

34. $h(\theta) = 3\theta^{2/3}, \quad -27 \le \theta \le 8$

Determinación de valores extremos

En los ejercicios 35 a 44, encuentre los valores extremos de la función y especifique en dónde se alcanzan.

35. $y = 2x^2 - 8x + 9$

36. $y = x^3 - 2x + 4$

37. $y = x^3 + x^2 - 8x + 5$

38. $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$

39. $y = \sqrt{x^2 - 1}$

40. $y = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

41. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{1 - x^2}}$

42. $y = \sqrt{3 + 2x - x^2}$

43. $y = \frac{x}{x^2 + 1}$

44. $y = \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 2}$

Extremos locales y puntos críticos

En los ejercicios 45 a 52, encuentre la derivada en cada punto crítico y determine los valores extremos locales.

45. $y = x^{2/3}(x + 2)$

46. $y = x^{2/3}(x^2 - 4)$

47. $y = x\sqrt{4 - x^2}$

48. $y = x^2\sqrt{3 - x}$

49. $y = \begin{cases} 4 - 2x, & x \le 1 \\ x + 1, & x > 1 \end{cases}$

50. $y = \begin{cases} 3 - x, & x < 0 \\ 3 + 2x - x^2, & x \ge 0 \end{cases}$

51. $y = \begin{cases} -x^2 - 2x + 4, & x \le 1 \\ -x^2 + 6x - 4, & x > 1 \end{cases}$

52. $y = \begin{cases} -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{15}{4}, & x \le 1 \\ x^3 - 6x^2 + 8x, & x > 1 \end{cases}$

En los ejercicios 53 y 54 justifique sus respuestas.

53. Sea $f(x) = (x - 2)^{2/3}$.

a. ¿$f'(2)$ existe?

b. Demuestre que el único valor extremo local de f se alcanza en $x = 2$.

c. ¿El resultado del inciso (b) contradice el teorema del valor extremo?

d. Repita los incisos (a) y (b) para $f(x) = (x - a)^{2/3}$, reemplazando 2 por a.

54. Sea $f(x) = |x^3 - 9x|$.

a. ¿$f'(0)$ existe?

b. ¿$f'(3)$ existe?

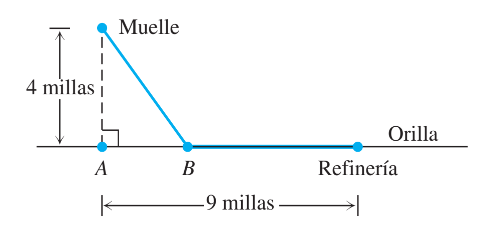
c. ¿$f'(-3)$ existe?

d. Determine todos los extremos de f.

Aplicaciones de optimización

Siempre que se quiera maximizar o minimizar una función de una sola variable, lo mejor es graficar la función sobre el dominio que sea apropiado para el problema que se esté resolviendo. La gráfica nos dará información importante antes de empezar los cálculos, y proveerá un contexto visual para entender la respuesta.

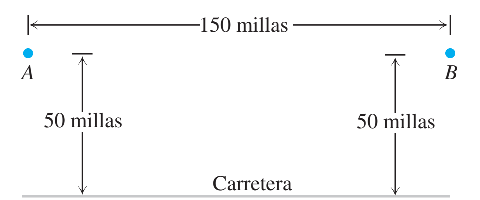
55. Construcción de una tubería Los buques cisterna cargan petróleo en un muelle ubicado a 4 millas de la costa. La refinería más próxima está a 9 millas al este del punto de la costa más cercano al muelle. Se debe construir una tubería que conecte el muelle con la refinería. La tubería cuesta \$300,000 por milla si se construye debajo del agua, y \$200,000 por milla si se hace en tierra.



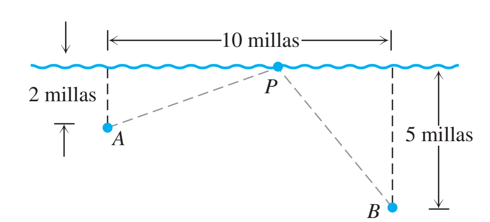
a. Localice el punto B para minimizar el costo de la construcción.

b. Se espera que el costo de la construcción subacuática aumente, mientras que el costo de la construcción en tierra permanezca constante. ¿A qué costo sería mejor construir la tubería directamente hacia el punto A?

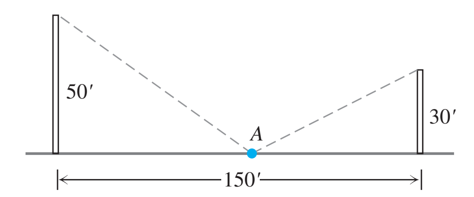
56. Ampliación de una carretera Se debe construir una carretera para comunicar el pueblo A con el pueblo B. Hay un camino rural que se puede ampliar 50 millas al sur de la línea que conecta los dos pueblos. El costo de ampliar el camino existente es de \$300,000 por milla, mientras que el costo de construir una carretera nueva es de \$500,000 por milla. Encuentre la combinación, entre ampliar y hacer una nueva carretera, que minimice el costo de conexión de los dos pueblos. Defina claramente la localización de la carretera propuesta.



57. Localización de una estación de bombeo Dos pueblos están en el lado sur de un río. Se debe ubicar una estación de bombeo para abastecer de agua los dos pueblos. Una tubería será conectada desde la estación de bombeo a cada pueblo a lo largo de una línea que conecte el pueblo con la estación de bombeo. Ubique la estación de bombeo de manera que se minimice la cantidad de tubería que debe construirse.



58. Longitud de un cable Hay dos torres, una de 50 pies de altura y la otra de 30 pies de altura. Entre ambas torres hay una separación de 150 pies. Se debe tender un cable desde el punto A a la parte superior de cada torre:



a. Ubique el punto A de manera que la longitud total del cable sea mínima.

b. Pruebe en general que, sin importar la altura de las torres, la longitud del cable es mínima si los ángulos en A son iguales.

59. La función

$$V(x) = x(10 - 2x)(16 - 2x), \qquad 0 < x < 5,$$

modela el volumen de una caja.

a. Encuentre los valores extremos de V.

b. Interprete cualesquiera valores encontrados en el inciso (a) en términos del volumen de la caja.

60. La función

$$P(x) = 2x + \frac{200}{x}, \qquad 0 < x < \infty,$$

modela el perímetro de un rectángulo de dimensiones x por $100/x$.

a. Encuentre todos valores extremos de P.

b. Dé una interpretación, en términos del perímetro del rectángulo para cualesquiera valores encontrados en el inciso (a).

61. Área de un triángulo rectángulo ¿Cuál es la mayor área posible de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 5 cm de largo?

62. Área de un campo de atletismo Se va a construir un campo de atletismo con forma rectangular de x unidades de largo, rematado en ambos extremos por regiones semicirculares de radio r. El campo debe estar acotado por una pista de carreras de 400 m.

a. Exprese el área de la parte rectangular del campo como una función sólo de x o sólo de r (queda a su elección).

b. ¿Qué valores de x y r dan a la parte rectangular el área máxima posible?

63. Altura máxima de un cuerpo que se mueve verticalmente La altura de un cuerpo que se mueve verticalmente está dada por

$$s = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + s_0, \qquad g > 0,$$

con s en metros y t en segundos. Encuentre la altura máxima del cuerpo.

64. Pico de la corriente alterna Suponga que en cualquier tiempo t (en segundos) la corriente i (en amperes) en un circuito de corriente alterna es $i = 2\cos t + 2\operatorname{sen} t$. ¿Cuál es la corriente pico (mayor magnitud) para este circuito?

Teoría y ejemplos

65. Un mínimo sin derivada La función $f(x) = |x|$ tiene un valor mínimo absoluto en $x = 0$, a pesar de que la función f no es diferenciable en $x = 0$. ¿Es esto consistente con el teorema 2? Justifique su respuesta.

66. Funciones pares Si una función par $f(x)$ tiene un valor máximo local en $x = c$, ¿se puede decir algo acerca del valor de f en $x = -c$? Justifique su respuesta.

67. Funciones impares Si una función impar $g(x)$ tiene un valor mínimo local en $x = c$, ¿se puede decir algo acerca del valor de g en $x = -c$? Justifique su respuesta.

68. Sabemos cómo encontrar los valores extremos de una función continua $f(x)$ investigando sus valores en los puntos críticos y en los extremos del intervalo. Pero, ¿qué ocurre si *no hay* puntos críticos o extremos? ¿Existen realmente tales funciones? Justifique sus respuestas.

69. Funciones cúbicas Considere la función cúbica

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

a. Demuestre que f puede tener 0, 1 o 2 puntos críticos. Dé los ejemplos y haga las gráficas necesarias para apoyar su argumento.

b. ¿Cuántos extremos locales puede tener f?

T 70. Funciones sin valores extremos en los extremos del intervalo

a. Grafique la función

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Explique por qué $f(0) = 0$ no es un valor extremo local de *f*.

b. Construya una función que no tenga un valor extremo en un punto extremo del dominio.

T Grafique las funciones de los ejercicios 71 a 74. Después encuentre los valores extremos de la función en el intervalo, y diga en dónde se alcanzan.

71. $f(x) = |x - 2| + |x + 3|, \quad -5 \le x \le 5$

72. $g(x) = |x - 1| - |x - 5|, \quad -2 \le x \le 7$

73. $h(x) = |x + 2| - |x - 3|, \quad -\infty < x < \infty$

74. $k(x) = |x + 1| + |x - 3|, \quad -\infty < x < \infty$

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

En los ejercicios 75 a 80 usará un software matemático para determinar los extremos absolutos de la función dada sobre el intervalo cerrado específico. Realice los pasos siguientes:

a. Dibuje la función sobre el intervalo para ver su comportamiento general ahí.

b. Encuentre los puntos interiores donde $f' = 0$. (En algunos ejercicios tendrá que usar el programa de soluciones de ecuaciones numéricas para aproximar la solución.) También puede dibujar f'.

c. Encuentre los puntos interiores donde f' no existe.

d. Evalúe la función en todos los puntos encontrados en los incisos (b) y (c) y en los puntos extremos del intervalo.

e. Encuentre los valores extremos absolutos de la función en el intervalo, e identifique en dónde se alcanzan.

75. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 4x + 2, \quad [-20/25, 64/25]$

76. $f(x) = -x^4 + 4x^3 - 4x + 1, \quad [-3/4, 3]$

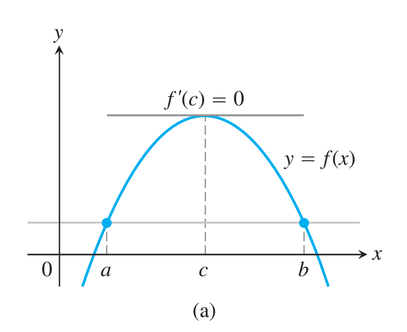
77. $f(x) = x^{2/3}(3 - x), \quad [-2, 2]$

78. $f(x) = 2 + 2x - 3x^{2/3}, \quad [-1, 10/3]$

79. $f(x) = \sqrt{x} + \cos x, \quad [0, 2\pi]$

80. $f(x) = x^{3/4} - \operatorname{sen} x + \frac{1}{2}, \quad [0, 2\pi]$

4.2 El teorema del valor medio



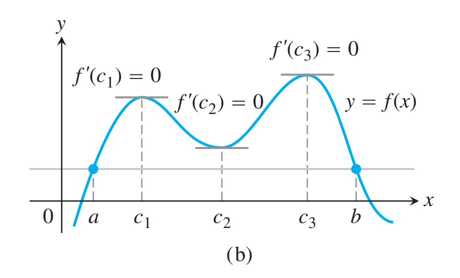


FIGURA 4.10 El teorema de Rolle dice que una curva diferenciable tiene al menos una tangente horizontal entre cualesquiera dos puntos donde la cruce una recta horizontal. Puede tener solo uno (a), o más (b).

Sabemos que las funciones constantes tienen derivada cero, ¿pero puede haber una función complicada, con muchos términos, cuyas derivadas se eliminen por completo para dar cero? ¿Cuál es la relación entre dos funciones que tienen derivadas idénticas sobre un intervalo? Lo que estamos preguntando aquí es: ¿qué funciones pueden tener un *tipo* especial de derivada? Éstas y muchas otras preguntas que analizaremos en este capítulo se responden aplicando el teorema del valor medio. Para llegar a este teorema necesitamos conocer primero el teorema de Rolle.

Teorema de Rolle

Graficar una función nos permite encontrar fuertes evidencias geométricas de que, entre cualesquiera dos puntos donde una función diferenciable corta una recta horizontal, hay por lo menos un punto en la curva en donde la tangente es horizontal (figura 4.10). Para mayor precisión tenemos el teorema siguiente.

TEOREMA 3 Teorema de Rolle
Supongamos que $y = f(x)$ es continua en todo punto del intervalo cerrado $[a, b]$ y diferenciable en todo punto de su interior (a,b). Si

$$f(a) = f(b),$$

entonces existe al menos un número c en (a,b) en el que

$$f'(c) = 0.$$

Demostración Siendo f continua, alcanza sus valores máximo y mínimo absoluto en $[a, b]$. Éstos se pueden alcanzar sólo

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

Michel Rolle
(1652–1719)

1. en puntos interiores donde f' es cero,
2. en puntos interiores donde f' no existe,
3. en los puntos extremos del dominio de la función. En este caso a y b.

Por hipótesis, f tiene derivada en todo punto interior. Esto elimina nuestra posibilidad (2), dejándonos con los puntos interiores donde $f' = 0$ y con los puntos extremos a y b.

Si el máximo o el mínimo se alcanzan en un punto c entre a y b, entonces $f'(c) = 0$ de acuerdo con el teorema 2 de la sección 4.1, y hemos encontrado un punto para el teorema de Rolle.

Si tanto el máximo absoluto como el mínimo absoluto se alcanzan en los puntos extremos del intervalo, entonces como $f(a) = f(b)$, f debe ser una función constante con $f(x) = f(a) = f(b)$ para toda $x \in [a, b]$. Por lo tanto, $f'(x) = 0$ y el punto c puede ser cualquier punto del intervalo (a, b). ∎

Las hipótesis del teorema 3 son esenciales. Si fallan aunque sea en un solo punto, la gráfica podría no tener una tangente horizontal (figura 4.11).

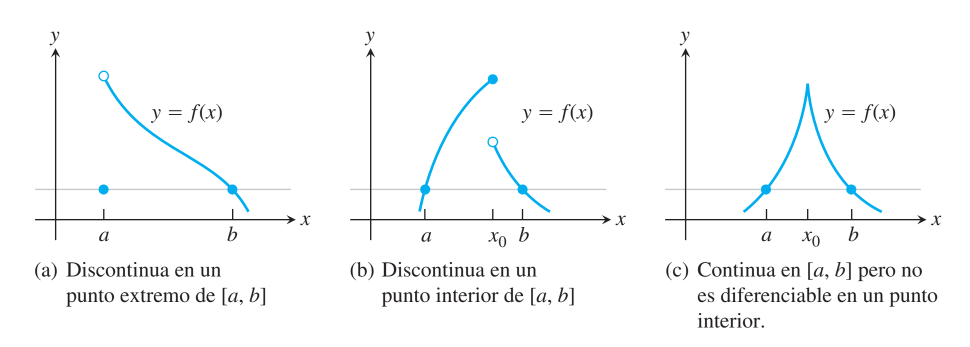


FIGURA 4.11 Puede no haber tangente horizontal si las hipótesis del teorema de Rolle no se cumplen.

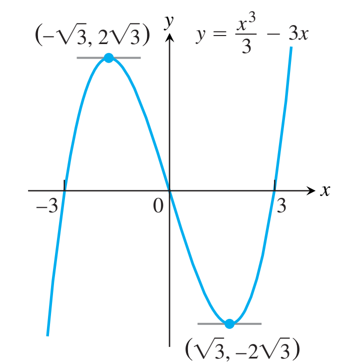


FIGURA 4.12 Como predice el teorema de Rolle, esta curva tiene tangentes horizontales entre los puntos donde cruza el eje x (ejemplo 1).

EJEMPLO 1 Tangentes horizontales de un polinomio cúbico

La función polinomial

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x$$

graficada en la figura 4.12, es continua en todo punto de $[-3, 3]$ y es diferenciable en todo punto de $(-3, 3)$. Como $f(-3) = f(3) = 0$, el teorema de Rolle dice que f' debe ser cero por lo menos en un punto del intervalo abierto entre $a = -3$ y $b = 3$. De hecho, $f'(x) = x^2 - 3$ es cero dos veces en este intervalo, una en $x = -\sqrt{3}$, y la otra en $x = \sqrt{3}$. ∎

EJEMPLO 2 Solución de una ecuación $f(x) = 0$

Probar que la ecuación

$$x^3 + 3x + 1 = 0$$

tiene exactamente una solución real.

Solución Sea

$$y = f(x) = x^3 + 3x + 1.$$

Entonces la derivada

$$f'(x) = 3x^2 + 3$$

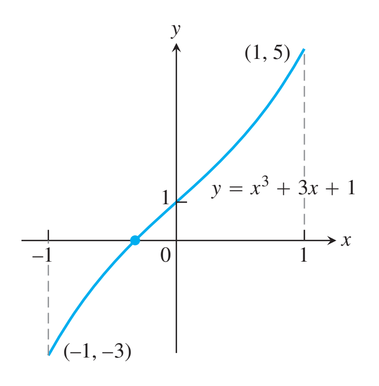


FIGURA 4.13 El único cero real del polinomio $y = x^3 + 3x + 1$ es el que se muestra aquí, donde la curva cruza el eje x entre -1 y 0 (ejemplo 2).

nunca es cero (ya que siempre es positiva). Ahora bien, si hubiera incluso dos puntos, $x = a$ y $x = b$, donde $f(x)$ fuera cero, el teorema de Rolle garantizaría la existencia de un punto $x = c$ entre ellos, donde f' sería cero. Por lo tanto, f no tiene más de un cero. De hecho tiene un cero, porque el teorema del valor intermedio nos dice que la gráfica de $y = f(x)$ cruza el eje x en alguna parte entre $x = -1$ (donde $y = -3$) y $x = 0$ (donde $y = 1$). (Vea la figura 4.13). ■

Nuestro uso principal del teorema de Rolle será para demostrar el teorema del valor medio.

El teorema del valor medio

El teorema del valor medio, que fue enunciado por primera vez por Joseph-Louis Lagrange, es una versión general del teorema de Rolle (figura 4.14). Existe un punto donde la tangente es paralela a la cuerda AB.

TEOREMA 4 El teorema del valor medio
Supongamos que $y = f(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y diferenciable en el interior del intervalo (a, b). Entonces existe por lo menos un punto c en (a, b) en donde

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \tag{1}$$

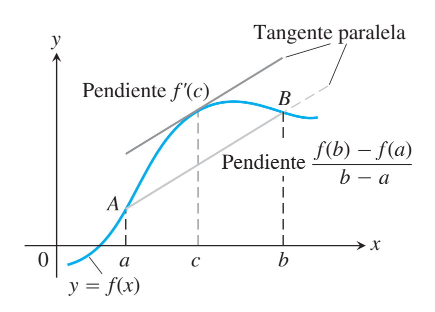


FIGURA 4.14 Geométricamente, el teorema del valor medio dice que en algún sitio entre A y B la curva tiene al menos una tangente paralela a la cuerda AB.

Demostración Graficamos f como una curva en el plano, y trazamos una recta que pase por los puntos $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$ (vea la figura 4.15). La recta es la gráfica de la función

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \tag{2}$$

(ecuación punto-pendiente). La diferencia vertical entre las gráficas de f y g en x es

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) - g(x) \\ &= f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a). \end{aligned} \tag{3}$$

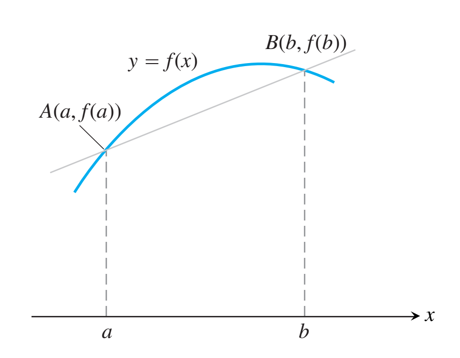


FIGURA 4.15 La gráfica de f y la cuerda AB en el intervalo $[a, b]$.

La figura 4.16 muestra las gráficas de f, g y h juntas.

La función h satisface las hipótesis del teorema de Rolle en $[a, b]$. Es continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b), ya que tanto f como g lo son. Además, $h(a) = h(b) = 0$, porque tanto la gráfica de f como la de g pasan por A y B. Por lo tanto, $h'(c) = 0$ en algún punto $c \in (a, b)$. Éste es el punto que queremos para la ecuación (1).

Para verificar la ecuación (1), diferenciamos ambos lados de la ecuación (3) respecto de x, y después hacemos $x = c$:

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad \text{Derivada de la ecuación (3)}\ldots$$

$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad \ldots\text{con } x = c$$

$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad h'(c) = 0$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \qquad \text{Reordenado}$$

que es lo que queríamos probar. ■

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

Joseph-Louis Lagrange
(1736–1813)

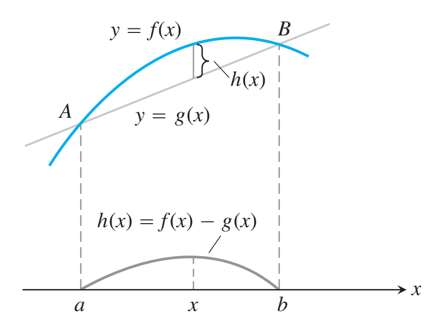


FIGURA 4.16 La cuerda AB es la gráfica de la función $g(x)$. La función $h(x) = f(x) - g(x)$ da la distancia vertical entre las gráficas de f y g en x.

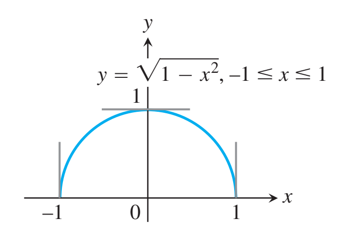


FIGURA 4.17 La función $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ satisface las hipótesis (y la conclusión) del teorema del valor medio en $[-1, 1]$ a pesar de que f no es diferenciable en -1 y 1.

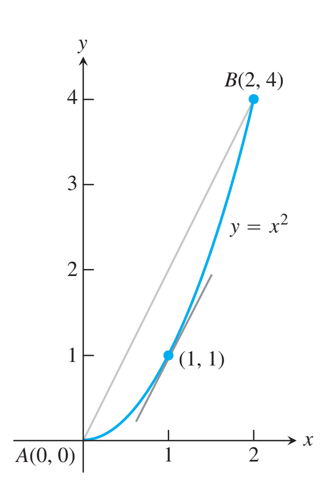


FIGURA 4.18 Como vimos en el ejemplo 3, $c = 1$ es el punto donde la tangente es paralela a la cuerda.

Las hipótesis del teorema del valor medio no requieren que f sea diferenciable en a ni en b. La continuidad en a y b es suficiente (figura 4.17).

EJEMPLO 3 La función $f(x) = x^2$ (figura 4.18) es continua para $0 \leq x \leq 2$ y diferenciable para $0 < x < 2$. Como $f(0) = 0$ y $f(2) = 4$, el teorema del valor medio dice que en algún punto c en el intervalo, la derivada $f'(x) = 2x$ debe tener el valor $(4 - 0)/(2 - 0) = 2$. En este caso (excepcional), podemos identificar c resolviendo la ecuación $2c = 2$ para obtener $c = 1$. ■

Una interpretación física

Si pensamos en el número $(f(b) - f(a))/(b - a)$ como el cambio promedio de f en $[a, b]$, y $f'(c)$ como el cambio instantáneo, el teorema del valor medio dice que en algún punto interior el cambio instantáneo debe ser igual al cambio promedio sobre todo el intervalo.

EJEMPLO 4 Si un automóvil que acelera desde 0 tarda 8 segundos en recorrer 352 pies, su velocidad promedio para el intervalo de 8 seg es $352/8 = 44$ pies/seg. De acuerdo con el teorema del valor medio, en algún punto durante la aceleración el velocímetro debe haber marcado exactamente 30 millas/hora (44 pies/seg) (figura 4.19). ■

FIGURA 4.19 Distancia contra tiempo transcurrido para el automóvil del ejemplo 4.

Consecuencias matemáticas

Al principio de esta sección preguntamos qué clase de función tiene una derivada cero sobre un intervalo. El primer corolario del teorema del valor medio nos da la respuesta.

COROLARIO 1 Las funciones con derivadas cero son constantes
Si $f'(x) = 0$ en cada punto x de un intervalo abierto (a, b), entonces $f(x) = C$ para todo $x \in (a, b)$, donde C es una constante.

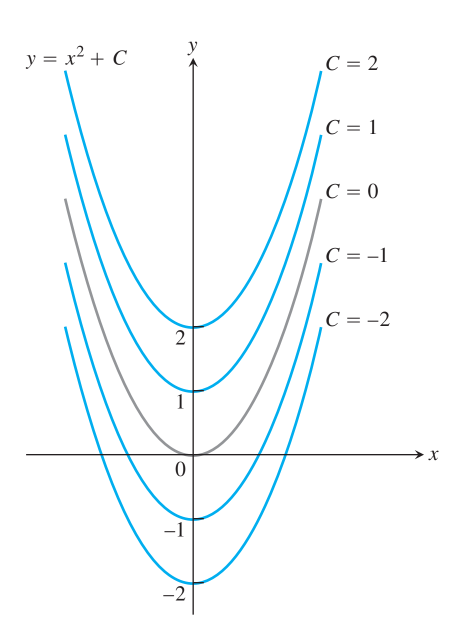


FIGURA 4.20 Desde un punto de vista geométrico, el corolario 2 del teorema del valor medio dice que las gráficas de funciones con derivadas idénticas en un intervalo pueden diferir solamente por un desplazamiento vertical. Las gráficas de las funciones con derivada $2x$ son las parábolas $y = x^2 + C$, mostradas aquí para valores elegidos de C.

Demostración Queremos probar que f tiene un valor constante en el intervalo (a, b). Para ello probaremos que si x_1 y x_2 son dos puntos cualesquiera en (a, b), entonces $f(x_1) = f(x_2)$. Numerando x_1 y x_2 de izquierda a derecha, tenemos $x_1 < x_2$. De esta manera, f satisface las hipótesis del teorema del valor medio en $[x_1, x_2]$: es diferenciable en todo punto de $[x_1, x_2]$ y, por lo tanto, también es continua en todo punto. En consecuencia,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

en algún punto c entre x_1 y x_2. Como $f' = 0$ en todo (a, b), esta ecuación se traduce sucesivamente en

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0, \qquad f(x_2) - f(x_1) = 0, \qquad \text{y} \qquad f(x_1) = f(x_2). \qquad \blacksquare$$

Al principio de esta sección se preguntó también cuál es la relación entre dos funciones que tienen derivadas idénticas en un intervalo. El corolario siguiente nos dice que sus valores en el intervalo tienen diferencia constante.


COROLARIO 2 Las funciones con la misma derivada difieren por una constante

Si $f'(x) = g'(x)$ en cada punto x en un intervalo abierto (a, b), entonces existe una constante C tal que $f(x) = g(x) + C$ para todo $x \in (a, b)$. Esto es, $f - g$ es una constante en (a, b).

Demostración En cada punto $x \in (a, b)$, la derivada de la función diferencia $h = f - g$ es

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0.$$

En consecuencia, de acuerdo con el corolario 1, $h(x) = C$ en (a, b). Esto es, $f(x) - g(x) = C$ en (a, b), de manera que $f(x) = g(x) + C$. $\blacksquare$

Los corolarios 1 y 2 también son ciertos si el intervalo abierto (a, b) no es finito. Esto es, siguen siendo válidos si el intervalo es (a, ∞), $(-\infty, b)$, o $(-\infty, \infty)$.

El corolario 2 jugará un papel importante cuando discutamos las antiderivadas en la sección 4.8. Este corolario nos dice, por ejemplo, que como la derivada de $f(x) = x^2$ en $(-\infty, \infty)$ es $2x$, cualquier otra función con derivada $2x$ en $(-\infty, \infty)$ debe tener la fórmula $x^2 + C$ para algún valor de C (figura 4.20).

EJEMPLO 5 Encontrar la función $f(x)$ cuya derivada es sen x, y cuya gráfica pasa por el punto $(0, 2)$.

Solución Como $f(x)$ tiene la misma derivada que $g(x) = -\cos x$, sabemos que $f(x) = -\cos x + C$ para alguna constante C. El valor de C puede determinarse a partir de la condición que $f(0) = 2$ (la gráfica de f pasa por $(0, 2)$):

$$f(0) = -\cos(0) + C = 2, \qquad \text{así que} \qquad C = 3.$$

La función es $f(x) = -\cos x + 3$. $\blacksquare$

Determinación de la velocidad y la posición a partir de la aceleración

Aquí veremos cómo encontrar las funciones velocidad y desplazamiento de un cuerpo en caída libre desde el reposo con aceleración 9.8 m/seg^2.

Sabemos que $v(t)$ es alguna función cuya derivada es 9.8. También sabemos que la derivada de $g(t) = 9.8t$ es 9.8. De acuerdo con el corolario 2,

$$v(t) = 9.8t + C$$

para alguna constante C. Como el cuerpo cae desde el reposo, $v(0) = 0$. Por lo tanto,

$$9.8(0) + C = 0, \qquad \text{y} \qquad C = 0.$$

La función velocidad debe ser $v(t) = 9.8t$. ¿Qué pasa con la función posición, $s(t)$?

Sabemos que $s(t)$ es alguna función cuya derivada es $9.8t$. También sabemos que la derivada de $f(t) = 4.9t^2$ es $9.8t$. Según el corolario 2,

$$s(t) = 4.9t^2 + C$$

para alguna constante C. Si la altura inicial es $s(0) = h$, medida positiva hacia abajo desde la posición de reposo, entonces

$$4.9(0)^2 + C = h, \qquad \text{y} \qquad C = h.$$

La función posición debe ser $s(t) = 4.9t^2 + h$.

La habilidad para encontrar funciones a partir de sus razones de cambio, es una de las herramientas más poderosas del cálculo. Como veremos en el capítulo 5, esta capacidad es fundamental para el desarrollo matemático.

EJERCICIOS 4.2

Determinación de *c* en el teorema del valor medio

Encuentre el o los valores de c, que satisfacen la ecuación

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

en la conclusión del teorema del valor medio para las funciones e intervalos en los ejercicios 1 a 4.

1. $f(x) = x^2 + 2x - 1, \quad [0, 1]$

2. $f(x) = x^{2/3}, \quad [0, 1]$

3. $f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad \left[\frac{1}{2}, 2\right]$

4. $f(x) = \sqrt{x - 1}, \quad [1, 3]$

Verificación y uso de hipótesis

¿Cuáles de las funciones de los ejercicios 5 a 8 satisfacen las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo dado, y cuáles no? Justifique sus respuestas.

5. $f(x) = x^{2/3}, \quad [-1, 8]$

6. $f(x) = x^{4/5}, \quad [0, 1]$

7. $f(x) = \sqrt{x(1 - x)}, \quad [0, 1]$

8. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & -\pi \le x < 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

9. La función

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

es cero en $x = 0$ y $x = 1$ y diferenciable en (0, 1), pero su derivada en (0, 1) nunca es cero. ¿Cómo puede ser esto? ¿No dice el teorema de Rolle que la derivada tiene que ser cero en alguna parte del intervalo (0, 1)? Justifique su respuesta.

10. ¿Para qué valores de a, m y b la función

$$f(x) = \begin{cases} 3, & x = 0 \\ -x^2 + 3x + a, & 0 < x < 1 \\ mx + b, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

satisface las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo [0, 2]?

Raíces (ceros)

11. a. Señale en una recta los ceros de cada polinomio y los ceros de su primera derivada.

i) $y = x^2 - 4$

ii) $y = x^2 + 8x + 15$

iii) $y = x^3 - 3x^2 + 4 = (x + 1)(x - 2)^2$

iv) $y = x^3 - 33x^2 + 216x = x(x - 9)(x - 24)$

b. Use el teorema de Rolle para probar que entre cualesquiera dos ceros de $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ hay un cero de

$$nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1.$$

12. Suponga que f'' es continua en $[a, b]$ y que f tiene tres ceros en el intervalo. Demuestre que f'' tiene por lo menos un cero en (a, b). Generalice el resultado.

13. Pruebe que si $f'' > 0$ en todo el intervalo $[a, b]$, entonces f' tiene por lo menos un cero en $[a, b]$. ¿Qué pasa si $f'' < 0$ en todo un intervalo $[a, b]$?

14. Demuestre que una función polinomial cúbica puede tener cuando mucho tres ceros reales.

Pruebe que las funciones de los ejercicios 15 a 22 tienen exactamente un cero en el intervalo dado.

15. $f(x) = x^4 + 3x + 1, \quad [-2, -1]$

16. $f(x) = x^3 + \dfrac{4}{x^2} + 7, \quad (-\infty, 0)$

17. $g(t) = \sqrt{t} + \sqrt{1+t} - 4, \quad (0, \infty)$

18. $g(t) = \dfrac{1}{1-t} + \sqrt{1+t} - 3.1, \quad (-1, 1)$

19. $r(\theta) = \theta + \operatorname{sen}^2\left(\dfrac{\theta}{3}\right) - 8, \quad (-\infty, \infty)$

20. $r(\theta) = 2\theta - \cos^2\theta + \sqrt{2}, \quad (-\infty, \infty)$

21. $r(\theta) = \sec\theta - \dfrac{1}{\theta^3} + 5, \quad (0, \pi/2)$

22. $r(\theta) = \tan\theta - \cot\theta - \theta, \quad (0, \pi/2)$

Determinación de funciones a partir de derivadas

23. Suponga que $f(-1) = 3$ y que $f'(x) = 0$ para toda x. ¿Debe ser $f(x) = 3$ para toda x? Justifique su respuesta.

24. Suponga que $f(0) = 5$ y que $f'(x) = 2$ para toda x. ¿Debe ser $f(x) = 2x + 5$ para toda x? Justifique su respuesta.

25. Suponga que $f'(x) = 2x$ para toda x. Encuentre $f(2)$ si

a. $f(0) = 0$ **b.** $f(1) = 0$ **c.** $f(-2) = 3$.

26. ¿Qué se puede decir acerca de las funciones cuyas derivadas son constantes? Justifique su respuesta.

En los ejercicios 27 a 32, encuentre todas las funciones posibles con la derivada dada.

27. **a.** $y' = x$ **b.** $y' = x^2$ **c.** $y' = x^3$

28. **a.** $y' = 2x$ **b.** $y' = 2x - 1$ **c.** $y' = 3x^2 + 2x - 1$

29. **a.** $y' = -\dfrac{1}{x^2}$ **b.** $y' = 1 - \dfrac{1}{x^2}$ **c.** $y' = 5 + \dfrac{1}{x^2}$

30. **a.** $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ **b.** $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ **c.** $y' = 4x - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

31. **a.** $y' = \operatorname{sen} 2t$ **b.** $y' = \cos\dfrac{t}{2}$ **c.** $y' = \operatorname{sen} 2t + \cos\dfrac{t}{2}$

32. **a.** $y' = \sec^2\theta$ **b.** $y' = \sqrt{\theta}$ **c.** $y' = \sqrt{\theta} - \sec^2\theta$

En los ejercicios 33 a 36, encuentre la función con la derivada dada cuya gráfica pase por el punto P.

33. $f'(x) = 2x - 1, \quad P(0, 0)$

34. $g'(x) = \dfrac{1}{x^2} + 2x, \quad P(-1, 1)$

35. $r'(\theta) = 8 - \csc^2\theta, \quad P\left(\dfrac{\pi}{4}, 0\right)$

36. $r'(t) = \sec t \tan t - 1, \quad P(0, 0)$

Determinación de la posición a partir de la velocidad

En los ejercicios 37 a 40 se da la velocidad $v = ds/dt$ y la posición inicial de un cuerpo que se mueve a lo largo de una recta coordenada. Encuentre la posición del cuerpo en el tiempo t.

37. $v = 9.8t + 5, \quad s(0) = 10$

38. $v = 32t - 2, \quad s(0.5) = 4$

39. $v = \operatorname{sen} \pi t, \quad s(0) = 0$

40. $v = \dfrac{2}{\pi}\cos\dfrac{2t}{\pi}, \quad s(\pi^2) = 1$

Determinación de la posición a partir de la aceleración

En los ejercicios 41 a 44 se da la aceleración $a = d^2s/dt^2$, la velocidad inicial y la posición inicial de un cuerpo que se mueve a lo largo de una recta coordenada. Encuentre la posición del cuerpo en el tiempo t.

41. $a = 32, \quad v(0) = 20, \quad s(0) = 5$

42. $a = 9.8, \quad v(0) = -3, \quad s(0) = 0$

43. $a = -4 \operatorname{sen} 2t, \quad v(0) = 2, \quad s(0) = -3$

44. $a = \dfrac{9}{\pi^2}\cos\dfrac{3t}{\pi}, \quad v(0) = 0, \quad s(0) = -1$

Aplicaciones

45. **Cambio de temperatura** Un termómetro de mercurio tardó 14 segundos en subir de −19°C a 100ºC cuando se sacó de un congelador y se colocó en agua hirviendo. Demuestre que en algún momento el mercurio está subiendo a una razón de 8.5ºC/seg.

46. Un camionero recibió una multa en la caseta de cobro de una autopista, según la cual en 2 horas había recorrido 159 millas en la autopista con un límite de velocidad de 65 millas/hora. El camionero fue multado por exceso de velocidad. ¿Por qué?

47. Los relatos clásicos nos dicen que una trirreme con 170 remos (barco de guerra de la antigua Grecia o la antigua Roma) una vez cubrió 184 millas náuticas en 24 horas. Explique por qué en algún momento de esta hazaña la rapidez de la trirreme excedió los 7.5 nudos (millas náuticas por hora).

48. Una maratonista corre en 2.2 horas el maratón de la ciudad de Nueva York, cuya ruta mide 26.2 millas. Demuestre que la maratonista corrió exactamente a 11 millas/hora por lo menos dos veces durante el recorrido.

49. Pruebe que en algún instante durante un viaje en automóvil de 2 horas, la lectura del velocímetro será igual a la rapidez promedio del viaje.

50. **Caída libre en la Luna** La aceleración de la gravedad en la Luna es 1.6 m/seg^2. Si se lanza una roca al interior de una grieta, ¿qué tan rápido estará cayendo justo antes de golpear el fondo 30 segundos después?

Teoría y ejemplos

51. La media geométrica de *a* y *b* La *media geométrica* de dos números positivos a y b es el número $\sqrt{ab}$. Demuestre que el valor de c en la conclusión del teorema del valor medio para $f(x) = 1/x$ en un intervalo de números positivos $[a, b]$ es $[a, b]$ es $c = \sqrt{ab}$.

52. La media aritmética de *a* y *b* La *media aritmética* de dos números a y b es el número $(a + b)/2$. Pruebe que el valor de c en la conclusión del teorema del valor medio para $f(x) = x^2$ en cualquier intervalo $[a, b]$ es $c = (a + b)/2$.

T **53.** Grafique la función

$$f(x) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(x + 2) - \operatorname{sen}^2(x + 1).$$

¿Qué hace la gráfica? ¿Por qué se comporta así la función? Justifique sus respuestas.

54. El teorema de Rolle

a. Construya una función polinomial $f(x)$ que tenga ceros en $x = -2, -1, 0, 1,$ y 2.

b. Trace en el mismo sistema de coordenadas f y su derivada f'. ¿En qué se relaciona lo que ve con el teorema de Rolle?

c. ¿$g(x) = \operatorname{sen} x$ y su derivada g' ilustran el mismo fenómeno?

55. Solución única Suponga que f es continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b). Suponga también que $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos y que $f' \neq 0$ entre a y b. Demuestre que $f(x) = 0$ exactamente una vez entre a y b.

56. Tangentes paralelas Suponga que f y g son diferenciables en $[a, b]$ y que $f(a) = g(a)$ y $f(b) = g(b)$. Demuestre que existe por lo menos un punto entre a y b donde las tangentes a las gráficas de f y g son paralelas o son la misma recta. Ilustre con un boceto.

57. Si las gráficas de dos funciones diferenciables $f(x)$ y $g(x)$ empiezan en el mismo punto del plano, y las funciones tienen la misma razón de cambio en todo punto, ¿las gráficas tienen que ser idénticas? Justifique su respuesta.

58. Pruebe que para cualesquiera números a y b la desigualdad |sen $|\operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a| \leq |b - a|$ es cierta.

59. Suponga que f es diferenciable en $a \leq x \leq b$ y que $f(b) < f(a)$. Demuestre que f' es negativa en algún punto entre a y b.

60. Sea f una función definida en un intervalo $[a, b]$. ¿Qué condiciones tiene que reunir f para garantizar que

$$\text{mín } f' \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \text{máx } f',$$

donde mín f' y máx f' son los valores mínimo y máximo de f' en $[a, b]$? Justifique sus respuestas.

T **61.** Use las desigualdades del ejercicio 60 para estimar $f(0.1)$ si $f'(x) = 1/(1 + x^4 \cos x)$ para $0 \leq x \leq 0.1$ y $f(0) = 1$.

T **62.** Use las desigualdades del ejercicio 60 para estimar $f(0.1)$ si $f'(x) = 1/(1 - x^4)$ para $0 \leq x \leq 0.1$ y $f(0) = 1$.

63. Sea f diferenciable en todo valor de x, y suponga que $f(1) = 1$, que $f' < 0$ en $(-\infty, 1)$, y que $f' > 0$ en $(1, \infty)$.

a. Demuestre que $f(x) \geq 1$ para toda x.

b. ¿Es posible que $f'(1) = 0$? Explique.

64. Sea $f(x) = px^2 + qx + r$ una función cuadrática definida en un intervalo cerrado $[a, b]$. Demuestre que existe exactamente un punto c en (a, b) en el que f satisface la conclusión del teorema del valor medio.

4.3 Funciones monótonas y el criterio de la primera derivada

Para graficar una función diferenciable es útil conocer en dónde crece (es decir, en dónde se eleva de izquierda a derecha), y en dónde decrece (es decir, en dónde cae de izquierda a derecha) en un intervalo. En esta sección se define precisamente qué significa que una función sea creciente o decreciente en un intervalo, y se da un criterio para determinar en dónde crece y en dónde decrece. También se muestra cómo verificar que los puntos críticos de una función resultan ser valores extremos locales.

Funciones crecientes y funciones decrecientes

¿Qué clase de funciones tiene derivadas positivas o derivadas negativas? El tercer corolario del teorema del valor medio nos da la respuesta: las únicas funciones con derivadas positivas son las funciones crecientes; las únicas funciones con derivadas negativas son las funciones decrecientes.

DEFINICIONES Función creciente, función decreciente

Sea f una función definida en un intervalo I, y sean x_1 y x_2 dos puntos cualesquiera en I.

1. Si $f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$, entonces se dice que f es **creciente** en I.
2. Si $f(x_2) < f(x_1)$ siempre que $x_1 < x_2$, entonces se dice que f es **decreciente** en I.

A las funciones crecientes o decrecientes en I se les llama **monótonas** en I.

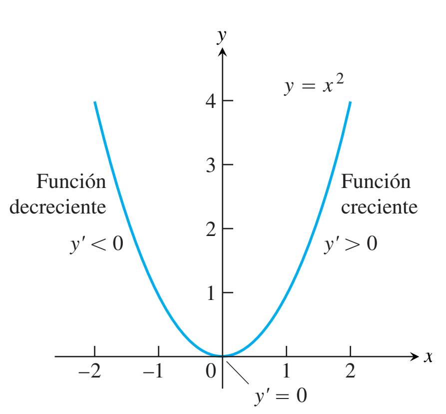


FIGURA 4.21 La función $f(x) = x^2$ es monótona en los intervalos $(-\infty, 0]$ y $[0, \infty)$, pero no lo es en $(-\infty, \infty)$.

Es importante tener en cuenta que las definiciones de funciones crecientes y decrecientes se deben satisfacer en *todo* par de puntos x_1 y x_2 en I con $x_1 < x_2$. Debido a la desigualdad al comparar los valores de la función es $<$ y no $\leq$, algunos libros dicen que f es *estrictamente* creciente o decreciente en I. El intervalo I puede ser finito o infinito.

La función $f(x) = x^2$ decrece en $(-\infty, 0]$ y crece en $[0, \infty)$ como se puede ver en su gráfica (figura 4.21). La función f es monótona en$(-\infty, 0]$ y en $[0, \infty)$, pero no lo es en $(-\infty, \infty)$. Observe que en el intervalo $(-\infty, 0)$ las tangentes tienen pendientes negativas, de manera que la primera derivada es siempre negativa ahí; para $(0, \infty)$ las tangentes tienen pendientes positivas y la primera derivada es positiva. El resultado siguiente confirma estas observaciones.

COROLARIO 3 Criterio de la primera derivada para funciones monótonas

Supongamos que f es continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b).

Si $f'(x) > 0$ en cada punto $x \in (a, b)$, entonces f es creciente en $[a, b]$.

Si $f'(x) < 0$ en cada punto $x \in (a, b)$, entonces f es creciente en $[a, b]$.

Demostración Sean x_1 y x_2 dos puntos cualesquiera en $[a, b]$ con $x_1 < x_2$. Aplicado a f en $[x_1, x_2]$, el teorema del valor medio dice que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

para algún c entre x_1 y x_2. El signo del lado derecho de esta ecuación es el mismo que el signo de $f'(c)$, ya que $x_2 - x_1$ es positivo. Por lo tanto, $f(x_2) > f(x_1)$ si f' es positiva en (a, b) y $f(x_2) < f(x_1)$ si f' es negativa en (a, b). ■

A continuación veremos cómo se aplica el criterio de la primera derivada para encontrar en qué puntos una función es creciente y en cuáles es decreciente. Si $a < b$ son dos puntos críticos para una función f, y si f' existe pero no es cero en el intervalo (a, b), entonces f' tiene que ser positiva en (a, b) o negativa ahí (teorema 2 de la sección 3.1). Una manera para determinar el signo de f' consiste simplemente en evaluar f' en algún punto x en (a, b). Después aplicamos el corolario 3.

EJEMPLO 1 Uso del criterio de la primera derivada para funciones monótonas

Encontrar los puntos críticos de $f(x) = x^3 - 12x - 5$ identificar los intervalos en los que f es creciente y en los que es decreciente.

Solución La función f es continua y diferenciable en todas partes. La primera derivada

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) \\ &= 3(x + 2)(x - 2) \end{aligned}$$

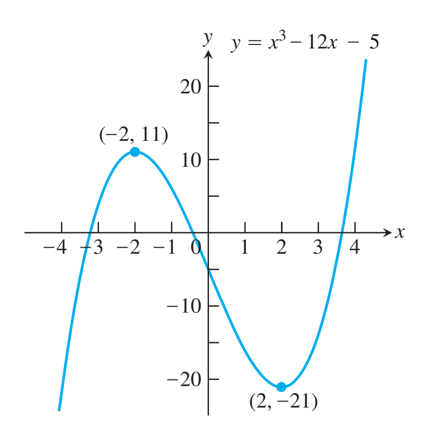


FIGURA 4.22 La función $f(x) = x^3 - 12x - 5$ es monótona en tres intervalos separados (ejemplo 1).

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

Edmund Halley
(1656–1742)

es cero en $x = -2$ y $x = 2$. Estos puntos críticos subdividen el dominio de f en los intervalos $(-\infty, -2), (-2, 2)$, y $(2, \infty)$, en los que f' es positiva o negativa. Determinamos el signo de f' evaluándola en un punto adecuado en cada subintervalo. Aplicando el corolario 3 a cada subintervalo podemos determinar el comportamiento de f. Los resultados se resumen en la siguiente tabla, y en la figura 4.22 se muestra la gráfica de f.

Intervalos	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < 2$	$2 < x < \infty$
f' evaluada	$f'(-3) = 15$	$f'(0) = -12$	$f'(3) = 15$
Signo de f'	$+$	$-$	$+$
Comportamiento de f	creciente	decreciente	creciente

■

El corolario 3 es válido tanto para intervalos finitos como para infinitos; utilizamos este hecho en el análisis del ejemplo 1.

Saber en dónde es creciente o decreciente una función también nos dice cómo probar la naturaleza de los valores extremos locales.

Prueba de la primera derivada para extremos locales

Como puede ver en la figura 4.23, en los puntos donde f tiene un valor mínimo, $f' < 0$ inmediatamente a la izquierda y $f' > 0$ inmediatamente a la derecha. (Si el punto es un extremo del intervalo, solamente hay que considerar un lado). Así, la función es decreciente a la izquierda del valor mínimo, y es creciente a su derecha. De manera similar, en los puntos donde f tiene un valor máximo, $f' > 0$ inmediatamente a la izquierda y $f' > 0$ inmediatamente a la derecha. Así, la función es creciente a la izquierda del valor máximo y decreciente a su derecha. En resumen, en un punto extremo local, el signo de $f'(x)$ cambia.

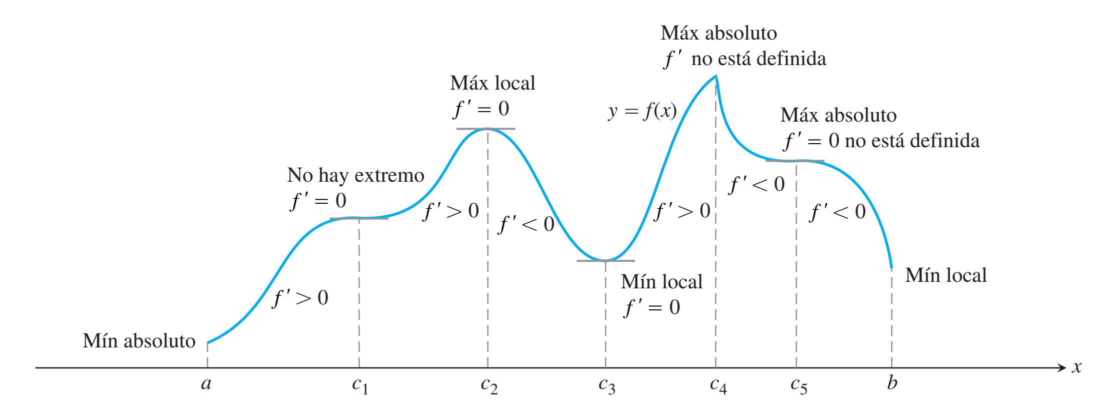


FIGURA 4.23 La primera derivada de una función dice cómo sube y baja la gráfica.

Estas observaciones nos llevan a una prueba para la presencia y naturaleza de los valores extremos locales de funciones diferenciables.

> **Prueba de la primera derivada para extremos locales**
>
> Supongamos que c es un punto crítico de una función continua f, y que f es diferenciable en todo punto de algún intervalo que contiene a c, excepto posiblemente en el mismo c. Moviéndonos a lo largo de c de izquierda a derecha,
>
> **1.** si f' cambia de negativo a positivo en c, entonces f tiene un mínimo local en c;
>
> **2.** si f' cambia de positivo a negativo en c, entonces f tiene un máximo local en c;
>
> **3.** si f' no cambia de signo en c (esto es, si f' es positiva en ambos lados de c o negativa en ambos lados de c), entonces f no tiene un extremo local en c.

La prueba para extremos locales en los extremos de un intervalo es similar, pero solo hay que considerar un lado.

Demostración Parte (1). Como el signo de f' cambia de negativo a positivo en c, existen números a y b tales que $f' < 0$ en (a, c) y $f' < 0$ en (c, b) Si $x \in (a, c)$, entonces $f(c) < f(x)$ porque $f' < 0$ implica que f es decreciente en $[a, c]$. Si $x \in (c, b)$, entonces $f(c) < f(x)$, porque $f' < 0$ implica que f es creciente en $[c, b]$. Por lo tanto, $f(x) \geq f(c)$ para toda $x \in (a, b)$. Por definición, f tiene un mínimo local en c.

Las partes (2) y (3) se demuestran de manera similar. ■

EJEMPLO 2 Uso de la prueba de la primera derivada para extremos locales

Encontrar los puntos críticos de

$$f(x) = x^{1/3}(x - 4) = x^{4/3} - 4x^{1/3}.$$

Identificar los intervalos en los que f es creciente y decreciente. Encontrar los valores extremos locales y absolutos de la función.

Solución La función f es continua para toda x por ser el producto de dos funciones continuas, $x^{1/3}$ y $(x - 4)$. La primera derivada

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\left(x^{4/3} - 4x^{1/3}\right) = \frac{4}{3}x^{1/3} - \frac{4}{3}x^{-2/3} \\ &= \frac{4}{3}x^{-2/3}\left(x - 1\right) = \frac{4(x - 1)}{3x^{2/3}} \end{aligned}$$

es cero en $x = 1$ y no está definida en $x = 0$. No hay puntos extremos en el dominio, de manera que los puntos críticos $x = 0$ y $x = 1$ son los únicos lugares donde f podría tener un valor extremo.

Los puntos críticos dividen el eje x en intervalos en los que f' es positiva o negativa. El patrón de los signos de f' revela el comportamiento de f entre y en los puntos críticos. Podemos listar la información en una tabla como la siguiente:

Intervalos	$x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
Signo de f'	$-$	$-$	$+$
Comportamiento de f	crecimiento	decrecimiento	crecimiento

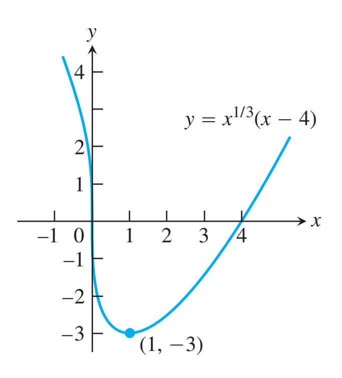


FIGURA 4.24 La función $f(x) = x^{1/3}(x - 4)$ decrece cuando $x < 1$, y crece cuando $x > 1$ (ejemplo 2).

El corolario 3 del teorema del valor medio, nos dice que f decrece en $(-\infty, 0)$, decrece en (0, 1), y crece en $(1, \infty)$. La prueba de la primera derivada para extremos locales nos dice que f no tiene extremos en $x = 0$ (f' no cambia de signo) y que tiene un mínimo local en $x = 1$ (f' cambia de negativa a positiva).

El valor del mínimo local es $f(1) = 1^{1/3}(1 - 4) = -3$. Éste también es un mínimo absoluto, porque los valores de la función decrecen al acercarse a él desde la izquierda, y crecen al alejarse de él hacia la derecha. La figura 4.24 muestra este valor en la gráfica de la función.

Observe que $\lim_{x\to 0} f'(x) = -\infty$, de manera que la gráfica de f tiene una tangente vertical en el origen.

EJERCICIOS 4.3

Análisis de f dada f'

Responda las preguntas siguientes acerca de las funciones cuyas derivadas se dan en los ejercicios 1 a 8.

a. ¿Cuáles son los puntos críticos de f?

b. ¿En qué intervalos f es creciente o decreciente?

c. ¿En qué puntos, si hay alguno, alcanza f valores máximo y mínimo locales?

1. $f'(x) = x(x - 1)$

2. $f'(x) = (x - 1)(x + 2)$

3. $f'(x) = (x - 1)^2(x + 2)$

4. $f'(x) = (x - 1)^2(x + 2)^2$

5. $f'(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 3)$

6. $f'(x) = (x - 7)(x + 1)(x + 5)$

7. $f'(x) = x^{-1/3}(x + 2)$

8. $f'(x) = x^{-1/2}(x - 3)$

Extremos de funciones dadas

En los ejercicios 9 a 28:

a. Encuentre los intervalos en los que la función es creciente o decreciente.

b. Después, identifique los valores extremos locales de la función, si hay alguno, especificando en dónde se alcanzan.

c. ¿Cuáles de los valores extremos, si hay alguno, son absolutos?

T **d.** Apoye tus resultados con una calculadora graficadora o computadora.

9. $g(t) = -t^2 - 3t + 3$

10. $g(t) = -3t^2 + 9t + 5$

11. $h(x) = -x^3 + 2x^2$

12. $h(x) = 2x^3 - 18x$

13. $f(\theta) = 3\theta^2 - 4\theta^3$

14. $f(\theta) = 6\theta - \theta^3$

15. $f(r) = 3r^3 + 16r$

16. $h(r) = (r + 7)^3$

17. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$

18. $g(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$

19. $H(t) = \frac{3}{2}t^4 - t^6$

20. $K(t) = 15t^3 - t^5$

21. $g(x) = x\sqrt{8 - x^2}$

22. $g(x) = x^2\sqrt{5 - x}$

23. $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}, \quad x \neq 2$

24. $f(x) = \frac{x^3}{3x^2 + 1}$

25. $f(x) = x^{1/3}(x + 8)$

26. $g(x) = x^{2/3}(x + 5)$

27. $h(x) = x^{1/3}(x^2 - 4)$

28. $k(x) = x^{2/3}(x^2 - 4)$

Valores extremos en intervalos semiabiertos

En los ejercicios 29 a 36:

a. Identifique los valores extremos locales de la función en el dominio dado, y diga en dónde se alcanzan.

b. ¿Cuáles de los valores extremos, si hay alguno, son absolutos?

T **c.** Apoye sus resultados con una calculadora graficadora o computadora.

29. $f(x) = 2x - x^2, \quad -\infty < x \leq 2$

30. $f(x) = (x + 1)^2, \quad -\infty < x \leq 0$

31. $g(x) = x^2 - 4x + 4, \quad 1 \leq x < \infty$

32. $g(x) = -x^2 - 6x - 9, \quad -4 \leq x < \infty$

33. $f(t) = 12t - t^3, \quad -3 \leq t < \infty$

34. $f(t) = t^3 - 3t^2, \quad -\infty < t \leq 3$

35. $h(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x, \quad 0 \leq x < \infty$

36. $k(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1, \quad -\infty < x \leq 0$

Calculadora graficadora o computadora

En los ejercicios 37 a 40:

a. Encuentre los valores extremos locales de cada función en el intervalo dado, y diga en dónde se alcanzan.

T **b.** Grafique juntas la función y su derivada. Comente el comportamiento de f en relación con el signo y los valores de f'.

37. $f(x) = \dfrac{x}{2} - 2 \operatorname{sen} \dfrac{x}{2}, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$

38. $f(x) = -2 \cos x - \cos^2 x, \quad -\pi \leq x \leq \pi$

39. $f(x) = \csc^2 x - 2 \cot x, \quad 0 < x < \pi$

40. $f(x) = \sec^2 x - 2 \tan x, \quad \dfrac{-\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$

Teoría y ejemplos

Demuestre que las funciones de los ejercicios 41 y 42 tienen valores extremos locales en los valores de θ, dados, y diga qué tipo de extremos locales tiene la función.

41. $h(\theta) = 3 \cos \dfrac{\theta}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad$ en $\theta = 0$ y $\theta = 2\pi$

42. $h(\theta) = 5 \operatorname{sen} \dfrac{\theta}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad$ en $\theta = 0$ y $\theta = \pi$

43. Grafique una función diferenciable $y = f(x)$ que pase por el punto $(1, 1)$ con $f'(1) = 0$ y

a. $f'(x) > 0$ para $x < 1$ y $f'(x) < 0$ para $x > 1$;

b. $f'(x) < 0$ para $x < 1$ y $f'(x) > 0$ para $x > 1$;

c. $f'(x) > 0$ para $x \neq 1$;

d. $f'(x) < 0$ para $x \neq 1$.

44. Grafique una función diferenciable $y = f(x)$ que tenga

a. un mínimo local en $(1, 1)$ y un máximo local en $(3, 3)$.

b. un máximo local en $(1, 1)$ y un mínimo local en $(3, 3)$.

c. máximos locales en $(1, 1)$ y $(3, 3)$.

d. mínimos locales en $(1, 1)$ y $(3, 3)$.

45. Grafique una función continua $y = g(x)$ tal que

a. $g(2) = 2, \quad 0 < g' < 1$ para $x < 2, \quad g'(x) \to 1^-$ cuando $x \to 2^-, \quad -1 < g' < 0$ para $x > 2$, y $g'(x) \to -1^+$ cuando $x \to 2^+$;

b. $g(2) = 2, \quad g' < 0$ para $x < 2, \quad g'(x) \to -\infty$ cuando $x \to 2^-, \ g' > 0$ para $x > 2$, y $g'(x) \to \infty$ cuando $x \to 2^+$.

46. Grafique una función continua $y = h(x)$ tal que

a. $h(0) = 0, -2 \leq h(x) \leq 2$ para toda x, $h'(x) \to \infty$ conforme $x \to 0^-$, y $h'(x) \to \infty$ conforme $x \to 0^+$;

b. $h(0) = 0, -2 \leq h(x) \leq 0$ para toda x, $h'(x) \to \infty$ conforme $x \to 0^-$, y $h'(x) \to -\infty$ conforme $x \to 0^+$.

47. ¿La gráfica de $f(x) = x^3 - 3x + 2$ crece o decrece conforme x se mueve de izquierda a derecha del punto $c = 2$? Justifique su respuesta.

48. Encuentre los intervalos en los que la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, crece y decrece. Describa el razonamiento que lo llevó a su respuesta.

4.4 Concavidad y trazado de curvas

En la sección 4.3 vimos que la primera derivada nos indica en dónde es creciente y en dónde es decreciente una función. En un punto crítico de una función diferenciable, el criterio de la primera derivada nos dice si hay un máximo local o un mínimo local, o si la gráfica sólo continúa creciendo o decreciendo en tal punto.

En esta sección veremos cómo la segunda derivada nos da información acerca de la manera en que la gráfica de una función diferenciable abre hacia arriba o hacia abajo. Esta información adicional nos permite capturar aspectos clave del comportamiento de una función y su gráfica, para después poderlos plasmar en un esquema de la gráfica.

FIGURA 4.25 La gráfica de $f(x) = x^3$ es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$ y cóncava hacia abajo en $(0, \infty)$ (ejemplo 1a).

Concavidad

Como puede ver en la figura 4.25, la curva $y = x^3$ se eleva cuando x crece, pero las porciones definidas en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$ abren de distintas maneras. Cuando nos acercamos al origen desde la izquierda a lo largo de la curva, ésta abre hacia abajo y se ubica debajo de sus tangentes. Las pendientes de las tangentes decrecen en el intervalo $(-\infty, 0)$. Cuando nos alejamos del origen hacia la derecha a lo largo de la curva, ésta abre hacia arriba y se ubica por encima de sus tangentes. Las pendientes de las tangentes crecen en el intervalo $(0, \infty)$. Este comportamiento de apertura hacia arriba o hacia abajo define la *concavidad* de la curva.

DEFINICIONES Cóncava hacia arriba, cóncava hacia abajo

La gráfica de una función diferenciable $y = f(x)$ es

(a) **cóncava hacia arriba** en un intervalo abierto I si f' es creciente en I.

(b) **cóncava hacia abajo** en un intervalo abierto I si f' es decreciente en I.

Si $y = f(x)$ tiene segunda derivada, podemos aplicar el corolario 3 del teorema del valor medio para concluir que f' crece si $f'' > 0$ en I, y decrece si $f'' < 0$.

Prueba de la segunda derivada para concavidad

Sea $y = f(x)$ dos veces diferenciable en un intervalo I.

1. Si $f'' > 0$ en I, la gráfica de f en I es cóncava hacia arriba.
2. Si $f'' < 0$ en I, la gráfica de f en I es cóncava hacia abajo.

FIGURA 4.26 La gráfica de $f(x) = x^2$ es cóncava hacia arriba en todo intervalo (ejemplo 1b)

Si $y = f(x)$ es dos veces diferenciable, usaremos indistintamente las notaciones f'' o y'' para denotar la segunda derivada.

EJEMPLO 1 Aplicación de la prueba de concavidad

(a) La curva $y = x^3$ (figura 4.25) es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$ donde $y'' = 6x < 0$ y cóncava hacia arriba en $(0, \infty)$, donde $y'' = 6x > 0$.

(b) La curva $y = x^2$ (figura 4.26) es cóncava hacia arriba en $(-\infty, \infty)$, porque su segunda derivada $y'' = 2$ siempre es positiva. ■





EJEMPLO 2 Determinación de concavidad

Determinar la concavidad de $y = 3 + \operatorname{sen} x$ en $[0, 2\pi]$.

Solución La gráfica de $y = 3 + \operatorname{sen} x$ es cóncava hacia abajo en $(0, \pi)$ donde $y'' = -\operatorname{sen} x$ es negativa. Es cóncava hacia arriba en $(\pi, 2\pi)$, donde $y'' = -\operatorname{sen} x$ es positiva (figura 4.27). ■

Puntos de inflexión

La curva $y = 3 + \operatorname{sen} x$ del ejemplo 2 cambia de concavidad en el punto $(\pi, 3)$. Llamamos a $(\pi, 3)$ un *punto de inflexión* de la curva.

DEFINICIÓN Punto de inflexión

Un punto donde la gráfica de una función tiene recta tangente y la concavidad cambia es un **punto de inflexión**.

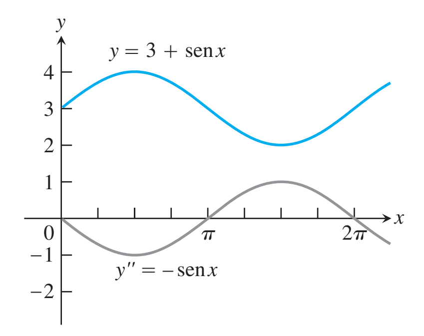


FIGURA 4.27 Use la gráfica de y'' para determinar la concavidad de y (ejemplo 2).

El punto de una curva donde y'' es positiva en un lado y negativa en el otro, es un punto de inflexión. En tal punto, y'' es cero (porque las derivadas tienen la propiedad del valor intermedio), o no está definida. Si y es una función dos veces diferenciable, $y'' = 0$ en un punto de inflexión, entonces y' tiene un máximo o mínimo local.

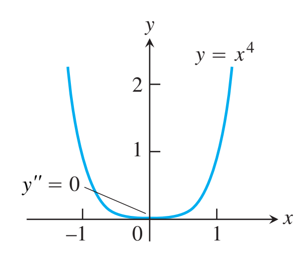


FIGURA 4.28 La gráfica de $y = x^4$ no tiene punto de inflexión en el origen, a pesar de que $y'' = 0$ ahí (ejemplo 3).

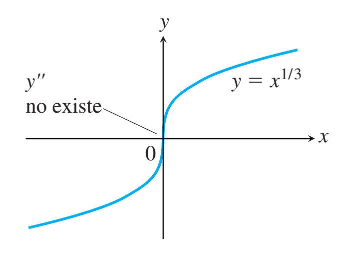


FIGURA 4.29 Un punto donde y'' no existe puede ser un punto de inflexión (ejemplo 4).

EJEMPLO 3 Puede no haber punto de inflexión donde $y'' = 0$

La curva $y = x^4$ no tiene punto de inflexión en $x = 0$ (figura 4.28). A pesar de que $y'' = 12x^2$ es cero en ese punto, no cambia de signo. ■

EJEMPLO 4 Un punto de inflexión puede alcanzarse donde y'' no existe

La curva $y = x^{1/3}$ tiene un punto de inflexión en $x = 0$ (figura 4.29), pero y'' no existe ahí.

$$y'' = \frac{d^2}{dx^2}\left(x^{1/3}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^{-2/3}\right) = -\frac{2}{9}x^{-5/3}.$$ ■

En el ejemplo 3 vimos que un cero en la segunda derivada no siempre produce un punto de inflexión. En el ejemplo 4 vimos que los puntos de inflexión también se pueden alcanzar donde *no* hay segunda derivada.

Para estudiar el movimiento de un cuerpo que se mueve a lo largo de una recta como función del tiempo, con frecuencia nos interesa saber en qué momento la aceleración del cuerpo, dada por la segunda derivada, es positiva o negativa. Los puntos de inflexión en la gráfica de la función posición revelan en dónde cambia de signo la aceleración.

EJEMPLO 5 Análisis del movimiento a lo largo de una recta

Una partícula se mueve a lo largo de una recta horizontal con una función posición

$$s(t) = 2t^3 - 14t^2 + 22t - 5, \qquad t \geq 0.$$

Encontrar la velocidad y la aceleración de la partícula, y describir su movimiento.

Solución La velocidad es

$$v(t) = s'(t) = 6t^2 - 28t + 22 = 2(t - 1)(3t - 11),$$

y la aceleración es

$$a(t) = v'(t) = s''(t) = 12t - 28 = 4(3t - 7).$$

Cuando la función $s(t)$ crece, la partícula se mueve a la derecha; cuando $s(t)$ decrece, la partícula se mueve a la izquierda.

Observe que la primera derivada ($v = s'$) es cero cuando $t = 1$ y $t = 11/3$.

Intervalos	$0 < t < 1$	$1 < t < 11/3$	$11/3 < t$
Signo de $v = s'$	$+$	$-$	$+$
Comportamiento de *s*	creciente	decreciente	creciente
Movimiento de la partícula	a la derecha	a la izquierda	a la derecha

La partícula se mueve a la derecha en los intervalos de tiempo $[0, 1)$ y $(11/3, \infty)$, y se mueve a la izquierda en $(1, 11/3)$. Permanece estacionaria (en reposo) un momento en $t = 1$ y $t = 11/3$.

La aceleración $a(t) = s''(t) = 4(3t - 7)$ es cero cuando $t = 7/3$.

Intervalos	$0 < t < 7/3$	$7/3 < t$
Signo de $a = s''$	$-$	$+$
Gráfica de *s*	cóncava hacia abajo	cóncava hacia arriba

La fuerza de la aceleración se dirige hacia la izquierda en el intervalo de tiempo $[0,\ 7/3]$, es cero momentáneamente en $t = 7/3$, y se dirige hacia la derecha después de este momento. ■

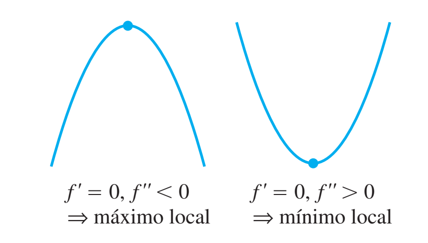
Prueba de la segunda derivada para extremos locales

En vez de buscar los cambios de signo en f' en los puntos críticos, algunas veces podemos usar la siguiente prueba para determinar la presencia y el carácter de los extremos locales.

TEOREMA 5 Prueba de la segunda derivada para extremos locales

Supongamos que f'' es continua en un intervalo abierto que contiene a $x = c$.

1. Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$, f tiene un máximo local en $x = c$.
2. Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$, f tiene un mínimo local en $x = c$.
3. Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) = 0$, la prueba falla. La función f puede tener un máximo local, un mínimo local, o ninguno de ellos.



Demostración Parte (1). Si $f''(c) < 0$, entonces $f''(x) < 0$ en algún intervalo abierto I que contenga el punto c, ya que f'' es continua. Por lo tanto, f' decrece en I. Como $f'(c) = 0$, el signo de f' cambia de positivo a negativo en c, de manera que, según la prueba de la primera derivada, f tiene un máximo local en c.

La demostración de la parte (2) es similar.

Para la parte (3), considere las tres funciones $y = x^4$, $y = -x^4$, y $y = x^3$. Para cada función, la primera y segunda derivadas son cero en $x = 0$. Aunque la función $y = x^4$ tiene un mínimo local ahí, $y = -x^4$ tiene un máximo local, y $y = x^3$ es creciente en cualquier intervalo abierto que contenga $x = 0$ (no tiene máximo ni mínimo ahí). En consecuencia, la prueba falla. ■

Esta prueba requiere que conozcamos f'' *solamente en c* y no en un intervalo alrededor de c. Esto hace que la prueba sea fácil de aplicar. Ésta es la buena noticia; la mala es que la prueba no es concluyente si $f'' = 0$ o si f'' no existe en $x = c$. Cuando pasa esto es preciso usar la prueba de la primera derivada para valores extremos locales.

Juntas, f' y f'' nos indican la forma de la gráfica de la función; esto es, nos dicen en dónde se localizan los puntos críticos y qué pasa en un punto crítico, en dónde es creciente y en dónde es decreciente la función, y si la curva abre hacia arriba o hacia abajo, dependiendo de su concavidad. Usaremos esta información para hacer el esquema de la gráfica de una función que tiene estas características.

EJEMPLO 6 Uso de f' y f'' para graficar f

Graficar la función

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$$

usando los pasos siguientes.

(a) Identificar en dónde se alcanzan los extremos de f.

(b) Encontrar los intervalos en los que f es creciente y en los que es decreciente.

(c) Encontrar en qué parte la gráfica de f es cóncava hacia arriba y en qué parte es cóncava hacia abajo.

(d) Dibujar la forma general de la gráfica para f.

(e) Trazar algunos puntos específicos, tales como los puntos máximos y mínimos locales, los puntos de inflexión y las intersecciones con los ejes. Después, dibujar la curva.

Solución f es continua, ya que $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$ existe. El dominio de f es $(-\infty, \infty)$, y el dominio de f' también es $(-\infty, \infty)$. Por lo tanto, los puntos críticos de f se alcanzan solamente en los ceros de f'. Como

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$$

la primera derivada es cero en $x = 0$ y en $x = 3$.

Intervalos	$x < 0$	$0 < x < 3$	$3 < x$
Signo de f'	$-$	$-$	$+$
Comportamiento de f	crecimiento	decrecimiento	crecimiento

(a) Usando la prueba de la primera derivada para extremos locales y la tabla anterior, vemos que no existe un extremo en $x = 0$, ni un mínimo local en $x = 3$.

(b) Usando la tabla anterior, vemos que f es decreciente en $(-\infty, 0]$ y $[0, 3]$, y creciente en $[3, \infty)$.

(c) $f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)$ es cero en $x = 0$ y $x = 2$.

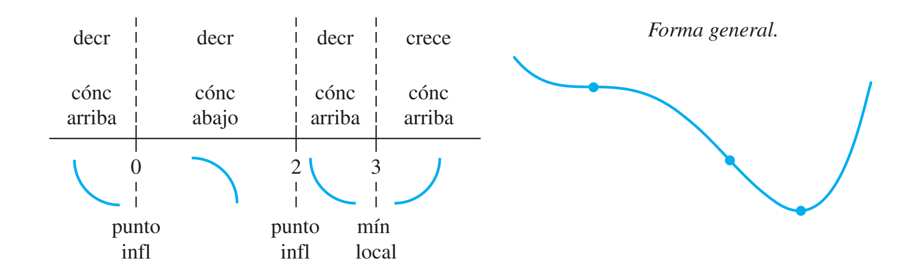
Intervalos	$x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x$
Signo de f'	$+$	$-$	$+$
Comportamiento de f	cóncavo hacia arriba	cóncavo hacia abajo	cóncavo hacia arriba

Vemos que f es cóncava hacia arriba en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(2, \infty)$, y cóncava hacia abajo en $(0, 2)$.

(d) Resumiendo la información de las dos tablas anteriores, obtenemos

$x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x < 3$	$3 < x$
decreciente cóncavo hacia arriba	decreciente cóncavo hacia abajo	decreciente cóncavo hacia arriba	creciente cóncavo hacia arriba

La forma general de la curva es



Forma general.

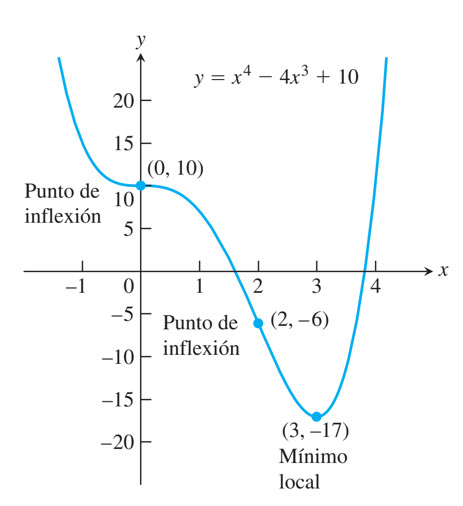


FIGURA 4.30 La gráfica de $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$ (ejemplo 6).

(e) Dibuje (de ser posible) las intersecciones con los ejes, y los puntos donde y' y y'' son cero. Indique todos los valores extremos y los puntos de inflexión. Use la forma general como guía para dibujar la curva. (Trace más puntos si es necesario). La figura 4.30 muestra la gráfica de f. ■

Los pasos del ejemplo 6 ayudan a delinear un procedimiento para dibujar la gráfica, tomando en cuenta las características clave de una función y su gráfica.

Estrategia para graficar $y = f(x)$

1. Identificar el dominio de f y cualesquiera simetrías que pueda tener la curva.
2. Encontrar y' y y''.
3. Encontrar los puntos críticos de f, e identificar el comportamiento de la función en cada uno.
4. Encontrar en dónde crece la curva y en dónde decrece.
5. Encontrar los puntos de inflexión, si hay alguno, y determinar la concavidad de la curva.
6. Identificar las asíntotas.
7. Trazar los puntos clave, tales como las intersecciones con los ejes y los puntos encontrados en los pasos 3 a 5, y dibujar la curva.

EJEMPLO 7 Uso de la estrategia de graficación

Graficar $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{1+x^2}$.

Solución

1. El dominio de f es $(-\infty, \infty)$, y no hay simetrías alrededor de los ejes ni del origen (sección 1.4).
2. *Encontrar* f' *y* f''.

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{1+x^2}$$

intercepción con el eje x $x = -1$, intercepción con el eje y $(y = 1)$ en $x = 0$

$$f'(x) = \frac{(1+x^2)\cdot 2(x+1) - (x+1)^2\cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

Puntos críticos: $x = -1, x = 1$

$$f''(x) = \frac{(1+x^2)^2\cdot 2(-2x) - 2(1-x^2)[2(1+x^2)\cdot 2x]}{(1+x^2)^4}$$

$$= \frac{4x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$$

Después de algunas operaciones algebraicas

3. *Comportamiento en los puntos críticos*. Los puntos críticos se alcanzan sólo en $x = \pm 1$ donde $f'(x) = 0$ (paso 2), ya que f' existe en todo el dominio de f. En $x = -1$, $f''(-1) = 1 > 0$, lo cual produce un mínimo relativo, de acuerdo con la prueba de la segunda derivada. En $x = 1$, $f''(1) = -1 < 0$, lo cual produce un máximo relativo, de acuerdo con la prueba de la segunda derivada. En el paso 6 veremos que ambos puntos son también extremos absolutos.

4. *Crecimiento y decrecimiento*. Vemos que en el intervalo $(-\infty, -1)$, la derivada $f'(x) < 0$ y la curva es decreciente. En el intervalo $(-1, 1)$, $f'(x) > 0$ y la curva es creciente; es decreciente en $(1, \infty)$, donde nuevamente $f'(x) < 0$.

5. *Puntos de inflexión*. Observe que el denominador de la segunda derivada siempre es positivo (paso 2). La segunda derivada f'' es cero cuando $x = -\sqrt{3}, 0$, y $\sqrt{3}$. La segunda derivada cambia de signo en cada uno de estos puntos: es negativa en $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$, positiva en $\left(-\sqrt{3}, 0\right)$, negativa en $\left(0, \sqrt{3}\right)$, y positiva nuevamente en $\left(\sqrt{3}, \infty\right)$. En consecuencia, cada uno de estos puntos es un punto de inflexión. La curva es cóncava hacia abajo en el intervalo $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$, cóncava hacia arriba en $\left(-\sqrt{3}, 0\right)$, cóncava hacia abajo en $\left(0, \sqrt{3}\right)$, y nuevamente cóncava hacia arriba en $\left(\sqrt{3}, \infty\right)$.

6. *Asíntotas.* Desarrollando el numerador de $f(x)$ y después dividiendo tanto el numerador como el denominador entre x^2, obtenemos

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{1+x^2} = \frac{x^2+2x+1}{1+x^2} \qquad \text{Desarrollando el numerador}$$

$$= \frac{1 + (2/x) + (1/x^2)}{(1/x^2) + 1}. \qquad \text{Dividiendo entre } x^2$$

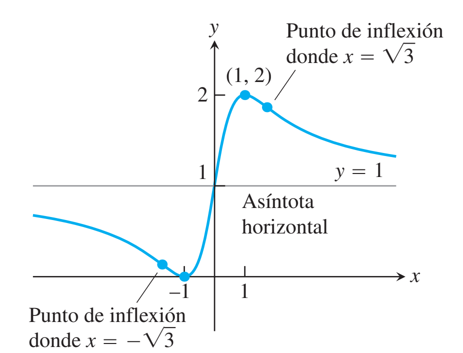
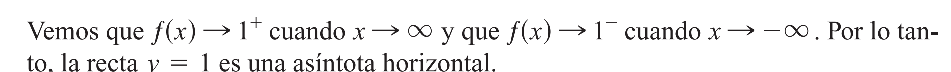


FIGURA 4.31 La gráfica de $y = \dfrac{(x+1)^2}{1+x^2}$ (ejemplo 7).



Vemos que $f(x) \to 1^+$ cuando $x \to \infty$ y que $f(x) \to 1^-$ cuando $x \to -\infty$. Por lo tanto, la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal.

Como f decrece en $(-\infty, -1)$ y después crece en $(-1, 1)$, sabemos que $f(-1) = 0$ es un mínimo local. A pesar de que f decrece en $(1, \infty)$, nunca cruza la asíntota horizontal $y = 1$ en ese intervalo (se aproxima a la asíntota por abajo). De manera que la gráfica nunca es negativa, y $f(-1) = 0$ también es un mínimo absoluto. De la misma manera, $f(1) = 2$ es un máximo absoluto, ya que la gráfica nunca cruza la asíntota $y = 1$ en el intervalo $(-\infty, -1)$, aproximándose a ella por abajo. Por lo tanto, no hay asíntotas verticales (el rango de f es $0 \le y \le 2$).

7. En la figura 4.31 está dibujada la gráfica de f. Observe como la gráfica es cóncava hacia abajo al aproximarse a la asíntota horizontal $y = 1$ cuando $x \to -\infty$, y cóncava hacia arriba en su aproximación a $y = 1$ cuando $x \to \infty$. ■

Conocimiento de las funciones a partir de sus derivadas

Como vimos en los ejemplos 6 y 7, podemos averiguar casi todo lo que necesitamos saber acerca de una función dos veces diferenciable $y = f(x)$ examinando su primera derivada. Es posible encontrar en qué parte la gráfica de la función sube o baja, y en dónde se alcanzan todos los extremos locales; podemos derivar y' para saber hacia dónde abre la gráfica cuando pasa por los intervalos de crecimiento y decrecimiento, e incluso podemos determinar la forma de la gráfica de la función. Lo que no podemos averiguar a partir de la derivada, es cómo colocar la gráfica en el plano xy. Pero, como descubrimos en la sección 4.2, el único dato adicional que necesitamos para ello es el valor de f en un punto. Finalmente, la derivada no nos da información sobre las asíntotas, que se encuentran usando límites (secciones 2.4 y 2.5).

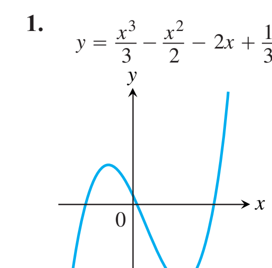
$y = f(x)$ Diferenciable $\Rightarrow$ suave, conexa; la gráfica puede elevarse o caer	$y = f(x)$ $y' > 0 \Rightarrow$ se eleva de izquierda a derecha; puede ser ondulada	$y = f(x)$ $y' < 0 \Rightarrow$ cae de izquierda a derecha; puede ser ondulada
o $y'' > 0 \Rightarrow$ cóncava hacia arriba en todas partes; no tiene ondas; la gráfica puede elevarse o caer	o $y'' < 0 \Rightarrow$ cóncava hacia abajo en todas partes; no tiene ondas; la gráfica puede elevarse o caer	y'' cambia de signo. Punto de inflexión
+ − o − + y' cambia de signo $\Rightarrow$ la gráfica tiene un máximo o mínimo local	$y' = 0$ y $y'' < 0$ en un punto; la gráfica tiene un máximo local	$y' = 0$ y $y'' > 0$ en un punto; la gráfica tiene un mínimo local

EJERCICIOS 4.4

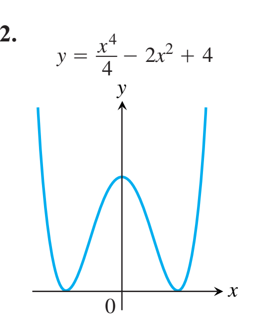
Análisis de funciones graficadas

Identifique los puntos de inflexión y los máximos y mínimos locales de las funciones graficadas en los ejercicios 1 a 8. Identifique los intervalos en los que las funciones son cóncavas hacia arriba y hacia abajo.

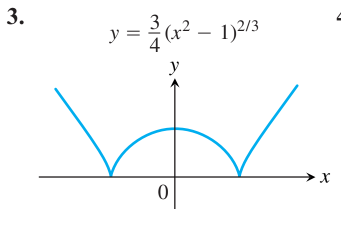
1. $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{3}$



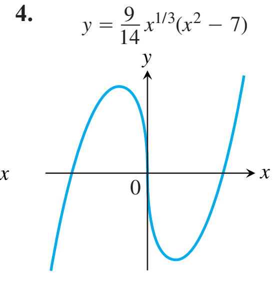
2. $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 4$



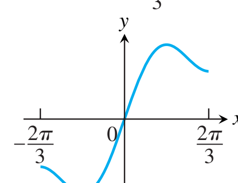
3. $y = \frac{3}{4}(x^2 - 1)^{2/3}$

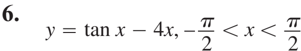


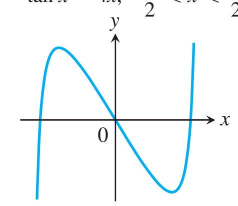
4. $y = \frac{9}{14}x^{1/3}(x^2 - 7)$



5. $y = x + \operatorname{sen} 2x, -\frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$



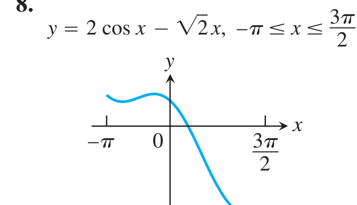
6. 
$y = \tan x - 4x, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$



7. $y = \operatorname{sen}|x|, -2\pi \leq x \leq 2\pi$

NO ESTÁ A ESCALA

8. $y = 2\cos x - \sqrt{2}x, -\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$



Graficación de ecuaciones

Use los pasos del procedimiento de graficación, que se dan en la página 272, para dibujar la gráfica de las funciones de los ejercicios 9 a 40. Incluya las coordenadas de todos los puntos extremos locales y de inflexión.

9. $y = x^2 - 4x + 3$

10. $y = 6 - 2x - x^2$

11. $y = x^3 - 3x + 3$

12. $y = x(6 - 2x)^2$

13. $y = -2x^3 + 6x^2 - 3$

14. $y = 1 - 9x - 6x^2 - x^3$

15. $y = (x - 2)^3 + 1$

16. $y = 1 - (x + 1)^3$

17. $y = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2)$

18. $y = -x^4 + 6x^2 - 4 = x^2(6 - x^2) - 4$

19. $y = 4x^3 - x^4 = x^3(4 - x)$

20. $y = x^4 + 2x^3 = x^3(x + 2)$

21. $y = x^5 - 5x^4 = x^4(x - 5)$

22. $y = x\left(\frac{x}{2} - 5\right)^4$

23. $y = x + \operatorname{sen} x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$

24. $y = x - \operatorname{sen} x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$

25. $y = x^{1/5}$

26. $y = x^{3/5}$

27. $y = x^{2/5}$

28. $y = x^{4/5}$

29. $y = 2x - 3x^{2/3}$

30. $y = 5x^{2/5} - 2x$

31. $y = x^{2/3}\left(\frac{5}{2} - x\right)$

32. $y = x^{2/3}(x - 5)$

33. $y = x\sqrt{8 - x^2}$

34. $y = (2 - x^2)^{3/2}$

35. $y = \frac{x^2 - 3}{x - 2}, \quad x \neq 2$

36. $y = \frac{x^3}{3x^2 + 1}$

37. $y = |x^2 - 1|$

38. $y = |x^2 - 2x|$

39. $y = \sqrt{|x|} = \begin{cases} \sqrt{-x}, & x \leq 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$

40. $y = \sqrt{|x - 4|}$

Trazo de la forma general conociendo y'

En cada uno de los ejercicios 41 a 62 se da la primera derivada de una función continua $y = f(x)$. Encuentre y'' y después use los pasos 2 a 4 del procedimiento de graficación (página 272) para trazar la forma general de la gráfica de f.

41. $y' = 2 + x - x^2$

42. $y' = x^2 - x - 6$

43. $y' = x(x - 3)^2$

44. $y' = x^2(2 - x)$

45. $y' = x(x^2 - 12)$

46. $y' = (x - 1)^2(2x + 3)$

47. $y' = (8x - 5x^2)(4 - x)^2$

48. $y' = (x^2 - 2x)(x - 5)^2$

49. $y' = \sec^2 x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

50. $y' = \tan x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

51. $y' = \cot \frac{\theta}{2}, \quad 0 < \theta < 2\pi$

52. $y' = \csc^2 \frac{\theta}{2}, \quad 0 < \theta < 2\pi$

53. $y' = \tan^2 \theta - 1, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

54. $y' = 1 - \cot^2 \theta, \quad 0 < \theta < \pi$

55. $y' = \cos t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

56. $y' = \operatorname{sen} t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

57. $y' = (x + 1)^{-2/3}$

58. $y' = (x - 2)^{-1/3}$

59. $y' = x^{-2/3}(x - 1)$

60. $y' = x^{-4/5}(x + 1)$

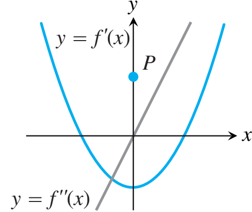
61. $y' = 2|x| = \begin{cases} -2x, & x \leq 0 \\ 2x, & x > 0 \end{cases}$

62. $y' = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$

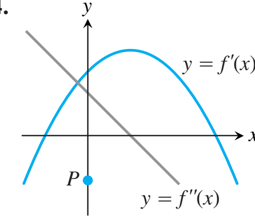
Trazo de y a partir de las gráficas de y' y y''

En cada uno de los ejercicios 63 a 66 se muestran las gráficas de la primera y segunda derivadas de una función $y = f(x)$. Copie la figura y añádale un esbozo de la gráfica aproximada de f, dado que la gráfica pasa por el punto P.

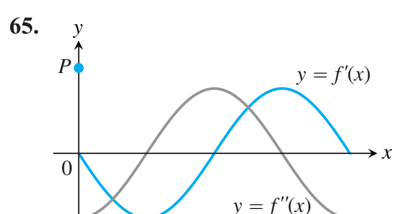

63.



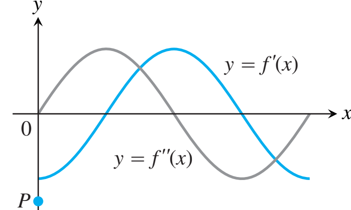

64.



65.

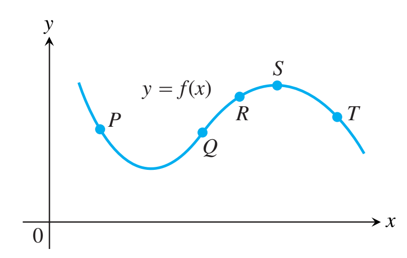


66.



Teoría y ejemplos

67. La figura siguiente muestra una porción de la gráfica de una función dos veces diferenciable $y = f(x)$. En cada uno de los cinco puntos etiquetados, clasifique y' y y'' como positiva, negativa o cero.



68. Trace una curva suave conexa $y = f(x)$ con

$$
\begin{array}{ll}
f(-2) = 8, & f'(2) = f'(-2) = 0, \\
f(0) = 4, & f'(x) < 0 \quad \text{para} \quad |x| < 2, \\
f(2) = 0, & f''(x) < 0 \quad \text{para} \quad x < 0, \\
f'(x) > 0 \quad \text{para} \quad |x| > 2, & f''(x) > 0 \quad \text{para} \quad x > 0.
\end{array}
$$

69. Grafique una función dos veces diferenciable $y = f(x)$ con las propiedades siguientes. Señale las coordenadas cuando sea posible.

x	y	Derivadas
$x < 2$		$y' < 0,\quad y'' > 0$
2	1	$y' = 0,\quad y'' > 0$
$2 < x < 4$		$y' > 0,\quad y'' > 0$
4	4	$y' > 0,\quad y'' = 0$
$4 < x < 6$		$y' > 0,\quad y'' < 0$
6	7	$y' = 0,\quad y'' < 0$
$x > 6$		$y' < 0,\quad y'' < 0$

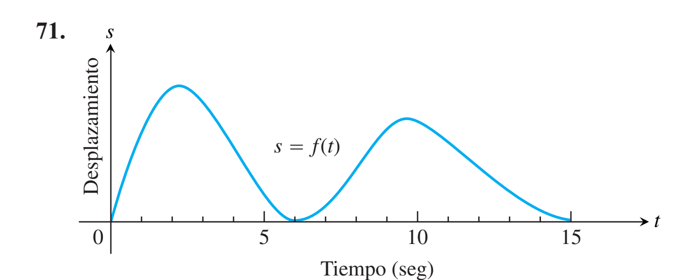
70. Grafique una función dos veces diferenciable $y = f(x)$ que pasa por los puntos $(-2, 2)$, $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$, y $(2, 2)$ cuyas dos primeras derivadas tienen estos patrones de signos:

y': + | − | + | − (puntos de cambio: -2, 0, 2)

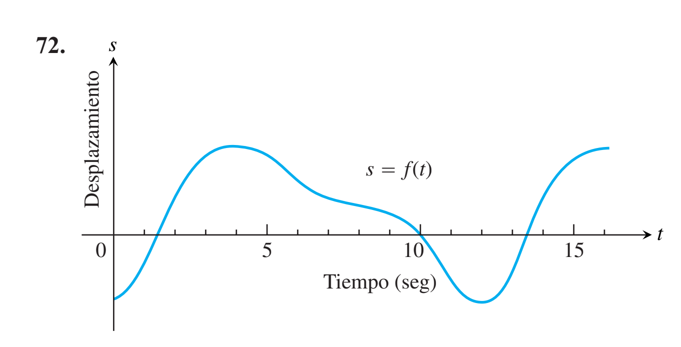
y'': − | + | − (puntos de cambio: -1, 1)

Movimiento a lo largo de una recta Las gráficas de los ejercicios 71 y 72 muestran la posición $s = f(t)$ de un cuerpo que se mueve hacia atrás y hacia adelante a lo largo de una recta coordenada. **(a)** ¿En qué momento el cuerpo se está alejando del origen? ¿En qué momento se aproxima al origen? ¿Aproximadamente en qué momento **(b)** la velocidad es igual a cero?, **(c)** la aceleración es igual a cero?; **(d)** ¿en qué momento la aceleración es positiva?, ¿en qué momento es negativa?

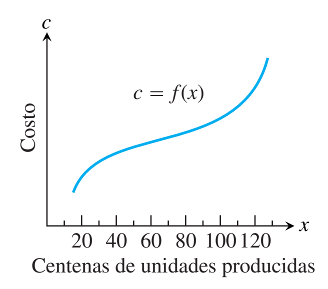
71.



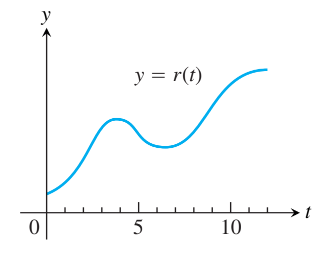
72.



73. Costo marginal La gráfica siguiente muestra el costo hipotético $c = f(x)$ en que se incurre al fabricar x artículos. ¿Aproximadamente en qué nivel de producción el costo marginal cambia de decreciente a creciente?



74. La gráfica siguiente muestra el ingreso mensual de la Corporación Widget durante los últimos 12 años. ¿Aproximadamente en qué intervalos de tiempo creció el ingreso marginal? ¿En qué intervalos decreció?



75. Suponga que la derivada de la función $y = f(x)$ es

$$y' = (x - 1)^2(x - 2).$$

¿En qué puntos, si hay alguno, tiene la gráfica de f un mínimo local, un máximo local o un punto de inflexión? (*Sugerencia:* Trace el patrón de signos de y'.)

76. Suponga que la derivada de la función $y = f(x)$ es

$$y' = (x - 1)^2(x - 2)(x - 4).$$

¿En qué puntos la gráfica de f tiene un mínimo local, un máximo local o un punto de inflexión?

77. Para $x > 0$ dibuje una curva $y = f(x)$ que tenga $f(1) = 0$ y $f'(x) = 1/x$. ¿Puede decirse algo acerca de la concavidad de tal curva? Justifique su respuesta.

78. ¿Puede decirse algo acerca de la gráfica de una función $y = f(x)$ que tiene segunda derivada continua que nunca es cero? Justifique su respuesta.

79. Si b, c y d son constantes, ¿para qué valor de b tendrá un punto de inflexión en $x = 1$ la curva $y = x^3 + bx^2 + cx + d$? Justifique su respuesta.

80. Tangentes horizontales ¿Verdadero o falso? Explique.

a. La gráfica de un polinomio de grado par (el mayor exponente par) tiene al menos una tangente horizontal.

b. La gráfica de un polinomio de grado impar (el mayor exponente impar) tiene al menos una tangente horizontal.

81. Parábolas

a. Encuentre las coordenadas del vértice de la parábola $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$.

b. ¿En qué punto la parábola es cóncava hacia arriba? ¿En cuál es cóncava hacia abajo? Justifique sus respuestas.

82. ¿Es cierto que la concavidad de la gráfica de una función dos veces diferenciable $y = f(x)$ cambia cada vez que $f''(x) = 0$? Justifique su respuesta.

83. Curvas cuadráticas ¿Qué puede decir acerca de los puntos de inflexión de la curva $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$? Justifique su respuesta.

84. Curvas cúbicas ¿Qué puede decir acerca de los puntos de inflexión de la curva $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0$? Justifique su respuesta.

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

En los ejercicios 85-88, encuentre los puntos de inflexión (si los hay) en la gráfica de la función, y las coordenadas de los puntos en la gráfica donde la función tiene un valor máximo o mínimo local. Después grafique la función en una región suficientemente grande para mostrar simultáneamente todos estos puntos. Añada a su figura las gráficas de las funciones de la primera y segunda derivadas. ¿Cómo se relacionan los puntos en los que estas gráficas cortan el eje x con la gráfica de la función? ¿De qué otra manera se relacionan las gráficas de las derivadas con la gráfica de la función?

85. $y = x^5 - 5x^4 - 240$

86. $y = x^3 - 12x^2$

87. $y = \frac{4}{5}x^5 + 16x^2 - 25$

88. $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 12x + 20$

89. Grafique juntas la función $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$ y sus dos primeras derivadas. Comente el comportamiento de juntas f en relación con los signos y valores de f' y f''.

90. Grafique juntas $f(x) = x \cos x$ y su segunda derivada para $0 \leq x \leq 2\pi$. Comente el comportamiento de f en relación con los signos y valores de f''.

91. a. En una pantalla común, grafique $f(x) = x^3 + kx$ para $k = 0$ y para valores de k positivos y negativos cercanos a cero. ¿Cómo parecen afectar los valores de k la forma de la gráfica ?

b. Encuentre $f'(x)$. Como verá, $f'(x)$ es una función cuadrática de x. Determine el discriminante de la cuadrática (el discriminante de $ax^2 + bx + c$ es $b^2 - 4ac$) ¿Para qué valores de k el discriminante es positivo? ¿Para qué valores es cero? ¿Para qué valores es negativo? ¿Para qué valores de k, f' tiene dos ceros? ¿Para qué valores tiene un cero o ninguno? Ahora explique qué tiene que ver el valor de k con la forma de la gráfica de f.

c. Experimente con otros valores de k. ¿Qué ocurre cuando $k \to -\infty$? ¿Qué ocurre cuando $k \to \infty$?

92. a. En una pantalla común, trace la gráfica de $f(x) = x^4 + kx^3 + 6x^2$, $-2 \leq x \leq 2$ para $k = -4$, y para valores enteros cercanos a k. ¿Cómo parecen afectar los valores de k a la forma de la gráfica?

b. Encuentre $f''(x)$. Como verá, $f''(x)$ es una función cuadrática de x. ¿Cuál es el discriminante de la cuadrática (vea el ejercicio 91(b))? ¿Para qué valores de k el discriminante es positivo? ¿Para qué valores de k es cero? ¿Para qué valores de k es negativo? ¿Para qué valores de k, f'' tiene dos ceros? ¿Para qué valores de k tiene un cero o ninguno? Ahora explique qué tiene que ver el valor de k con la forma de la gráfica de f.

93. a. Grafique $y = x^{2/3}(x^2 - 2)$ para $-3 \leq x \leq 3$. Después use cálculo para confirmar lo que muestra la pantalla acerca de la concavidad, el crecimiento y el decrecimiento. (Dependiendo de su calculadora graficadora, es posible que tenga que introducir $x^{2/3}$ como $(x^2)^{1/3}$ para obtener el trazo de los valores negativos de x.)

b. ¿La curva tiene una cúspide en $x = 0$, o solamente un pico con derivadas laterales derecha e izquierda diferentes?

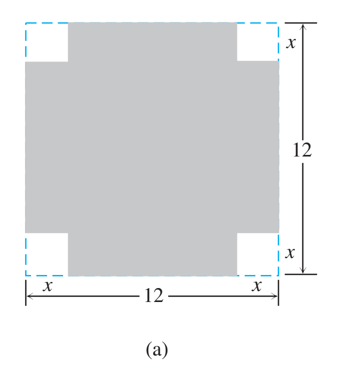
94. a. Grafique $y = 9x^{2/3}(x - 1)$ para $-0.5 \leq x \leq 1.5$. Después use cálculo para confirmar lo que muestra la pantalla acerca de la concavidad, el crecimiento y el decrecimiento. ¿Qué concavidad tiene la curva a la izquierda del origen? (Dependiendo de su calculadora graficadora, es posible que tenga que introducir $x^{2/3}$ como $(x^2)^{1/3}$ para obtener el trazo de los valores negativos de x.)

b. ¿La curva tiene una cúspide en $x = 0$, o solamente un pico con derivadas laterales derecha e izquierda diferentes?

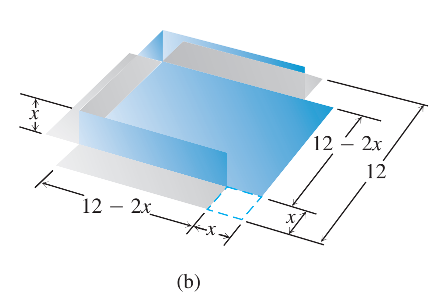
95. ¿La curva $y = x^2 + 3 \operatorname{sen} 2x$ tiene una tangente horizontal cerca de $x = -3$? Justifique su respuesta.

4.5 Problemas de optimización aplicados

Optimizar algo significa maximizar o minimizar uno de sus aspectos. ¿Cómo se pueden determinar las dimensiones de un rectángulo con perímetro fijo y área máxima? ¿Qué forma debe tener una lata cilíndrica para que su producción resulte lo más barata posible ? ¿Qué cantidad de la producción es la más rentable? El cálculo diferencial es una herramienta poderosa para resolver problemas que requieren maximizar o minimizar una función. En esta sección resolveremos diversos problemas de optimización para negocios, matemáticas, física y economía.



(a)



(b)

FIGURA 4.32 Una caja abierta, hecha al cortar cuadrados en las esquinas de una lámina de hojalata. ¿Qué tamaño de las esquinas maximiza el volumen de la caja (ejemplo 1)?

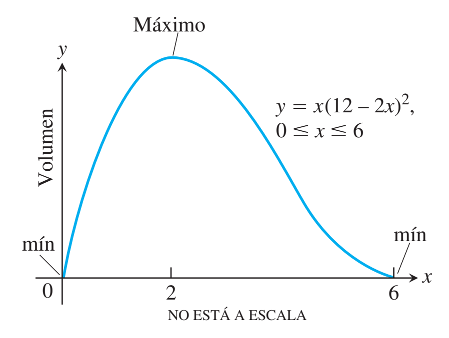


FIGURA 4.33 El volumen de la caja de la figura 4.32 dibujado como la gráfica de una función de x.

Ejemplos de los negocios y la industria

EJEMPLO 1 Fabricación de una caja

Se quiere hacer una caja abierta cortando pequeños cuadrados congruentes en las esquinas de una lámina de hojalata que mide 12 por 12 pulgadas, y doblando los lados hacia arriba. ¿Qué tan grandes deben ser los cuadrados que se corten de las esquinas para que la caja tenga la máxima capacidad posible?

Solución Empezamos por hacer un planteamiento gráfico del problema (figura 4.32). En la figura, los cuadrados de las esquinas tienen lados de x pulgadas. El volumen de la caja es una función de esta variable:

$$V(x) = x(12 - 2x)^2 = 144x - 48x^2 + 4x^3. \qquad V = hlw$$

Como los lados de la lámina de hojalata tienen sólo 12 pulgadas de largo, $x \leq 6$ y el dominio de V es el intervalo $0 \leq x \leq 6$.

Una gráfica de V (figura 4.33) sugiere un valor mínimo de 0 en $x = 0$ y $x = 6$ y uno máximo cerca de $x = 2$. Para obtener más información, examinamos la primera derivada de V respecto de x:

$$\frac{dV}{dx} = 144 - 96x + 12x^2 = 12(12 - 8x + x^2) = 12(2 - x)(6 - x).$$

De los dos ceros, $x = 2$ y $x = 6$, solamente $x = 2$ está en el interior del dominio de la función y es el único elemento de la lista de puntos críticos. Los valores de V en este punto crítico y en los extremos del intervalo son

$$\text{Valor en el punto crítico:} \quad V(2) = 128$$

$$\text{Valores en los extremos del intervalo:} \quad V(0) = 0, \quad V(6) = 0.$$

El volumen máximo es 128 pulg^3. Los cortes cuadrados deben medir 2 pulgadas por lado. ■

EJEMPLO 2 Diseño de una lata cilíndrica eficiente

Se le ha pedido que diseñe una lata con capacidad para 1 litro, con forma de un cilindro circular recto (figura 4.34). ¿De qué dimensiones debe ser la lata para usar la menor cantidad posible de material?

Solución *Volumen de la lata:* Si r y h se miden en centímetros, el volumen de la lata en centímetros cúbicos, es

$$\pi r^2 h = 1000. \qquad 1 \text{ litro} = 1000 \text{ cm}^3$$

Área superficial de la lata: $A = \underbrace{2\pi r^2}_{\text{Tapas circulares}} + \underbrace{2\pi rh}_{\text{Pared circular}}$

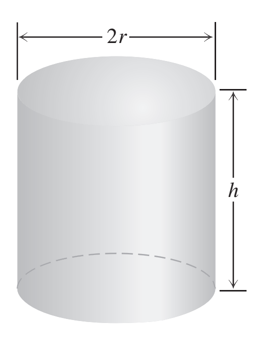


FIGURA 4.34 Esta lata de 1 litro usa la mínima cantidad de material cuando $h = 2r$ (ejemplo 2).

¿Cómo podemos interpretar la frase "menor cantidad posible de material"? En primer lugar, obviamos el espesor del material y el desperdicio en la fabricación, tal como se acostumbra. Después nos preguntamos cuáles son las dimensiones r y h que hacen el área superficial total tan pequeña como se pueda sin dejar de satisfacer la restricción $\pi r^2 h = 1000$.

Para expresar el área superficial como una función de una variable, resolvemos para una de las variables en $\pi r^2 h = 1000$ y sustituimos esa expresión en la fórmula del área superficial. Es más fácil resolver para h:

$$h = \frac{1000}{\pi r^2}.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} A &= 2\pi r^2 + 2\pi r h \\ &= 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{1000}{\pi r^2}\right) \\ &= 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}. \end{aligned}$$

Nuestra meta es encontrar un valor de $r > 0$ que minimice el valor de A. La figura 4.35 sugiere que tal valor existe.

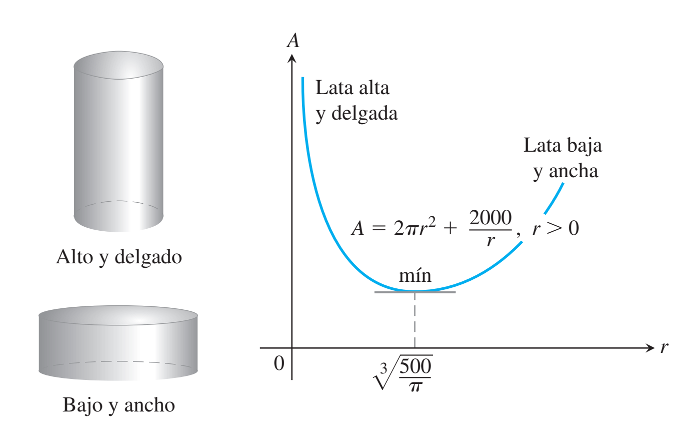


FIGURA 4.35 La gráfica de $A = 2\pi r^2 + 2000/r$ es cóncava hacia arriba.

Observe, a partir de la gráfica, que para r pequeña (un recipiente alto y delgado, como una especie de tubo), el término $2000/r$ domina y A es grande. Para r grande (un recipiente bajo y ancho, como un molde para pizza), el término $2\pi r^2$ domina y A es grande una vez más.

Como A es diferenciable en $r > 0$, un intervalo sin extremos, sólo puede tener un valor mínimo donde la primera derivada es cero.

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dr} &= 4\pi r - \frac{2000}{r^2} \\ 0 &= 4\pi r - \frac{2000}{r^2} && \text{Hacer } dA/dr = 0. \\ 4\pi r^3 &= 2000 && \text{Multiplicar por } r^2. \\ r &= \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx 5.42 && \text{Resolver para } r. \end{aligned}$$

¿Qué pasa en $r = \sqrt[3]{500/\pi}$?

La segunda derivada

$$\frac{d^2A}{dr^2} = 4\pi + \frac{4000}{r^3}$$

es positiva en todo el dominio de A. Por lo tanto, la gráfica es siempre cóncava hacia arriba y el valor de A en $r = \sqrt[3]{500/\pi}$ es un mínimo absoluto.

El valor correspondiente de h (después de realizar algunas operaciones algebraicas) es

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 2r.$$

La lata con capacidad para 1 litro que usa la menor cantidad de material tiene una altura igual al diámetro, en este caso, con $r \approx 5.42$ cm y $h \approx 10.84$ cm. ■

Pasos para la resolución de problemas aplicados de optimización

1. *Leer el problema*. lea el problema hasta que lo entienda. ¿Qué datos se dan? ¿Cuál es la cantidad desconocida que hay que optimizar?
2. *Hacer un dibujo*: identifique con una etiqueta cualquier parte que pueda ser importante para el problema.
3. *Introducir variables*: haga una lista de las relaciones que encuentre en el dibujo y en el problema como una ecuación o una expresión algebraica, e identifique la variable desconocida.
4. *Escribir una ecuación para la cantidad desconocida*: de ser posible, exprese la incógnita como función de una sola variable o en dos ecuaciones con dos incógnitas. Para ello puede ser necesaria una manipulación considerable.
5. *Examinar los puntos críticos y los extremos del dominio de la incógnita*: use la información con que cuenta acerca de la forma de la gráfica de la función. Emplee la primera y segunda derivadas para identificar y clasificar los puntos críticos de la función.

Ejemplos de matemáticas y física

EJEMPLO 3 Rectángulos inscribibles

Un rectángulo se inscribe en un semicírculo de radio 2. ¿Cuál es el área máxima que puede tener el rectángulo y cuáles son sus dimensiones?

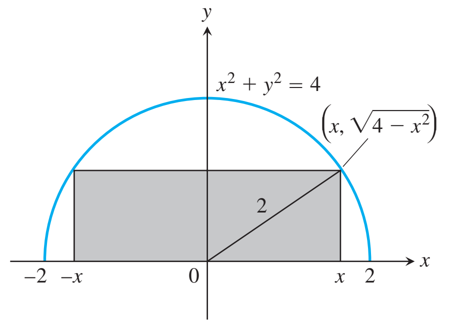


FIGURA 4.36 El rectángulo inscrito en el semicírculo del ejemplo 3.

Solución Sean $(x, \sqrt{4 - x^2})$ las coordenadas del vértice del rectángulo obtenido al colocar el círculo y el rectángulo en el plano coordenado (figura 4.36). La longitud, altura y área del rectángulo pueden expresarse en términos de la posición x del vértice inferior derecho:

$$\text{Longitud: } 2x, \qquad \text{Altura: } \sqrt{4 - x^2}, \qquad \text{Área: } 2x \cdot \sqrt{4 - x^2}.$$

Observe que los valores de x tienen que estar en el intervalo $0 \le x \le 2$, donde está el vértice seleccionado del rectángulo.

Nuestro objetivo es encontrar el valor máximo absoluto de la función

$$A(x) = 2x\sqrt{4 - x^2}$$

en el dominio $[0, 2]$.

La derivada

$$\frac{dA}{dx} = \frac{-2x^2}{\sqrt{4 - x^2}} + 2\sqrt{4 - x^2}$$

no está definida en $x = 2$ y es igual a cero cuando

$$\begin{aligned} \frac{-2x^2}{\sqrt{4 - x^2}} + 2\sqrt{4 - x^2} &= 0 \\ -2x^2 + 2(4 - x^2) &= 0 \\ 8 - 4x^2 &= 0 \\ x^2 = 2 \text{ o } x &= \pm\sqrt{2}. \end{aligned}$$

De los dos ceros, $x = \sqrt{2}$ y $x = -\sqrt{2}$, solamente $x = \sqrt{2}$ está en el interior del dominio de A y en la lista de puntos críticos. Los valores de A en los extremos del intervalo y en este punto crítico son

Valor en el punto crítico: $A\left(\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}\sqrt{4 - 2} = 4$

Valores en los extremos de los intervalos: $A(0) = 0, \quad A(2) = 0.$

El área tiene un valor máximo igual a 4 cuando el rectángulo tiene $\sqrt{4 - x^2} = \sqrt{2}$ unidades de altura y $2x = 2\sqrt{2}$ unidades de largo. ■

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

Willebrord Snell van Royen (1580–1626)

EJEMPLO 4 Principio de Fermat y ley de Snell

La rapidez de la luz depende del medio por el que viaja y, en general, es más lenta en medios densos.

En óptica, el principio de Fermat establece que la luz viaja a lo largo de la trayectoria más rápida entre un punto y otro. Encuentre la trayectoria que seguirá un rayo de luz para ir del punto A, en un medio donde la rapidez de la luz es c_1, a un punto B en un segundo medio donde la rapidez de la luz es c_2.

Solución Como la luz viaja de A a B siguiendo la ruta más rápida, buscamos una trayectoria que minimice el tiempo de viaje. Supongamos que A y B están en el plano xy, y que la línea que separa los dos medios es el eje x (figura 4.37).

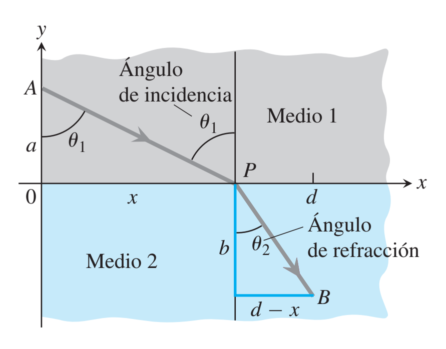


FIGURA 4.37 Un rayo de luz refractado (desviado de su trayectoria) conforme pasa de un medio a un medio más denso (ejemplo 4).

En un medio uniforme, donde la rapidez de la luz permanece constante, "el menor tiempo" significa "la trayectoria más corta", y el rayo de luz seguirá una línea recta. De esta manera, la trayectoria A-B consistirá de un segmento de recta de A en un punto frontera P, seguido por otro segmento de recta de P a B. La distancia es igual al producto del tiempo por la rapidez; así,

$$\text{Tiempo} = \frac{\text{distancia}}{\text{rapidez}}.$$

El tiempo que requiere la luz para viajar de A a P es

$$t_1 = \frac{AP}{c_1} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{c_1}.$$

De P a B el tiempo es

$$t_2 = \frac{PB}{c_2} = \frac{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}{c_2}.$$

El tiempo de A a B es la suma de ambas trayectorias:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}{c_2}.$$

Esta ecuación expresa a t como una función diferenciable de x, cuyo dominio es $[0, d]$. Queremos encontrar el valor mínimo absoluto de t en este intervalo cerrado. Encontramos la derivada

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{c_1\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{d - x}{c_2\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}.$$

En términos de los ángulos ángulos θ_1 y θ_2 en la figura 4.37,

$$\frac{dt}{dx} = \frac{\operatorname{sen}\theta_1}{c_1} - \frac{\operatorname{sen}\theta_2}{c_2}.$$

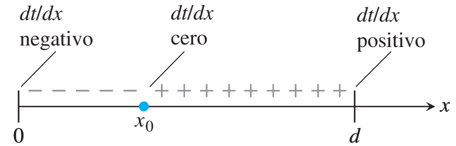


FIGURA 4.38 El patrón de signos de dt/dx del ejemplo 4.

Si restringimos x al intervalo $0 \leq x \leq d$, tiene derivada negativa en $x = 0$ y derivada positiva en $x = d$. De acuerdo con el teorema del valor intermedio para derivadas (sección 3.1), existe un punto $x_0 \in [0, d]$ donde $dt/dx = 0$ (figura 4.38). Solo hay uno de tales puntos, porque dt/dx es una función creciente de x (ejercicio 54). En este punto

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{c_1} = \frac{\operatorname{sen}\theta_2}{c_2}.$$

Esta ecuación es la **ley de Snell** o **ley de refracción**, y es un principio importante en la teoría de la óptica, toda vez que describe la trayectoria que sigue un rayo de luz. ■

Ejemplos de economía

En estos ejemplos señalamos dos maneras en las que el cálculo hace una contribución a la economía. La primera tiene que ver con la maximización de la utilidad. La segunda tiene que ver con la minimización del costo promedio.

Supongamos que

$$r(x) = \text{ingreso por vender } x \text{ artículos}$$

$$c(x) = \text{costo por producir } x \text{ artículos}$$

$$p(x) = r(x) - c(x) = \text{utilidad por producir y vender } x \text{ artículos}.$$

El **ingreso marginal,** el **costo marginal** y la **utilidad marginal** por producir y vender x artículos son

$$\frac{dr}{dx} = \text{ingreso marginal}$$

$$\frac{dc}{dx} = \text{costo marginal}$$

$$\frac{dp}{dx} = \text{utilidad marginal}$$

La primera observación se refiere a la relación de p con estas derivadas.

Si $r(x)$ y $c(x)$ son funciones diferenciables para toda $x > 0$, y si $p(x) = r(x) - c(x)$ tiene un valor máximo, se alcanza en un nivel de producción en el que $p'(x) = 0$. Como $p'(x) = r'(x) - c'(x)$, $p'(x) = 0$ implica que

$$r'(x) - c'(x) = 0 \qquad \text{o} \qquad r'(x) = c'(x).$$

Por lo tanto,

> En un nivel de producción que genere una utilidad máxima, el ingreso marginal es igual al costo marginal (figura 4.39).

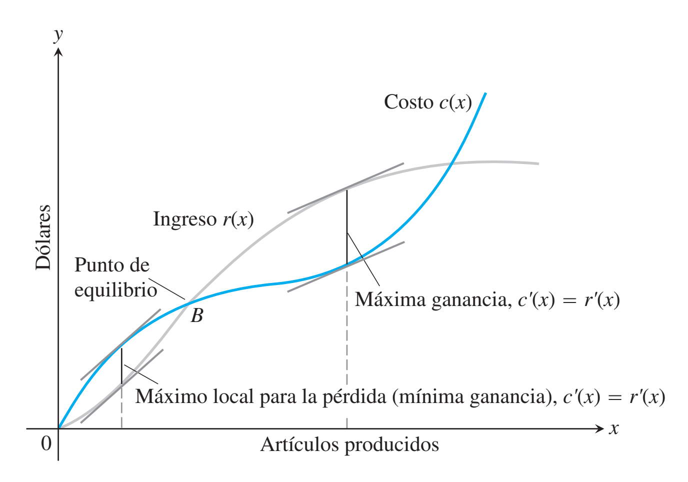


FIGURA 4.39 La gráfica de una función de costo típica empieza siendo cóncava hacia abajo y después se vuelve cóncava hacia arriba. Cruza la curva de ingreso en el punto de equilibrio *B*. A la izquierda de *B*, la compañía opera con pérdida. A la derecha, la compañía opera con ganancia, alcanzando la máxima ganancia donde $c'(x) = r'(x)$. Más a la derecha, el costo excede el ingreso (quizás debido a una combinación de elevación de mano de obra, costo marginal y saturación del mercado), y los niveles de producción se vuelven nuevamente improductivos.

EJEMPLO 5 Maximización de la utilidad

Supongamos que $r(x) = 9x$ y $c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$, donde x representa miles de unidades. ¿Hay un nivel de producción que maximice la utilidad? De ser así, ¿cuál es?

Solución Observe que $r'(x) = 9$ y $c'(x) = 3x^2 - 12x + 15$.

$$3x^2 - 12x + 15 = 9 \qquad \text{Haga } c'(x) = r'(x).$$

$$3x^2 - 12x + 6 = 0$$

Las dos soluciones de la ecuación cuadrática son

$$x_1 = \frac{12 - \sqrt{72}}{6} = 2 - \sqrt{2} \approx 0.586 \qquad \text{y}$$

$$x_2 = \frac{12 + \sqrt{72}}{6} = 2 + \sqrt{2} \approx 3.414.$$

Los niveles de producción que permitirían maximizar la utilidad son $x \approx 0.586$ miles de unidades, o $x \approx 3.414$ miles de unidades. La segunda derivada de $p(x) = r(x) - c(x)$ es $p''(x) = -c''(x)$, ya que $r''(x)$ es cero en todas partes. En consecuencia, $p''(x) = 6(2 - x)$, que es negativo en $x = 2 + \sqrt{2}$ y positivo en $x = 2 - \sqrt{2}$. De acuerdo con la prueba de la segunda derivada, la utilidad máxima se alcanza cerca de $x = 3.414$ (donde el ingreso excede los costos), y la pérdida máxima se da cerca de $x = 0.586$. En la figura 4.40 se muestra la gráfica de $r(x)$. ■

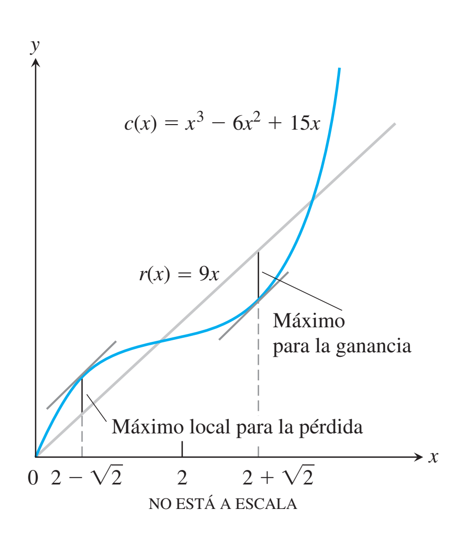


FIGURA 4.40 Las curvas de costo e ingreso para el ejemplo 5.

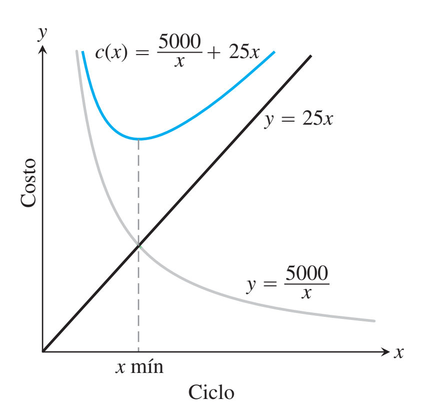


FIGURA 4.41 El costo promedio diario $c(x)$ es la suma de una hipérbola y una función lineal (ejemplo 6).

EJEMPLO 6 Minimización de costos

Un fabricante de armarios usa madera de caoba para producir 5 muebles al día. La entrega de un contenedor de madera cuesta \$5000, mientras que el almacenaje del material cuesta \$10 diarios por unidad almacenada, donde una unidad es la cantidad de material que se necesita para producir un mueble. ¿Cuánto material tiene que ordenar el fabricante cada vez, y con qué frecuencia se debe entregar el material para minimizar su costo promedio diario en el ciclo de producción entre entregas?

Solución Si el fabricante pide que se le entregue la madera cada x días, deberá ordenar $5x$ unidades para tener suficiente material para ese ciclo entre entregas. La cantidad almacenada *promedio* es aproximadamente la mitad de la cantidad entregada, o $5x/2$. Así, el costo de entrega y almacenaje por cada ciclo es, aproximadamente,

$$\text{Costo por ciclo} = \text{costo de entrega} + \text{costo de almacenaje}$$

$$\text{Costo por ciclo} = \underbrace{5000}_{\substack{\text{costo}\\\text{deliberado}}} + \underbrace{\left(\frac{5x}{2}\right)}_{\substack{\text{cantidad}\\\text{almacenada}\\\text{promedio}}} \cdot \underbrace{x}_{\substack{\text{número}\\\text{de días}\\\text{almacenados}}} \cdot \underbrace{10}_{\substack{\text{costo por}\\\text{día de}\\\text{almacenaje}}}$$

Calculamos el *costo promedio diario* $c(x)$ dividiendo el costo por ciclo entre el número de días x del ciclo (vea la figura 4.41).

$$c(x) = \frac{5000}{x} + 25x, \qquad x > 0.$$

Cuando $x \to 0$ y cuando $x \to \infty$, el costo promedio diario se hace grande. De esta manera, esperamos que exista un mínimo, pero ¿en dónde? Nuestro objetivo es determinar el número de días x entre entregas que proporciona el costo mínimo absoluto.

Encontramos los puntos críticos determinando el lugar en donde la derivada es igual a cero:

$$c'(x) = -\frac{5000}{x^2} + 25 = 0$$
$$x = \pm\sqrt{200} \approx \pm 14.14.$$

De los dos puntos críticos, solamente $\sqrt{200}$ está en el dominio de $c(x)$. El valor del punto crítico del costo promedio diario es

$$c\left(\sqrt{200}\right) = \frac{5000}{\sqrt{200}} + 25\sqrt{200} = 500\sqrt{2} \approx \$707.11.$$

Observe que $c(x)$ está definido en el intervalo abierto $(0, \infty)$ con $c''(x) = 10000/x^3 > 0$. Así, existe un mínimo absoluto en $x = \sqrt{200} \approx 14.14$ días.

El fabricante deberá programar una entrega de $5(14) = 70$ unidades de madera de caoba cada 14 días. ■

En los ejemplos 5 y 6 permitimos que el número de artículos x sea cualquier número real positivo. En la realidad, por lo general esto sólo tiene sentido cuando x es entero positivo (o cero). Si tenemos que redondear nuestras respuestas, ¿debemos hacerlo hacia arriba o hacia abajo?

EJEMPLO 7 Sensibilidad del costo mínimo

En el caso de la solución del ejemplo 6, ¿debemos redondear el número de días entre las entregas hacia arriba o hacia abajo?

Solución El costo promedio diario se incrementará alrededor de \$0.03 si redondeamos hacia abajo, de 14.14 a 14 días:

$$c(14) = \frac{5000}{14} + 25(14) = \$707.14$$

y

$$c(14) - c(14.14) = \$707.14 - \$707.11 = \$0.03.$$

Por otro lado, $c(15) = \$708.33$, y nuestro costo se incrementaría $\$708.33 - \$707.11$ $\$1.22$ si redondeáramos hacia arriba. En consecuencia, es mejor que redondeemos x hacia abajo, a 14 días. ■

EJERCICIOS 4.5

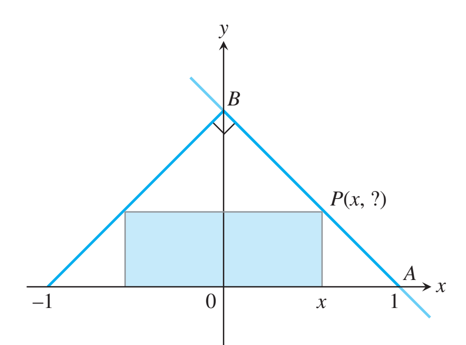
Siempre que se quiera maximizar o minimizar una función de una sola variable, es importante dibujar la gráfica sobre el dominio que sea apropiado para el problema a resolver. La gráfica le proporcionará valiosa información antes de hacer los cálculos, y le ofrecerá una herramienta visual para entender su respuesta.

Aplicaciones en geometría

1. **Minimización de un perímetro** ¿Cuál es el menor perímetro posible para un rectángulo cuya área es 16 pulg.^{2}, y cuáles son sus dimensiones?

2. Demuestre que entre todos los rectángulos con perímetro de 8 m, el de mayor área es un cuadrado.

3. La figura muestra un rectángulo inscrito en un triángulo rectángulo isósceles, cuya hipotenusa mide 2 unidades de largo.
   a. Exprese la coordenada y de P en términos de x. (*Sugerencia:* Escriba una ecuación para la recta AB).
   b. Exprese el área del rectángulo en términos de x.
   c. ¿Cuál es la mayor área posible del rectángulo y cuáles son sus dimensiones?



4. Un rectángulo tiene su base en el eje x y sus dos vértices superiores sobre la parábola $y = 12 - x^2$. ¿Cuál es la mayor área posible del rectángulo, y cuáles son sus dimensiones?

5. Usted quiere hacer una caja rectangular abierta con una cartulina de 8 por 15 pulgadas, cortando en las esquinas cuadrados congruentes y doblando hacia arriba los lados. ¿Cuáles son las dimensiones de la caja que puede hacer de esta manera con el mayor volumen, y cuál es ese volumen?

6. Está planeando cerrar la esquina del primer cuadrante con un segmento de recta de 20 unidades de longitud que va de $(a, 0)$ a $(0, b)$. Demuestre que el área del triángulo encerrado por el segmento es máxima cuando $a = b$.

7. **La mejor cerca** Una parcela rectangular en una granja tendrá límites, por un lado, por un río, y por los otros tres mediante una cerca electrificada con un solo alambre. Si se cuenta sólo con 800 m de alambre, ¿cuál es la mayor área que puede ocupar la parcela y cuáles son sus dimensiones?

8. **La cerca más corta** Un sembradío rectangular de chícharos mide 216 m^2; se quiere encerrar con una cerca, y dividirlo en dos partes iguales mediante otra cerca paralela a uno de los lados. ¿Qué dimensiones del rectángulo exterior requieren la menor longitud total de la cerca? ¿Cuánta cerca se requerirá?

9. **Diseño de un tanque** La fundidora en donde usted trabaja ha sido contratada para diseñar y construir un tanque rectangular de acero, de base cuadrada, abierto por arriba y con una capacidad de 500 pies^3. El tanque se tiene que hacer soldando placas delgadas de acero a lo largo de sus bordes. Como ingeniero de producción, su trabajo consiste en determinar las dimensiones de la base y la altura que harán que el tanque pese lo menos posible.
   a. ¿Qué dimensiones le dirá al taller que use?
   b. Describa brevemente cómo tomó en cuenta el peso en su cálculo.

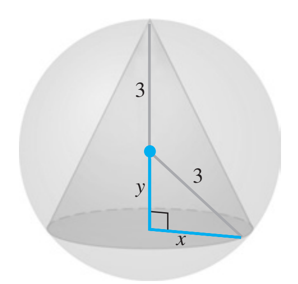
10. **Recolección de agua de lluvia** Se quiere construir un tanque rectangular abierto por arriba de 1125 pies^3 con base cuadrada de x pies de lado y y pies de profundidad, con su parte superior al nivel del piso, para recoger agua de lluvia. El costo asociado con el tanque involucra no sólo el material que se usará para construirlo, sino también el costo de excavación proporcional al producto xy.
    a.

$$c = 5(x^2 + 4xy) + 10xy,$$

¿qué valores de x y y lo minimizarán?
    b. Dé un escenario posible para la función de costo del inciso (a).

11. Diseño de un cartel Se está diseñando un cartel rectangular cuya área de impresión es 50 pulg.^{2}, con márgenes superior e inferior de 4 pulgadas y márgenes laterales de 2 pulgadas cada uno. ¿Qué dimensiones debe tener el cartel para minimizar la cantidad de papel usada?

12. Encuentra el volumen del cono circular recto más grande que se puede inscribir en una esfera de radio 3.



13. Dos lados de un triángulo tienen longitudes a y b, y el ángulo entre ellos es θ. ¿Qué valor de θ maximizará el área del triángulo? (*Sugerencia:* $A = (1/2)ab \operatorname{sen} \theta$).

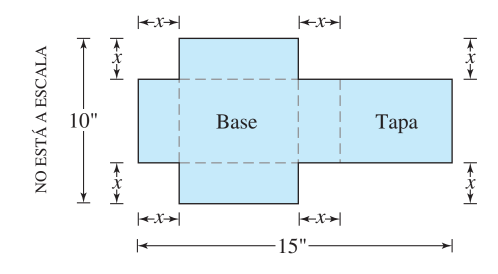
14. Diseño de una lata ¿Cuáles son las dimensiones de una lata abierta cilíndrica circular recta que puede contener un volumen de 1000 cm^3? Compare el resultado con el del ejemplo 2.

15. Diseño de una lata Usted está diseñando una lata cilíndrica circular recta de 1000 cm^3 y debe tomar en cuenta el desperdicio. No hay desperdicio al cortar el aluminio del lado, pero las tapas superior e inferior de radio r serán cortadas de cuadrados que miden $2r$ unidades de lado. La cantidad total de aluminio usado para la lata será

$$A = 8r^2 + 2\pi rh$$

en lugar de $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ del ejemplo 2. En el ejemplo 2 la razón de h a r para la lata más económica era 2 a 1. ¿Cuál es la razón ahora?

T **16. Diseño de una caja con tapa** Una pieza de cartulina mide 10 por 15 pulgadas. Como se muestra en la figura, se han quitado dos cuadrados en las esquinas del lado que mide 10 pulgadas. Además, se han quitado dos rectángulos de las otras dos esquinas, de manera que las cejas puedan doblarse para formar una cada rectangular con tapa.



a. Escriba una fórmula para el volumen $V(x)$ de la caja.

b. Encuentre el dominio de V para la situación del problema, y grafique V en su dominio.

c. Use un método gráfico para encontrar el volumen máximo y el valor de x que lo da.

d. Confirme analíticamente el resultado que obtuvo en el inciso (c).

T **17. Diseño de una maleta** Se dobla en dos una hoja de cartulina de 24 por 36 pulgadas para formar un rectángulo de 24 por 18 pulgadas, como se muestra en la figura siguiente. Después se cortan, de las esquinas del rectángulo doblado, cuatro cuadrados congruentes de longitud x por lado. Se desdobla la hoja y las seis cejas se doblan hacia arriba para formar una caja con lados y una tapa.

a. Escriba una fórmula para el volumen $V(x)$ de la caja.

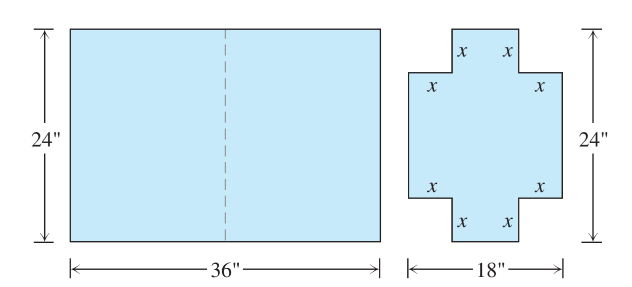
b. Encuentre el dominio de V para la situación del problema, y grafique V en su dominio.

c. Use un método gráfico para encontrar el volumen máximo y el valor de x que lo da.

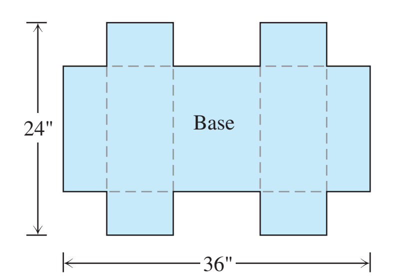
d. Confirme analíticamente el resultado que obtuvo en el inciso (c).

e. Encuentre el valor de x que da un volumen de 1120 pulg.^{3}.

f. Escriba un párrafo describiendo los temas que surgieron en el inciso (b).



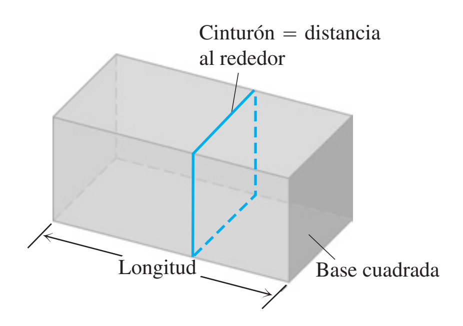
Después la hoja se desdobla.



18. Se quiere inscribir un rectángulo bajo el arco de la curva $y = 4\cos(0.5x)$ de $x = -\pi$ a $x = \pi$. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo de área mayor y cuál es esta área?

19. Encuentre las dimensiones de un cilindro circular recto de volumen máximo que se puede inscribir en una esfera de radio 10 cm. ¿Cuál es el volumen máximo?

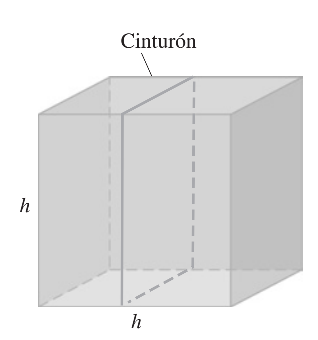
20. a. El servicio postal de Estados Unidos aceptará una caja para envío doméstico si la suma de su longitud y su "cinturón" (es decir, la distancia alrededor) no excede 108 pulgadas. ¿Qué dimensiones tendrá una caja con base cuadrada y el mayor volumen posible?



b. Grafique el volumen de una caja de 108 pulgadas (longitud más “cinturón” igual a 108 pulgadas) como una función de la longitud, y compare lo que ve con la respuesta que dio al inciso (a).

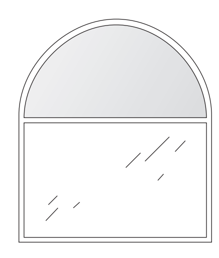
21. (*Continuación del ejercicio 20.*)

a. Suponga que en lugar de tener una caja con base cuadrada tiene una caja de lados cuadrados, de manera que sus dimensiones son h por h por w y el “cinturón” es $2h + 2w$. En ese caso, ¿qué dimensiones de la caja darán el mayor volumen?



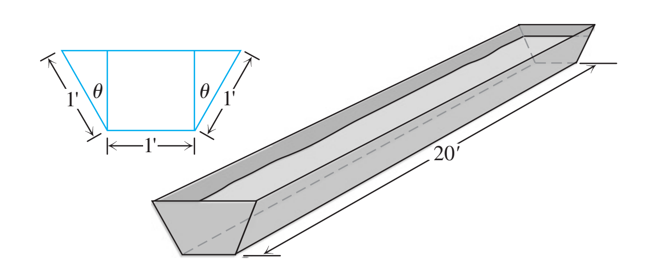
b. Grafique el volumen como una función de h, y compare lo que ve con la respuesta que dio al inciso (a).

22. Una ventana tiene forma de rectángulo, y está coronada con un semicírculo. El rectángulo es de vidrio claro, mientras que el semicírculo es de vidrio de color, y transmite solamente la mitad de luz por unidad de área en comparación con el vidrio claro. El perímetro total es fijo. Encuentre las proporciones de la ventana que admitan la mayor cantidad de luz. Desprecie el espesor del marco.



23. Se quiere construir un silo (sin incluir la base) en forma de cilindro rematado por una semiesfera. El costo de construcción por unidad cuadrada del área superficial es dos veces mayor para la semiesfera que para la pared cilíndrica. Determine las dimensiones que se deben usar si el volumen es fijo y el costo de construcción debe mantenerse al mínimo. Desprecie el espesor del silo y los desperdicios en la construcción.

24. El comedero de la figura se debe hacer con las dimensiones que se muestran. Solamente se puede variar el ángulo θ. ¿Qué valor de θ maximizará el volumen del comedero?

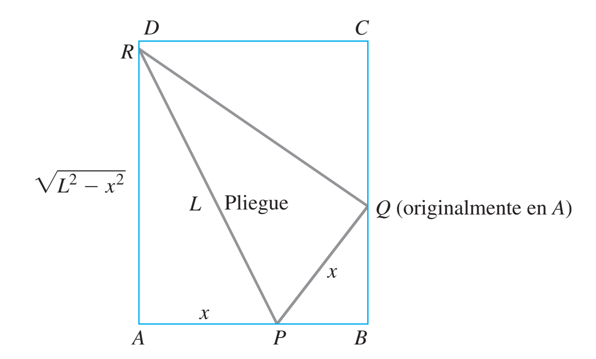


25. Doblado de papel Se coloca una hoja de papel de 8.5 por 11 pulgadas sobre una superficie plana. Una de las esquinas se coloca sobre el lado opuesto más largo, como se muestra en la figura, y se mantiene ahí conforme se aplana el papel suavemente. El problema es hacer la longitud del pliegue tan pequeña como sea posible. Llamamos L a la longitud. Inténtelo con papel.

a. Demuestre que $L^2 = 2x^3/(2x - 8.5)$.

b. ¿Qué valor de x minimiza L^2?

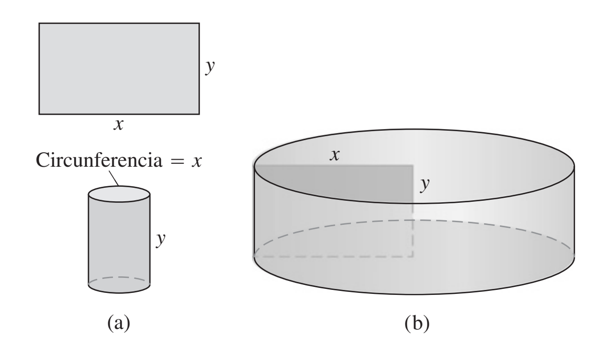
c. ¿Cuál es el valor mínimo de L?



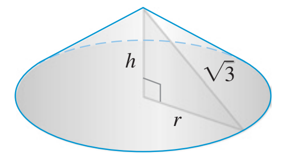
26. Construcción de cilindros Compare las respuestas de los dos problemas de construcción siguientes.

a. Una hoja rectangular de perímetro 36 cm y dimensiones x por y cm se enrolla a manera de cilindro, como muestra la parte (a) de la figura. ¿Qué valores de x y y dan el mayor volumen?

b. La misma hoja se gira alrededor de uno de los lados de longitud y para generar el cilindro que se muestra en la parte (b) de la figura. ¿Qué valores de x y y dan el mayor volumen?



27. Construcción de conos Un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide $\sqrt{3}$ m de largo se gira alrededor de uno de sus catetos para generar un cono circular recto. Encuentre el radio, la altura y el volumen del cono de mayor volumen que se pueda hacer de esta manera.



28. ¿Qué valores de a hacen que $f(x) = x^2 + (a/x)$ tenga

a. un máximo local en $x = 2$?

b. un punto de inflexión en $x = 1$?

29. Demuestre que $f(x) = x^2 + (a/x)$ no puede tener un máximo local para ningún valor de a.

30. ¿Qué valores de a y b hacen que $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ tenga

a. un máximo local en $x = -1$ y un mínimo local en $x = 3$?

b. un mínimo local en $x = 4$ y un punto de inflexión en $x = 1$?

Aplicaciones físicas

31. Movimiento vertical La altura de un objeto que se mueve verticalmente está dada por

$$s = -16t^2 + 96t + 112,$$

con s en pies y t en segundos. Encuentre

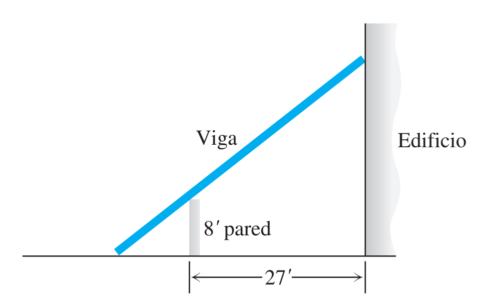
a. la velocidad del objeto cuando $t = 0$

b. su altura máxima y en dónde la alcanza.

c. su velocidad cuando $s = 0$.

32. La ruta más rápida Juana está en una lancha a 2 millas de la orilla y quiere llegar a un pueblo costero que está a 6 millas en línea recta desde el punto de la orilla que es más cercano a la lancha. Ella puede remar a 2 millas/hora y caminar a 5 millas/hora. ¿Dónde debe dejar la lancha para alcanzar el pueblo en el tiempo mínimo?

33. La viga más corta La pared de 8 pies que se muestra aquí está a 27 pies del edificio. Encuentre la viga recta de longitud más corta que alcance el lado del edificio desde el piso que está al otro lado de la pared.

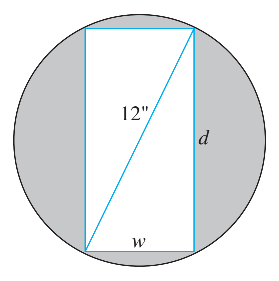


T **34. Resistencia de una viga** La resistencia S de una viga de madera rectangular es proporcional a su ancho por el cuadrado de su espesor. (Vea la figura siguiente).

a. Encuentre las dimensiones de la viga más resistente que se puede cortar de un tronco cilíndrico de 12 pulgadas de diámetro.

b. Grafique S como una función del ancho w de la viga, aceptando que la constante de proporcionalidad es $k = 1$. Compare lo que ve con la respuesta que dio al inciso (a).

c. En la misma pantalla, grafique S como función del espesor d de la viga, tomando nuevamente $k = 1$. Compare lo que ve en ambas gráficas con la respuesta que dio en el inciso (a). ¿Qué efecto tendría cambiar k por algún otro valor? Inténtelo.



T **35. Rigidez de una viga** La rigidez S de una viga rectangular es proporcional a su ancho por el cubo de su espesor.

a. Encuentre las dimensiones de la viga más rígida que se puede cortar de un tronco cilíndrico de 12 pulgadas de diámetro.

b. Grafique S como una función del ancho w de la viga, aceptando que la constante de proporcionalidad es $k = 1$. Compare el resultado con la respuesta que dio al inciso (a).

c. En la misma pantalla, grafique S como función del espesor d de la viga, tomando nuevamente $k = 1$. Compare lo que ve en ambas gráficas con la respuesta que dio en el inciso (a). ¿Qué efecto tendría cambiar k por algún otro valor? Inténtelo.

36. Movimiento sobre una recta Las posiciones de dos partículas en el eje $s_1 = \operatorname{sen} t$ y $s_2 = \operatorname{sen}(t + \pi/3)$, con s_1 y s_2 en metros y t en segundos.

a. ¿En qué momento(s) del intervalo $0 \le t \le 2\pi$ se encuentran las dos partículas en el mismo lugar?

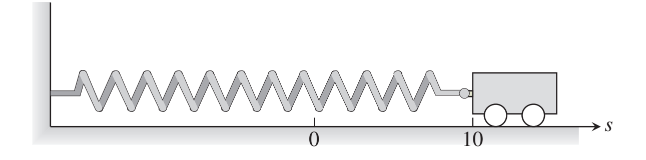
b. ¿Cuál es la máxima distancia a la que están separadas las partículas?

c. ¿Cuándo, la distancia entre las partículas cambia más rápidamente en el intervalo $0 \le t \le 2\pi$?

37. Carrito sin fricción Un carrito sin fricción está atado a la pared por un resorte, y es jalado 10 cm de su posición de reposo y soltado en el tiempo $t = 0$ para que ruede hacia adelante y hacia atrás durante 4 segundos. Su posición en el tiempo $s = 10 \cos \pi t$.

a. ¿Cuál es la rapidez máxima del carrito? ¿Cuándo alcanza el carrito esa rapidez? ¿En dónde está en ese momento? ¿Cuál es la magnitud de la aceleración en ese momento?

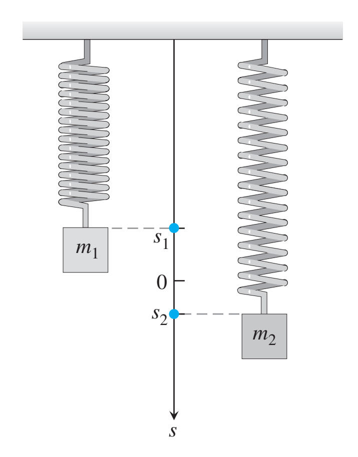
b. ¿En dónde está el carrito cuando la magnitud de la aceleración es máxima? ¿Cuál es la rapidez del carrito en ese momento?



38. Dos masas cuelgan de igual número de resortes, una al lado de la otra, y tienen posiciones $s_1 = 2 \operatorname{sen} t$ y $s_2 = \operatorname{sen} 2t$, respectivamente.

a. ¿En qué tiempos, en el intervalo $0 < t$, las masas están una frente a la otra? (*Sugerencia:* $\operatorname{sen} 2t = 2 \operatorname{sen} t \cos t$).

b. ¿En qué momento del intervalo $0 \leq t \leq 2\pi$ se da la máxima distancia vertical entre las masas? ¿Cuál es esa distancia? (*Sugerencia:* $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$).



39. Distancia entre dos barcos Al mediodía, el barco *A* estaba 12 millas náuticas al norte del barco *B*. El barco *A* va navegando hacia el sur a 12 nudos (millas náuticas por hora; una milla náutica es igual a 2000 yardas), y continúa haciéndolo todo el día. El barco *B* va navegando hacia el este a 8 nudos, y continúa haciéndolo todo el día.

a. Empiece a contar el tiempo $t = 0$ al mediodía, y exprese la distancia s entre los barcos como una función de t.

b. ¿Qué tan rápido está cambiando la distancia entre los barcos al mediodía? ¿Qué tan rápido lo hace una hora después?

c. La visibilidad ese día era de 5 millas náuticas. ¿Los tripulantes de los barcos pudieron verse alguna vez?

T **d.** Grafique juntas s y ds/dt como funciones de t para $-1 \leq t \leq 3$, usando diferentes colores, si es posible. Compare las gráficas y lo que ve con las respuestas que dio en los incisos (b) y (c).

e. Aparentemente, la gráfica de ds/dt podría tener una asíntota horizontal en el primer cuadrante. Esto a su vez sugiere que ds/dt se aproxima a un valor límite cuando $t \to \infty$. ¿Cuál es ese valor? ¿Cuál es su relación con la rapidez individual de cada barco?

40. El principio de Fermat en óptica En óptica, el principio de Fermat establece que la luz siempre viaja de un punto a otro a lo largo de la trayectoria que minimiza el tiempo de recorrido. La luz de una fuente *A* es reflejada por un espejo plano a un punto de recepción *B*, como se muestra en la figura. Muestre que para que la luz obedezca el principio de Fermat, el ángulo de incidencia debe ser igual al ángulo de reflexión, ambos medidos desde la recta normal de la superficie reflejante. (Este resultado se puede obtener sin cálculo. Hay un argumento puramente geométrico, que usted pudiera preferir).

Normal
Luz recibida
Fuente de luz
Ángulo de incidencia
Ángulo de reflexión
A
B
θ_1
θ_2
Superficie reflejante

41. Peste del estaño Cuando el estaño metálico se mantiene debajo de 13.2°C, se vuelve quebradizo y se desmorona en un polvo gris. Tarde o temprano, los objetos de estaño se deshacen espontáneamente en este polvo gris si se mantienen en climas fríos durante años. Los europeos, que veían desmoronarse las flautas de estaño de los órganos de sus iglesias llamaban a este fenómeno la *peste del estaño*, porque parecía contagiosa, y de hecho lo era, ya que este polvo gris es un catalizador para su propia formación.

En el caso de una reacción química, un *catalizador* es una sustancia que controla la rapidez de reacción sin hacer ningún cambio permanente en ella. Una *reacción autocatalítica* es aquella cuyo producto es un catalizador para su propia formación. Tal reacción puede proceder despacio al principio si la cantidad de catalizador presente es pequeña, y despacio nuevamente al final, cuando la mayoría de la sustancia original ha sido usada. Pero, entre ambas fases, cuando tanto la sustancia como su producto catalizador son abundantes, la reacción procede a un ritmo más rápido.

En algunos casos, es razonable aceptar que la rapidez $v = dx/dt$ de reacción es proporcional a ambos, a la cantidad de sustancia original presente y a la cantidad del producto. Esto es, si v se puede considerar como una función sólo de x, y

$$v = kx(a - x) = kax - kx^2,$$

donde

$x =$ la cantidad del producto

$a =$ la cantidad inicial de la sustancia

$k =$ una constante positiva

¿Para qué valores de x la rapidez alcanza su máximo? ¿Cuál es el valor máximo de v?

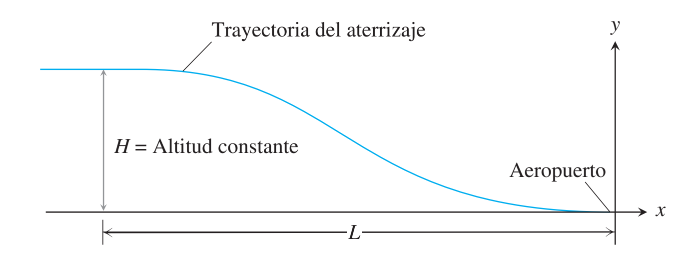
42. Trayectoria de aterrizaje de un aeroplano Un aeroplano está volando a una altitud H cuando empieza a descender hacia una pista de aterrizaje que está horizontal en el suelo, a una distancia L del aeroplano, como se muestra en la figura. Suponga que la trayectoria de aterrizaje del aeroplano es la gráfica de una función polinomial cúbica $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, donde $y(-L) = H$ y $y(0) = 0$.

a. ¿Qué es dy/dx en $x = 0$?

b. ¿Qué es dy/dx en $x = -L$?

c. Use los valores de dy/dx en $x = 0$ y $x = -L$ para probar que $y(0) = 0$ y $y(-L) = H$

$$y(x) = H\left[2\left(\frac{x}{L}\right)^3 + 3\left(\frac{x}{L}\right)^2\right].$$



Negocios y economía

43. Fabricar y distribuir mochilas cuesta c dólares cada una. Si cada mochila se vende en x dólares, el número vendido está dado por

$$n = \frac{a}{x - c} + b(100 - x),$$

donde a y b son constantes positivas. ¿Qué precio de venta dará la máxima utilidad?

44. Usted está a cargo de un servicio de recorridos turísticos que ofrece las siguientes tarifas:

a. $200 por persona si van 50 personas al recorrido (el número mínimo para contratar sus servicios).

b. Por cada persona adicional, hasta un máximo de 80 personas en total, la tarifa por persona se reduce $2.

El costo del recorrido es de $6000 (un costo fijo) más $32 por persona. ¿Cuántas personas deben contratarlo para maximizar su utilidad?

45. La fórmula Wilson para determinar el tamaño del lote Una de las fórmulas para el manejo de inventarios dice que el costo promedio semanal de solicitar, pagar y manejar mercancía es

$$A(q) = \frac{km}{q} + cm + \frac{hq}{2},$$

donde q es la cantidad que se ordena cuando el inventario (de zapatos, radios, escobas, o el artículo que sea) se está agotando, k es el costo de pedir una orden (constante, no importa con cuánta frecuencia se ordene), c es el costo de un artículo (una constante), m es el número de productos vendidos cada semana (una constante) y h es el costo de manejo semanal por artículo (una constante que toma en cuenta factores como espacio, equipo, seguro y seguridad).

a. Usted trabaja como gerente de inventario en una tienda, así que debe encontrar la cantidad que minimizará $A(q)$. ¿Cuál es? (La fórmula que determine en su respuesta se llama *fórmula Wilson para el tamaño del lote*.)

b. Los costos de envío algunas veces dependen del tamaño de la orden. Cuando esto es así, resulta más realista reemplazar k por $k + bq$, la suma de k y un múltiplo constante de q. ¿Cuál es ahora la cantidad más económica para ordenar?

46. Nivel de producción Demuestre que el nivel de producción (si hay alguno) en el que el costo promedio es mínimo en un nivel en donde el costo promedio es igual al costo marginal.

47. Demuestre que si $r(x) = 6x$ y $c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$ son sus funciones de ingreso y costo, lo mejor que puede hacer es alcanzar el punto de equilibrio (es decir, lograr que el ingreso sea igual al costo).

48. Nivel de producción Suponga que $c(x) = x^3 - 20x^2 + 20{,}000x$ es el costo de fabricar x artículos. Encuentre el nivel de producción que minimizará el costo promedio de hacer x artículos.

49. Costo promedio diario Tomando como base el ejemplo 6, suponga que el costo de envío de un material es d, el costo de almacenaje es s dólares por unidad almacenada por día, y la rapidez de producción es p unidades por día.

a. ¿Cuánto material debe entregarse cada x días?

b. Demuestre que

$$\text{costo por ciclo} = d + \frac{px}{2}sx.$$

c. Encuentre el tiempo entre entregas x^* y la cantidad a entregar que minimiza el *costo promedio diario* de entrega y almacenamiento.

d. Demuestre que x^* se alcanza en la intersección de la hipérbola $y = d/x$ y la recta $y = psx/2$.

50. Minimización del costo promedio Suponga que $c(x) = 2000$ $96x + 4x^{3/2}$, donde x representa miles de unidades. ¿Hay un nivel de producción que minimice el costo promedio? De ser así, ¿cuál es?

Medicina

51. Sensibilidad a medicamentos (*Continuación del ejercicio 50 de la sección 3.2.*) Encuentre la cantidad de medicamento para la que el cuerpo es más sensible, determinando el valor M que maximiza la derivada dR/dM, donde

$$R = M^2\left(\frac{C}{2} - \frac{M}{3}\right)$$

y C es una constante.

52. Cómo tosemos

a. Cuando tosemos, la tráquea (tubo de aire) se contrae para incrementar la velocidad del aire de salida, pero, ¿cuánto debe contraerse la tráquea para maximizar la velocidad? ¿Realmente se contrae tanto cuando tosemos?

Bajo hipótesis razonables acerca de la elasticidad de la pared de la tráquea y respecto de cómo se frena el aire cerca de la pared por la fricción, la velocidad promedio del flujo v puede ser modelada mediante la ecuación

$$v = c(r_0 - r)r^2 \text{ cm/seg}, \qquad \frac{r_0}{2} \le r \le r_0,$$

donde r_0 es el radio de la tráquea en reposo, en centímetros, y c es una constante positiva cuyo valor depende en parte de la longitud de la tráquea.

Demuestre que v tiene su valor máximo cuando $r = (2/3)r_0$, esto es, cuando la tráquea está contraída alrededor de 33%. El hecho notable es que las radiografías confirman que la tráquea se contrae alrededor de esa cantidad durante un tosido.

T **b.** Tome r_0 como 0.5 y c como 1, y grafique v en el intervalo $0 \le r \le 0.5$. Compare sus hallazgos con el hecho de que esta v alcanza un valor máximo cuando $r = (2/3)r_0$.

Teoría y ejemplos

53. Una desigualdad para enteros positivos Pruebe que si *a, b, c* y *d* son enteros positivos, entonces

$$\frac{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)(d^2+1)}{abcd} \geq 16.$$

54. La derivada dt/dx del ejemplo 4

a. Demuestre que

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

es una función creciente de x.

b. Pruebe que

$$g(x) = \frac{d-x}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}$$

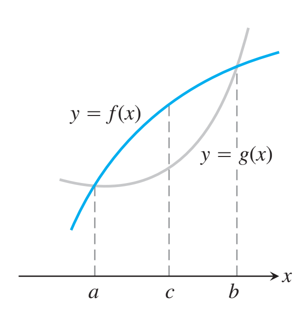
es una función decreciente de x.

c. Demuestre que

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{c_1\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{d-x}{c_2\sqrt{b^2+(d-x)^2}}$$

es una función creciente de x.

55. Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones diferenciables cuyas gráficas aparecen aquí. El punto c es el punto donde la distancia vertical entre las curvas es mayor. ¿Hay algo especial en las tangentes a las dos curvas en c? Justifique su respuesta.



56. Le han pedido determinar si la función $f(x) = 3 + 4\cos x + \cos 2x$ es negativa en algún punto.

a. Explique por qué es suficiente considerar valores de x solamente en el intervalo $[0, 2\pi]$.

b. ¿Es f negativa en algún punto? Explique.

57. a. La función $y = \cot x - \sqrt{2}\csc x$ tiene un valor máximo absoluto en el intervalo $0 < x < \pi$. Encuéntrelo.

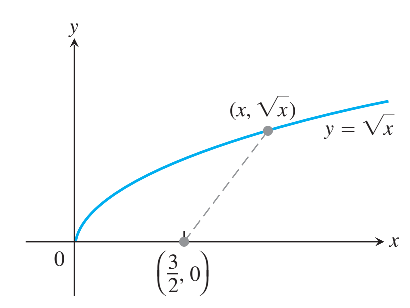
T **b.** Grafique la función y compare lo que ve con la respuesta que dio en el inciso (a).

58. a. La función $y = \tan x + 3\cot x$ tiene un valor mínimo absoluto en el intervalo $0 < x < \pi/2$. Encuéntrelo.

T **b.** Grafique la función y compare lo que ve con la respuesta que dio en el inciso (a).

59. a. ¿Qué tan cerca está la curva $y = \sqrt{x}$ del punto $(3/2, 0)$? (*Sugerencia:* Si minimiza el *cuadrado* de la distancia, puede evitar las raíces cuadradas).

T **b.** Grafique juntas la función distancia y $y = \sqrt{x}$, y reconcilie sus resultados con la respuesta que dio al inciso (a).



60. a. ¿Qué tan cerca está el semicírculo $y = \sqrt{16 - x^2}$ del punto $(1, \sqrt{3})$?

T **b.** Grafique juntas la función distancia y $y = \sqrt{16 - x^2}$, y reconcilie sus resultados con la respuesta que dio al inciso (a).

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

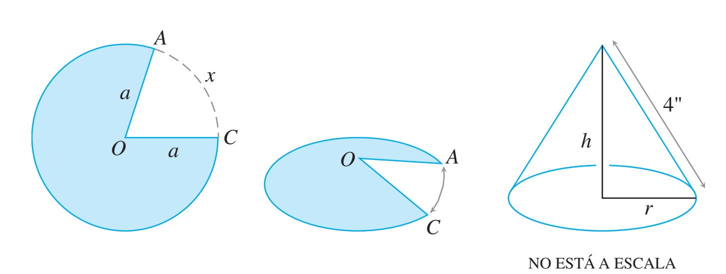
En los ejercicios 61 y 62, tal vez le sería útil un software matemático.

61. Generalización del problema del cono Un cono de altura h y radio r se construye a partir de un disco circular plano de radio a, quitando un sector AOC de longitud de arco x pulgadas y después juntando los bordes OA y OC.

a. Encuentre una fórmula para el volumen V del cono en términos de x y a.

b. Encuentre r y h en el cono de volumen máximo para $a = 4, 5, 6, 8$.

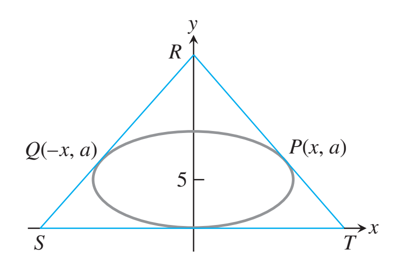
c. Encuentre una relación sencilla entre r y h que sea independiente de a para el cono de volumen máximo. Explique cómo llegó a esta relación.



62. Circunscripción de una elipse Sean $P(x, a)$ y $Q(-x, a)$ dos puntos en la mitad superior de la elipse

$$\frac{x^2}{100} + \frac{(y-5)^2}{25} = 1$$

con centro en $(0, 5)$. Como muestra la figura, se forma un triángulo RST usando las rectas tangentes a la elipse en los puntos P y Q.



a. Demuestre que el área del triángulo es

$$A(x) = -f'(x)\left[x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right]^2,$$

donde $y = f(x)$ es la función que representa la mitad superior de la elipse.

b. ¿Cuál es el dominio de A? Grafique A. ¿Cómo se relacionan las asíntotas de la gráfica con la situación del problema?

c. Determine la altura del triángulo con área mínima. ¿Cómo se relaciona con la coordenada y del centro de la elipse?

d. Repita los incisos (a) a (c) para la elipse

$$\frac{x^2}{C^2} + \frac{(y - B)^2}{B^2} = 1$$

con centro en $(0, B)$. Pruebe que el triángulo tiene área mínima cuando su altura es $3B$.

4.6 Formas indeterminadas y la regla de L'Hôpital

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

Guillaume François Antoine de l'Hôpital (1661–1704)

John Bernoulli descubrió una regla para calcular límites de fracciones cuyos numeradores y denominadores tendían a cero o a $+\infty$. La regla se conoce hoy en día como la **regla de L'Hôpital**, en honor de Guillaume de L'Hôpital, un aristócrata francés que escribió el primer de texto de introducción al cálculo diferencial para principiantes, donde apareció impresa por primera vez dicha regla.

Forma indeterminada 0/0

Si las funciones continuas $f(x)$ y $g(x)$ son cero en $x = a$, entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

no se puede encontrar sustituyendo $x = a$. La sustitución produce $0/0$, una expresión que no tiene sentido, que no podemos evaluar. Usamos $0/0$ como una notación para una expresión conocida como **forma indeterminada**. Algunas veces, pero no siempre, los límites que conducen a formas indeterminadas pueden encontrarse mediante eliminación, reorganización de términos, u otras manipulaciones algebraicas. Esto fue lo que hicimos en el capítulo 2. Como recordará, en la sección 2.4 nos tomó un trabajo considerable encontrar $\lim_{x\to 0} (\operatorname{sen} x)/x$. Pero tuvimos éxito con el límite

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

a partir del cual calculamos derivadas, y que siempre produce el equivalente de $0/0$ cuando sustituimos $x = a$. La regla de L'Hôpital nos permite utilizar nuestro conocimiento respecto de las derivadas para evaluar límites que, de otra manera, nos conducirían a formas indeterminadas.

TEOREMA 6 Regla de L'Hôpital (primera forma)

Supongamos que $f(a) = g(a) = 0$, que $f'(a)$ y $g'(a)$ existen, y que $g'(a) \neq 0$. Entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Precaución

Para aplicar la regla de L'Hôpital a f/g, divida la derivada de f entre la derivada de g. No caiga en la trampa de derivar f/g. El cociente a usar es f'/g', no $(f/g)'$.

Demostración Trabajando hacia atrás a partir de $f'(a))$ y $g'(a)$, que son ellas mismas límites, tenemos

$$\frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim_{x\to a} \dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \lim_{x\to a} \frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-0}{g(x)-0} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}.$$ ■

EJEMPLO 1 Uso de la regla de L'Hôpital

(a) $$\lim_{x\to 0} \frac{3x - \operatorname{sen} x}{x} = \left.\frac{3-\cos x}{1}\right|_{x=0} = 2$$

(b) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \left.\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}}{1}\right|_{x=0} = \frac{1}{2}$$ ■

Algunas veces, después de derivar los nuevos numerador y denominador, ambos son iguales a cero en $x = a$, como vemos en el ejemplo 2. En esos casos, aplicamos una forma más "fuerte" de la regla de L'Hôpital.

TEOREMA 7 Regla de L'Hôpital (forma más fuerte)

Supongamos que $f(a) = g(a) = 0$, que f y g son diferenciables en un intervalo abierto I que contiene a a, y que $g'(x) \neq 0$ en I si $x \neq a$. Entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

suponiendo que el límite del lado derecho existe.

Antes de dar la demostración del teorema 7, consideremos un ejemplo.

EJEMPLO 2 Aplicación de la forma fuerte de la regla de L'Hôpital

(a) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1-x/2}{x^2} \qquad \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1/2)(1+x)^{-1/2}-1/2}{2x} \qquad \text{Todavía } \frac{0}{0}\text{; diferenciar nuevamente}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-(1/4)(1+x)^{-3/2}}{2} = -\frac{1}{8} \qquad \text{No es } \frac{0}{0}\text{; límite encontrado.}$$

(b) $$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} \qquad \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} \qquad \text{Todavía } \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{6x} \qquad \text{Todavía } \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6} \qquad \text{No es } \frac{0}{0}\text{; límite encontrado}$$ ■

La demostración de la forma fuerte de la regla de L'Hôpital se basa en el teorema del valor medio de Cauchy, un teorema del valor medio que involucra dos funciones en lugar de una. Primero probaremos el teorema de Cauchy y después veremos cómo se relaciona con la regla de L'Hôpital.

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

Augustin-Louis Cauchy (1789–1857)

TEOREMA 8 Teorema del valor medio de Cauchy
Supongamos que f y g son funciones continuas en $[a, b]$ y diferenciables en todo (a, b), y supongamos también que $g'(x) \neq 0$ en todo (a, b). Entonces, existe un número c en (a, b) en el que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Demostración Aplicamos dos veces el teorema del valor medio que se estudió en la sección 4.2. Primero lo usamos para probar que $g(a) \neq g(b)$. Si $g(b)$ fuera igual a $g(a)$, entonces el teorema del valor medio nos daría

$$g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = 0$$

para alguna c entre a y b, lo cual no puede pasar, ya que $g'(x) \neq 0$ en (a, b).

A continuación aplicamos el teorema del valor medio a la función

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(x) - g(a)].$$

Esta función es continua y diferenciable donde f y g lo son, y $F(b) = F(a) = 0$. Por lo tanto, existe un número c entre a y b para el que $F'(c) = 0$. Cuando la expresamos en términos de f y g, esta ecuación se convierte en

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g'(c)] = 0$$

o

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

■

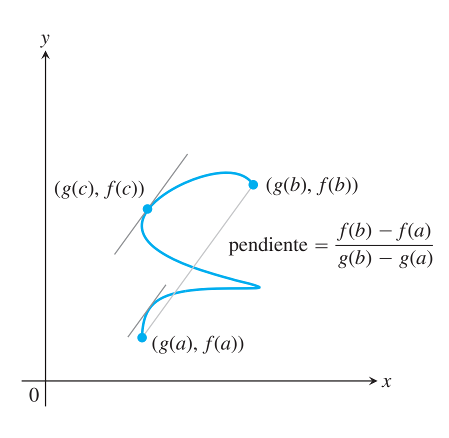


FIGURA 4.42 Existe al menos un valor del parámetro $t = c, a < c < b$, para el que la pendiente de la tangente a la curva en $(g(c), f(c))$ es el mismo que la pendiente de la recta secante que une los puntos $(g(a), f(a))$ y $(g(b), f(b))$

Observe que el teorema del valor medio de la sección 4.2 es el teorema 8 con $g(x) = x$.

El teorema del valor medio de Cauchy tiene una interpretación geométrica para una curva C definida por ecuaciones paramétricas $x = g(t)$ y $y = f(t)$. De acuerdo con la ecuación (2) de la sección 3.5, la pendiente de la curva paramétrica en t está dada por

$$\frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{f'(t)}{g'(t)},$$

de manera que $f'(c)/g'(c)$ es la pendiente de la tangente a la curva cuando $t = c$. La recta secante que une a los dos puntos $(g(a), f(a))$ y $(g(b), f(b))$ en C tiene pendiente

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

El teorema 8 dice que hay un valor del parámetro c en el intervalo (a, b) para el que la pendiente de la tangente a la curva en el punto $(g(c), f(c))$ es la misma que la pendiente de la recta secante que une los puntos $(g(a), f(a))$ y $(g(b), f(b))$. En la figura 4.42 se muestra este resultado geométrico. Observe que puede existir más de un valor c para el parámetro.

Probemos ahora el teorema 7.

Demostración de la forma fuerte de la regla de L'Hôpital Primero establecemos la ecuación del límite para el caso $x \to a^+$. El método casi no necesita cambios para aplicarlo a $x \to a^-$, y la combinación de estos dos casos establece el resultado.

Supongamos que x está a la derecha de a. Entonces $g'(x) \neq 0$, y aplicamos el teorema del valor medio de Cauchy al intervalo cerrado de a a x. Este paso produce un número c entre a y x tal que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}.$$

Pero $f(a) = g(a) = 0$, así

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Cuando x se aproxima a a, c se aproxima a a, ya que siempre está entre a y x. Por lo tanto,

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \to a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

que establece la regla de L'Hôpital para el caso donde x se aproxima a a por arriba. El caso donde x se aproxima a a por abajo se obtiene al aplicar el teorema del valor medio de Cauchy al intervalo cerrado $[x, a], x < a$. ■

Casi todas las funciones que se encuentran en el mundo real y en este libro satisfacen las condiciones de la regla de L'Hôpital.

Uso de la regla de L'Hôpital

Para encontrar

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

mediante la regla de L'Hôpital, continúe derivando f y g tantas veces como sea necesario mientras se siga obteniendo la forma $0/0$ en $x = a$. Pero, en el momento en que una u otra de estas derivadas sea distinta de cero en $x = a$, deje de derivar. La regla de L'Hôpital no se aplica cuando el numerador o el denominador tienen un límite finito distinto de cero.

EJEMPLO 3 Aplicación incorrecta de la forma fuerte de la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x + x^2} \qquad \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{1 + 2x} = \frac{0}{1} = 0 \qquad \text{No es } \frac{0}{0}\text{; límite encontrado.}$$

Hasta aquí, la aplicación es correcta, pero si continuamos derivando en un intento de aplicar la regla de L'Hôpital una vez más, obtenemos

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x + x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{1 + 2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2},$$

que es incorrecto. La regla de L'Hôpital puede aplicarse solamente a límites que den formas indeterminadas, y $0/1$ no es una forma indeterminada. ■

La regla de L'Hôpital también se aplica a límites unilaterales, lo cual resulta claro a partir de la demostración del teorema 7.

Recuerde que ∞ y $+\infty$ significan lo mismo.

EJEMPLO 4 Uso de la regla de L'Hôpital con límites unilaterales

(a) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}$ $\quad \frac{0}{0}$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{2x} = \infty \qquad \text{Positivo para } x > 0.$$

(b) $\lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}$ $\quad \frac{0}{0}$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{\cos x}{2x} = -\infty \qquad \text{Negativo para } x < 0.$$

■

Formas indeterminadas ∞/∞, $\infty \cdot 0$, $\infty - \infty$

Algunas veces cuando intentamos evaluar un límite cuando $x \to a$ sustituyendo $x = a$, obtenemos una expresión ambigua como ∞/∞, $\infty \cdot 0$, o $\infty - \infty$, en lugar de $0/0$. Consideremos primero la forma ∞/∞.

En libros más avanzados se prueba la regla de L'Hôpital aplicada a la forma indeterminada ∞/∞, así como a 0/0. Si $f(x) \to \pm\infty$ y $g(x) \to \pm\infty$ cuando $x \to a$, entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

siempre y cuando el límite de la derecha exista. En la notación $x \to a$, a puede ser finito o infinito. Más aún, $x \to a$ puede reemplazarse por los límites unilaterales $x \to a^+$ o $x \to a^-$.

EJEMPLO 5 Trabajo con la forma indeterminada ∞/∞

Encontrar

(a) $\lim_{x\to \pi/2} \frac{\sec x}{1 + \tan x}$

(b) $\lim_{x\to \infty} \frac{x - 2x^2}{3x^2 + 5x}$

Solución

(a) El numerador y el denominador son discontinuos en $x = \pi/2$, de manera que investigamos los límites unilaterales ahí. Para aplicar la regla de L'Hôpital, podemos escoger como I cualquier intervalo abierto con $x = \pi/2$ como uno de sus extremos.

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{\sec x}{1 + \tan x} \qquad \frac{\infty}{\infty} \text{ por la izquierda}$$

$$= \lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{\sec x \tan x}{\sec^2 x} = \lim_{x\to(\pi/2)^-} \operatorname{sen} x = 1$$

El limite lateral derecho también es 1, con $(-\infty)/(-\infty)$ como la forma indeterminada. Por lo tanto, el límite bilateral es igual a 1.

(b) $\lim_{x\to\infty} \frac{x - 2x^2}{3x^2 + 5x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - 4x}{6x + 5} = \lim_{x\to\infty} \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}.$ ■

Enfoquemos ahora nuestra atención en las formas indeterminadas $\infty \cdot 0$ y $\infty - \infty$. Algunas veces estas formas se pueden manipular algebraicamente para convertirlas en una forma $0/0$ o ∞/∞ Una vez más, no queremos sugerir que $\infty \cdot 0$ o $\infty - \infty$ son un número. Son sólo notaciones para comportamientos funcionales cuando consideramos límites. A continuación se dan ejemplos de cómo deben trabajarse estas formas indeterminadas.

EJEMPLO 6 Trabajo con la forma indeterminada $\infty \cdot 0$

Encontrar

$$\lim_{x \to \infty} \left(x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right)$$

Solución

$$\lim_{x \to \infty} \left(x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right) \qquad \infty \cdot 0$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \left(\frac{1}{h} \operatorname{sen} h \right) \qquad \text{Sea } h = 1/x.$$

$$= 1$$

■

EJEMPLO 7 Trabajo con la forma indeterminada $\infty - \infty$

Encontrar

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x} \right).$$

Solución Si $x \to 0^+$, entonces $\operatorname{sen} x \to 0^+$ y

$$\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x} \to \infty - \infty.$$

De manera similar, si $x \to 0^-$, entonces $\operatorname{sen} x \to 0^-$ y

$$\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x} \to -\infty - (-\infty) = -\infty + \infty.$$

Ninguna de estas formas revela qué pasa en el límite. Para averiguarlo, primero combinamos las fracciones:

$$\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x} \qquad \text{El denominador común es } x \operatorname{sen} x$$

Después aplicamos la regla de L'Hôpital al resultado:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x} \qquad \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x + x \cos x} \qquad \text{Así } \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2 \cos x - x \operatorname{sen} x} = \frac{0}{2} = 0.$$

■

EJERCICIOS 4.6

Determinación de límites

En los ejercicios 1 a 6, use la regla de L'Hôpital para evaluar el límite. Después evalúe el límite usando el método estudiado en el capítulo 2.

1. $\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-4}$

2. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{x}$

3. $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2-3x}{7x^2+1}$

4. $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{4x^3-x-3}$

5. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

6. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+3x}{x^3+x+1}$

Aplicación de la regla de L'Hôpital

Use la regla de L'Hôpital para encontrar los límites de los ejercicios 7 a 26.

7. $\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t^2}{t}$

8. $\lim_{x\to\pi/2} \frac{2x-\pi}{\cos x}$

9. $\lim_{\theta\to\pi} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\pi-\theta}$

10. $\lim_{x\to\pi/2} \frac{1-\operatorname{sen} x}{1+\cos 2x}$

11. $\lim_{x\to\pi/4} \frac{\operatorname{sen} x-\cos x}{x-\pi/4}$

12. $\lim_{x\to\pi/3} \frac{\cos x-0.5}{x-\pi/3}$

13. $\lim_{x\to(\pi/2)} -\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x$

14. $\lim_{x\to 0} \frac{2x}{x+7\sqrt{x}}$

15. $\lim_{x\to 1} \frac{2x^2-(3x+1)\sqrt{x}+2}{x-1}$

16. $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-4}$

17. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{a(a+x)}-a}{x}, \quad a>0$

18. $\lim_{t\to 0} \frac{10(\operatorname{sen} t-t)}{t^3}$

19. $\lim_{x\to 0} \frac{x(\cos x-1)}{\operatorname{sen} x-x}$

20. $\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(a+h)-\operatorname{sen} a}{h}$

21. $\lim_{r\to 1} \frac{a(r^n-1)}{r-1}$, n un entero positivo

22. $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

23. $\lim_{x\to\infty} (x-\sqrt{x^2+x})$

24. $\lim_{x\to\infty} x\tan\frac{1}{x}$

25. $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x-5}{2x^2-x+2}$

26. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 7x}{\tan 11x}$

Teoría y aplicaciones

La regla de L'Hôpital no ayuda con los límites de los ejercicios 27 a 30. Inténtelo; sólo se mantienen ciclos repetitivos. Encuentre los límites de otra manera.

27. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9x+1}}{\sqrt{x+1}}$

28. $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}$

29. $\lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{\sec x}{\tan x}$

30. $\lim_{x\to 0^+} \frac{\cot x}{\csc x}$

31. ¿Cuál es correcto y cual es erróneo? Justifique sus respuestas.

a. $\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2-3} = \lim_{x\to 3} \frac{1}{2x} = \frac{1}{6}$

b. $\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2-3} = \frac{0}{6} = 0$

32. Forma ∞/∞ Dé un ejemplo de dos funciones diferenciables f y g con $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ que satisfagan lo siguiente.

a. $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 3$

b. $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

c. $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$

33. Extensión continua Encuentre el valor de c que hace a la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{9x-3\operatorname{sen} 3x}{5x^3}, & x\neq 0 \\ c, & x=0 \end{cases}$$

continua en $x=0$. Explique por qué su valor de c funciona.

34. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} x+1, & x\neq 0 \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

a. Demuestre que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 1 \quad \text{pero} \quad \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 2.$$

b. Explique por qué esto no contradice la regla de L'Hôpital.

T **35. Forma 0/0** Estime el valor de

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x^2-(3x+1)\sqrt{x}+2}{x-1}$$

mediante graficación. Después confirme su estimación con la regla de L'Hôpital.

T **36. Forma $\infty-\infty$**

a. Estime el valor de

$$\lim_{x\to\infty} \left(x-\sqrt{x^2+x}\right)$$

graficando $f(x) = x-\sqrt{x^2+x}$ en un intervalo convenientemente grande de valores de x.

b. Ahora confirme su estimación encontrando el límite con la regla de L'Hôpital. Como primer paso, multiplique $f(x)$ por la fracción $\left(x+\sqrt{x^2+x}\right)/\left(x+\sqrt{x^2+x}\right)$ y simplifique el nuevo numerador.

T 37. Sea

$$f(x) = \frac{1 - \cos x^6}{x^{12}}.$$

Explique por qué algunas gráficas de f pueden dar información falsa acerca de $\lim_{x \to 0} f(x)$. (*Sugerencia:* Intente con una ventana de $[-1, 1]$ por $[-0.5, 1]$).

38. Encuentre todos los valores de c que satisfagan la conclusión del teorema del valor medio de Cauchy para las funciones e intervalos dados.

a. $f(x) = x, \quad g(x) = x^2, \quad (a, b) = (-2, 0)$

b. $f(x) = x, \quad g(x) = x^2, \quad (a, b)$ arbitrario

c. $f(x) = x^3/3 - 4x, \quad g(x) = x^2, \quad (a, b) = (0, 3)$

39. En la figura siguiente, el círculo tiene radio OA igual a 1 y AB es tangente al círculo en A. El arco AC tiene medida θ en radianes, y el segmento AB también tiene longitud θ. La recta que pasa por B y C cruza el eje x en $P(x, 0)$.

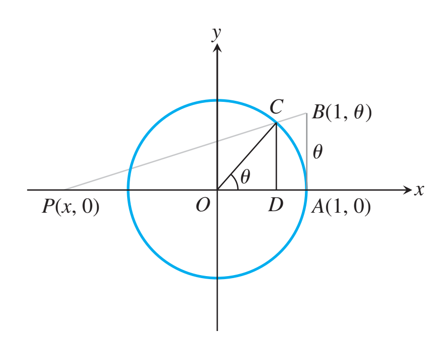
a. Demuestre que la longitud de PA es

$$1 - x = \frac{\theta(1 - \cos \theta)}{\theta - \operatorname{sen} \theta}.$$

b. Encuentre $\lim_{\theta \to 0} (1 - x)$.

c. Pruebe que $\lim_{\theta \to \infty} [(1 - x) - (1 - \cos \theta)] = 0.$

Interpreta esto geométricamente.

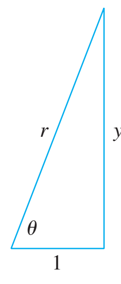


40. Un triángulo rectángulo tiene un cateto de longitud 1, otro de longitud y y la hipotenusa de longitud r. El ángulo opuesto a y mide θ. radianes. Encuentre el límite, cuando $\theta \to \pi/2$ de

a. $r - y$.

b. $r^2 - y^2$.

c. $r^3 - y^3$.



4.7 El método de Newton

Biografía histórica

Niels Henrik Abel
(1802–1829)

Uno de los problemas básicos en matemáticas es resolver ecuaciones. Usando las fórmulas de la ecuación cuadrática, sabemos cómo encontrar un punto (solución) donde $x^2 - 3x + 2 = 0$. Hay fórmulas más complicadas para resolver ecuaciones cúbicas (cuádricas o cuárticas) (polinomios de grado 3 o 4), pero el matemático noruego Niels Abel probó que no existe una fórmula para resolver polinomios de grado cinco. Tampoco hay un fórmula para resolver ecuaciones como $\operatorname{sen} x = x^2$, que involucre funciones trascendentes así como polinomiales u otras funciones algebraicas.

En esta sección estudiaremos un método numérico, llamado *método de Newton* o *método de Newton-Raphson*, que es una técnica de aproximación a la solución de una ecuación $f(x) = 0$. En esencia, este método usa rectas tangentes en lugar de la gráfica de $y = f(x)$ cerca de los puntos donde f es cero. (Un valor de x donde f es cero es una *raíz* de la función f y una *solución* de la ecuación $f(x) = 0$).

Procedimiento del método de Newton

El objetivo del método de Newton para estimar una solución de una ecuación $f(x) = 0$ es producir una sucesión de aproximaciones que se acerquen a la solución. Escogemos el primer número x_0 de la secuencia. Luego, en circunstancias favorables, el método hace el resto moviéndose paso a paso hacia un punto donde la gráfica de f cruza el eje x (figura 4.43).

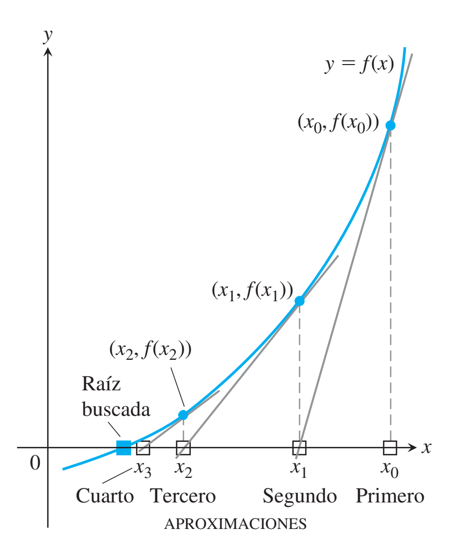


FIGURA 4.43 El método de Newton empieza con una conjetura inicial x_0 y (en circunstancias favorables) mejora la conjetura en cada paso.

En cada paso el método se aproxima a un cero de f con un cero de una de sus linealizaciones. Veamos cómo funciona esto.

La estimación inicial, x_0, se puede encontrar gráficamente o simplemente adivinando. Después, el método usa la tangente a la curva $y = f(x)$ en $(x_0, f(x_0))$ para aproximar la curva, llamando punto x_1 al punto donde la tangente corta el eje x (figura 4.43). En general, el número x_1 es una mejor aproximación a la solución que x_0. El punto x_2, donde la tangente a la curva en $(x_1, f(x_1))$ cruza el eje x, es la siguiente aproximación en la secuencia. Continuamos así, usando cada aproximación para generar la siguiente, hasta estar suficientemente cerca de la raíz para terminar.

Podemos obtener una fórmula para generar las aproximaciones sucesivas de la siguiente manera. Dada la aproximación x_n, la ecuación punto-pendiente de la tangente a la curva en $(x_n, f(x_n))$ es

$$y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n).$$

Podemos encontrar en dónde corta el eje x haciendo $y = 0$ (figura 4.44).

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$$

$$-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x - x_n$$

$$x = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad \text{Si } f'(x_n) \neq 0$$

Este valor de x es la siguiente aproximación x_{n+1}. A continuación se da un resumen del método de Newton.

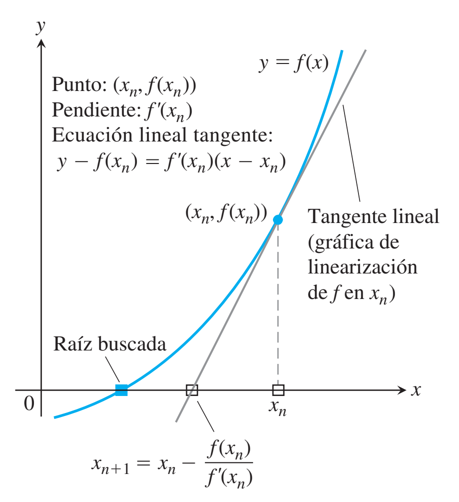


FIGURA 4.44 La geometría de los pasos sucesivos del método de Newton. Desde x_n subimos a la curva y seguimos a la recta tangente hacia abajo para encontrar x_{n+1}.

Procedimiento del método de Newton

1. Adivine una primera aproximación a la solución de la ecuación $f(x) = 0$. Una gráfica de $y = f(x)$ podría ayudarle a hacerlo.
2. Use la primera aproximación para obtener la segunda, la segunda para obtener la tercera, y así sucesivamente, usando la fórmula

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad \text{si } f'(x_n) \neq 0 \tag{1}$$

Aplicación del método de Newton

Las aplicaciones del método de Newton por lo general involucran muchos cálculos numéricos, por lo que suele ser más cómodo resolverlas con ayuda de computadoras o calculadoras. Sin embargo, aun cuando los cálculos se hagan a mano (lo que puede ser muy tedioso), constituyen una muy buena manera de encontrar soluciones de ecuaciones.

En nuestro primer ejemplo encontraremos aproximaciones decimales de $\sqrt{2}$ estimando la raíz positiva de la ecuación $f(x) = x^2 - 2 = 0$.

EJEMPLO 1 Determinación de la raíz cuadrada de 2

Encontrar la raíz positiva de la ecuación

$$f(x) = x^2 - 2 = 0.$$

Solución Con $f(x) = x^2 - 2$ y $f'(x) = 2x$, la ecuación (1) se convierte en

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{x_n{}^2 - 2}{2x_n} \\ &= x_n - \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \\ &= \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}. \end{aligned}$$

La ecuación

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$$

nos permite ir de una aproximación a la siguiente con muy poco esfuerzo. Con el valor inicial $x_0 = 1$, obtenemos los resultados de la primera columna de la tabla siguiente. ($\sqrt{2} = 1.41421$. con cinco cifras decimales.)

	Error	Número de dígitos correctos
$x_0 = 1$	-0.41421	1
$x_1 = 1.5$	0.08579	1
$x_2 = 1.41667$	0.00246	3
$x_3 = 1.41422$	0.00001	5

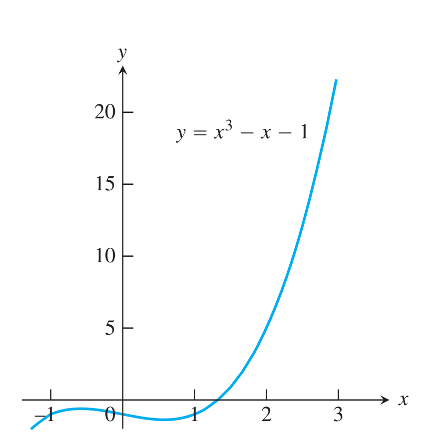


FIGURA 4.45 La gráfica de $f(x) = x^3 - x - 1$ cruza el eje x una vez; ésta es la raíz que queremos encontrar (ejemplo 2)

El método de Newton es el método usado por la mayoría de las calculadoras para determinar raíces, ya que converge muy rápido (más adelante hablaremos más a fondo de esto). Si la aritmética de la tabla del ejemplo 1 se hubiera hecho con 13 lugares decimales en lugar de 5, dar un paso más nos daría $\sqrt{2}$ con más de 10 lugares decimales correctos.

EJEMPLO 2 Uso del método de Newton

Encontrar la coordenada x del punto donde la curva $y = x^3 - x$ cruza la recta horizontal $y = 1$.

Solución La curva cruza a la recta cuando $x^3 - x = 1$ o $x^3 - x - 1 = 0$. ¿En qué momento $f(x) = x^3 - x - 1$ es igual a cero? Como $f(1) = -1$ y $f(2) = 5$, el teorema del valor intermedio nos dice que existe una raíz en el intervalo (1, 2) (figura 4.45).

Aplicamos el método de Newton a f con el valor inicial $x_0 = 1$. Los resultados están expuestos en la tabla 4.1 y la figura 4.46.

En $n = 5$, llegamos al resultado $x_6 = x_5 = 1.3247\ 17957$. Cuando $x_{n+1} = x_n$, la ecuación (1) muestra que $f(x_n) = 0$. Hemos encontrado una solución de $f(x) = 0$ con nueve decimales.

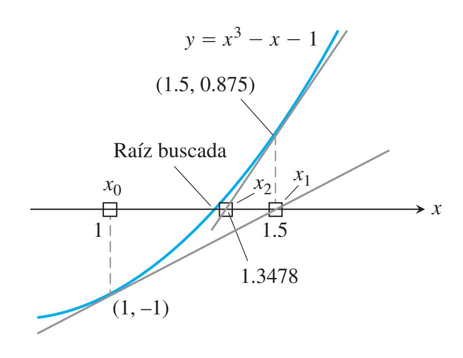


FIGURA 4.46 Los primeros tres valores de x en la tabla 4.1 (cuatro lugares decimales).

En la figura 4.47 hemos indicado que el proceso del ejemplo 2, podría empezarse en el punto $B_0(3, 23)$ de la curva, con $x_0 = 3$. El punto B_0 está bastante lejos del eje x, pero la tangente en B_0 cruza el eje x alrededor de (2.12, 0), de manera que x_1 sigue siendo mejor que x_0. Si usamos la ecuación (1) repetidamente como antes, con $f(x) = x^3 - x - 1$ y $f'(x) = 3x^2 - 1$, confirmamos la solución con nueve lugares decimales, $x_7 = x_6 = 1.3247\ 17957$ en siete pasos.

TABLA 4.1 El resultado del método de Newton aplicado a $f(x) = x^3 - x - 1$ con $x_0 = 1$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	1	−1	2	1.5
1	1.5	0.875	5.75	1.3478 26087
2	1.3478 26087	0.1006 82173	4.4499 05482	1.3252 00399
3	1.3252 00399	0.0020 58362	4.2684 68292	1.3247 18174
4	1.3247 18174	0.0000 00924	4.2646 34722	1.3247 17957
5	1.3247 17957	−1.8672E-13	4.2646 32999	1.3247 17957

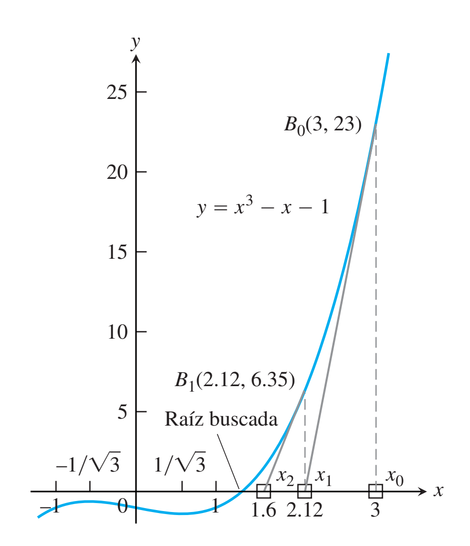


FIGURA 4.47 Cualquier valor de x_0 a la derecha de $x = 1/\sqrt{3}$ llevará a la raíz.

La curva de la figura 4.47 tiene un máximo local en $x = -1/\sqrt{3}$ y un mínimo local en $x = 1/\sqrt{3}$. No podemos esperar buenos resultados con el método de Newton si empezamos con x_0 entre estos puntos, pero podemos empezar en cualquier sitio a la derecha de $x = 1/\sqrt{3}$ y obtener la respuesta. No sería muy inteligente hacerlo así, pero podríamos empezar aún más lejos a la derecha de B_0, por ejemplo con $x_0 = 10$. Lleva un poco más de tiempo, pero el proceso aún converge a la misma respuesta que antes.

Convergencia del método de Newton

En la práctica, el método de Newton converge con una rapidez impresionante, pero esto no garantiza obtener la respuesta correcta. Una manera de probar la convergencia consiste en empezar por dibujar la función para estimar una buen valor de inicio para x_0. Se puede probar que nos estamos acercando a un cero de la función evaluando $|f(x_n)|$ y verificar que el método está convergiendo al evaluar $|x_n - x_{n+1}|$.

La teoría proporciona alguna ayuda. Un teorema de cálculo avanzado dice que si

$$\left|\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}\right| < 1 \tag{2}$$

para toda x en un intervalo alrededor de una raíz r, el método convergerá a r para cualquier valor inicial x_0 en ese intervalo. Observe que esta condición se satisface si la gráfica de f no es demasiado horizontal cerca de su cruce con el eje x.

El método de Newton siempre converge, entre r y x_0, si la gráfica de f es cóncava hacia arriba cuando $f(x_0) > 0$ y cóncava hacia abajo cuando $f(x_0) < 0$. (Vea la figura 4.48.) En casi todos los casos, la rapidez de la convergencia a la raíz r se expresa mediante la fórmula de cálculo avanzado

$$\underbrace{|x_{n+1} - r|}_{\text{error } e_{n+1}} \leq \frac{\text{máx}\,|f''|}{2\,\text{mín}\,|f'|}|x_n - r|^2 = \text{constante} \cdot \underbrace{|x_n - r|^2}_{\text{error } e_n}, \tag{3}$$

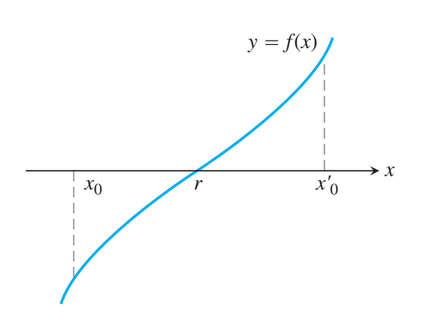


FIGURA 4.48 El método de Newton convergirá en r desde cualquier punto inicial.

donde máx y mín se refieren a los valores máximo y mínimo en el intervalo que rodea a r. La fórmula dice que el error en el paso $n + 1$ no es mayor que una constante por el cuadrado del error en el paso n. Esto puede no parecer mucho, pero piense en lo que dice. Si la constante es menor o igual a 1 y $|x_n - r| < 10^{-3}$, entonces $|x_{n+1} - r| < 10^{-6}$. *En un solo paso*, el método se mueve de tres lugares decimales con una exactitud de seis y el número de decimales de exactitud continúa, duplicándose con cada paso sucesivo.

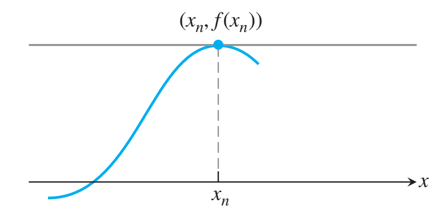


FIGURA 4.49 Si $f'(x_n) = 0$, no hay ningún punto de intersección para definir x_{n+1}.

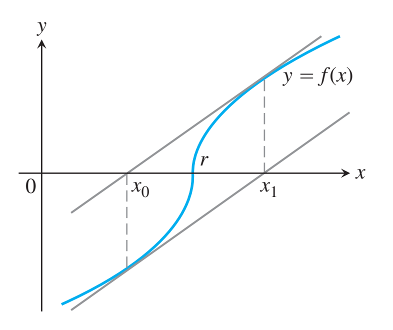


FIGURA 4.50 Falla la convergencia del método de Newton. Se va de x_0 a x_1 y luego de regreso a x_0, sin acercarse a r.

Pero las cosas pueden salir mal

El *método de Newton se detiene* si $f'(x_n) = 0$ (figura 4.49). En este caso, intente continuar con un nuevo punto inicial. Por supuesto, f y f' pueden tener la misma raíz. Para detectar si esto es así, puede encontrar primero la solución de $f'(x) = 0$ y verificar f en esos valores, o dibujar juntas las gráficas de f y f'.

El método de Newton no siempre converge. Por ejemplo, si

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{r - x}, & x < r \\ \sqrt{x - r}, & x \geq r, \end{cases}$$

la gráfica será como la de la figura 4.50. Si empezamos con $x_0 = r - h$, obtenemos $x_1 = r + h$, y las aproximaciones sucesivas irán de un lado a otro entre estos valores. Sin importar cuántas iteraciones hagamos, no nos acercaremos más a la raíz que en nuestra primera suposición.

Si el método de Newton converge, converge a una raíz. Sin embargo, sea cuidadoso. Hay situaciones en que el método parece que converge pero no hay raíz ahí. Afortunadamente, estas situaciones son muy raras.

Cuando el método de Newton converge a una raíz, ésta podría no ser la que se tenía en mente. La figura 4.51 muestra dos maneras en que esto puede pasar.

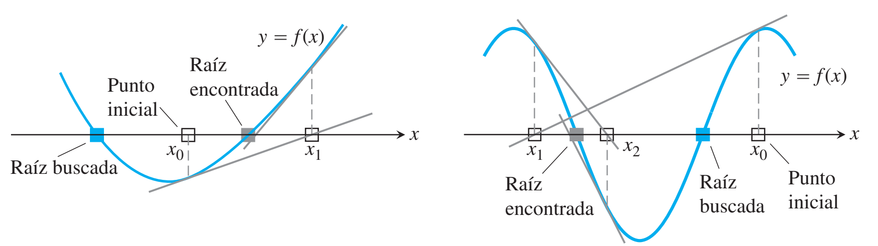


FIGURA 4.51 Si se empieza demasiado lejos, el método de Newton puede no encontrar la raíz que se desea.

Depresiones fractales y el método de Newton

Es posible que el proceso de encontrar raíces mediante el método de Newton sea incierto en el sentido de que, para algunas ecuaciones, el resultado final puede ser extremadamente sensible a la localización del valor inicial.

La ecuación $4x^4 - 4x^2 = 0$ es uno de tales casos (figura 4.52a). Empezando con valores en la zona azul del eje x llegamos a la raíz A. Comenzando con valores en la zona negra, llegamos a la raíz B, y empezando con valores en la zona gris llevan a la raíz C. Los puntos $\pm\sqrt{2}/2$ dan tangentes horizontales. Los puntos $\pm\sqrt{21}/7$ forman "ciclos", es decir, uno lleva al otro y viceversa (figura 4.52b).

El intervalo entre $\sqrt{21}/7$ y $\sqrt{2}/2$ contiene una infinidad de intervalos abiertos de puntos que conducen a la raíz A, alternando con intervalos de puntos que llevan a la raíz C (figura 4.52c). Los puntos frontera que separan dos intervalos consecutivos (hay una infinidad) no conducen a las raíces, sino que van de uno a otro cíclicamente. Más aún, conforme elegimos puntos que se aproximen a $\sqrt{21}/7$ por la derecha, se vuelve muy difícil distinguir cuál lleva a la raíz A y cuál a la raíz C. En el mismo lado de $\sqrt{21}/7$, encontramos puntos arbitrariamente cercanos entre sí, cuyos destinos finales están muy lejos.

Si pensamos en las raíces como "atractores" de otros puntos, los colores en la figura 4.52 muestran los intervalos de los puntos que atraen (los "intervalos de atracción"). Podría pensarse que los puntos entre las raíces A y B serán atraídos por A o B, pero como vimos, éste no es el caso. Entre A y B hay una infinidad de intervalos de puntos atraídos por C. De manera similar, entre B y C hay una infinidad de intervalos de puntos atraídos por A.

Encontraremos un ejemplo más drástico de tal comportamiento cuando apliquemos el método de Newton para resolver la ecuación con números complejos $z^6 - 1 = 0$. Dicha ecuación tiene seis soluciones: 1, -1, y los cuatro números $\pm(1/2) \pm \left(\sqrt{3}/2\right)i$. Como sugiere la figura 4.53, cada una de estas seis raíces tiene una infinidad de "depresiones" de

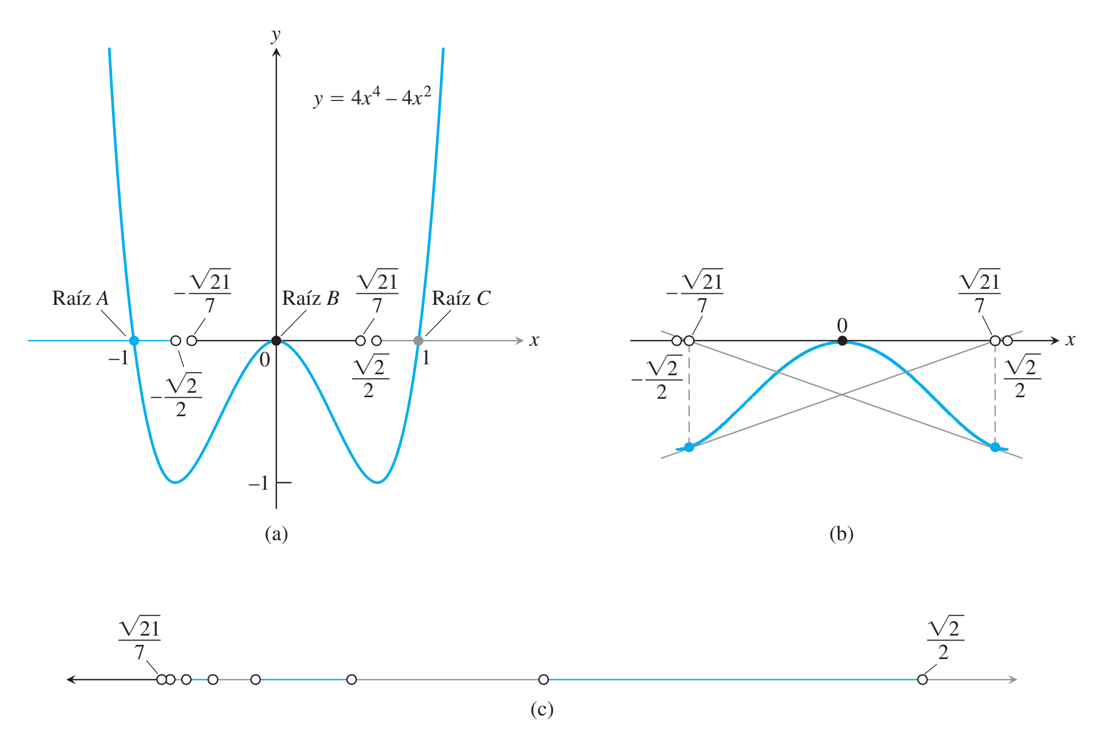


FIGURA 4.52 (a) Valores iniciales en $\left(-\infty, -\sqrt{2}/2\right)$, $\left(-\sqrt{21}/7, \sqrt{21}/7\right)$, y $\left(\sqrt{2}/2, \infty\right)$ conducen a las raíces *A, B* y *C,* respectivamente. (b) Los valores $x = \pm\sqrt{21}/7$ conducen el uno al otro. (c) Entre $\sqrt{21}/7$ y $\sqrt{2}/2$, hay una infinidad de intervalos de puntos atraídos hacia *A* alternando con intervalos abiertos de puntos atraídos hacia *C*. Este comportamiento se refleja en el intervalo $\left(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{21}/7\right)$.

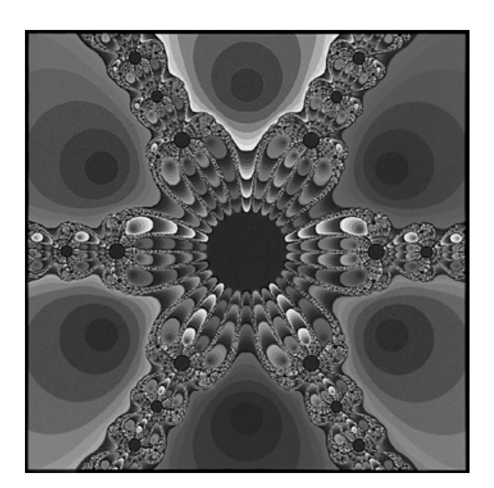


FIGURA 4.53 Esta gráfica generada por computadora ilustra el valor inicial usando colores para demostrar en dónde terminan puntos distintos del plano complejo cuando son usados como valores iniciales al aplicar el método de Newton para resolver la ecuación $z^6 - 1 = 0$. Los puntos de la cuenca inferior van al 1, los puntos de la esquina inferior derecha al $(1/2) + \left(\sqrt{3}/2\right)i$, los puntos de la esquina inferior izquierda al $(-1/2) + \left(\sqrt{3}/2\right)i$, y así sucesivamente. Los valores iniciales que generan sucesiones que no se aproximan a 0.1 unidades de una raíz después de 32 pasos están coloreados en negro.

atracción en el plano complejo (Apéndice 5). Empezando con puntos en la depresión inferior son atraídos a la raíz 1, aquellos en la depresión de la esquina inferior derecha, a la raíz $(1/2) + (\sqrt{3}/2)i$, y así sucesivamente. Cada depresión tiene una frontera cuyo patrón complicado se repite indefinidamente con magnificaciones sucesivas. Estas depresiones son llamadas **depresiones fractales**.

EJERCICIOS 4.7

Determinación de raíces

1. Use el método de Newton para estimar las soluciones de la ecuación $x^2 + x - 1 = 0$. Empiece con $x_0 = -1$ para la solución de la izquierda, y con $x_0 = 1$ para la solución de la derecha. Después, en cada caso encuentre x_2.
2. Use el método de Newton para estimar la solución real de $x^3 + 3x + 1 = 0$. Empiece con $x_0 = 0$ y después encuentre x_2.
3. Emplee el método de Newton para estimar dos ceros de la función $f(x) = x^4 + x - 3$. Empiece con $x_0 = -1$ para el cero de la izquierda, y con $x_0 = 1$ para el cero de la derecha. Después, encuentre en cada caso x_2.
4. Use el método de Newton para estimar dos ceros de la función $f(x) = 2x - x^2 + 1$. Empiece con $x_0 = 0$ para el cero de la izquierda, y con $x_0 = 2$ para el cero de la derecha. Después, encuentre en cada caso x_2.
5. Use el método de Newton para encontrar las cuatro raíces positivas de 2 resolviendo la ecuación $x^4 - 2 = 0$. Empiece con $x_0 = 1$ y encuentre x_2.
6. Emplee el método de Newton para encontrar las cuatro raíces negativas de 2 resolviendo la ecuación $x^4 - 2 = 0$. Empiece con $x_0 = -1$ y encuentre x_2.

Teoría, ejemplos y aplicaciones

7. **Conjetura de una raíz** Imagine que su primera suposición es afortunada, en el sentido de que x_0 es una raíz de $f(x) = 0$. Suponiendo que $f'(x_0)$ está definida y no es cero, ¿qué pasa con x_1 y las aproximaciones subsecuentes?
8. **Estimación de pi** Se quiere estimar $\pi/2$ con cinco lugares decimales usando el método de Newton para resolver la ecuación $\cos x = 0$. ¿Importa con qué valor se empieza? Justifique su respuesta.
9. **Oscilación** Demuestre que si $h > 0$, aplicar el método de Newton a
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ \sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases}$$
lleva a $x_1 = -h$ si $x_0 = h$ y $x_1 = h$ si $x_0 = -h$. Dibuje una figura para mostrar qué está pasando.
10. **Aproximaciones que van de mal en peor** Aplique el método de Newton a $f(x) = x^{1/3}$ con $x_0 = 1$ y calcule x_1, x_2, x_3, y x_4. Determine una fórmula para $|x_n|$. ¿Qué ocurre con $|x_n|$ cuando $n \to \infty$? Dibuje una figura que muestre qué está ocurriendo.
11. Explique por qué los cuatro enunciados siguientes están solicitando la misma información
    i) Encuentre las raíces de $f(x) = x^3 - 3x - 1$.
    ii) Encuentre las coordenadas x de las intersecciones de la curva $y = x^3$ con la recta $y = 3x + 1$.
    iii) Encuentre las coordenadas x de los puntos donde la curva $y = x^3 - 3x$ cruza la recta horizontal $y = 1$.
    iv) Encuentre los valores de x donde la derivada de $g(x) = (1/4)x^4 - (3/2)x^2 - x + 5$ es igual a cero.
12. **Localización de un planeta** Para calcular las coordenadas que ocupa un planeta en el espacio, tenemos que resolver ecuaciones como $x = 1 + 0.5 \operatorname{sen} x$. Graficar la función $f(x) = x - 1 - 0.5 \operatorname{sen} x$ sugiere que la función tiene una raíz cerca de $x = 1.5$. Use una aplicación del método de Newton para mejorar esta estimación. Esto es, empiece con $x_0 = 1.5$ y encuentre x_1. (Con cinco lugares decimales, el valor de la raíz es 1.49870.) Recuerde utilizar radianes.

T 13. **Un programa para usar el método de Newton en una calculadora graficadora** Sea $f(x) = x^3 + 3x + 1$. A continuación se explica un programa casero para realizar los cálculos con el método de Newton.
   a. Sea $y_0 = f(x)$ y $y_1 =$ NDER $f(x)$.
   b. Almacene $x_0 = -0.3$ en x.
   c. Después almacene $x - (y_0/y_1)$ en x y presione la tecla de Enter (o Intro) una y otra vez. Vea cómo los números convergen al cero de f.
   d. Use diferentes valores de x_0 y repita los pasos de los incisos (b) y (c).
   e. Escriba su propia ecuación y use esta aproximación para resolverla usando el método de Newton. Compare su respuesta con la obtenida mediante la función de su calculadora que da los ceros de funciones.

T 14. (*Continuación del ejercicio 11*).
   a. Use el método de Newton para encontrar los dos ceros negativos de $f(x) = x^3 - 3x - 1$ con cinco lugares decimales.
   b. Grafique $f(x) = x^3 - 3x - 1$ para $-2 \leq x \leq 2.5$. Use las funciones *Zoom* y *Trace* de su calculadora graficadora para estimar los ceros de f con cinco lugares decimales.
   c. Grafique $g(x) = 0.25x^4 - 1.5x^2 - x + 5$. Use las funciones *Zoom* y *Trace* con la escala apropiada para encontrar los valores de x, con cinco lugares decimales, donde la gráfica tiene tangentes horizontales.

T 15. **Curvas que se intersecan** La curva $y = \tan x$ interseca la recta $y = 2x$ entre $x = 0$ y $x = \pi/2$. Use el método de Newton para encontrar dónde.

T 16. **Soluciones reales de una ecuación de cuarto grado** Use el método de Newton para encontrar las dos soluciones reales de la ecuación $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0$.

T 17. a. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $\operatorname{sen} 3x = 0.99 - x^2$?
   b. Use el método de Newton para encontrarlas.

T **18. Curvas que se intersecan**

a. ¿Alguna vez $\cos 3x$ es igual a x? Justifique su respuesta.

b. Use el método de Newton para determinar en dónde.

T **19.** Encuentre cuatro ceros reales de la función $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$.

T **20. Estimación de pi** Estime π con tantos decimales como pueda desplegar su calculadora; use el método de Newton para resolver la ecuación $\tan x = 0$ con $x_0 = 3$.

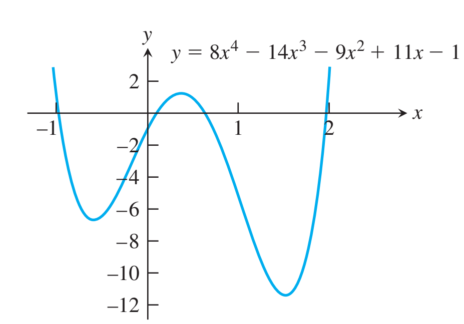
21. ¿En qué valores de x, $\cos x = 2x$?

22. ¿En qué valores de x, $\cos x = -x$?

23. Use el teorema del valor intermedio que se explicó en la sección 2.6 para probar que $f(x) = x^3 + 2x - 4$ tiene una raíz entre $x = 1$ y $x = 2$. Después encuentre la raíz con cinco lugares decimales.

24. Factorización de una ecuación de cuarto grado Encuentre los valores aproximados de r_1 a r_4 en la factorización

$$8x^4 - 14x^3 - 9x^2 + 11x - 1 = 8(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)(x - r_4).$$



T **25. Convergencia a distintos ceros** Use el método de Newton para encontrar los ceros de $f(x) = 4x^4 - 4x^2$ usando los valores iniciales dados (figura 4.52).

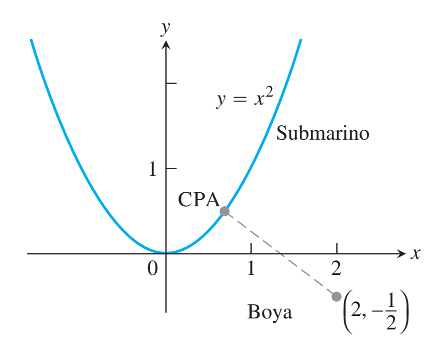
a. $x_0 = -2$ y $x_0 = -0.8$, perteneciendo a $\left(-\infty, -\sqrt{2}/2\right)$

b. $x_0 = -0.5$ y $x_0 = 0.25$, perteneciendo a $\left(-\sqrt{21/7}, \sqrt{21/7}\right)$

c. $x_0 = 0.8$ y $x_0 = 2$, perteneciendo a $\left(\sqrt{2}/2, \infty\right)$

d. $x_0 = -\sqrt{21/7}$ y $x_0 = \sqrt{21/7}$

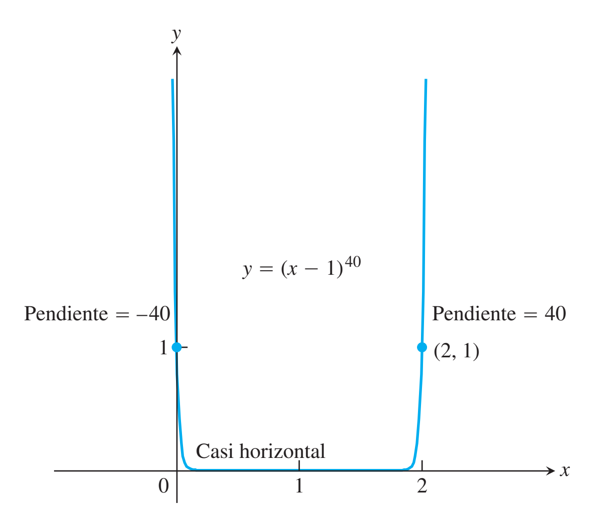
26. El problema de la boya de sonar Cuando se necesita localizar un submarino, frecuentemente es necesario encontrar el punto más cercano de la trayectoria entre éste y una boya de sonar (detector de sonido) en el agua. Suponga que el submarino viaja por la trayectoria de la parábola $y = x^2$ y que la boya está localizada en el punto $(2, -1/2)$.



a. Demuestre que el valor de x que minimiza la distancia entre el submarino y la boya es una solución de la ecuación $x = 1/(x^2 + 1)$.

b. Resuelva la ecuación $x = 1/(x^2 + 1)$ con el método de Newton.

27. Curvas casi planas en la raíz Algunas curvas son tan planas que, en la práctica, el método de Newton se detiene demasiado lejos de la raíz para dar una estimación útil. Intente usar el método de Newton en $f(x) = (x - 1)^{40}$ con el valor inicial $x_0 = 2$ para ver qué tanto se acerca su calculadora a la raíz $x = 1$.



28. Determinación de una raíz distinta de la buscada Las tres raíces de $f(x) = 4x^4 - 4x^2$ se pueden encontrar empezando la aplicación del método de Newton cerca de $x = \sqrt{21/7}$. Inténtelo. (Vea la figura 4.52).

29. Determinación de la concentración de un ion Mientras se intenta encontrar la acidez de una solución saturada de hidróxido de magnesio en ácido hidroclórico, un investigador obtiene la ecuación

$$\frac{3.64 \times 10^{-11}}{[H_3O^+]^2} = [H_3O^+] + 3.6 \times 10^{-4}$$

para la concentración de iones de hidronio $[H_3O^+]$. Para encontrar el valor de $[H_3O^+]$, determine $x = 10^4[H_3O^+]$ y convierta la ecuación a

$$x^3 + 3.6x^2 - 36.4 = 0.$$

Ahora resuelva esta ecuación usando el método de Newton. ¿Qué obtuvo para x? (Obtenga dos cifras decimales exactas). ¿Qué obtuvo para $[H_3O^+]$?

T **30. Raíces complejas** Si tiene una calculadora o una computadora que se pueda programar para realizar aritmética de números complejos, experimente el método de Newton para resolver la ecuación $z^6 - 1 = 0$. La relación recursiva que hay que usar es

$$z_{n+1} = z_n - \frac{z_n^6 - 1}{6z_n^5} \quad \text{o} \quad z_{n+1} = \frac{5}{6}z_n + \frac{1}{6z_n^5}.$$

Intente trabajar con estos valores iniciales (entre otros): 2, i, $\sqrt{3} + i$.

4.8 Antiderivadas

Hemos analizado cómo encontrar la derivada de una función. Sin embargo, muchos problemas exigen recuperar una función a partir de su derivada conocida (es decir, a partir de su razón de cambio conocida). Por ejemplo, podría ocurrir que conociéramos la función velocidad de un objeto que cae desde una altura inicial y necesitáramos saber su altura en cualquier instante sobre cierto periodo. De manera más general, queremos encontrar una función F a partir de su derivada f. Si tal función F existe, se llama una *antiderivada* de f.

Determinación de antiderivadas

DEFINICIÓN Antiderivada

Una función F es una **antiderivadas** de f en un intervalo I si $F'(x) = f(x)$ para toda x en I.

El proceso de recuperar una función $F(x)$ a partir de su derivada $f(x)$ se llama *antiderivación* o *antidiferenciación*. Usamos letras mayúsculas como F para representar una antiderivada de una función f, G para representar una antiderivada de una función g, y así sucesivamente.

EJEMPLO 1 Determinación de antiderivadas

Encontrar una antiderivada para cada una de las funciones siguientes.

(a) $f(x) = 2x$

(b) $g(x) = \cos x$

(c) $h(x) = 2x + \cos x$

Solución

(a) $F(x) = x^2$

(b) $G(x) = \operatorname{sen} x$

(c) $H(x) = x^2 + \operatorname{sen} x$

Cada una de estas respuestas puede verificarse mediante derivación. La derivada de $F(x) = x^2$ es $2x$. La derivada de $G(x) = \operatorname{sen} x$ es $\cos x$, y la derivada de $H(x) = x^2 + \operatorname{sen} x$ es $2x + \cos x$.

■

La función $F(x) = x^2$ no es la única función cuya derivada es $2x$. La función $x^2 + 1$ tiene la misma derivada. De esta manera, $x^2 + C$ para cualquier constante C. ¿Hay otras?

El corolario 2 del teorema del valor medio que se analizó en la sección 4.2 da la respuesta. Cualesquiera dos antiderivadas de una función difieren en una constante. En consecuencia, las funciones $x^2 + C$, donde C es una **constante arbitraria**, forman *todas* las antiderivadas de $f(x) = 2x$. En general, tenemos el siguiente resultado.

Si F es una antiderivada de f en un intervalo I, la antiderivada más general de f en I es

$$F(x) + C$$

donde C es una constante arbitraria.

En consecuencia, la antiderivada más general de f en I es una *familia* de funciones $F(x) + C$ cuyas gráficas son traslaciones verticales unas de otras. Podemos elegir una antiderivada en particular de esta familia, asignando un valor específico a C. A continuación se da un ejemplo de cómo puede hacerse esa elección.

EJEMPLO 2 Determinación de una antiderivada particular

Encuentre una antiderivada de $f(x) = \operatorname{sen} x$ que satisfaga $F(0) = 3$.

Solución Como la derivada de $-\cos x$ es $\operatorname{sen} x$, la antiderivada general

$$F(x) = -\cos x + C$$

da todas las antiderivadas de $f(x)$. La condición $F(0) = 3$ determina un valor específico para C. Sustituyendo $x = 0$ en $F(x) = -\cos x + C$ nos da

$$F(0) = -\cos 0 + C = -1 + C.$$

Como $F(0) = 3$, resolviendo para C obtenemos $C = 4$. De manera que

$$F(x) = -\cos x + 4$$

es la antiderivada que satisface $F(0) = 3$. ■

Trabajando hacia atrás a partir de la lista de reglas de derivación, podemos obtener fórmulas y reglas para las antiderivadas. En cada caso, en la expresión general existe una constante arbitraria C que representa a todas las antiderivadas de una función dada. La tabla 4.2 da fórmulas de antiderivadas para algunas funciones importantes.

TABLA 4.2 Fórmulas para las antiderivadas

	Función	Antiderivada general
1.	x^n	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$, n racional
2.	$\operatorname{sen} kx$	$-\dfrac{\cos kx}{k} + C, \quad k$ a constante, $k \neq 0$
3.	$\cos kx$	$\dfrac{\operatorname{sen} kx}{k} + C, \quad k$ a constante, $k \neq 0$
4.	$\sec^2 x$	$\tan x + C$
5.	$\csc^2 x$	$-\cot x + C$
6.	$\sec x \tan x$	$\sec x + C$
7.	$\csc x \cot x$	$-\csc x + C$

Las reglas de la tabla 4.2 son fáciles de verificar derivando la fórmula de la antiderivada general para obtener la función a su izquierda. Por ejemplo, la derivada de $\tan x + C$ es $\sec^2 x$, para cualquier valor de la constante C, y esto establece la fórmula para la antiderivada más general de $\sec^2 x$.

EJEMPLO 3 Determinación de antiderivadas usando la tabla 4.2

Encontrar las antiderivadas generales de cada una de las funciones siguientes.

(a) $f(x) = x^5$

(b) $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

(c) $h(x) = \operatorname{sen} 2x$

(d) $i(x) = \cos \dfrac{x}{2}$

Solución

(a) $F(x) = \dfrac{x^6}{6} + C$ — Fórmula 1 con $n = 5$

(b) $g(x) = x^{-1/2}$, así

$$G(x) = \frac{x^{1/2}}{1/2} + C = 2\sqrt{x} + C$$

Fórmula 1 con $n = -1/2$

(c) $H(x) = \dfrac{-\cos 2x}{2} + C$ — Fórmula 2 con $k = 2$

(d) $I(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x/2)}{1/2} + C = 2 \operatorname{sen} \dfrac{x}{2} + C$ — Fórmula 3 con $k = 1/2$ ■

Otras reglas de derivadas también conducen a las correspondientes reglas de antiderivadas. Podemos sumar o restar antiderivadas, y multiplicar por constantes.

Las fórmulas de la tabla 4.3 son fáciles de probar derivando las antiderivadas y verificando que el resultado coincide con la función original. La fórmula 2 es el caso especial $k = -1$ en la fórmula 1.

TABLA 4.3 Reglas de linealidad para antiderivadas

		Función	**Antiderivada general**
1.	*Regla del múltiplo constante:*	$kf(x)$	$kF(x) + C$, k es constante
2.	*Regla negativa:*	$-f(x)$	$-F(x) + C$,
3.	*Regla de la suma o la resta:*	$f(x) \pm g(x)$	$F(x) \pm G(x) + C$

EJEMPLO 4 Uso de las reglas de linealidad para antiderivadas

Encontrar la antiderivada general de

$$f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} + \operatorname{sen} 2x.$$

Solución Tenemos que $f(x) = 3g(x) + h(x)$ para las funciones g y h del ejemplo 3. Como $G(x) = 2\sqrt{x}$ es una antiderivada de $g(x)$ del ejemplo 3b, de acuerdo con la regla de múltiplo constante para antiderivadas, resulta que $3G(x) = 3 \cdot 2\sqrt{x} = 6\sqrt{x}$ es una antiderivada de $3g(x) = 3/\sqrt{x}$. De la misma manera, a partir del ejemplo 3c sabemos que $H(x) = (-1/2)\cos 2x$ es una antiderivada de $h(x) = \operatorname{sen} 2x$. De acuerdo con la regla de la suma para antiderivadas, resulta que

$$\begin{aligned} F(x) &= 3G(x) + H(x) + C \\ &= 6\sqrt{x} - \frac{1}{2}\cos 2x + C \end{aligned}$$

es la fórmula general de la antiderivada de $f(x)$, donde C es una constante arbitraria. ■

Las antiderivadas juegan varios papeles importantes, y los métodos y técnicas para encontrarlas son una de las partes clave del cálculo. (Éste es el tema del capítulo 8).

Problemas de valor inicial y ecuaciones diferenciales

Encontrar una antiderivada de una función $f(x)$ constituye el mismo problema que encontrar una función $y(x)$ que satisfaga la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = f(x).$$

A esto se le llama **ecuación diferencial**, ya que es una ecuación que involucra una función desconocida y que está siendo derivada. Para resolverla, necesitamos una $y(x)$ que satisfaga la ecuación. Esta función se encuentra tomando la antiderivada de $f(x)$. Fijamos la constante arbitraria que surge en el proceso de antiderivación dando una condición inicial

$$y(x_0) = y_0.$$

Esta condición significa que la función $y(x)$ tiene el valor y_0 cuando $x = x_0$. La combinación de una ecuación diferencial y una condición inicial se llama **problema de valor inicial**. Tales problemas juegan papeles importantes en todas las ramas de la ciencia. He aquí un ejemplo de un problema de valor inicial.

EJEMPLO 5 Determinación de una curva a partir de su función pendiente y un punto

Encontrar la curva cuya pendiente en el punto (x, y) es $3x^2$ si la curva debe pasar por el punto $(1, -1)$.

Solución En lenguaje matemático, estamos pidiendo resolver el problema de valor inicial que consiste de lo siguiente.

La ecuación diferencial: $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2$ La pendiente de la curva es $3x^2$.

La ecuación inicial: $y(1) = -1$

1. *Resolver la ecuación diferencial*: La función y es una antiderivada de $f(x) = 3x^2$, de manera que

$$y = x^3 + C.$$

Este resultado nos dice que y es igual a $x^3 + C$ para algún valor de C. Encontramos ese valor a partir de la condición inicial $y(1) = -1$.

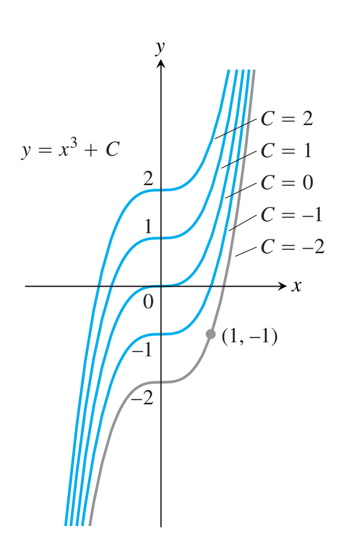


FIGURA 4.54 Las curvas $y = x^3 + C$ llenan el plano coordenado sin traslaparse. En el ejemplo 5, identificamos la curva $y = x^3 - 2$ como una que pasa por el punto dado $(1, -1)$.

2. *Evaluar C*:

$$y = x^3 + C$$

$$-1 = (1)^3 + C \quad \text{Condición inicial } y(1) = -1$$

$$C = -2.$$

La curva que queremos es $y = x^3 - 2$ (figura 4.54). ■

La antiderivada general $F(x) + C$ (que es $x^3 + C$ en el ejemplo 5) de la función $f(x)$ da la **solución general** $y = F(x) + C$ de la ecuación diferencial $dy/dx = f(x)$. La solución general da *todas* las soluciones de la ecuación (hay una infinidad, una por cada valor de C). **Resolvemos** la ecuación diferencial encontrando su solución general. Después resolvemos el problema de valor inicial encontrando la **solución particular** que satisface la condición inicial $y(x_0) = y_0$.

Antiderivadas y movimiento

Hemos visto que la derivada de la posición de un objeto da su velocidad, y la derivada de la velocidad da su aceleración. Si conocemos la aceleración de un objeto, encontrando una antiderivada podemos recuperar la velocidad y, a partir de la antiderivada de la velocidad, podemos recuperar su función posición. Este procedimiento se usa como una aplicación del corolario 2 que se mencionó en la sección 4.2. Ahora que tenemos una terminología y un marco de trabajo conceptual en términos de las antiderivadas, nos ocuparemos nuevamente del problema desde el punto de vista de ecuaciones diferenciales.

EJEMPLO 6 Lanzamiento de un paquete desde un globo en ascenso

Un globo que está subiendo a razón de 12 pies/seg está a una altura de 80 pies sobre el suelo cuando se lanza un paquete desde él. ¿Cuánto tiempo tarda el paquete en llegar al suelo?

Solución Sea $v(t)$ la velocidad del paquete en el tiempo t, y sea $s(t)$ su altura sobre el suelo. La aceleración de la gravedad cerca de la superficie de la Tierra es 32 pies/seg^2. Suponiendo que no actúan otras fuerzas en el paquete lanzado, tenemos

$$\frac{dv}{dt} = -32. \quad \text{Es negativo, porque la gravedad actúa en la dirección de decrecimiento de } s.$$

Esto conduce al problema de valor inicial.

$$\textit{Ecuación diferencial:} \quad \frac{dv}{dt} = -32$$

$$\textit{Condición inicial:} \quad v(0) = 12,$$

que es nuestro modelo matemático para el movimiento del paquete. Resolvemos este problema de valor inicial para obtener la velocidad del paquete.

1. *Resolver la ecuación diferencial:* La fórmula general para la antiderivada de -32 es

$$v = -32t + C.$$

Habiendo encontrado la solución general de la ecuación diferencial, usamos la condición inicial para determinar la solución particular que resuelva nuestro problema.

2. *Evaluar C*:

$$12 = -32(0) + C \quad \text{Condición inicial } v(0) = 12$$

$$C = 12.$$

La solución del problema de valor inicial es

$$v = -32t + 12.$$

Como la velocidad es la derivada de la altura, y dado que la altura del paquete es 80 pies en el tiempo $t = 0$ cuando se lanza, ahora tenemos un segundo problema de valores iniciales.

Ecuación diferencial: $\dfrac{ds}{dt} = -32t + 12$ — Haciendo $v = ds/dt$ en la última ecuación

Condición inicial: $s(0) = 80$

Resolvemos el problema de valor inicial para encontrar la altura como función de t.

1. *Resolver la ecuación diferencial:* Encontrar la antiderivada general de $-32t + 12$

$$s = -16t^2 + 12t + C.$$

2. *Evaluar C*:

$$80 = -16(0)^2 + 12(0) + C \qquad \text{Condición inicial } s(0) = 80$$
$$C = 80.$$

La altura que tiene el paquete sobre el suelo en el tiempo t es

$$s = -16t^2 + 12t + 80.$$

Use la solución: Para encontrar cuánto tiempo tarda el paquete en tocar el suelo, hacemos s igual a 0 y resolvemos para t:

$$-16t^2 + 12t + 80 = 0$$
$$-4t^2 + 3t + 20 = 0$$
$$t = \frac{-3 \pm \sqrt{329}}{-8} \qquad \text{Fórmula cuadrática}$$
$$t \approx -1.89, \qquad t \approx 2.64.$$

El paquete pega en el suelo alrededor de 2.64 segundos después de ser lanzado desde el globo. (La raíz negativa no tiene significado físico). ■

Integrales indefinidas

Se usa un símbolo especial para denotar al conjunto de todas las antiderivadas de una función f.

DEFINICIÓN Integral indefinida, integrando

El conjunto de todas las antiderivadas de f es la **integral indefinida** de f con respecto a x, denotada mediante

$$\int f(x)\, dx.$$

El símbolo $\int$ es un **signo de integral**. La función f es el **integrando** de la integral, y x es la **variable de integración**.

Usando esta notación, reescribimos las soluciones del ejemplo 1 como sigue:

$$\int 2x\,dx = x^2 + C,$$

$$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C,$$

$$\int (2x + \cos x)\,dx = x^2 + \operatorname{sen} x + C.$$

Esta notación se relaciona con la aplicación principal de las antiderivadas, que será analizada en el capítulo 5. Las antiderivadas juegan un papel clave en el cálculo de límites de sumas infinitas, un papel inesperado y sumamente útil que se describe en un resultado central del capítulo 5, llamado el teorema fundamental del cálculo.

EJEMPLO 7 Integración indefinida hecha término a término, y reescritura de la constante de integración

Evaluar

$$\int (x^2 - 2x + 5)\,dx.$$

Solución Si reconocemos que $(x^3/3) - x^2 + 5x$ es una antiderivada de $x^2 - 2x + 5$, podemos evaluar la integral como

$$\int (x^2 - 2x + 5)\,dx = \overbrace{\frac{x^3}{3} - x^2 + 5x}^{\text{antiderivadas}} \underbrace{+\ C}_{\text{constante arbitraria}}.$$

Si no reconocemos la antiderivada enseguida, podemos generarla término a término con las reglas de la suma, de la diferencia y del múltiplo constante:

$$\begin{aligned}
\int (x^2 - 2x + 5)\,dx &= \int x^2\,dx - \int 2x\,dx + \int 5\,dx \\
&= \int x^2\,dx - 2\int x\,dx + 5\int 1\,dx \\
&= \left(\frac{x^3}{3} + C_1\right) - 2\left(\frac{x^2}{2} + C_2\right) + 5(x + C_3) \\
&= \frac{x^3}{3} + C_1 - x^2 - 2C_2 + 5x + 5C_3.
\end{aligned}$$

Esta fórmula es más complicada de lo que debería. Si combinamos C_1, $-2C_2$, y $5C_3$ en una sola constante arbitraria $C = C_1 - 2C_2 + 5C_3$, la fórmula se simplifica a

$$\frac{x^3}{3} - x^2 + 5x + C$$

y *todavía* da todas las antiderivadas. Por esta razón, le recomendamos que vaya directo hasta la forma final aunque haya elegido integrar término a término. Escriba

$$\int (x^2 - 2x + 5)\,dx = \int x^2\,dx - \int 2x\,dx + \int 5\,dx$$
$$= \frac{x^3}{3} - x^2 + 5x + C.$$

Encuentre, para cada parte, la antiderivada más sencilla que pueda, y sume la constante de integración arbitraria al final.

EJERCICIOS 4.8

Determinación de antiderivadas

En los ejercicios 1 a 16, encuentre una antiderivada de cada función. Haga todo lo que pueda mentalmente. Verifique sus respuestas mediante derivación.

1. **a.** $2x$ **b.** x^2 **c.** $x^2 - 2x + 1$
2. **a.** $6x$ **b.** x^7 **c.** $x^7 - 6x + 8$
3. **a.** $-3x^{-4}$ **b.** x^{-4} **c.** $x^{-4} + 2x + 3$
4. **a.** $2x^{-3}$ **b.** $\frac{x^{-3}}{2} + x^2$ **c.** $-x^{-3} + x - 1$
5. **a.** $\frac{1}{x^2}$ **b.** $\frac{5}{x^2}$ **c.** $2 - \frac{5}{x^2}$
6. **a.** $-\frac{2}{x^3}$ **b.** $\frac{1}{2x^3}$ **c.** $x^3 - \frac{1}{x^3}$
7. **a.** $\frac{3}{2}\sqrt{x}$ **b.** $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ **c.** $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$
8. **a.** $\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$ **b.** $\frac{1}{3\sqrt[3]{x}}$ **c.** $\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$
9. **a.** $\frac{2}{3}x^{-1/3}$ **b.** $\frac{1}{3}x^{-2/3}$ **c.** $-\frac{1}{3}x^{-4/3}$
10. **a.** $\frac{1}{2}x^{-1/2}$ **b.** $-\frac{1}{2}x^{-3/2}$ **c.** $-\frac{3}{2}x^{-5/2}$
11. **a.** $-\pi \operatorname{sen} \pi x$ **b.** $3 \operatorname{sen} x$ **c.** $\operatorname{sen} \pi x - 3 \operatorname{sen} 3x$
12. **a.** $\pi \cos \pi x$ **b.** $\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2}$ **c.** $\cos \frac{\pi x}{2} + \pi \cos x$
13. **a.** $\sec^2 x$ **b.** $\frac{2}{3} \sec^2 \frac{x}{3}$ **c.** $-\sec^2 \frac{3x}{2}$
14. **a.** $\csc^2 x$ **b.** $-\frac{3}{2} \csc^2 \frac{3x}{2}$ **c.** $1 - 8 \csc^2 2x$
15. **a.** $\csc x \cot x$ **b.** $-\csc 5x \cot 5x$ **c.** $-\pi \csc \frac{\pi x}{2} \cot \frac{\pi x}{2}$
16. **a.** $\sec x \tan x$ **b.** $4 \sec 3x \tan 3x$ **c.** $\sec \frac{\pi x}{2} \tan \frac{\pi x}{2}$

Determinación de integrales indefinidas

En los ejercicios 17 a 54, encuentre la antiderivada más general o la integral indefinida. Verifique sus respuestas mediante derivación.

17. $\int (x + 1)\,dx$
18. $\int (5 - 6x)\,dx$
19. $\int \left(3t^2 + \frac{t}{2}\right) dt$
20. $\int \left(\frac{t^2}{2} + 4t^3\right) dt$
21. $\int (2x^3 - 5x + 7)\,dx$
22. $\int (1 - x^2 - 3x^5)\,dx$
23. $\int \left(\frac{1}{x^2} - x^2 - \frac{1}{3}\right) dx$
24. $\int \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{x^3} + 2x\right) dx$
25. $\int x^{-1/3}\,dx$
26. $\int x^{-5/4}\,dx$
27. $\int \left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right) dx$
28. $\int \left(\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right) dx$
29. $\int \left(8y - \frac{2}{y^{1/4}}\right) dy$
30. $\int \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{y^{5/4}}\right) dy$
31. $\int 2x(1 - x^{-3})\,dx$
32. $\int x^{-3}(x + 1)\,dx$
33. $\int \frac{t\sqrt{t} + \sqrt{t}}{t^2}\,dt$
34. $\int \frac{4 + \sqrt{t}}{t^3}\,dt$
35. $\int (-2 \cos t)\,dt$
36. $\int (-5 \operatorname{sen} t)\,dt$
37. $\int 7 \operatorname{sen} \frac{\theta}{3}\,d\theta$
38. $\int 3 \cos 5\theta\,d\theta$
39. $\int (-3 \csc^2 x)\,dx$
40. $\int \left(-\frac{\sec^2 x}{3}\right) dx$
41. $\int \frac{\csc \theta \cot \theta}{2}\,d\theta$
42. $\int \frac{2}{5} \sec \theta \tan \theta\,d\theta$

43. $\int (4 \sec x \tan x - 2 \sec^2 x)\, dx$ **44.** $\int \frac{1}{2}(\csc^2 x - \csc x \cot x)\, dx$

45. $\int (\operatorname{sen} 2x - \csc^2 x)\, dx$ **46.** $\int (2 \cos 2x - 3 \operatorname{sen} 3x)\, dx$

47. $\int \frac{1 + \cos 4t}{2}\, dt$ **48.** $\int \frac{1 - \cos 6t}{2}\, dt$

49. $\int (1 + \tan^2 \theta)\, d\theta$ **50.** $\int (2 + \tan^2 \theta)\, d\theta$

(*Sugerencia:* $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$)

51. $\int \cot^2 x\, dx$ **52.** $\int (1 - \cot^2 x)\, dx$

(*Sugerencia:* $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$)

53. $\int \cos \theta\, (\tan \theta + \operatorname{seg} \theta)\, d\theta$ **54.** $\int \frac{\csc \theta}{\csc \theta - \operatorname{sen} \theta}\, d\theta$

Verificación de fórmulas de antiderivadas

Utilice derivación para verificar las fórmulas en los ejercicios 55 a 60.

55. $\int (7x - 2)^3\, dx = \frac{(7x - 2)^4}{28} + C$

56. $\int (3x + 5)^{-2}\, dx = -\frac{(3x + 5)^{-1}}{3} + C$

57. $\int \sec^2 (5x - 1)\, dx = \frac{1}{5} \tan (5x - 1) + C$

58. $\int \csc^2 \left(\frac{x - 1}{3}\right) dx = -3 \cot \left(\frac{x - 1}{3}\right) + C$

59. $\int \frac{1}{(x + 1)^2}\, dx = -\frac{1}{x + 1} + C$

60. $\int \frac{1}{(x + 1)^2}\, dx = \frac{x}{x + 1} + C$

61. Determine si cada una de las siguientes fórmulas es cierta o falsa, y argumente brevemente el porqué de su respuesta.

a. $\int x \operatorname{sen} x\, dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{sen} x + C$

b. $\int x \operatorname{sen} x\, dx = -x \cos x + C$

c. $\int x \operatorname{sen} x\, dx = -x \cos x + \operatorname{sen} x + C$

62. Determine si cada una de las siguientes fórmulas es cierta o falsa, y argumente brevemente el porqué de su respuesta.

a. $\int \tan \theta \sec^2 \theta\, d\theta = \frac{\sec^3 \theta}{3} + C$

b. $\int \tan \theta \sec^2 \theta\, d\theta = \frac{1}{2} \tan^2 \theta + C$

c. $\int \tan \theta \sec^2 \theta\, d\theta = \frac{1}{2} \sec^2 \theta + C$

63. Determine si cada una de las siguientes fórmulas es cierta o falsa, y argumente brevemente el porqué de su respuesta.

a. $\int (2x + 1)^2\, dx = \frac{(2x + 1)^3}{3} + C$

b. $\int 3(2x + 1)^2\, dx = (2x + 1)^3 + C$

c. $\int 6(2x + 1)^2\, dx = (2x + 1)^3 + C$

64. Determine si cada una de las siguientes fórmulas es cierta o falsa, y argumente brevemente el porqué de su respuesta.

a. $\int \sqrt{2x + 1}\, dx = \sqrt{x^2 + x + C}$

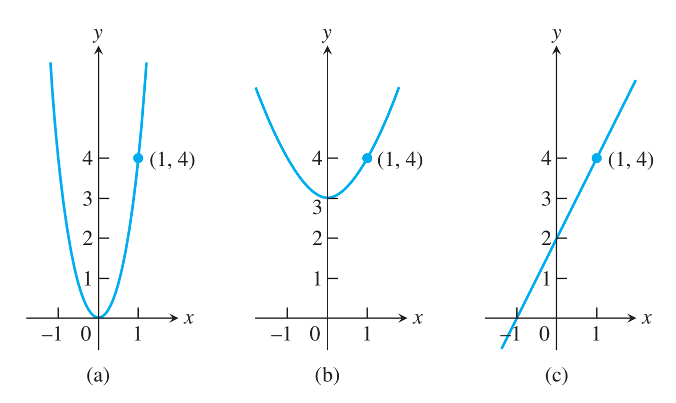
b. $\int \sqrt{2x + 1}\, dx = \sqrt{x^2 + x} + C$

c. $\int \sqrt{2x + 1}\, dx = \frac{1}{3}\left(\sqrt{2x + 1}\right)^3 + C$

Problemas de valor inicial

65. ¿Cuál de las siguientes gráficas muestra la solución del problema de valor inicial

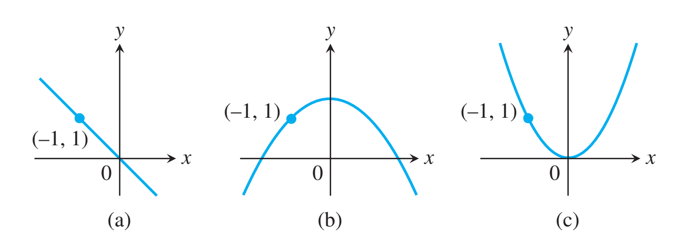
$$\frac{dy}{dx} = 2x, \quad y = 4 \text{ cuando } x = 1\,?$$



Justifique sus respuestas.

66. ¿Cuál de las siguientes gráficas muestra la solución del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = -x, \quad y = 1 \text{ cuando } x = -1\,?$$



Justifique sus respuestas.

Resuelva los problemas de valor inicial de los ejercicios 67 a 86.

67. $\dfrac{dy}{dx} = 2x - 7, \quad y(2) = 0$

68. $\dfrac{dy}{dx} = 10 - x, \quad y(0) = -1$

69. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x^2} + x, \quad x > 0; \quad y(2) = 1$

70. $\dfrac{dy}{dx} = 9x^2 - 4x + 5, \quad y(-1) = 0$

71. $\dfrac{dy}{dx} = 3x^{-2/3}, \quad y(-1) = -5$

72. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, \quad y(4) = 0$

73. $\dfrac{ds}{dt} = 1 + \cos t, \quad s(0) = 4$

74. $\dfrac{ds}{dt} = \cos t + \operatorname{sen} t, \quad s(\pi) = 1$

75. $\dfrac{dr}{d\theta} = -\pi \operatorname{sen} \pi\theta, \quad r(0) = 0$

76. $\dfrac{dr}{d\theta} = \cos \pi\theta, \quad r(0) = 1$

77. $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{1}{2}\sec t \tan t, \quad v(0) = 1$

78. $\dfrac{dv}{dt} = 8t + \csc^2 t, \quad v\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -7$

79. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 2 - 6x; \quad y'(0) = 4, \quad y(0) = 1$

80. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0; \quad y'(0) = 2, \quad y(0) = 0$

81. $\dfrac{d^2r}{dt^2} = \dfrac{2}{t^3}; \quad \left.\dfrac{dr}{dt}\right|_{t=1} = 1, \quad r(1) = 1$

82. $\dfrac{d^2s}{dt^2} = \dfrac{3t}{8}; \quad \left.\dfrac{ds}{dt}\right|_{t=4} = 3, \quad s(4) = 4$

83. $\dfrac{d^3y}{dx^3} = 6; \quad y''(0) = -8, \quad y'(0) = 0, \quad y(0) = 5$

84. $\dfrac{d^3\theta}{dt^3} = 0; \quad \theta''(0) = -2, \quad \theta'(0) = -\dfrac{1}{2}, \quad \theta(0) = \sqrt{2}$

85. $y^{(4)} = -\operatorname{sen} t + \cos t;$
$y'''(0) = 7, \quad y''(0) = y'(0) = -1, \quad y(0) = 0$

86. $y^{(4)} = -\cos x + 8 \operatorname{sen} 2x;$
$y'''(0) = 0, \quad y''(0) = y'(0) = 1, \quad y(0) = 3$

Determinación de curvas

87. Encuentre, en el *plano* xy, la curva $y = f(x)$ que pasa por el punto (9, 4) y cuya pendiente en cada punto es $3\sqrt{x}$.

88. a. Encuentre una curva $y = f(x)$ con las siguientes propiedades:

i) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 6x$

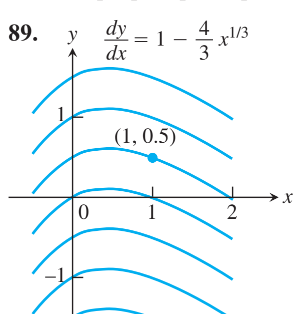
ii) Que su gráfica pase por el punto (0, 1) y tenga una tangente horizontal ahí.

b. ¿Cuántas curvas como ésta hay? ¿Cómo lo sabe?

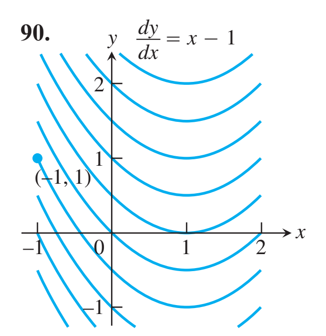
Curvas solución (integrales)

En los ejercicios 89 a 92, se muestran las curvas solución de las ecuaciones diferenciales. Encuentre, en cada ejercicio, una ecuación para la curva que pasa por el punto marcado.

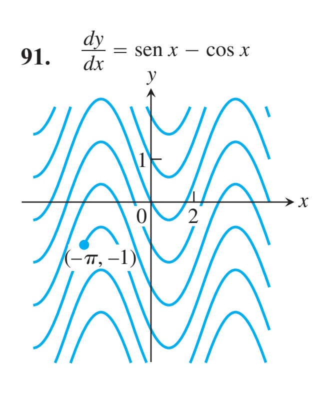
89. $\dfrac{dy}{dx} = 1 - \dfrac{4}{3}x^{1/3}$



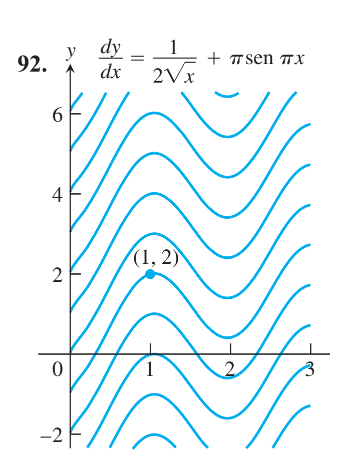
90. $\dfrac{dy}{dx} = x - 1$



91. $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{sen} x - \cos x$



92. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \pi \operatorname{sen} \pi x$



Aplicaciones

93. Encuentre el desplazamiento a partir de una antiderivada de la velocidad

a. Suponga que la velocidad de un cuerpo que se mueve a lo largo del eje s es

$$\frac{ds}{dt} = v = 9.8t - 3.$$

i) Encuentre el desplazamiento del cuerpo en el intervalo de tiempo de $t = 1$ a $t = 3$, dado que $s = 5$ cuando $t = 0$.

ii) Encuentre el desplazamiento del cuerpo, de $t = 1$ a $t = 3$, dado que $s = -2$ cuando $t = 0$.

iii) Ahora encuentre el desplazamiento del cuerpo, de $t = 1$ a $t = 3$, dado que $s = s_0$ cuando $t = 0$.

b. Suponga que la posición s del cuerpo que se mueve a lo largo de una recta coordenada es una función diferenciable del tiempo t. ¿Es cierto que una vez que se conoce una antiderivada de la función velocidad ds/dt es posible encontrar el desplazamiento del cuerpo de $t = a$ a $t = b$, aun si no se conoce la posición exacta del cuerpo en ninguno de esos tiempos? Justifique su respuesta.

94. Elevación desde la Tierra Un cohete se eleva desde la superficie de la Tierra con una aceleración constante de 20 m/seg^2. ¿Qué tan rápido irá el cohete 1 min después?

95. Frenado oportuno de un automóvil Usted está conduciendo su automóvil a 60 millas/hora (88 pies/seg) constantes por una carretera, cuando ve un accidente adelante y frena de golpe. ¿Qué desaceleración constante se requiere para detener su automóvil en 242 pies? Para averiguarlo, lleve a cabo los pasos siguientes.

1. Resuelva el problema de valor inicial

Ecuación diferencial: $\dfrac{d^2s}{dt^2} = -k \qquad (k \text{ constante})$

Condiciones iniciales: $\dfrac{ds}{dt} = 88 \text{ y } s = 0 \text{ cuando } t = 0.$

Medir el tiempo y la distancia desde que se pisaron los frenos.

2. Encuentre los valores de t que hacen $ds/dt = 0$. (La respuesta involucrará a k).

3. Encuentre el valor de k que hace $s = 242$ para el valor de t que encontró en el paso 2.

96. Frenado de una motocicleta El programa "Motociclista seguro" que pusieron en práctica las autoridades del estado de Illinois exige a los motociclistas que sean capaces de frenar de 30 millas/hora (44 pies/seg) a 0 en 45 pies. ¿Qué desaceleración constante se requiere para lograrlo?

97. Movimiento a lo largo de una recta coordenada Una partícula se mueve sobre una recta coordenada con aceleración $a = d^2s/dt^2 = 15\sqrt{t} - (3/\sqrt{t})$, sujeta a las condiciones $ds/dt = 4$ y $s = 0$ cuando $t = 1$. Encuentre

a. la velocidad $v = ds/dt$ en términos de t.

b. la posición s en términos de t.

T **98. El martillo y la pluma** Cuando el astronauta del *Apolo 15* David Scott dejó caer un martillo y una pluma en la Luna para demostrar que en el vacío todos los cuerpos caen con la misma aceleración (constante), lo hizo desde una altura aproximada de 4 pies respecto del nivel del suelo. La película del evento que se exhibió por televisión muestra que el martillo y la pluma caen más despacio que en la Tierra, en donde tales objetos tardarían sólo medio segundo en caer los 4 pies en el vacío. ¿Cuánto tiempo tardaron en caer los 4 pies el martillo y la pluma en la Luna? Para averiguarlo, resuelva el problema de valor inicial siguiente para s como una función de t. Después encuentre el valor de t que hace a s igual a 0.

Ecuación diferencial: $\dfrac{d^2s}{dt^2} = -5.2 \text{ pies/seg}^2$

Condiciones iniciales: $\dfrac{ds}{dt} = 0 \text{ y } s = 4 \text{ cuando } t = 0$

99. Movimiento con aceleración constante La ecuación estándar para la posición s de un cuerpo que se mueve con aceleración constante a lo largo de una recta coordenada es

$$s = \frac{a}{2}t^2 + v_0 t + s_0, \tag{1}$$

donde v_0 y s_0 son la velocidad y la posición del cuerpo en el tiempo $t = 0$. Deduzca esta ecuación resolviendo el problema de valor inicial

Ecuación diferencial: $\dfrac{d^2s}{dt^2} = a$

Condiciones iniciales: $\dfrac{ds}{dt} = v_0 \text{ y } s = s_0 \text{ cuando } t = 0.$

100. Caída libre cerca de la superficie de un planeta En el caso de una caída libre cerca de la superficie de un planeta donde la aceleración debida a la gravedad tiene una magnitud constante de g unidades de longitud/seg^2, la ecuación (1) del ejercicio 99 toma la forma

$$s = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + s_0, \tag{2}$$

donde s es la altura del cuerpo por encima de la superficie. La ecuación tiene un signo menos porque la aceleración actúa hacia abajo, en la dirección de decrecimiento de s. La velocidad v_0 es positiva si el objeto se eleva en el tiempo $t = 0$, y negativa si el objeto cae.

En lugar de usar el resultado del ejercicio 99, puede obtener la ecuación (2) directamente resolviendo un problema de valor inicial apropiado. ¿Cuál sería dicho problema? Resuélvalo para asegurarse de que es correcta, y explique los pasos que va realizando para encontrar la solución.

Teoría y ejemplos

101. Suponga que

$$f(x) = \frac{d}{dx}\left(1 - \sqrt{x}\right) \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{d}{dx}(x + 2).$$

Encuentre

a. $\displaystyle\int f(x)\,dx$

b. $\displaystyle\int g(x)\,dx$

c. $\displaystyle\int [-f(x)]\,dx$

d. $\displaystyle\int [-g(x)]\,dx$

e. $\displaystyle\int [f(x) + g(x)]\,dx$

f. $\displaystyle\int [f(x) - g(x)]\,dx$

102. Unicidad de las soluciones Si tanto la función diferenciable $y = F(x)$ como la función diferenciable $y = G(x)$ resuelven el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \qquad y(x_0) = y_0,$$

en un intervalo I, ¿debe $F(x) = G(x)$ para toda x en I? Justifique su respuesta.

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

Use un software matemático para resolver los problemas de valor inicial de los ejercicios 103 a 106. Trace las curvas solución.

103. $y' = \cos^2 x + \operatorname{sen} x, \quad y(\pi) = 1$

104. $y' = \dfrac{1}{x} + x, \quad y(1) = -1$

105. $y' = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2}}, \quad y(0) = 2$

106. $y'' = \dfrac{2}{x} + \sqrt{x}, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 0$

Capítulo 4 Preguntas de repaso

1. ¿Qué se puede decir acerca de los valores extremos de una función continua en un intervalo cerrado?
2. ¿Qué significa que una función tenga un valor extremo local en su dominio? ¿Qué quiere decir que tenga un valor extremo absoluto? ¿Cómo se relacionan los valores extremos locales y absolutos si es que existe tal relación? Dé ejemplos.
3. ¿Cómo se encuentran los extremos absolutos de una función continua en un intervalo cerrado? Dé ejemplos.
4. ¿Cuáles son las hipótesis y las conclusiones del teorema de Rolle? ¿Las hipótesis son realmente necesarias? Explique.
5. ¿Cuáles son las hipótesis y las conclusiones del teorema del valor medio? ¿Qué interpretaciones físicas puede tener dicho teorema?
6. Formule los tres corolarios del teorema del valor medio.
7. ¿Cómo es posible identificar (algunas veces) una función $f(x)$ conociendo f' y el valor de f en un punto $x = x_0$? Dé ejemplos.
8. ¿Cuál es la prueba de la primera derivada para valores extremos locales? Dé ejemplos de su aplicación.
9. ¿Cómo se puede examinar una función dos veces diferenciable para determinar el punto en donde su gráfica es cóncava hacia arriba o hacia abajo? Dé ejemplos.
10. ¿Qué es un punto de inflexión? Dé un ejemplo. ¿Qué significado físico pueden tener los puntos de inflexión?
11. ¿Cuál es la prueba de la segunda derivada para valores extremos locales? Dé ejemplos de su aplicación.
12. ¿Qué nos dice la derivada de una función respecto de la forma de su gráfica?
13. Haga una lista de los pasos que deben seguirse para graficar una función polinomial. Ilustre con un ejemplo.
14. ¿Qué es una cúspide? Dé ejemplos.
15. Haga una lista de los pasos que deben seguirse para graficar una función racional. Ilustre con un ejemplo.
16. Describa una estrategia general para resolver problemas de máximos y mínimos. Dé ejemplos.
17. Describa la regla de L'Hôpital. ¿Cómo sabemos cuándo usar dicha regla y cuándo detenernos? Dé un ejemplo.
18. ¿Cómo se pueden manipular los límites que nos conducen a las formas indeterminadas ∞/∞, $\infty \cdot 0$, y $\infty - \infty$? Dé ejemplos.
19. Describa el método de Newton para resolver ecuaciones. Dé un ejemplo. ¿Cuál es la teoría que está detrás del método? ¿En qué debe tenerse cuidado al usar este método?
20. ¿Una función puede tener más de una antiderivada? De ser así, ¿cómo se relacionan las antiderivadas? Explique.
21. ¿Qué es una integral indefinida? ¿Cómo se puede evaluar? ¿Qué fórmulas generales conoce para encontrar las integrales indefinidas?
22. ¿Cómo se puede resolver una ecuación diferencial de la forma $dy/dx = f(x)$?
23. ¿Qué es un problema de valor inicial? ¿Cómo se resuelve? Dé un ejemplo.
24. Además de la aceleración de un cuerpo que se mueve a lo largo de una recta coordenada como una función del tiempo, ¿qué se necesita saber para encontrar la función posición del cuerpo? Dé un ejemplo.

Capítulo 4 Ejercicios de práctica

Existencia de valores extremos

1. ¿$f(x) = x^3 + 2x + \tan x$ tiene algún valor máximo o mínimo local? Justifique su respuesta.
2. ¿$g(x) = \csc x + 2 \cot x$ tiene algún valor máximo local? Justifique su respuesta.
3. ¿$f(x) = (7 + x)(11 - 3x)^{1/3}$ tiene algún valor mínimo absoluto? ¿Tiene un máximo absoluto? De ser así, encuéntrelos o explique por qué no existen. Haga una lista de todos los puntos críticos.

4. Encuentre los valores de a y b tales que la función

$$f(x) = \frac{ax + b}{x^2 - 1}$$

tenga un valor extremo local de 1 en $x = 3$. ¿El valor extremo es un máximo local o un mínimo local? Justifique su respuesta.

5. La función mayor entero $f(x) = \lfloor x \rfloor$, definida para todo valor de x, alcanza un valor máximo local de 0 en cada punto de [0, 1). ¿Alguno de estos valores máximos locales puede ser también valor mínimo local de f? Justifique su respuesta.

6. a. Dé un ejemplo de una función diferenciable f cuya primera derivada sea cero en algún punto c, a pesar de que f no tenga ni máximo ni mínimo local en c.

b. ¿Por qué esto es consistente con el teorema 2 de la sección 4.1? Justifique su respuesta

7. La función $y = 1/x$ no alcanza un máximo ni un mínimo en el intervalo $0 < x < 1$ a pesar de que la función es continua en este intervalo. ¿Contradice esto el teorema del valor extremo para funciones continuas? ¿Por qué?

8. ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo de la función $y = |x|$ en el intervalo $-1 \leq x < 1$? Observe que el intervalo no es cerrado. ¿Contradice esto el teorema del valor extremo para funciones continuas? ¿Por qué?

T **9.** Una gráfica lo suficientemente grande para mostrar el comportamiento global de una función podría no revelar características locales importantes. La gráfica de $f(x) = (x^8/8) - (x^6/2) - x^5 + 5x^3$ es un ejemplo de esta situación.

a. Grafique f en el intervalo $-2.5 \leq x \leq 2.5$. ¿En dónde parece que la gráfica tiene valores extremos locales o puntos de inflexión?

b. Ahora factorice $f'(x)$ y demuestre que f tiene un máximo local en $x = \sqrt[3]{5} \approx 1.70998$ y un mínimo local en $x = \pm\sqrt{3} \approx \pm 1.73205$.

c. Haga un acercamiento a la gráfica para encontrar una ventana de visualización que muestre la presencia de valores extremos en $x = \sqrt[3]{5}$ y $x = \sqrt{3}$.

La moraleja es que, sin cálculo, la existencia de dos de los tres valores extremos podría haber pasado inadvertida. En cualquier gráfica normal de la función, los valores estarán suficientemente juntos para caer en las dimensiones de un solo píxel de la pantalla.

(*Fuente: Uses of Technology in the Mathematics Curriculum,* de Benny Evans y Jerry Johnson, Oklahoma State University, publicado en 1990 bajo el auspicio de National Science Foundation Grant USE-8950044).

T **10.** (*Continuación del ejercicio 9*).

a. Grafique $f(x) = (x^8/8) - (2/5)x^5 - 5x - (5/x^2) + 11$ en el intervalo $-2 \leq x \leq 2$. ¿En dónde parece que la gráfica tiene valores extremos locales o puntos de inflexión?

b. Pruebe que f tiene un valor máximo local en $x = \sqrt[7]{5} \approx 1.2585$ y un valor mínimo local en $x = \sqrt[3]{2} \approx 1.2599$.

c. Haga un acercamiento en la gráfica para encontrar una ventana de visualización que muestre la presencia de valores extremos en $x = \sqrt[7]{5}$ y $x = \sqrt[3]{2}$.

Teorema del valor medio

11. a. Demuestre que $g(t) = \operatorname{sen}^2 t - 3t$ decrece en todo intervalo de su dominio.

b. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $\operatorname{sen}^2 t - 3t = 5$? Justifique su respuesta.

12. a. Pruebe que $y = \tan\theta$ crece en todo intervalo de su dominio.

b. Si la conclusión a que llegó en el inciso (a) realmente es correcta, ¿cómo explica el hecho que $\tan \pi = 0$ es menor que tan $\tan(\pi/4) = 1$?

13. a. Demuestre que la ecuación $x^4 + 2x^2 - 2 = 0$ tiene exactamente una solución en [0, 1].

T **b.** Encuentre la solución con tantos lugares decimales como pueda.

14. a. Demuestre que $f(x) = x/(x + 1)$ crece en todo intervalo de su dominio.

b. Pruebe que $f(x) = x^3 + 2x$ no tiene valores máximo ni mínimo locales.

15. Agua en un depósito Como resultado de una lluvia intensa, el volumen de agua en un depósito creció 1400 acres-pie en 24 horas. Pruebe que en algún instante durante ese periodo el volumen del depósito estaba creciendo a una razón mayor de 225,000 galones/min. (Un acre-pie equivale a 43,560 pies^3, el volumen que cubriría 1 acre con una profundidad de 1 pie. Un pie cúbico es igual a 7.48 galones).

16. La fórmula $F(x) = 3x + C$ da una función distinta por cada valor de C. Sin embargo, todas estas funciones tienen la misma derivada respecto de x, a saber, $F'(x) = 3$. ¿Éstas son las únicas funciones diferenciables cuya derivada es 3? ¿Podría haber otras? Justifique sus respuestas.

17. Pruebe que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{x+1}\right)$$

a pesar de que

$$\frac{x}{x+1} \neq -\frac{1}{x+1}.$$

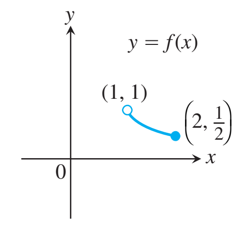
¿Contradice esto el corolario 2 del teorema del valor medio? Justifique su respuesta.

18. Calcule las primeras derivadas de $f(x) = x^2/(x^2 + 1)$ y $g(x) = -1/(x^2 + 1)$. ¿Qué puede concluir acerca de las gráficas de estas funciones?

Conclusiones a partir de las gráficas

En los ejercicios 19 y 20, use la gráfica para contestar las preguntas.

19. Identifique cualesquiera valores extremos locales de f, y los valores de x en donde aquellos se alcanzan.

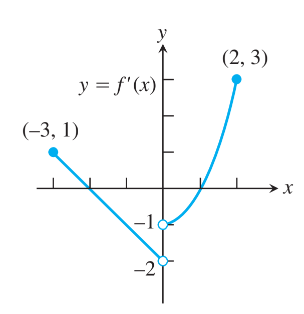


20. Estime los intervalos en los que la función $y = f(x)$ es

a. creciente.

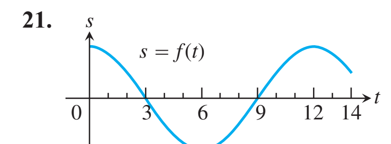
b. decreciente.

c. Use la gráfica dada de f' para indicar en dónde se alcanzan los valores extremos locales de la función, y diga si cada extremo es un máximo o un mínimo relativo.

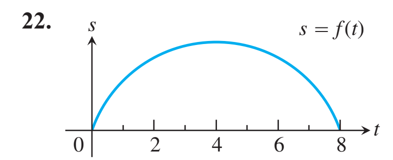


Cada una de las gráficas de los ejercicios 21 y 22 es la gráfica de la función posición $s = f(t)$ de un cuerpo en movimiento sobre una recta coordenada (t representa el tiempo). En qué momento aproximadamente **(a)** ¿la velocidad del cuerpo es igual a cero?, **(b)** ¿la aceleración del cuerpo es igual a cero? ¿Durante qué intervalos se mueve el cuerpo **(c)** hacia adelante?, **(d)** ¿hacia atrás?

21.



22.



Gráficas y graficación

Grafique las curvas de los ejercicios 23 a 32.

23. $y = x^2 - (x^3/6)$

24. $y = x^3 - 3x^2 + 3$

25. $y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 3$

26. $y = (1/8)(x^3 + 3x^2 - 9x - 27)$

27. $y = x^3(8 - x)$

28. $y = x^2(2x^2 - 9)$

29. $y = x - 3x^{2/3}$

30. $y = x^{1/3}(x - 4)$

31. $y = x\sqrt{3 - x}$

32. $y = x\sqrt{4 - x^2}$

Cada uno de los ejercicios 33 a 38 da la primera derivada de una función $y = f(x)$. **(a)** ¿En qué puntos, si hay alguno, la gráfica de f tiene un máximo local, un mínimo local o un punto de inflexión? **(b)** Dibuje la forma general de la gráfica.

33. $y' = 16 - x^2$

34. $y' = x^2 - x - 6$

35. $y' = 6x(x + 1)(x - 2)$

36. $y' = x^2(6 - 4x)$

37. $y' = x^4 - 2x^2$

38. $y' = 4x^2 - x^4$

En los ejercicios 39 a 42, grafique cada función. Después use la primera derivada de la función para explicar lo que observa.

39. $y = x^{2/3} + (x - 1)^{1/3}$

40. $y = x^{2/3} + (x - 1)^{2/3}$

41. $y = x^{1/3} + (x - 1)^{1/3}$

42. $y = x^{2/3} - (x - 1)^{1/3}$

Grafique las funciones de los ejercicios 43 a 50.

43. $y = \dfrac{x + 1}{x - 3}$

44. $y = \dfrac{2x}{x + 5}$

45. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x}$

46. $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x}$

47. $y = \dfrac{x^3 + 2}{2x}$

48. $y = \dfrac{x^4 - 1}{x^2}$

49. $y = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 3}$

50. $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$

Aplicación de la regla de L’Hôpital

Use la regla de L’Hôpital para encontrar los límites en los ejercicios 51 a 62.

51. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 3x - 4}{x - 1}$

52. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^a - 1}{x^b - 1}$

53. $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\tan x}{x}$

54. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x + \operatorname{sen} x}$

55. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\tan(x^2)}$

56. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} mx}{\operatorname{sen} nx}$

57. $\lim\limits_{x \to \pi/2^-} \sec 7x \cos 3x$

58. $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} \sec x$

59. $\lim\limits_{x \to 0} (\csc x - \cot x)$

60. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x^4} - \dfrac{1}{x^2}\right)$

61. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x}\right)$

62. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^3}{x^2 - 1} - \dfrac{x^3}{x^2 + 1}\right)$

Optimización

63. La suma de dos números no negativos es 36. Encuentre los números si

a. la diferencia de sus raíces cuadradas debe ser lo más grande posible.

b. la suma de sus raíces cuadradas debe ser lo más grande posible.

64. La suma de dos números no negativos es 20. Encuentre los números

a. si el producto de uno de ellos multiplicado por la raíz cuadrada del otro debe ser lo más grande posible.

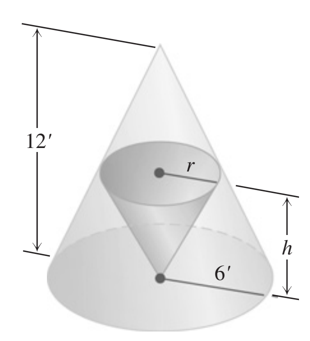
b. si la suma de uno de ellos más la raíz cuadrada del otro debe ser lo más grande posible.

65. Un triángulo isósceles tiene un vértice en el origen y su base paralela al eje x con los vértices arriba del eje en la curva $y = 27 - x^2$. Encuentre el área máxima que puede tener el triángulo.

66. Un cliente le pide que diseñe un recipiente rectangular abierto de acero. Éste debe tener base cuadrada y un volumen de 32 pies^3, debe construirse usando una placa de un cuarto de pulgada, y no debe pesar más de lo necesario. ¿Qué dimensiones recomienda?

67. Encuentre la altura y el radio del cilindro circular recto más grande que se pueda colocar en una esfera de radio $\sqrt{3}$.

68. La figura muestra dos conos circulares rectos, uno boca abajo dentro del otro. Las dos bases son paralelas, y el vértice del cono menor cae en el centro de la base del cono mayor. ¿Qué valores de r y h darán al cono menor el mayor volumen posible?



69. Fabricación de llantas La compañía en donde usted trabaja puede fabricar x cientos de llantas de calidad A y y cientos de llantas de calidad B al día, donde $0 \leq x \leq 4$ y

$$y = \frac{40 - 10x}{5 - x}.$$

La utilidad que recibe la compañía por la venta de las llantas de calidad A es dos veces la que obtiene por la venta de llantas de calidad B. ¿Cuáles son las cantidades de cada una que maximizan la ganancia?

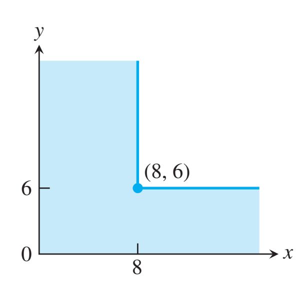
70. Movimiento de una partícula Las posiciones de dos partículas en el eje s son $s_1 = \cos t$ y $s_2 = \cos(t + \pi/4)$.

a. ¿Cuál es la mayor distancia que puede haber entre las partículas?

b. ¿Cuándo chocan las dos partículas?

T **71. Caja abierta** Una caja abierta rectangular se construye con una pieza de cartón de 10 por 16 pulgadas, cortando cuadrados con la misma longitud de lado de las esquinas, y doblando los lados hacia arriba. Encuentre analíticamente las dimensiones de la caja del mayor volumen y el máximo volumen. Justifique sus respuestas gráficamente.

72. El problema de la escalera ¿Cuál es la longitud (en pies) aproximada de la escalera más larga que se puede transportar horizontalmente alrededor de la esquina del corredor que se muestra aquí? Redondee su respuesta hacia abajo, al pie más cercano.



Método de Newton

73. Sea $f(x) = 3x - x^3$. Demuestre que la ecuación $f(x) = -4$ tiene una solución en el intervalo [2, 3], y use el método de Newton para encontrarla.

74. Sea $f(x) = x^4 - x^3$. Pruebe que la ecuación $f(x) = 75$ tiene una solución en el intervalo [3, 4], y use el método de Newton para encontrarla.

Determinación de integrales indefinidas

Encuentre las integrales indefinidas (las antiderivadas más generales) en los ejercicios 75 a 90. Verifique sus respuestas mediante derivación.

75. $\int (x^3 + 5x - 7)\, dx$

76. $\int \left(8t^3 - \frac{t^2}{2} + t\right) dt$

77. $\int \left(3\sqrt{t} + \frac{4}{t^2}\right) dt$

78. $\int \left(\frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{3}{t^4}\right) dt$

79. $\int \frac{dr}{(r + 5)^2}$

80. $\int \frac{6\, dr}{\left(r - \sqrt{2}\right)^3}$

81. $\int 3\theta\sqrt{\theta^2 + 1}\, d\theta$

82. $\int \frac{\theta}{\sqrt{7 + \theta^2}}\, d\theta$

83. $\int x^3(1 + x^4)^{-1/4}\, dx$

84. $\int (2 - x)^{3/5}\, dx$

85. $\int \sec^2 \frac{s}{10}\, ds$

86. $\int \csc^2 \pi s\, ds$

87. $\int \csc \sqrt{2}\theta \cot \sqrt{2}\theta\, d\theta$

88. $\int \sec \frac{\theta}{3} \tan \frac{\theta}{3}\, d\theta$

89. $\int \operatorname{sen}^2 \frac{x}{4}\, dx$

90. $\int \cos^2 \frac{x}{2}\, dx$ $\left(\textit{Sugerencia}: \cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right)$

Problemas de valor inicial

Resuelva los problemas de valor inicial de los ejercicios 91 a 94.

91. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 1}{x^2}, \quad y(1) = -1$

92. $\frac{dy}{dx} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2, \quad y(1) = 1$

93. $\frac{d^2r}{dt^2} = 15\sqrt{t} + \frac{3}{\sqrt{t}}; \quad r'(1) = 8, \quad r(1) = 0$

94. $\frac{d^3r}{dt^3} = -\cos t; \quad r''(0) = r'(0) = 0, \quad r(0) = -1$

Capítulo 4 Ejercicios adicionales y avanzados

1. ¿Qué puede decir acerca de una función cuyos valores máximo y mínimo en un intervalo son iguales? Justifique su respuesta.

2. ¿Es cierto que una función discontinua no puede tener tanto un valor máximo absoluto como un mínimo absoluto en un intervalo cerrado? Justifique su respuesta.

3. ¿Es posible concluir algo acerca de los valores extremos de una función continua en un intervalo abierto? ¿En un intervalo semiabierto? Justifique su respuesta.

4. **Extremos locales** Use el patrón de signos de la derivada

$$\frac{df}{dx} = 6(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$$

para identificar los puntos dónde f tiene valores máximos y mínimos locales.

5. **Extremos locales**

   a. Suponga que la primera derivada de $y = f(x)$ es

$$y' = 6(x+1)(x-2)^2.$$

   ¿En qué puntos, si hay alguno, la gráfica de f tiene un máximo local, un mínimo local o un punto de inflexión?

   b. Suponga que la primera derivada de $y = f(x)$ es

$$y' = 6x(x+1)(x-2).$$

   ¿En qué puntos, si hay alguno, la gráfica de f tiene un máximo local, un mínimo local o un punto de inflexión?

6. Si $f'(x) \leq 2$ para toda x, ¿cuánto es lo más que pueden crecer los valores de f en [0, 6]? Justifique su respuesta.

7. **Acotamiento de una función** Suponga que f es continua en $[a, b]$ y que c es un punto interior del intervalo. Demuestre que si $f'(x) \leq 0$ en $[a, c)$ y $f'(x) \geq 0$ en $(c, b]$, entonces $f(x)$ nunca es menor que $f(c)$ en $[a, b]$.

8. **Una desigualdad**

   a. Demuestre que $-1/2 \leq x/(1+x^2) \leq 1/2$ para todo valor de x.

   b. Suponga que f es una función cuya derivada es $f'(x) = x/(1+x^2)$. Use el resultado del inciso (a) para probar que

$$\left|f(b) - f(a)\right| \leq \frac{1}{2}\left|b - a\right|$$

   para cualesquiera a y b.

9. La derivada de $f(x) = x^2$ es cero en $x = 0$, pero f no es una función constante. ¿Contradice esto el corolario del teorema del valor medio que dice que las funciones con derivada cero son constantes? Justifique su respuesta.

10. **Puntos extremos y de inflexión** Sea $h = fg$ el producto de dos funciones diferenciables de x.

    a. Si f y g son positivas, con máximos locales en $x = a$, y si f' y g' cambian de signo en a, ¿h tiene un máximo local en a?

    b. Si las gráficas de f y g tienen puntos de inflexión en $x = a$, ¿la gráfica de h tiene un punto de inflexión en a?

    Si cualquiera de sus respuestas es afirmativa, demuéstrelo. Si la respuesta es negativa, dé un contraejemplo.

11. **Determinación de una función** Use la información siguiente para encontrar los valores de a, b y c en la fórmula $f(x) = (x+a)/(bx^2 + cx + 2)$.

    i) Los valores de a, b y c son 0 o 1.

    ii) La gráfica de f pasa por el punto $(-1, 0)$.

    iii) La recta $y = 1$ es una asíntota de la gráfica de f.

12. **Tangente horizontal** ¿Para qué valor o valores de la constante k la curva $y = x^3 + kx^2 + 3x - 4$ tiene exactamente una tangente horizontal?

13. **El mayor triángulo inscrito** Los puntos A y B están en los extremos de un diámetro del círculo unitario, y el punto C está en la circunferencia. ¿Es cierto que el área del triángulo ABC es la mayor cuando el triángulo es isósceles? ¿Cómo lo sabe?

14. **Demostración de la prueba de la segunda derivada** La prueba de la segunda derivada para máximos y mínimos locales (sección 4.4) dice:

    a. f tiene un valor máximo local en $x = c$ si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$

    b. f tiene un valor mínimo local en $x = c$ si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$.

    Para probar el enunciado (a), haga $\epsilon = (1/2)|f''(c)|$. Después use el hecho de que

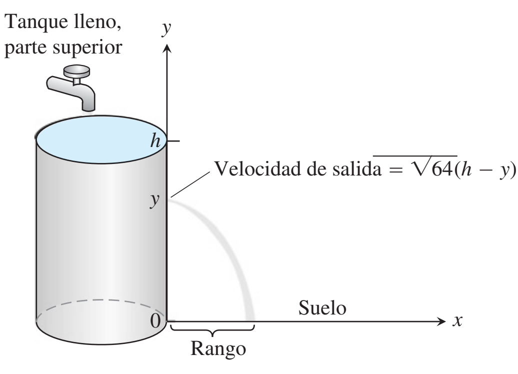
$$f''(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(c+h) - f'(c)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f'(c+h)}{h}$$

    para concluir que para algún $\delta > 0$,

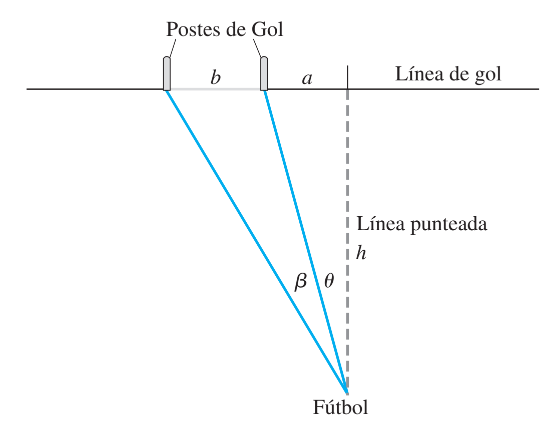
$$0 < |h| < \delta \quad \Rightarrow \quad \frac{f'(c+h)}{h} < f''(c) + \epsilon < 0.$$

    Por lo tanto, $f'(c+h)$ es positiva para $-\delta < h < 0$ y negativa para $0 < h < \delta$. Pruebe el enunciado (b) de manera similar.

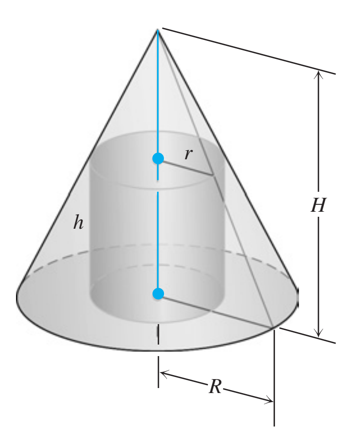
15. **Agujero en un tanque de agua** Se quiere taladrar un agujero en el lado del tanque que se muestra aquí, a una altura que haga que el flujo de agua que sale pegue en el suelo lo más lejos posible del tanque. Si se taladra el agujero cerca de la parte superior, donde la presión es baja, el agua saldrá lentamente pero estará un tiempo relativamente largo en el aire. Si se taladra el agujero cerca de la base, el agua saldrá con mayor velocidad pero tendrá poco tiempo para caer. ¿Cuál es el mejor lugar, si lo hay, para hacer el agujero? (*Sugerencia:* ¿Cuánto tiempo tardará una partícula de agua que sale en caer de la altura y hasta el suelo?)



16. Gol de campo Un jugador de fútbol americano quiere patear un gol de campo con el balón colocado en la línea punteada de la derecha. Suponga que los postes del marco de anotación distan b pies entre ellos y la línea punteada está a una distancia $a > 0$ pies del poste derecho del marco. (Vea la figura.) Encuentre la distancia h desde el marco de anotación que le da al pateador el mayor ángulo β de tiro. Suponga que el campo de fútbol es plano.



17. Un problema de máximos y mínimos con una respuesta variable Algunas veces la solución de un problema de máximos y mínimos depende de las proporciones de la figura involucrada. Por ejemplo, suponga que un cilindro circular recto de radio r y altura h está inscrito en un cono circular recto de radio R y altura H, como se muestra aquí. Encuentre el valor de r (en términos de R y H) que maximice el área superficial total del cilindro (incluyendo las tapas superior e inferior). Como verá, la solución depende de si $H \leq 2R$ o $H > 2R$.



18. Minimización de un parámetro Encuentre el valor mínimo de la constante positiva m que hará $mx - 1 + (1/x)$ mayor que o igual a cero para todo valor positivo de x.

19. Evalúe los límites siguientes.

a. $\lim_{x\to 0} \dfrac{2 \operatorname{sen} 5x}{3x}$ **b.** $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} 5x \cot 3x$

c. $\lim_{x\to 0} x \csc^2 \sqrt{2x}$ **d.** $\lim_{x\to \pi/2} (\sec x - \tan x)$

e. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x - \tan x}$ **f.** $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x^2}{x \operatorname{sen} x}$

g. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sec x - 1}{x^2}$ **h.** $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$

20. La regla de L'Hôpital no ayuda a determinar los límites siguientes. Encuéntrelos de alguna otra manera.

a. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x}+5}$ **b.** $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x}{x+7\sqrt{x}}$

21. Suponga que a una compañía le cuesta $y = a + bx$ dólares producir x unidades por semana. Puede vender x unidades por semana a un precio de $P = c - ex$ dólares por unidad. a, b, c y e representan constantes positivas. **(a)** ¿Qué nivel de producción maximiza la utilidad? **(b)** ¿Cuál es el precio correspondiente? **(c)** ¿Cuál es la utilidad semanal con este nivel de producción? **(d)** ¿A qué precio debe venderse cada artículo para maximizar las ganancias si el gobierno impone un gravamen de t dólares por artículo vendido? Comente la diferencia entre este precio y el precio antes del impuesto.

22. Estimación de recíprocos sin división Es posible estimar el valor del recíproco de un número a sin dividir entre a si se aplica el método de Newton a la función $f(x) = (1/x) - a$. Por ejemplo, si $a = 3$, la función involucrada es $f(x) = (1/x) - 3$.

a. Grafique $y = (1/x) - 3$. ¿En dónde cruza la gráfica el eje x?

b. Demuestre que, en este caso, la fórmula de recursión es

$$x_{n+1} = x_n(2 - 3x_n),$$

de manera que no hay necesidad de dividir.

23. Para encontrar $x = \sqrt[q]{a}$, aplicamos el método de Newton a $f(x) = x^q - a$. Aquí suponemos que a es un número real positivo y q es un entero positivo. Demuestre que x_1 es un "promedio ponderado" de x_0 y a/x_0^{q-1}, y encuentre los coeficientes m_0, m_1 tales que

$$x_1 = m_0 x_0 + m_1\left(\frac{a}{x_0^{q-1}}\right), \qquad \begin{array}{l} m_0 > 0, m_1 > 0, \\ m_0 + m_1 = 1. \end{array}$$

¿A qué conclusión puede llegar si x_0 y a/x_0^{q-1} fueran iguales? ¿Cuál sería el valor de x_1 en ese caso?

24. La familia de rectas $y = ax + b$ (a, b constantes arbitrarias) puede ser caracterizada por la relación $y'' = 0$. Encuentre una relación similar que satisfaga la familia de todos los círculos

$$(x - h)^2 + (y - h)^2 = r^2,$$

donde h y r son constantes arbitrarias.(*Sugerencia:* Elimine h y r del conjunto de tres ecuaciones, incluyendo la dada y las dos obtenidas por derivación sucesiva).

25. Suponga que los frenos de un automóvil producen una desaceleración constante de k pies/seg^2. **(a)** Determine qué valor de k llevará a un automóvil que viaja a 60 millas/ hora (88 pies/ segundo) a detenerse en una distancia de 100 pies desde el punto donde se pisan los frenos. **(b)** Con el mismo valor de k, ¿qué tan lejos llegará un automóvil que viaja a 30 millas/hora antes de detenerse totalmente?

26. Sean $f(x)$, $g(x)$ funciones continuamente diferenciables que satisfacen las relaciones $f'(x) = g(x)$ y $f''(x) = -f(x)$. Sea $h(x) = f^2(x) + g^2(x)$. Si $h(0) = 5$, encuentre $h(10)$.

27. ¿Puede haber una curva que satisfaga las condiciones siguientes? d^2y/dx^2 es igual a 0 en todas partes, y cuando $x = 0$, $y = 0$ y $dy/dx = 1$. Justifique su respuesta.

28. Encuentre la ecuación de una curva en el plano xy que pase por el punto $(1, -1)$ si su pendiente en x siempre es $3x^2 + 2$.

29. Una partícula se mueve a lo largo del eje x. Su aceleración es $a = -t^2$. En $t = 0$, la partícula está en el origen. En el curso de su movimiento, alcanza el punto $x = b$, donde $b > 0$, pero ningún punto del otro lado de b. Determine su velocidad en $t = 0$.

30. Una partícula se mueve con aceleración $a = \sqrt{t} - \left(1/\sqrt{t}\right)$. Suponiendo que la velocidad es $v = 4/3$ y que la posición es $s = -4/15$ cuando $t = 0$, encuentre

a. la velocidad v en términos de t.

b. la posición s en términos de t.

31. Dada $f(x) = ax^2 + 2bx + c$ con $a > 0$. Considerando el mínimo, pruebe que $f(x) \geq 0$ para toda x real si y sólo si $b^2 - ac \leq 0$.

32. Desigualdad de Schwarz

a. En el ejercicio 31, sea

$$f(x) = (a_1x + b_1)^2 + (a_2x + b_2)^2 + \cdots + (a_nx + b_n)^2,$$

y deduzca la desigualdad de Schwarz:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2).$$

b. Pruebe que en la desigualdad de Schwarz la desigualdad se cumple sólo si existe un número real x que hace a_ix igual a $-b_i$ para todo valor de i de 1 a n.

Capítulo 4 Proyectos de aplicación tecnológica

Módulo Mathematica/Maple

Movimiento a lo largo de una recta: Posición → Velocidad → Aceleración

Observará la forma de una gráfica a través de visualizaciones animadas de las relaciones de la derivada entre la posición, la velocidad y la aceleración. Las figuras del texto pueden animarse.

Módulo Mathematica/Maple

Método de Newton: Estimación de π: ¿con cuántos lugares decimales?

Trace una función, observe una raíz, elija un punto inicial cerca de la raíz y use el procedimiento de iteraciones de Newton para aproximar la raíz con la exactitud deseada. Los números π, e, y $\sqrt{2}$ son aproximados.

Capítulo

5

Integración

INTRODUCCIÓN Una de las grandes hazañas de la geometría clásica, consistió en obtener fórmulas para determinar las áreas y volúmenes de triángulos, esferas y conos. En este capítulo estudiaremos un método para calcular las áreas y volúmenes de estas formas y de otras más generales. El método que desarrollaremos, llamado *integración*, es una herramienta para calcular mucho más que áreas y volúmenes. La *integral* tiene muchas aplicaciones en estadística, economía, ciencias e ingeniería. Nos permite calcular rangos de cantidades de probabilidad y promedios de consumo de energía, así como la fuerza del agua contra las compuertas de una presa.

El objetivo de la integración es permitirnos calcular efectivamente muchas cantidades, dividiéndolas en partes más pequeñas y sumando después la contribución de cada trozo. Desarrollaremos la teoría de la integral en el escenario del área, donde revela más claramente su naturaleza. Empezaremos con ejemplos que involucran sumas finitas. Éstos nos conducirán de forma natural a esta pregunta: ¿qué sucede cuando sumamos más y más términos? Pasando al límite, cuando el número de términos tiende a infinito, se obtiene la integral. Aunque la integración y la derivación están estrechamente relacionadas, hablaremos del papel que juegan la derivada y la antiderivada hasta la sección 5.4. La naturaleza de su conexión, contenida en el teorema fundamental del cálculo, es una de las ideas más importantes del cálculo.

5.1 Estimación con sumas finitas

En esta sección se muestra cómo el área, los valores promedio y la distancia recorrida por un objeto en cierto tiempo, pueden aproximarse mediante sumas finitas. Las sumas finitas son la base para definir la integral, lo que se hará en la sección 5.3.

Área

El área de la región con una frontera curva puede ser aproximada sumando las áreas de un conjunto de rectángulos. Al usar más rectángulos podemos aumentar la exactitud de la aproximación.

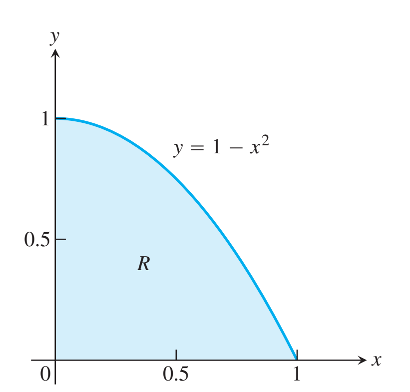


FIGURA 5.1 El área de la región R no se puede encontrar mediante una fórmula geométrica sencilla.

EJEMPLO 1 Aproximación del área

¿Cuál es el área de la región sombreada R que está arriba del eje x, debajo de la gráfica de $y = 1 - x^2$, y entre las rectas verticales $x = 0$ y $x = 1$? (Vea la figura 5.1). Un arquitecto podría querer conocer esta área para calcular el peso de una ventana especial con una forma que podría describirse mediante R. Desafortunadamente, no existe una fórmula geométrica sencilla para calcular las áreas de formas que tengan una frontera curva como la región R.

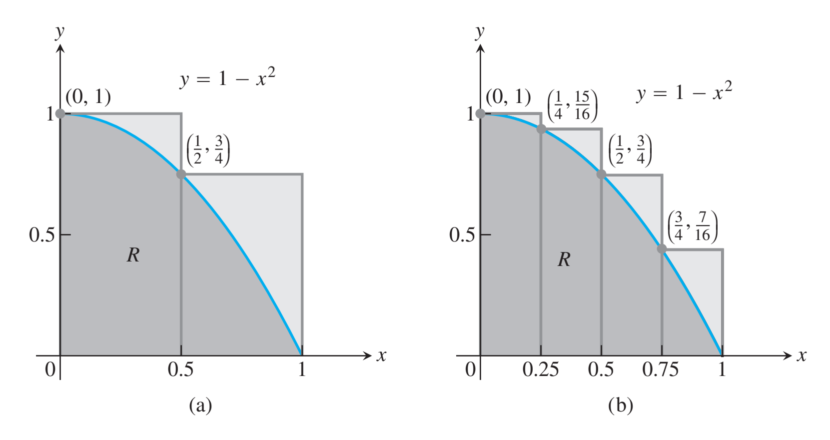


FIGURA 5.2 (a) Obtenemos una estimación superior del área de R usando dos rectángulos que contienen a R. (b) Cuatro rectángulos dan una mejor aproximación de la estimación superior. Ambas estimaciones sobrepasan el valor real del área.

Aun cuando no contamos con un método para determinar el área exacta de R, podemos aproximarla de una manera sencilla. La figura 5.2a muestra dos rectángulos que, juntos, contienen la región R. Cada rectángulo tiene ancho de $1/2$ y, de izquierda a derecha, tienen altura 1 y $3/4$. La altura de cada rectángulo es el valor máximo de la función f, obtenido al evaluar f en el extremo izquierdo del subintervalo [0, 1] formando la base del rectángulo. El área total de los dos rectángulos aproxima el área A de la región R,

$$A \approx 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{8} = 0.875.$$

Esta estimación es mayor que el área verdadera A, ya que los dos rectángulos contienen a R. Decimos que 0.875 es una **suma superior**, porque se obtuvo tomando la altura de cada rectángulo como el valor máximo (el más alto) de $f(x)$ para x, un punto en el intervalo base del rectángulo. En la figura 5.2b mejoramos nuestra estimación usando cuatro rectángulos más delgados, cada uno con ancho de $1/4$, que tomados en conjunto contienen la región R. Estos cuatro rectángulos dan la aproximación

$$A \approx 1 \cdot \frac{1}{4} + \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{7}{16} \cdot \frac{1}{4} = \frac{25}{32} = 0.78125,$$

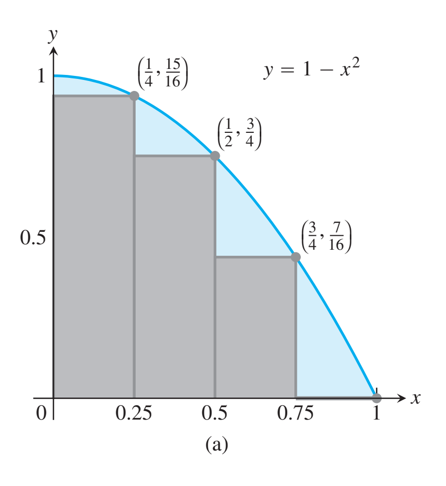
que sigue siendo mayor que A, ya que los cuatro rectángulos contienen a R.

Supongamos, en cambio, que para estimar el área usamos cuatro rectángulos contenidos *dentro* de la región R, como en la figura 5.3a. Cada rectángulo tiene un ancho de $1/4$ como antes, pero son más chicos y están completamente por debajo de la gráfica de f. La función $f(x) = 1 - x^2$ decrece en [0, 1], de manera que la altura de cada rectángulo está dada por el valor de f en el extremo derecho del subintervalo que forma la base. El cuarto rectángulo tiene altura cero y, por lo tanto, no contribuye al área. Sumando estos rectángulos con alturas iguales al valor mínimo de $f(x)$ para x un punto de cada subintervalo base, obtenemos una **suma inferior** de aproximación del área,

$$A \approx \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{7}{16} \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{4} = \frac{17}{32} = 0.53125.$$

Esta estimación es menor que el área A, ya que los todos rectángulos están dentro de la región R. El valor verdadero de A está entre las sumas inferior y superior:

$$0.53125 < A < 0.78125.$$



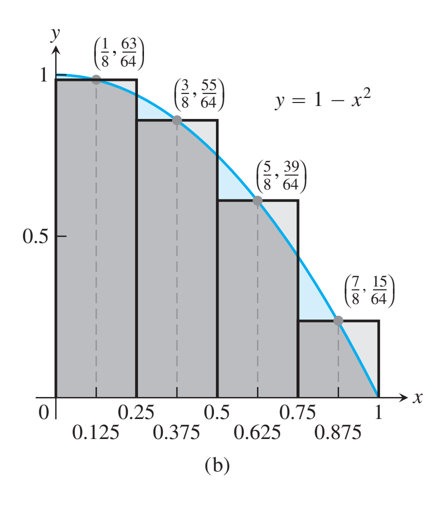
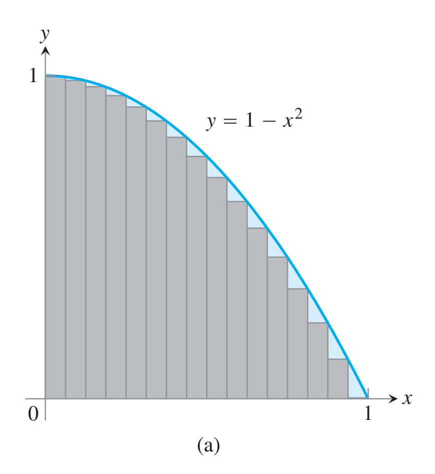


FIGURA 5.3 (a) Los rectángulos contenidos en R dan una estimación del área inferior a su valor real. (b) La regla del punto medio usa rectángulos cuya altura es el valor de $y = f(x)$ en el punto medio de sus bases.



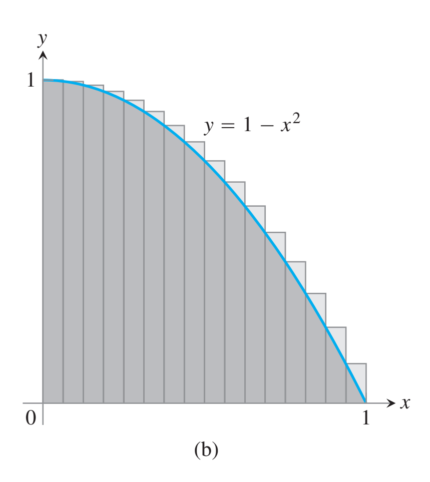


FIGURA 5.4 (a) Una suma inferior, usando 16 rectángulos del mismo ancho $\Delta x = 1/16$. (b) Una suma superior, usando 16 rectángulos.

Considerando ambas sumas inferior y superior no sólo tenemos una estimación para el área, sino también una cota del tamaño del posible error en estas estimaciones, ya que el valor verdadero del área está entre ellas. Aquí el error no puede ser mayor que la diferencia $0.78125 - 0.53125 = 0.25$.

Además, se puede obtener otra estimación usando rectángulos cuyas alturas sean los valores de F en los puntos medios de sus bases (figura 5.3b). Este método de estimación se llama **regla del punto medio** para aproximar el área. La regla del punto medio da una estimación que está entre la suma inferior y la suma superior, pero no es claro si sobreestima o subestima el área verdadera. Con cuatro rectángulos de ancho de $1/4$ como antes, la regla del punto medio estima que el área de R es

$$A \approx \frac{63}{64} \cdot \frac{1}{4} + \frac{55}{64} \cdot \frac{1}{4} + \frac{39}{64} \cdot \frac{1}{4} + \frac{15}{64} \cdot \frac{1}{4} = \frac{172}{64} \cdot \frac{1}{4} = 0.671875.$$

En cada una de nuestras sumas, el intervalo $[a, b]$ sobre el que la función f está definida, fue subdividido en n subintervalos de igual ancho (también llamado longitud) $\Delta x = (b - a)/n$, y f se evaluó en un punto en cada subintervalo: c_1 del primer subintervalo, c_2 del segundo subintervalo, y así sucesivamente. De esta manera, la suma finita tiene la forma

$$f(c_1)\,\Delta x + f(c_2)\,\Delta x + f(c_3)\,\Delta x + \cdots + f(c_n)\,\Delta x.$$

Tomando más y más rectángulos, cada vez más delgados que antes, parece que esta suma finita da cada vez mejores aproximaciones del área verdadera de la región R.

La figura 5.4a muestra una aproximación con suma inferior para el área de R usando 16 rectángulos de igual ancho. La suma de sus áreas es 0.634765625, que parece cercana al área verdadera pero sigue siendo menor, ya que los rectángulos están dentro de R.

La figura 5.4b muestra una aproximación con suma superior usando 16 rectángulos de igual ancho. La suma de sus áreas es 0.697265625, que es un poco mayor que el área verdadera, porque los rectángulos tomados en conjunto contienen a R. La regla del punto medio para 16 rectángulos da una aproximación del área total de 0.6669921875, pero no resulta claro si esta estimación es mayor o menor que el área verdadera.

TABLA 5.1 Aproximaciones finitas del área de R

Número de subintervalos	Suma inferior	Regla del punto medio	Suma superior
2	.375	.6875	.875
4	.53125	.671875	.78125
16	.634765625	.6669921875	.697265625
50	.6566	.6667	.6766
100	.66165	.666675	.67165
1000	.6661665	.66666675	.6671665

La tabla 5.1 muestra los valores de las aproximaciones de las sumas superior e inferior del área de R usando hasta 1000 rectángulos. En la sección 5.2 veremos cómo obtener un valor exacto de las áreas de las regiones tales como R, tomando un límite cuando el ancho de la base de cada rectángulo tiende a cero y el número de rectángulos tiene a infinito. Con las técnicas aquí desarrolladas, podremos probar que el área de R es exactamente $2/3$. ■

Distancia recorrida

Supongamos que conocemos la función velocidad $\upsilon(t)$ de un automóvil que se mueve por una carretera sin cambiar de dirección, y que queremos saber cuánto recorrió entre los tiempos $t = a$ y $t = b$. Si ya conocemos una antiderivada $F(t)$ de $\upsilon(t)$, podemos encontrar la función posición $s(t)$ del automóvil haciendo $s(t) = F(t) + C$. Entonces, la distancia recorrida puede encontrarse calculando el cambio de posición $s(b) - s(a)$ (vea el ejercicio 93 de la sección 4.8). Si la función velocidad se determina registrando la lectura del velocímetro del automóvil en varios tiempos, no tenemos una fórmula a partir de la cual obtener una función antiderivada de la velocidad. ¿Qué hacer en esta situación?

Cuando no conocemos una función antiderivada para la función velocidad $\upsilon(t)$, podemos aproximar la distancia recorrida de la siguiente manera. Subdividimos el intervalo $[a, b]$ en intervalos de tiempo pequeños, en cada uno de los cuales la velocidad se considera constante. Después aproximamos la distancia recorrida en cada subintervalo de tiempo con la fórmula usual de distancia

$$\text{distancia} = \text{velocidad} \times \text{tiempo}$$

y sumamos los resultados a lo largo de $[a, b]$.

Supongamos que el intervalo subdividido se ve así,

Δt Δt Δt
a t_1 t_2 t_3 b t (seg)

con todos los subintervalos de la misma longitud Δt. Elegimos un número t_1 en el primer intervalo. Si Δt es tan pequeño que la velocidad apenas cambia en un intervalo de tiempo de corta duración Δt, entonces la distancia recorrida en el primer intervalo de tiempo es aproximadamente $\upsilon(t_1)\,\Delta t$. Si t_2 es un número en el segundo intervalo, la distancia recorrida en el segundo intervalo de tiempo es aproximadamente $\upsilon(t_2)\,\Delta t$. La suma de las distancias recorridas en todos los intervalos de tiempo es

$$D \approx \upsilon(t_1)\,\Delta t + \upsilon(t_2)\,\Delta t + \cdots + \upsilon(t_n)\,\Delta t,$$

donde n es el número total de subintervalos.

EJEMPLO 2 Estimación de la altura de un proyectil

La función velocidad de un proyectil lanzado al aire es $f(t) = 160 - 9.8t$ m/seg. Usar la técnica de la sumatoria que acabamos de describir para estimar cuánto se eleva el proyectil durante los primeros 3 segundos. ¿Qué tanto se acerca el resultado de estas sumas al valor exacto de 435.9 m?

Solución Exploramos los resultados para distintos números de intervalos y distintas elecciones de los puntos de evaluación. Observe que $f(t)$ decrece, de manera que, eligiendo los puntos extremos izquierdos, obtenemos una estimación con suma superior; eligiendo los puntos extremos derechos obtenemos una estimación con suma inferior.

(a) *Tres subintervalos de longitud 1, con f evaluada en los puntos extremos izquierdos, dan lugar a una suma superior:*

Con f evaluada en $t = 0, 1$, y 2, tenemos

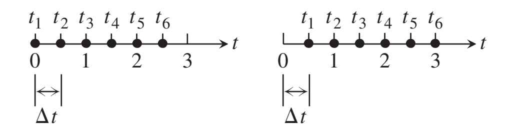
$$\begin{aligned} D &\approx f(t_1)\,\Delta t + f(t_2)\,\Delta t + f(t_3)\,\Delta t \\ &= [160 - 9.8(0)](1) + [160 - 9.8(1)](1) + [160 - 9.8(2)](1) \\ &= 450.6. \end{aligned}$$

(b) *Tres subintervalos de longitud 1, con f evaluada en los puntos extremos derechos, dan lugar a una suma inferior:*

Con f evaluada en $t = 1, 2$, y 3, tenemos

$$\begin{aligned} D &\approx f(t_1)\,\Delta t + f(t_2)\,\Delta t + f(t_3)\,\Delta t \\ &= [160 - 9.8(1)](1) + [160 - 9.8(2)](1) + [160 - 9.8(3)](1) \\ &= 421.2. \end{aligned}$$

(c) *Con seis subintervalos de longitud* $1/2$, *tenemos*



Una suma superior usando los puntos extremos izquierdos nos da: $D \approx 443.25$; con una suma inferior usando los puntos extremos derechos obtenemos: $D \approx 428.55$.

La estimación con estos seis intervalos se acerca un poco más al valor exacto que las estimaciones con tres intervalos. El resultado mejora cuando los intervalos son más cortos.

Como puede ver en la tabla 5.2, las sumas superiores con el punto extremo izquierdo se aproximan al valor real 435.9 por arriba, mientras que las sumas inferiores con el punto

TABLA 5.2 Estimación recorrido-distancia

Número de subintervalos	Longitud de cada subintervalo	Suma superior	Suma inferior
3	1	450.6	421.2
6	1/2	443.25	428.55
12	1/4	439.57	432.22
24	1/8	437.74	434.06
48	1/16	436.82	434.98
96	1/32	436.36	435.44
192	1/64	436.13	435.67

extremo derecho se aproximan a ese valor por abajo. El valor real está entre estas sumas superior e inferior. La magnitud del error en las entradas más cercanas es 0.23, que es un pequeño porcentaje del valor real.

$$\begin{aligned}\text{Magnitud del error} &= |\text{valor real} - \text{valor calculado}| \\ &= |435.9 - 435.67| = 0.23.\end{aligned}$$

$$\text{Porcentaje de error} = \frac{0.23}{435.9} \approx 0.05\%.$$

A partir de la última entrada de la tabla, sería razonable concluir que el proyectil se eleva alrededor de 436 m durante los primeros 3 segundos de vuelo. ■

Desplazamiento en comparación con distancia recorrida

Si un cuerpo con función posición $s(t)$ se mueve a lo largo de una recta coordenada sin cambiar de dirección, podemos calcular la distancia total del recorrido de $t = a$ a $t = b$ sumando la distancia recorrida en intervalos de tiempo pequeños, como en el ejemplo 2. Si el cuerpo cambia de dirección una o más veces durante el viaje, entonces necesitamos usar la *rapidez* del cuerpo $|v(t)|$, que es el valor absoluto de su función velocidad $v(t)$, para encontrar la distancia total recorrida. Al usar la velocidad, como en el ejemplo 2, sólo obtenemos una estimación del **desplazamiento** del cuerpo, $s(b) - s(a)$, es decir, la diferencia entre sus posiciones inicial y final.

Para entender por qué, partimos el intervalo de tiempo $[a, b]$ en subintervalos iguales suficientemente pequeños Δt de manera que la velocidad del cuerpo no cambie mucho del tiempo entre t_{k-1} y t_k. Entonces $v(t_k)$ da una buena aproximación de la velocidad dentro del intervalo. De acuerdo con ello, el cambio en la coordenada de la posición del cuerpo durante el intervalo de tiempo es alrededor de

$$v(t_k)\,\Delta t.$$

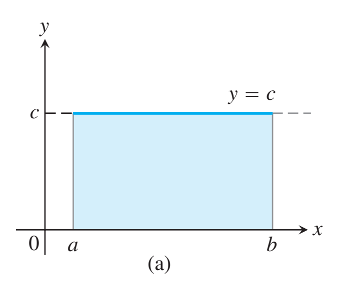
El cambio es positivo si $v(t_k)$ es positivo, y negativo si $v(t_k)$ es negativo.

En cualquier caso, la distancia recorrida durante el subintervalo es aproximadamente

$$|v(t_k)|\,\Delta t.$$

La **distancia total recorrida** es aproximadamente la suma

$$|v(t_1)|\,\Delta t + |v(t_2)|\Delta t + \cdots + |v(t_n)|\,\Delta t.$$



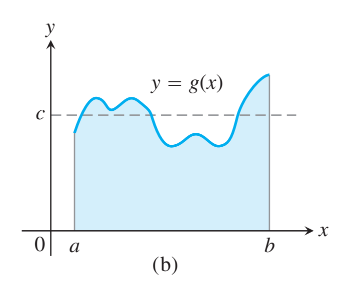


FIGURA 5.5 (a) El valor promedio de $f(x) = c$ en $[a, b]$ es el área del rectángulo dividida entre $b - a$. (b) El valor promedio de $g(x)$ en $[a, b]$ es el área debajo de su gráfica, dividida entre $b - a$.

Valor promedio de una función no negativa

El valor promedio de un conjunto de n números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se obtiene sumándolos y dividiendo el resultado entre n. Pero, ¿cuál es el valor promedio de una función continua f en un intervalo $[a, b]$? Dicha función toma una infinidad de valores. Por ejemplo, la temperatura en cierta zona de un pueblo es una función continua que sube y baja cada día. ¿Qué significa que la temperatura promedio en el pueblo, en el transcurso de un día, es de 73 grados?

Cuando una función es constante, es fácil responder esa pregunta. Una función con valor constante c en un intervalo $[a, b]$ tiene valor promedio c. Cuando c es positivo, su gráfica sobre $[a, b]$ da un rectángulo de altura c. Entonces el valor promedio de la función puede interpretarse geométricamente como el área de este rectángulo, dividida entre su ancho $b - a$ (figura 5.5a).

¿Qué hacer si queremos encontrar el valor promedio de una función no constante, tal como la función g de la figura 5.5b? Podemos pensar en su gráfica como si fuera una fotografía de la altura del agua que está chapoteando dentro un tanque, encerrada entre las paredes $x = a$ y $x = b$. Cuando el agua se mueve, su altura en cada punto cambia, pero su altura promedio permanece igual. Para obtener la altura promedio del agua, "apaciguamos" el agua hasta que se nivele y su altura sea constante. La altura resultante c es igual al área que está debajo de la gráfica de g, dividida entre $b - a$. Esto nos conduce a *definir* el valor promedio de una función no negativa en un intervalo $[a, b]$ como el área debajo de su gráfica dividida entre $b - a$. Para que esta definición sea válida necesitamos entender con precisión a qué nos referimos con el área que está debajo de la gráfica. Esto se obtendrá en la sección 5.3, pero por ahora veamos dos ejemplos.

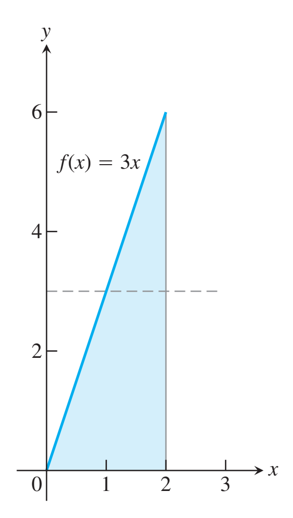


FIGURA 5.6 El valor promedio de $f(x) = 3x$ en $[0, 2]$ es 3 (ejemplo 3).

EJEMPLO 3 El valor promedio de una función lineal

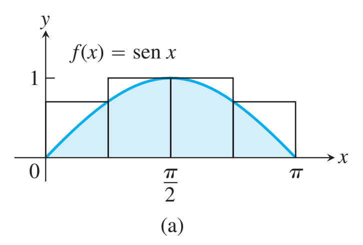
¿Cuál es el valor promedio de la función $f(x) = 3x$ en el intervalo $[0, 2]$?

Solución El promedio es igual al área debajo de la gráfica, dividida entre el ancho del intervalo. En este caso no necesitamos una aproximación finita para estimar el área de la región debajo de la gráfica: un triángulo de altura 6 y base 2 tiene un área 6 (figura 5.6). El ancho del intervalo es $b - a = 2 - 0 = 2$. El valor promedio de la función es $6/2 = 3$. ■

EJEMPLO 4 El valor promedio de sen x

Estimar el valor promedio de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ en el intervalo $[0, \pi]$.

Solución Viendo la gráfica de sen x entre 0 y π en la figura 5.7, podemos ver que su altura promedio está en algún punto entre 0 y 1. Para encontrar el promedio necesitamos



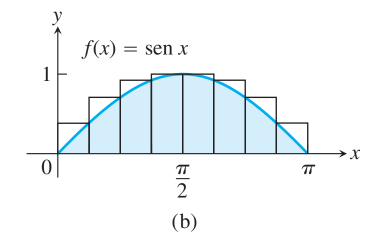


FIGURA 5.7 Aproximar el área debajo de $f(x) = \operatorname{sen} x$ entre 0 y π para calcular el valor promedio de sen x en $[0, \pi]$, usando (a) cuatro rectángulos; (b) ocho rectángulos (ejemplo 4).

calcular el área A que está debajo de la gráfica, y después dividir esta área entre la longitud del intervalo $\pi - 0 = \pi$.

No tenemos una manera sencilla de determinar el área, de manera que la aproximamos con sumas finitas. Para obtener la estimación de la suma superior, sumamos las áreas de cuatro rectángulos del mismo ancho, $\pi/4$ que contienen en conjunto la región que está debajo de la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ y arriba del eje x en $[0, \pi]$. Elegimos las alturas de los rectángulos como el máximo valor de sen x en cada subintervalo. En un subintervalo en particular este valor máximo puede alcanzarse en el extremo izquierdo, en el extremo derecho o en algún punto entre ellos. Evaluamos sen x en este punto para obtener la altura del rectángulo para una suma superior. Entonces, la suma de las áreas de los rectángulos estima el área total (figura 5.7a):

$$A \approx \left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{\pi}{4} + \left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{\pi}{4} + \left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{\pi}{4} + \left(\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right)\cdot\frac{\pi}{4}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 + 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{\pi}{4} \approx (3.42)\cdot\frac{\pi}{4} \approx 2.69.$$

Para estimar el valor promedio de sen x, dividimos el área estimada entre π y obtenemos la aproximación $2.69/\pi \approx 0.86$.

Si usamos ocho rectángulos del mismo ancho, $\pi/8$ todos por arriba de la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ (figura 5.7b), obtenemos el área estimada

$$A \approx \left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{8} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{3\pi}{8} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + \operatorname{sen}\frac{5\pi}{8} + \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{7\pi}{8}\right)\cdot\frac{\pi}{8}$$

$$\approx (.38 + .71 + .92 + 1 + 1 + .92 + .71 + .38)\cdot\frac{\pi}{8} = (6.02)\cdot\frac{\pi}{8} \approx 2.365.$$

Dividiendo este resultado entre la longitud π del intervalo, obtenemos una estimación más exacta de 0.753 para el promedio. Como usamos una suma superior para aproximar el área, sigue siendo mayor que el valor promedio real de sen x en el intervalo $[0, \pi]$. Si usamos cada vez más rectángulos, de manera que cada nuevo rectángulo sea más angosto, obtenemos cada vez un valor promedio más cercano al real. Usando las técnicas de la sección 5.3, probaremos que el valor promedio real es $2/\pi \approx 0.64$.

Como antes, podríamos también haber usado rectángulos que estuvieran debajo de la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ para luego calcular la aproximación de la suma inferior, o podríamos haber usado la regla del punto medio. En la sección 5.3 veremos que no importa si nuestros rectángulos de aproximación se eligen para dar sumas superiores, sumas inferiores o una suma intermedia. En cada caso, las aproximaciones están cercanas al área real si todos los rectángulos son lo suficientemente angostos. ■

Resumen

El área debajo de la gráfica de una función positiva, la distancia recorrida por un objeto en movimiento que no cambia de dirección y el valor promedio de una función no negativa en un intervalo, pueden aproximarse mediante sumas finitas. Primero subdividimos el intervalo en subintervalos, tratando a la función apropiada f como si fuera constante en cada subintervalo en particular. Después multiplicamos el ancho de cada subintervalo por el valor de f en algún punto dentro de él, y sumamos todos estos productos. Si el intervalo $[a, b]$ se subdivide en n subintervalos del mismo ancho, $\Delta x = (b - a)/n$, y si $f(c_k)$ es el valor de f en el punto elegido c_k del *k-ésimo* subintervalo, este proceso da una suma finita de la forma

$$f(c_1)\,\Delta x + f(c_2)\,\Delta x + f(c_3)\,\Delta x + \cdots + f(c_n)\,\Delta x.$$

La elección de c_k podría maximizar o minimizar el valor de f en el *k-ésimo* subintervalo, o dar un valor intermedio. El valor real está entre las aproximaciones dadas por las sumas superiores y las sumas inferiores. Las aproximaciones con sumas finitas que hemos visto mejoran cuando tomamos más subintervalos de ancho más pequeño.

EJERCICIOS 5.1

Área

En los ejercicios 1 a 4, use aproximaciones finitas para estimar el área que está debajo de la gráfica de la función, empleando

a. una suma inferior con dos rectángulos del mismo ancho.

b. una suma inferior con cuatro rectángulos del mismo ancho.

c. una suma superior con dos rectángulos del mismo ancho.

d. una suma superior con cuatro rectángulos del mismo ancho.

1. $f(x) = x^2$ entre $x = 0$ y $x = 1$.

2. $f(x) = x^3$ entre $x = 0$ y $x = 1$.

3. $f(x) = 1/x$ entre $x = 1$ y $x = 5$.

4. $f(x) = 4 - x^2$ entre $x = -2$ y $x = 2$.

Use rectángulos cuyas alturas estén dadas por el valor de la función en el punto medio de la base del rectángulo (*regla del punto medio*) para estimar el área que está debajo de las gráficas de las funciones siguientes, empleando primero dos rectángulos y después cuatro rectángulos.

5. $f(x) = x^2$ entre $x = 0$ y $x = 1$.

6. $f(x) = x^3$ entre $x = 0$ y $x = 1$.

7. $f(x) = 1/x$ entre $x = 1$ y $x = 5$.

8. $f(x) = 4 - x^2$ entre $x = -2$ y $x = 2$.

Distancia

9. Distancia recorrida La tabla siguiente muestra la velocidad de un modelo de locomotora que se mueve a lo largo de una vía durante 10 segundos. Estime la distancia recorrida por la locomotora usando 10 subintervalos de longitud 1 con

a. los valores de los puntos extremos izquierdos.

b. los valores de los puntos extremos derechos.

Tiempo (seg)	Velocidad (pulgadas/seg)	Tiempo (seg)	Velocidad (pulgadas/seg)
0	0	6	11
1	12	7	6
2	22	8	2
3	10	9	6
4	5	10	0
5	13		

10. Distancia recorrida en contracorriente Está sentado a la orilla de un río viendo una botella que flota y se mueve contra corriente debido a la marea. Durante su observación, usted registra la velocidad de la corriente cada 5 minutos durante una hora, con los resultados que se muestran en la tabla siguiente. ¿Cómo cuánto se movió río arriba la botella durante esa hora? Encuentre una estimación usando 12 subintervalos de longitud 5 con

a. los valores de los puntos extremos izquierdos.

b. los valores de los puntos extremos derechos.

Tiempo (min)	Velocidad (m/seg)	Tiempo (min)	Velocidad (m/seg)
0	1	35	1.2
5	1.2	40	1.0
10	1.7	45	1.8
15	2.0	50	1.5
20	1.8	55	1.2
25	1.6	60	0
30	1.4		

11. Longitud de un camino Usted y un acompañante están a punto de viajar por un camino de terracería lleno de curvas, a bordo de un automóvil cuyo velocímetro funciona, pero cuyo odómetro (contador de millas) no. Para encontrar la longitud del tramo que van a recorrer, usted registra la velocidad del automóvil a intervalos de 10 segundos, con los resultados que se muestran en la siguiente tabla. Estime la longitud del camino usando

a. los valores de los puntos extremos izquierdos.

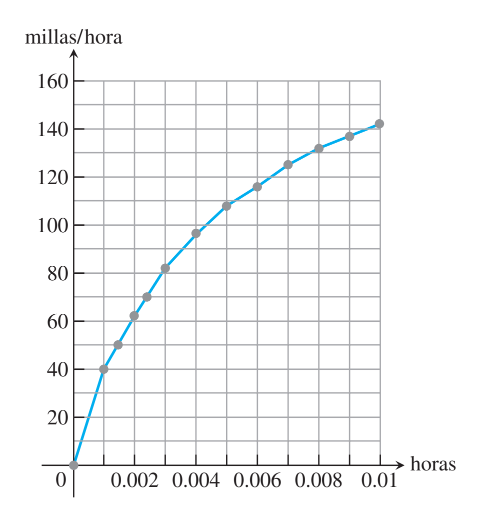
b. los valores de los puntos extremos derechos.

Tiempo (seg)	Velocidad (convertida a pies/seg) (30 millas/hora = 44 pies/seg)	Tiempo (seg)	Velocidad (convertida a pies/seg) (30 millas/hora = 44 pies/seg)
0	0	70	15
10	44	80	22
20	15	90	35
30	35	100	44
40	30	110	30
50	44	120	35
60	35		

12. Distancia a partir de los datos de velocidad La tabla siguiente da los datos de la velocidad de un automóvil deportivo que acelera de 0 a 142 millas/hora en 36 segundos (10 milésimos de una hora).

a. Use rectángulos para estimar hasta dónde llegó el automóvil durante los 36 segundos que le tomó alcanzar las 142 millas/hora.

Tiempo (horas)	Velocidad (millas/hora)	Tiempo (horas)	Velocidad (millas/hora)
0.0	0	0.006	116
0.001	40	0.007	125
0.002	62	0.008	132
0.003	82	0.009	137
0.004	96	0.010	142
0.005	108		



b. ¿Aproximadamente cuántos segundos tardó el automóvil en alcanzar el punto medio del camino? ¿Qué tan rápido iba el automóvil en ese momento?

Velocidad y distancia

13. Caída libre con resistencia al aire Un objeto se deja caer desde un helicóptero. El objeto cae cada vez más rápido, pero su aceleración (razón de cambio de la velocidad) decrece con el tiempo debido a la resistencia del aire. La aceleración se mide en pies/seg^2, y se registra cada segundo después de soltar el objeto durante 5 segundos, como se muestra a continuación:

t	0	1	2	3	4	5
a	32.00	19.41	11.77	7.14	4.33	2.63

a. Encuentre una estimación superior para la rapidez cuanto $t = 5$.

b. Encuentre una estimación inferior para la rapidez cuanto $t = 5$.

c. Encuentre una estimación superior para la distancia recorrida cuando $t = 3$.

14. Distancia recorrida por un proyectil Un proyectil es lanzando hacia arriba desde el nivel del mar, con una velocidad inicial de 400 pies/seg.

a. Suponiendo que la gravedad es la única fuerza que actúa sobre el objeto, dé una estimación superior para su velocidad después de haber transcurrido 5 seg. Use $g = 32$ pies/seg^2 para la aceleración debida a la gravedad.

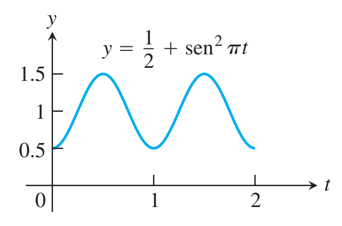
b. Encuentre una estimación inferior para la altura que se alcanza después de 5 seg.

Valor promedio de una función

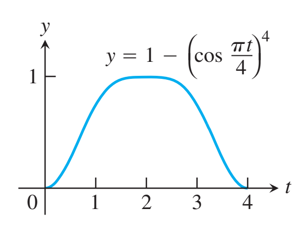
En los ejercicios 15 a 18, use una suma finita para estimar el valor promedio de f en el intervalo dado, partiendo el intervalo en cuatro subintervalos de la misma longitud y evaluando f en los puntos medios de los subintervalos.

15. $f(x) = x^3$ en $[0, 2]$ **16.** $f(x) = 1/x$ en $[1, 9]$

17. $f(t) = (1/2) + \operatorname{sen}^2 \pi t$ en $[0, 2]$



18. $f(t) = 1 - \left(\cos \frac{\pi t}{4}\right)^4$ en $[0, 4]$



Control de la contaminación

19. Contaminación del agua Un tanque dañado está derramando petróleo en el mar. El daño del tanque está empeorando, como evidencia el crecimiento del derrame cada hora, registrado en la siguiente tabla.

Tiempo (horas)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Derrame (galones/hora)	50	70	97	136	190	265	369	516	720

a. Dé una estimación superior e inferior de la cantidad total de petróleo que se ha derramado después de 5 horas.

b. Repita el inciso (a) para estimar la cantidad de petróleo que se ha derramado después de 8 horas.

c. El tanque continúa derramando 720 galones/hora después de las primeras 8 horas. Si el tanque contenía originalmente 25,000 galones de petróleo, ¿aproximadamente cuántas horas más pasarán, en el peor de los casos, antes de que se vierta todo el petróleo? ¿Cuántas horas más transcurrirán, en el mejor de los casos?

20. Contaminación del aire Una planta genera electricidad quemando petróleo. Los contaminantes producidos como resultado del proceso de combustión son eliminados por un filtro en la chimenea. Con el tiempo, el filtro llegó a ser menos eficiente, hasta que llegó un momento en que tuvo que ser reemplazado cuando la cantidad de contaminantes liberados rebasó los estándares gubernamentales. Al final de cada mes se midió la razón a la que los contaminantes eran liberados en la atmósfera, y se hizo el siguiente registro.

Mes	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun
Razón de contaminantes liberados (ton/día)	0.20	0.25	0.27	0.34	0.45	0.52

Mes	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
Razón de contaminantes liberados (ton/día)	0.63	0.70	0.81	0.85	0.89	0.95

a. Suponiendo que todos los meses duran 30 días y que el filtro nuevo solamente permite liberar 0.05 ton/día, dé una estimación superior del tonelaje total de contaminantes liberados al final de junio. ¿Cuál sería la estimación inferior?

b. ¿Aproximadamente cuándo se habrán liberado un total de 125 toneladas de contaminantes en la atmósfera, en el peor de los casos?

Área de un círculo

21. Inscriba un polígono de n lados dentro de un círculo de radio 1, y calcule el área del polígono para los siguientes valores de n:

a. 4 (cuadrado) **b.** 8 (octágono) **c.** 16

d. Compare las áreas en los incisos (a), (b) y (c) con el área del círculo.

22. (*Continuación del ejercicio 21*).

a. Inscriba un polígono de n lados dentro de un círculo de radio 1, y calcule el área de uno de los n triángulos congruentes formados al dibujar los radios a los vértices del polígono.

b. Calcule el límite del área del polígono inscrito cuando $n \to \infty$.

c. Repita los cálculos de los incisos (a) y (b) para un círculo de radio r.

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

En los ejercicios 23 a 26, use un software matemático para realizar los pasos siguientes.

a. Trace las funciones en el intervalo dado.

b. Subdivida el intervalo en $n = 100, 200$ y 1000 subintervalos de la misma longitud, y evalúe la función en el punto medio de cada subintervalo.

c. Calcule el valor promedio de los valores de la función generados en el inciso (b).

d. Resuelva la ecuación $f(x) =$ (valor promedio) para x, usando el valor promedio calculado en el inciso (c) para la partición $n = 1000$.

23. $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $[0, \pi]$ **24.** $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ en $[0, \pi]$

25. $f(x) = x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ en $\left[\dfrac{\pi}{4}, \pi\right]$

26. $f(x) = x \operatorname{sen}^2 \dfrac{1}{x}$ en $\left[\dfrac{\pi}{4}, \pi\right]$

5.2 Notación sigma y límites de sumas finitas

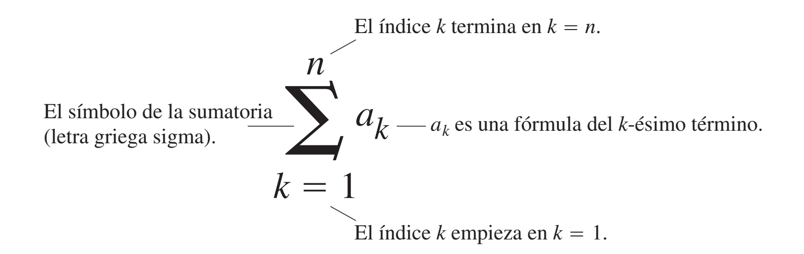
En la estimación con sumas finitas que analizamos en la sección 5.1, con frecuencia encontramos sumas con muchos términos (por ejemplo, arriba de 100, como se muestra en la tabla 5.1). En esta sección introduciremos una notación para escribir las sumas con un gran número de términos. Después de describir la notación y establecer varias de sus propiedades, veremos qué pasa con una aproximación de suma finita cuando el número de términos tiende a infinito.

Sumas finitas y la notación sigma

La **notación sigma** nos permite escribir una suma con muchos términos en la forma compacta

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$

La letra griega Σ (sigma mayúscula, corresponde a nuestra letra S), significa "suma". El **índice de la sumatoria** k nos dice en dónde empieza la suma (mediante el número que está debajo del símbolo Σ) y en dónde termina (usando el número que está arriba del símbolo Σ). Se puede usar cualquier letra para denotar el índice, pero las letras más usuales son *i, j* y *k.*



De acuerdo con ello, podemos escribir

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 + 11^2 = \sum_{k=1}^{11} k^2,$$

y

$$f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(100) = \sum_{i=1}^{100} f(i).$$

La notación sigma usada en el lado derecho de estas ecuaciones es mucho más compacta que la suma del lado izquierdo.

EJEMPLO 1 Uso de la notación sigma

La suma en notación sigma	La suma extendida, un término por cada valor de k	El valor de la suma
$\sum_{k=1}^{5} k$	$1 + 2 + 3 + 4 + 5$	15
$\sum_{k=1}^{3} (-1)^k k$	$(-1)^1(1) + (-1)^2(2) + (-1)^3(3)$	$-1 + 2 - 3 = -2$
$\sum_{k=1}^{2} \frac{k}{k+1}$	$\frac{1}{1+1} + \frac{2}{2+1}$	$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$
$\sum_{k=4}^{5} \frac{k^2}{k-1}$	$\frac{4^2}{4-1} + \frac{5^2}{5-1}$	$\frac{16}{3} + \frac{25}{4} = \frac{139}{12}$

■

El límite inferior de la sumatoria no tiene que ser 1; puede ser cualquier entero.

EJEMPLO 2 Uso de diferentes valores iniciales de índices

Expresar la suma $1 + 3 + 5 + 7 + 9$ en notación sigma.

Solución La fórmula que genera los términos cambia según el límite inferior de la sumatoria, pero los términos generados son los mismos. Suele ser más sencillo empezar con $k = 0$ o $k = 1$.

Empezando con $k = 0$: $$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = \sum_{k=0}^{4}(2k + 1)$$

Empezando con $k = 1$: $$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = \sum_{k=1}^{5}(2k - 1)$$

Empezando con $k = 2$: $$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = \sum_{k=2}^{6}(2k - 3)$$

Empezando con $k = -3$: $$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = \sum_{k=-3}^{1}(2k + 7)$$ ■

Cuando tenemos una suma como

$$\sum_{k=1}^{3}(k + k^2)$$

podemos reacomodar sus términos,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{3}(k + k^2) &= (1 + 1^2) + (2 + 2^2) + (3 + 3^2) \\ &= (1 + 2 + 3) + (1^2 + 2^2 + 3^2) \quad \text{Reagrupando términos.} \\ &= \sum_{k=1}^{3}k + \sum_{k=1}^{3}k^2\end{aligned}$$

Esto ilustra una regla general para sumas finitas:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n}a_k + \sum_{k=1}^{n}b_k$$

A continuación se presentan cuatro de estas reglas. Una demostración de su validez se puede obtener usando inducción matemática (vea el Apéndice 1).

Reglas algebraicas para sumas finitas

1. *Regla de la suma*: $$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n}a_k + \sum_{k=1}^{n}b_k$$

2. *Regla de la diferencia*: $$\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{n}a_k - \sum_{k=1}^{n}b_k$$

3. *Regla del múltiplo constante*: $$\sum_{k=1}^{n}ca_k = c \cdot \sum_{k=1}^{n}a_k$$ (Cualquier número c)

4. *Regla del valor constante*: $$\sum_{k=1}^{n}c = n \cdot c$$ (c es cualquier valor constante)

EJEMPLO 3 Uso de las reglas algebraicas de sumas finitas

(a) $\sum_{k=1}^{n}(3k - k^2) = 3\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} k^2$ — Regla de la diferencia y regla del múltiplo constante

(b) $\sum_{k=1}^{n}(-a_k) = \sum_{k=1}^{n}(-1)\cdot a_k = -1\cdot\sum_{k=1}^{n} a_k = -\sum_{k=1}^{n} a_k$ — Regla del múltiplo constante

(c) $\sum_{k=1}^{3}(k + 4) = \sum_{k=1}^{3} k + \sum_{k=1}^{3} 4$ — Regla de la suma

$= (1 + 2 + 3) + (3\cdot 4)$

$= 6 + 12 = 18$ — Regla del valor constante

(d) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n} = n\cdot\frac{1}{n} = 1$ — Regla del valor constante ($1/n$ es constante) ■

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

Carl Friedrich Gauss (1777–1855)

Al cabo del tiempo, la gente ha descubierto una variedad de fórmulas para los valores de sumas finitas. La más famosa de éstas es la fórmula para la suma de los primeros n enteros (Posiblemente Gauss la descubrió a la edad de 8 años) y las fórmulas para las sumas de los cuadrados y los cubos de los primeros n enteros.

EJEMPLO 4 Suma de los primeros n enteros

Demostrar que la suma los primeros n enteros es

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

Solución: La fórmula nos dice que la suma de los primeros 4 enteros es

$$\frac{(4)(5)}{2} = 10.$$

La suma verifica esta predicción:

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10.$$

Para probar la fórmula en general, escribimos los términos de la suma dos veces, una hacia delante y una hacia atrás.

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & n \\ n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \cdots & + & 1 \end{array}$$

Si sumamos los dos términos de la primera columna, obtenemos $1 + n = n + 1$. De manera similar, si sumamos los dos términos de la segunda columna obtenemos $2 + (n - 1) = n + 1$. La suma de los dos términos de cualquier columna es $n + 1$. Cuando sumamos las n columnas obtenemos n términos, cada uno igual a $n + 1$, para dar un total de $n(n + 1)$. Como éste es el doble de la cantidad deseada, la suma de los primeros n enteros es $(n)(n + 1)/2$. ■

Las fórmulas para las sumas de los cuadrados y los cubos de los primeros n enteros se prueban usando inducción matemática (vea el Apéndice 1), y son:

Los primeros n cuadrados: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$

Los primeros n cubos: $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n + 1)}{2}\right)^2$

Límites de sumas finitas

Las aproximaciones de sumas finitas que consideramos en la sección 5.1 resultaban más exactas conforme el número de términos crecía y el ancho (longitud) de los subintervalos se hacía más angosto. El siguiente ejemplo muestra cómo calcular un valor límite cuando el ancho de los subintervalos tiende a cero y el número de términos tiende a infinito.

EJEMPLO 5 El límite de las aproximaciones finitas de un área

Encontrar el valor límite de las aproximaciones mediante sumas inferiores al área de la región R, que está debajo de la gráfica de $y = 1 - x^2$ y sobre el intervalo $[0, 1]$ en el eje x usando rectángulos del mismo ancho, donde el ancho tiende a cero y el número de rectángulos tiende a infinito. (Vea la figura 5.4a).

Solución Calculamos la aproximación mediante sumas inferiores, usando n rectángulos del mismo ancho, $\Delta x = (1 - 0)/n$, y después vemos qué pasa cuando $n \to \infty$. Empezamos por subdividir $[0, 1]$ en n subintervalos del mismo ancho

$$\left[0, \frac{1}{n}\right], \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \ldots, \left[\frac{n-1}{n}, n\right].$$

Cada subintervalo tiene un ancho $1/n$. La función $1 - x^2$ decrece en $[0, 1]$, y su valor mínimo en un subintervalo se alcanza en el extremo derecho del subintervalo. De manera que una suma inferior se construye con los rectángulos cuya altura en el subintervalo $[(k - 1)/n, k/n]$ es $f(k/n) = 1 - (k/n)^2$, dando la suma

$$f\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right).$$

Escribimos dicha suma en notación sigma y simplificamos,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right) &= \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2\right)\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n} - \frac{k^2}{n^3}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n} - \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3} && \text{Regla de la diferencia} \\
&= n \cdot \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 && \text{Reglas del valor constante y el múltiplo constante} \\
&= 1 - \left(\frac{1}{n^3}\right)\frac{(n)(n+1)(2n+1)}{6} && \text{Suma de los primeros } n \text{ cuadrados} \\
&= 1 - \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3}. && \text{Numerador desarrollado}
\end{aligned}$$

Hemos obtenido una expresión para la suma inferior que se cumple para cualquier n. Tomando el límite de esta expresión cuando $n \to \infty$, vemos que la suma inferior converge cuando el número de subintervalos crece y el ancho de los subintervalos tiende a cero:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3}\right) = 1 - \frac{2}{6} = \frac{2}{3}.$$

La aproximación de las sumas inferiores converge a $2/3$. Un cálculo similar prueba que la aproximación con sumas superiores también converge a $2/3$ (ejercicio 35). Cualquier aproximación con suma finita, en el sentido del resumen que se presentó al final de

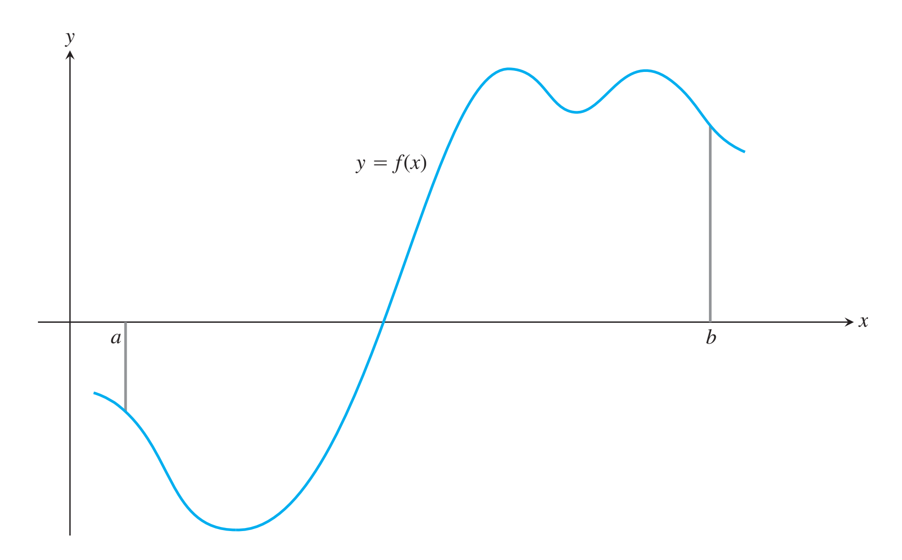


FIGURA 5.8 Una función continua típica $y = f(x)$ en un intervalo cerrado $[a, b]$.

la sección 5.1, también converge al mismo valor, 2/3. Esto se debe a que es posible probar que cualquier aproximación de suma finita se encuentra entre las aproximaciones de suma inferior y superior. Esto nos lleva a *definir* el área de la región *R* como este valor límite. En la sección 5.3 analizaremos los límites de tales aproximaciones finitas en un escenario más general. ■

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866)

Sumas de Riemann

La teoría de límites de aproximaciones finitas fue formalizada por el matemático alemán Bernhard Riemann. A continuación se hablará de la noción de *suma de Riemann*, base de la teoría de la integral definida que estudiaremos en la siguiente sección.

Empezamos con una función arbitraria *f* definida en un intervalo cerrado $[a, b]$. Como la función dibujada en la figura 5.8, *f* puede tener valores tanto negativos como positivos. Subdividimos el intervalo $[a, b]$ en subintervalos, no necesariamente del mismo ancho (o longitud), y formamos sumas como lo hicimos para las aproximaciones finitas en la sección 5.1. Para hacerlo, elegimos $n - 1$ puntos $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}\}$ entre *a* y *b*, que satisfagan

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < b.$$

Para lograr una notación consistente, denotamos *a* mediante x_0 y *b* mediante x_n, de manera que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

El conjunto

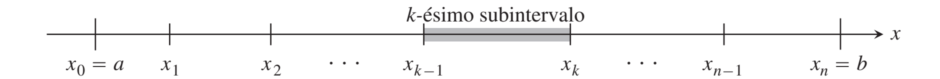
$$P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}$$

se llama **partición** de $[a, b]$.

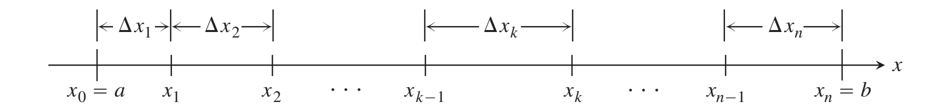
La partición *P* divide $[a, b]$ en *n* subintervalos cerrados

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n].$$

El primero de estos subintervalos es $[x_0, x_1]$, el segundo es $[x_1, x_2]$, y el ***k*-ésimo subintervalo de** *P* es $[x_{k-1}, x_k]$, para *k* entre 1 y *n*.



El ancho del primer subintervalo $[x_0, x_1]$ se denota mediante Δx_1, el ancho del segundo intervalo $[x_1, x_2]$ es Δx_2, y el ancho del k-ésimo subintervalo es $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Si todos los n subintervalos tienen el mismo ancho, el ancho común, Δx es igual a $(b - a)/n$.



En cada subintervalo elegimos algún punto. El punto elegido en el k-ésimo subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ se llama c_k. Entonces, en cada subintervalo levantamos un rectángulo vertical a partir del eje x hasta tocar la curva en $(c_k, f(c_k))$. Estos rectángulos pueden estar arriba o debajo del eje x, dependiendo de si $f(c_k)$ es positivo o negativo, o si $f(c_k) = 0$ (figura 5.9).

En cada subintervalo formamos el producto $f(c_k) \cdot \Delta x_k$. Este producto es positivo, negativo o cero dependiendo del signo de $f(c_k)$. Cuando $f(c_k) > 0$, el producto $f(c_k) \cdot \Delta x_k$ es el área del rectángulo con altura $f(c_k)$ y ancho Δx_k. Cuando $f(c_k) < 0$, el producto $f(c_k) \cdot \Delta x_k$ es un número negativo, el negativo del área del rectángulo de ancho Δx_k que cae desde el eje x al número negativo $f(c_k)$.

Finalmente sumamos todos estos productos para obtener

$$S_P = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\, \Delta x_k .$$

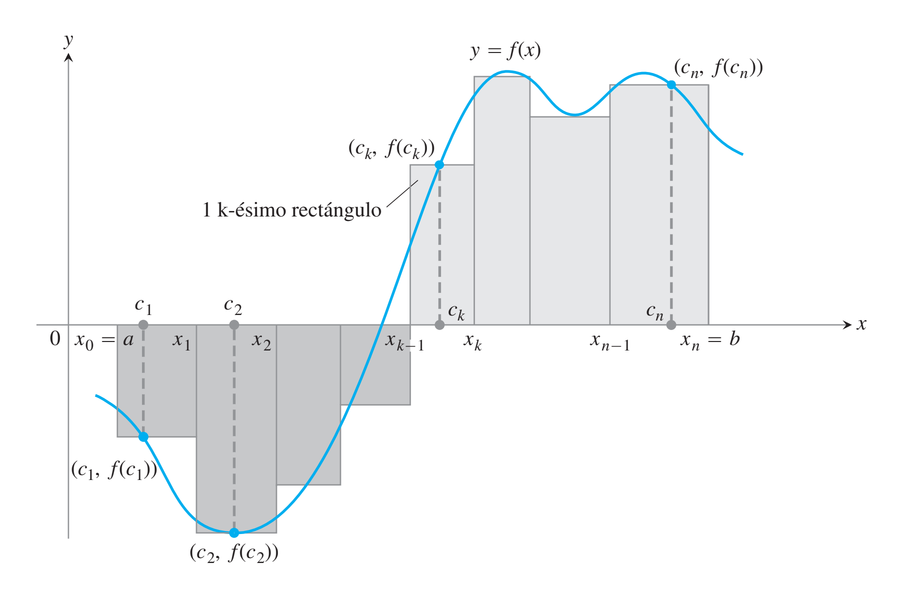
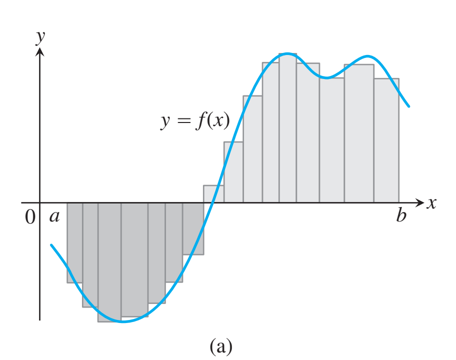


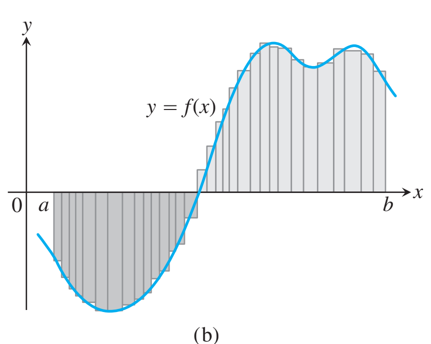
FIGURA 5.9 Los rectángulos aproximan la región entre la gráfica de la función $y = f(x)$ y el eje x.

La suma S_P se conoce como **suma de Riemann para *f* en el intervalo [*a*, *b*]**. Hay una infinidad de estas sumas, dependiendo de la partición P que se elija y de la elección de los puntos c_k en los subintervalos.

En el ejemplo 5, donde todos los subintervalos tenían el mismo ancho $\Delta x = 1/n$, pudimos hacerlos más angostos simplemente aumentando el número n. Cuando una partición tiene subintervalos cuyo ancho varía, podemos asegurar que todos son angostos controlando el ancho del subintervalo más ancho (más largo). Definimos la **norma** de una partición P, denotada por $\|P\|$, como el mayor de los anchos de todos los subintervalos. Si $\|P\|$ es un número pequeño, todos los subintervalos de la partición P tienen ancho pequeño. Veamos un ejemplo.



(a)

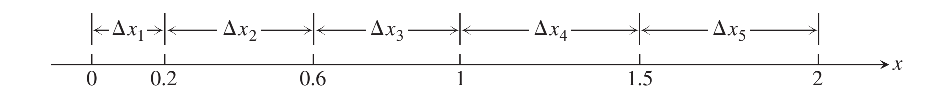


(b)

FIGURA 5.10 La curva de la figura 5.9 con rectángulos de una partición más fina de [*a*, *b*]. Las particiones más finas crean conjuntos de rectángulos con bases más delgadas que aproximan la región entre la gráfica de *f* y el eje *x* con mayor exactitud.

EJEMPLO 6 Partición de un intervalo cerrado

El conjunto $P = \{0, 0.2, 0.6, 1, 1.5, 2\}$ es una partición de $[0, 2]$. Hay cinco subintervalos de P: $[0, 0.2]$, $[0.2, 0.6]$, $[0.6, 1]$, $]1, 1.5]$ y $]1.5, 2]$:



Las longitudes de los subintervalos son $\Delta x_1 = 0.2$, $\Delta x_2 = 0.4$, $\Delta x_3 = 0.4$, $\Delta x_4 = 0.5$, y $\Delta x_5 = 0.5$. El subintervalo de mayor longitud es 0.5, de manera que la norma de la partición es $\|P\| = 0.5$. En este ejemplo hay dos subintervalos con esa longitud. ■

Cualquier suma de Riemann asociada a una partición de un intervalo cerrado [*a*, *b*] define rectángulos que aproximan la región entre la gráfica de una función continua *f* y el eje *x*. Las particiones con normas que se aproximan a cero conducen a conjuntos de rectángulos que aproximan esta región con mayor exactitud, como sugiere la figura 5.10. En la siguiente sección veremos que si la función *f* es continua en un intervalo cerrado [*a*, *b*], no importa cómo elijamos la partición P y los puntos c_k en sus intervalos para construir una suma de Riemann, ya que hay un único valor límite al que se aproxima cuando el ancho del subintervalo , controlado por la norma de la partición , se aproxima a cero.

EJERCICIOS 5.2

Notación sigma

Escriba las sumas en los ejercicios 1 a 6 sin la notación sigma. Después evalúelas.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{2} \frac{6k}{k+1}$ **2.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} \frac{k-1}{k}$

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} \cos k\pi$ **4.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} \operatorname{sen} k\pi$

5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} (-1)^{k+1} \operatorname{sen} \frac{\pi}{k}$ **6.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} (-1)^{k} \cos k\pi$

7. ¿Cuál de las siguientes expresiones representa a 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 en notación sigma?

a. $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} 2^{k-1}$ **b.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} 2^{k}$ **c.** $\displaystyle\sum_{k=-1}^{4} 2^{k+1}$

8. ¿Cuál de las siguientes expresiones representa 1 – 2 + 4 – 8 + 16 – 32 en notación sigma?

a. $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} (-2)^{k-1}$ **b.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} (-1)^{k} 2^{k}$ **c.** $\displaystyle\sum_{k=-2}^{3} (-1)^{k+1} 2^{k+2}$

9. ¿Cuál fórmula no es equivalente a las otras dos?

a. $\displaystyle\sum_{k=2}^{4} \frac{(-1)^{k-1}}{k-1}$ **b.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{2} \frac{(-1)^{k}}{k+1}$ **c.** $\displaystyle\sum_{k=-1}^{1} \frac{(-1)^{k}}{k+2}$

10. ¿Cuál fórmula no es equivalente a las otras dos?

a. $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} (k-1)^2$ **b.** $\displaystyle\sum_{k=-1}^{3} (k+1)^2$ **c.** $\displaystyle\sum_{k=-3}^{-1} k^2$

Exprese las sumas de los ejercicios 11 a 16 en notación sigma. La forma de su respuesta dependerá del límite inferior de la sumatoria que elija.

11. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$ **12.** $1 + 4 + 9 + 16$

13. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$ **14.** $2 + 4 + 6 + 8 + 10$

15. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ **16.** $-\frac{1}{5} + \frac{2}{5} - \frac{3}{5} + \frac{4}{5} - \frac{5}{5}$

Valor de sumas finitas

17. Suponga que $\sum_{k=1}^{n} a_k = -5$ y $\sum_{k=1}^{n} b_k = 6$. Encuentre los valores de

a. $\sum_{k=1}^{n} 3a_k$ **b.** $\sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{6}$ **c.** $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)$

d. $\sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k)$ **e.** $\sum_{k=1}^{n} (b_k - 2a_k)$

18. Suponga que $\sum_{k=1}^{n} a_k = 0$ y $\sum_{k=1}^{n} b_k = 1$. Encuentre los valores de

a. $\sum_{k=1}^{n} 8a_k$ **b.** $\sum_{k=1}^{n} 250b_k$

c. $\sum_{k=1}^{n} (a_k + 1)$ **d.** $\sum_{k=1}^{n} (b_k - 1)$

Evalúe las sumas de los ejercicios 19 a 28.

19. a. $\sum_{k=1}^{10} k$ **b.** $\sum_{k=1}^{10} k^2$ **c.** $\sum_{k=1}^{10} k^3$

20. a. $\sum_{k=1}^{13} k$ **b.** $\sum_{k=1}^{13} k^2$ **c.** $\sum_{k=1}^{13} k^3$

21. $\sum_{k=1}^{7} (-2k)$ **22.** $\sum_{k=1}^{5} \frac{\pi k}{15}$

23. $\sum_{k=1}^{6} (3 - k^2)$ **24.** $\sum_{k=1}^{6} (k^2 - 5)$

25. $\sum_{k=1}^{5} k(3k + 5)$ **26.** $\sum_{k=1}^{7} k(2k + 1)$

27. $\sum_{k=1}^{5} \frac{k^3}{225} + \left(\sum_{k=1}^{5} k\right)^3$ **28.** $\left(\sum_{k=1}^{7} k\right)^2 - \sum_{k=1}^{7} \frac{k^3}{4}$

Rectángulos para suma de Riemann

En los ejercicios 29 a 32, grafique cada función $f(x)$ en el intervalo dado. Divida el intervalo en cuatro subintervalos de la misma longitud. Después añada a su gráfica los rectángulos asociados a la suma de Riemann $\Sigma_{k=1}^{4} f(c_k)\,\Delta x_k$, dado que c_k es (a) el extremo izquierdo, (b) el extremo derecho, (c) el punto medio del k-ésimo subintervalo. (Haga un dibujo separado para cada conjunto de rectángulos).

29. $f(x) = x^2 - 1, \quad [0, 2]$

30. $f(x) = -x^2, \quad [0, 1]$

31. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad [-\pi, \pi]$

32. $f(x) = \operatorname{sen} x + 1, \quad [-\pi, \pi]$

33. Encuentre la norma de la partición $P = \{0, 1.2, 1.5, 2.3, 2.6, 3\}$.

34. Encuentre la norma de la partición $P = \{-2, -1.6, -0.5, 0, 0.8, 1\}$.

Límites de sumas superiores

En las funciones de los ejercicios 35 a 40, encuentre una fórmula para la suma superior obtenida al dividir el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos iguales. Después tome el límite de estas sumas cuando $n \to \infty$ para calcular el área debajo de la curva en $[a, b]$.

35. $f(x) = 1 - x^2$ en el intervalo $[0, 1]$.

36. $f(x) = 2x$ en el intervalo $[0, 3]$.

37. $f(x) = x^2 + 1$ en el intervalo $[0, 3]$.

38. $f(x) = 3x^2$ en el intervalo $[0, 1]$.

39. $f(x) = x + x^2$ en el intervalo $[0, 1]$.

40. $f(x) = 3x + 2x^2$ en el intervalo $[0, 1]$.

5.3 La integral definida

En la sección 5.2 investigamos el límite de una suma finita definida en un intervalo cerrado $[a, b]$ usando n subintervalos del mismo ancho (o longitud), $(b - a)/n$. En esta sección consideraremos el límite de sumas de Riemann más generales cuando la norma de las particiones de $[a, b]$ tienden a cero. Para las sumas de Riemann más generales, los subintervalos de las particiones no necesitan tener el mismo ancho. El proceso de límite nos conduce a la definición de la *integral definida* de una función en un intervalo cerrado $[a, b]$.

Límites de sumas de Riemann

La definición de la integral definida se basa en la idea de que, para ciertas funciones, cuando las normas de las particiones de $[a, b]$ tienden a cero, los valores de las sumas de Riemann correspondientes tienden a un valor límite I. Lo que queremos decir con esta idea

de convergencia es que una suma de Riemann estará cerca del número I siempre que la norma de la partición sea suficientemente pequeña (de manera que todos sus subintervalos tengan ancho suficientemente pequeño). Introduciremos el símbolo ϵ como un número pequeño positivo que especifica qué tan cerca debe estar la suma de Riemann de I, y el símbolo δ como un segundo número pequeño positivo que especifica qué tan pequeña debe ser la norma de una partición para que eso pase. He aquí la formulación precisa.

DEFINICIÓN La integral definida como un límite de sumas de Riemann
Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo cerrado $[a, b]$. Decimos que un número I es la **integral definida de f en $[a, b]$**, y que I es el límite de las sumas de Riemann $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k$ si se satisface la siguiente condición:

Dado cualquier número $\epsilon > 0$ existe un número correspondiente $\delta > 0$ tal que para toda partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$ con $\|P\| < \delta$ y cualquier elección de c_k en $[x_{k-1}, x_k]$, tenemos que

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k - I \right| < \epsilon .$$

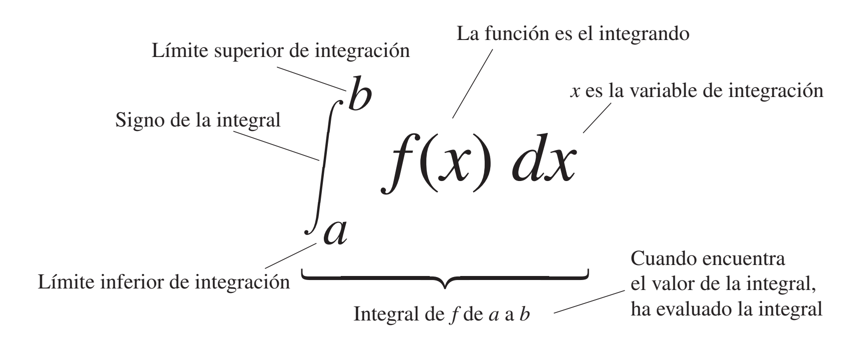
Leibniz introdujo una notación para la integral definida que evidencia su construcción como un límite de sumas de Riemann. Leibniz imaginó a las sumas finitas $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k$ convirtiéndose en una suma infinita de los valores de la función $f(x)$ multiplicada por anchos "infinitesimales" dx de los subintervalos. El símbolo de suma $\sum$ se reemplaza por el símbolo de la integral $\int$, cuyo origen es la letra "S". Los valores de la función, $f(c_k)$ son reemplazados por una selección continua de valores de $f(x)$. El ancho de los subintervalos, Δx_k se convierte en la diferencial dx. Es como si sumáramos todos los productos de la forma $f(x) \cdot dx$ cuando x va de a a b. Aun cuando esta notación evidencia el proceso de construcción de una integral, es la definición de Riemann la que da un significado preciso de la integral definida.

Notación y existencia de la integral definida

El símbolo para el número I en la definición de la integral definida es

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

que se lee como "la integral de a a b de f de x, de x", o algunas veces como "la integral de a a b de f de x respecto de x". También las partes que componen el símbolo de la integral tienen nombres:



Cuando se satisface la definición, decimos que las sumas de Riemann de f en $[a, b]$ **convergen** a la integral definida $I = \int_a^b f(x)\,dx$ y que f es **integrable** en $[a, b]$. Tenemos muchas opciones de una partición P con norma que tienda a cero, así como numerosas alternativas de puntos c_k para cada partición. La integral definida existe cuando siempre obtenemos el mismo límite I, sin importar qué elecciones hayamos hecho. Cuando existe el límite, lo escribimos como la integral definida

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k = I = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Cuando cada partición tiene n subintervalos iguales, cada uno de ancho $\Delta x = (b - a)/n$, también escribiremos

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x = I = \int_a^b f(x)\,dx.$$

El límite siempre se toma cuando la norma de las particiones tiende a cero y el número de subintervalos tiende a infinito.

El valor de la integral definida de una función en cualquier intervalo en particular depende de la función y no de la letra que elijamos para representar la variable independiente. Si decidimos usar t o u en lugar de x, simplemente escribimos las integrales como

$$\int_a^b f(t)\,dt \qquad \text{o} \qquad \int_a^b f(u)\,du \qquad \text{en lugar de} \qquad \int_a^b f(x)\,dx.$$

No importa cómo escribamos la integral, sigue siendo el mismo número, definido como un límite de sumas de Riemann. Como no importa qué letra usemos, la variable de integración se llama **variable muda**.

Dado que hay tal cantidad de opciones entre las cuales elegir al tomar un límite de sumas de Riemann, puede parecer difícil demostrar que tal límite existe. Resulta, sin embargo, que no importa qué elección se haga, las sumas de Riemann asociadas a una función *continua* convergen al mismo límite.

TEOREMA 1 La existencia de integrales definidas

Las funciones continuas son integrables. Esto es, si una función f es continua en un intervalo $[a, b]$, su integral definida en $[a, b]$ existe.

De acuerdo con el teorema del valor extremo (teorema 1 de la sección 4.1), cuando f es continua podemos elegir c_k de manera que $f(c_k)$ dé el valor máximo de f en $[x_{k-1}, x_k]$, obteniendo una **suma superior**. Podemos elegir c_k para obtener el valor mínimo de f en $[x_{k-1}, x_k]$, obteniendo una **suma inferior**. Podemos elegir c_k como el punto medio de $[x_{k-1}, x_k]$, el punto más a la derecha x_k, o un punto al azar. Podemos tomar las particiones con el mismo ancho, o con distintos anchos. En cada caso obtenemos el mismo límite para $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k$ cuando $\|P\| \to 0$. La idea detrás del teorema 1 es que la suma de Riemann asociada a una partición no es mayor que la suma superior de la partición, ni menor que la suma inferior. Las sumas superior e inferior convergen al mismo valor cuando $\|P\| \to 0$. Todas las otras sumas de Riemann están entre las sumas inferior y superior, y tienen el mismo límite. Una demostración del teorema 1 involucra un análisis cuidadoso de las funciones, particiones y límites, por lo que dejaremos su análisis para textos más avanzados. En los ejercicios 80 y 81 se da una indicación para esta prueba.

El teorema 1 no dice cómo *calcular* integrales definidas. Un método para calcularlas se desarrollará en la sección 5.4 a través de la conexión con el proceso de tomar antiderivadas.

Funciones integrales y no integrales

El teorema 1 nos dice que las funciones continuas en el intervalo $[a, b]$ son integrables ahí. Las funciones que no son continuas pueden ser integrables o no. Las funciones discontinuas que son integrables incluyen aquellas que son crecientes en $[a, b]$ (ejercicio 77), y las *funciones continuas a pedazos* definidas en los ejercicios adicionales al final de este capítulo. (Estas últimas son continuas excepto en un número finito de puntos en $[a, b]$.) Para que una función no sea integrable es necesario que sea suficientemente discontinua, de manera que la región entre su gráfica y el eje x no pueda aproximarse bien por rectángulos cada vez más delgados. He aquí un ejemplo de una función que no es integrable.

EJEMPLO 1 Una función no integrable en [0, 1]

La función

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0, & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

no tiene integral de Riemann en [0, 1]. La razón fundamental es que entre cualesquiera dos números hay siempre un número racional y un número irracional. Por lo tanto, la función salta de arriba a abajo demasiadas veces en [0, 1] para permitir que la región que está debajo de su gráfica y arriba del eje x pueda aproximarse mediante rectángulos, sin importar qué tan delgados sean. De hecho, veremos que las aproximaciones con sumas superiores y las aproximaciones con sumas inferiores convergen a valores límite distintos.

Si escogemos una partición P de [0, 1] y elegimos c_k como el valor máximo de f en $[x_{k-1}, x_k]$ la suma de Riemann correspondiente es

$$U = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} (1)\,\Delta x_k = 1,$$

ya que cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ contiene números racionales donde $f(c_k) = 1$. Observe que la longitud de los intervalos de la partición suman 1, $\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = 1$. En consecuencia, cada suma de Riemann es igual a 1, y el límite de las sumas de Riemann usando estas opciones es igual a 1.

Por otra parte, si elegimos c_k como el valor mínimo para f en $[x_{k-1}, x_k]$, la suma de Riemann es

$$L = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} (0)\,\Delta x_k = 0,$$

ya que cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ contiene números irracionales c_k donde $f(c_k) = 0$. El límite de las sumas de Riemann usando estas opciones es igual a cero. Como el límite depende de la elección de c_k, la función no es integrable. ■

Propiedades de las integrales definidas

Al definir $\int_a^b f(x)\,dx$ como un límite de sumas $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k$, nos movemos de izquierda a derecha a lo largo del intervalo $[a, b]$. ¿Qué pasaría si en lugar de ello nos moviéramos de derecha a izquierda, empezando con $x_0 = b$ y terminando con $x_n = a$. Cada Δx_k en la suma de Riemann cambiaría su signo, con $x_k - x_{k-1}$ negativo en lugar de positivo. Con la misma elección de c_k en cada subintervalo, el signo de cualquier suma de Riemann

cambiaría, así como el signo del límite, la integral $\int_b^a f(x)\,dx$. Como no habíamos dado previamente un significado a la integración hacia atrás, esto nos lleva a definir

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Otra extensión de la integral es a un intervalo de ancho cero, cuando $a = b$. Como $f(c_k)\,\Delta x_k$ es cero cuando el ancho del intervalo $\Delta x_k = 0$, definimos

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

El teorema 2 establece siete propiedades de las integrales, dadas como reglas que ellas satisfacen, incluyendo las dos últimas. Estas reglas resultan muy útiles en el proceso de calcular integrales. Nos referiremos a ellas repetidamente para simplificar nuestros cálculos.

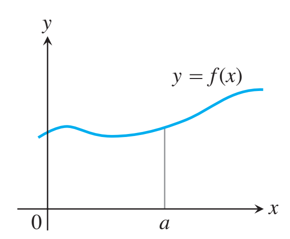
Las reglas 2 a 7 tienen interpretaciones geométricas, las cuales se presentan en la figura 5.11. Esas gráficas son de funciones positivas, pero las reglas aplican por igual para funciones integrales en general.

TEOREMA 2

Cuando f y g son integrables, la integral definida satisface las reglas 1 a 7 de la tabla 5.3.

TABLA 5.3 Reglas que satisfacen las integrales definidas

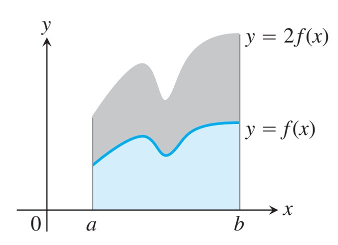
1.	*Orden de integración:*	$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$	Una definición
2.	*Intervalo de ancho cero:*	$\int_a^a f(x)\,dx = 0$	También una definición
3.	*Múltiplo constante:*	$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$	Cualquier número k
		$\int_a^b -f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$	$k = -1$
4.	*Suma y diferencia:*	$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$	
5.	*Aditividad:*	$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$	
6.	*Desigualdad máx-mín*:	Si f tiene un valor máximo máx f y un valor mínimo mín f en $[a, b]$, entonces $\text{mín}\, f \cdot (b - a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le \text{máx}\, f \cdot (b - a).$	
7.	*Dominación*:	$f(x) \ge g(x)$ sobre $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx$	
		$f(x) \ge 0$ sobre $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge 0$	(Caso especial)



(a) *Ancho del intervalo cero:*

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

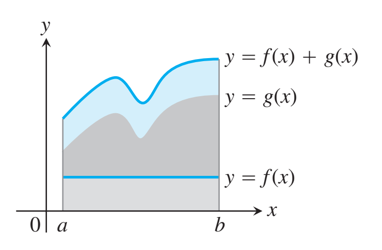
(El área debajo de un punto es 0).



(b) *Múltiplo constante:*

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx.$$

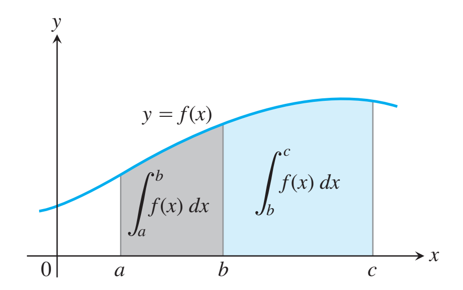
(Mostrado para $k = 2$).



(c) *Suma:*

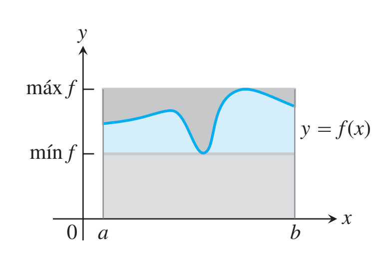
$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

(Suma de áreas)



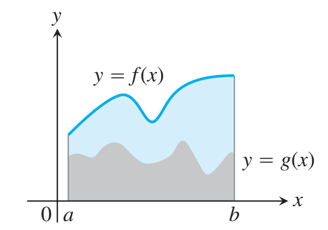
(d) *Aditividad para integrales definidas:*

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$



(e) *Desigualdad máximo-mínimo:*

$$\text{mín } f\cdot(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le \text{máx } f\cdot(b-a)$$



(f) *Dominación:*

$$f(x) \ge g(x) \text{ en } [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx$$

FIGURA 5.11

Mientras que las reglas 1 y 2 son definiciones, las reglas 3 a 7 de la tabla 5.3 se deben probar. Las pruebas se basan en la definición de integral definida como un límite de sumas de Riemann. A continuación se prueba una de esas reglas. Se pueden dar pruebas similares para las otras propiedades en la tabla 5.3.

Demostración de la regla 6 La regla 6 dice que la integral de f en $[a, b]$ nunca es menor que el valor mínimo de f por la longitud del intervalo, y nunca es mayor que el valor máximo de f veces la longitud del intervalo. La razón es que para toda partición de $[a, b]$ y cualquier elección de los puntos c_k,

$$\begin{aligned}
\text{mín } f\cdot(b-a) &= \text{mín } f\cdot\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k && \sum_{k=1}^{n}\Delta x_k = b-a\\
&= \sum_{k=1}^{n}\text{mín } f\cdot\Delta x_k && \text{Regla del múltiplo constante}\\
&\le \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k && \text{mín } f \le f(c_k)\\
&\le \sum_{k=1}^{n}\text{máx } f\cdot\Delta x_k && f(c_k) \le \text{máx } f\\
&= \text{máx } f\cdot\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k && \text{Regla del múltiplo constante}\\
&= \text{máx } f\cdot(b-a).
\end{aligned}$$

En resumen, todas las sumas de Riemann para *f* en $[a, b]$ satisfacen la desigualdad

$$\text{mín } f \cdot (b - a) \leq \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\, \Delta x_k \leq \text{ máx } f \cdot (b - a).$$

Por lo tanto, su límite, la integral, también la satisfacen. ■

EJEMPLO 2 Uso de las reglas para las integrales definidas

Supongamos que

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = 5, \qquad \int_{1}^{4} f(x)\, dx = -2, \qquad \int_{-1}^{1} h(x)\, dx = 7.$$

Entonces

1. $\displaystyle\int_{4}^{1} f(x)\, dx = -\int_{1}^{4} f(x)\, dx = -(-2) = 2$ Regla 1

2. $\displaystyle\int_{-1}^{1} [2f(x) + 3h(x)]\, dx = 2\int_{-1}^{1} f(x)\, dx + 3\int_{-1}^{1} h(x)\, dx$ Reglas 3 y 4

$$= 2(5) + 3(7) = 31$$

3. $\displaystyle\int_{-1}^{4} f(x)\, dx = \int_{-1}^{1} f(x)\, dx + \int_{1}^{4} f(x)\, dx = 5 + (-2) = 3$ Regla 5 ■

EJEMPLO 3 Determinación de las cotas para una integral

Probar que el valor de $\int_0^1 \sqrt{1 + \cos x}\, dx$ es menor que $3/2$.

Solución La desigualdad máx-mín para integrales definidas (regla 6) dice que $\text{mín } f \cdot (b - a)$ es una *cota inferior* para el valor de $\int_a^b f(x)\, dx$ y que $\text{máx } f \cdot (b - a)$ es una *cota superior*.

El máximo valor de $\sqrt{1 + \cos x}$ en $[0, 1]$ es $\sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$, de manera que

$$\int_0^1 \sqrt{1 + \cos x}\, dx \leq \sqrt{2} \cdot (1 - 0) = \sqrt{2}.$$

Como $\int_0^1 \sqrt{1 + \cos x}\, dx$ está acotada por arriba por $\sqrt{2}$ (que es $1.414\ldots$), la integral es menor que $3/2$. ■

Área debajo de la curva de una función no negativa

A continuación se precisa la noción del área de una región con frontera curva, tomando en cuenta la idea de aproximar una región mediante un número de rectángulos cada vez mayor. El área que está debajo de la gráfica de una función continua no negativa se define como una integral definida.

DEFINICIÓN **Área debajo de una curva como una integral definida**

Si $y = f(x)$ es no negativa e integrable en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces el **área debajo de la curva $y = f(x)$ en $[a, b]$** es la integral de *f* de *a* a *b*,

$$A = \int_a^b f(x)\, dx.$$

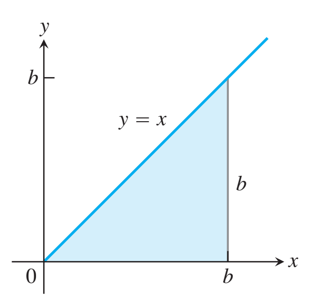


FIGURA 5.12 La región del ejemplo 4 es un triángulo.

Por primera vez tenemos una definición rigurosa para el área de una región cuya frontera es la gráfica de cualquier función continua. A continuación aplicaremos esto a un ejemplo sencillo, el área debajo de una recta, donde podemos verificar que nuestra nueva definición coincide con nuestra noción previa de área.

EJEMPLO 4 Área debajo de la recta $y = x$

Calcular $\int_0^b x\,dx$ y encontrar el área A debajo de $y = x$ en el intervalo $[0, b]$, $b > 0$.

Solución La región de interés es un triángulo (figura 5.12). Calculamos el área de dos maneras.

(a) Para calcular la integral definida como el límite de sumas de Riemann, calculamos $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k$ para particiones cuyas normas tiendan a cero. El teorema 1 nos dice que no importa cómo elijamos las particiones o los puntos c_k siempre y cuando las normas tiendan a cero. Todas las opciones dan exactamente el mismo límite. De manera que consideramos la partición P que subdivide el intervalo $[0, b]$ en n subintervalos del mismo ancho $\Delta x = (b - 0)/n = b/n$, y elegimos c_k como el extremo derecho de cada subintervalo. La partición es $P = \left\{0, \frac{b}{n}, \frac{2b}{n}, \frac{3b}{n}, \cdots, \frac{nb}{n}\right\}$ y $c_k = \frac{kb}{n}$. En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x &= \sum_{k=1}^{n} \frac{kb}{n} \cdot \frac{b}{n} && f(c_k) = c_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{kb^2}{n^2} \\
&= \frac{b^2}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k && \text{Regla del múltiplo constante} \\
&= \frac{b^2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} && \text{Suma de los primeros } n \text{ enteros} \\
&= \frac{b^2}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Cuando $n \to \infty$ y $\|P\| \to 0$, esta última expresión de la derecha tiene como límite $b^2/2$. Por lo tanto,

$$\int_0^b x\,dx = \frac{b^2}{2}.$$

(b) Como el área, en el caso de una función no negativa, es igual a la integral definida, podemos obtener rápidamente la integral definida usando la fórmula para el área de un triángulo que tiene como base b y altura $y = b$. El área es $A = (1/2)\,b \cdot b = b^2/2$. Nuevamente tenemos que $\int_0^b x\,dx = b^2/2$. ■

El ejemplo 4 se puede generalizar para integrar $f(x) = x$ en cualquier intervalo cerrado $[a, b]$, $0 < a < b$.

$$\begin{aligned}
\int_a^b x\,dx &= \int_a^0 x\,dx + \int_0^b x\,dx && \text{Regla 5} \\
&= -\int_0^a x\,dx + \int_0^b x\,dx && \text{Regla 1} \\
&= -\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}. && \text{Ejemplo 4}
\end{aligned}$$

En conclusión, tenemos la regla siguiente para integrar $f(x) = x$:

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}, \qquad a < b \tag{1}$$

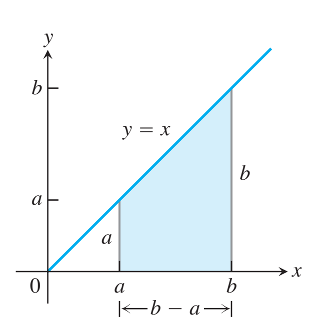


FIGURA 5.13 El área de esta región trapezoidal es $A = (b^2 - a^2)/2$.

Este cálculo da el área de un trapezoide (figura 5.13). La ecuación (1) sigue siendo válida cuando a y b son negativos. Cuando $a < b < 0$, el valor de la integral definida es $(b^2 - a^2)/2$ es un número negativo, el negativo del área del trapezoide que cae hasta la recta $y = x$ debajo del eje x. Cuando $a < 0$ y $b > 0$, la ecuación (1) sigue siendo válida, y la integral definida da la diferencia entre dos áreas, el área debajo de la gráfica y arriba de $[0, b]$, menos el área debajo $[a, 0]$ y sobre de la gráfica.

Los resultados siguientes también pueden establecerse usando un cálculo con suma de Riemann similar al del ejemplo 4 (ejercicios 75 y 76).

$$\int_a^b c\,dx = c(b - a), \qquad c \text{ cualquier constante} \tag{2}$$

$$\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}, \qquad a < b \tag{3}$$



Revisión del valor promedio de una función continua

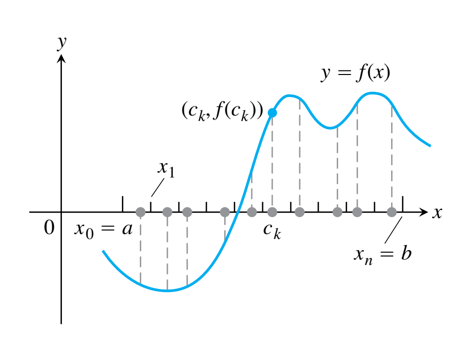


FIGURA 5.14 Una muestra de valores de una función en un intervalo $[a, b]$.

En la sección 5.1 hablamos informalmente del valor promedio de una función continua no negativa f en un intervalo $[a, b]$, lo que nos lleva a definir este promedio como el área debajo de la gráfica de $y = f(x)$ dividida entre $b - a$. En notación de integrales escribimos esto como

$$\text{Promedio} = \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Podemos usar esta fórmula para dar una definición precisa del valor promedio de cualquier función continua (o integrable), si es positiva, negativa o ambos.

Es posible utilizar, de manera alternativa, el siguiente argumento. Empezamos con un concepto aritmético: el promedio de n números es su suma dividida entre n. Una función continua f en $[a, b]$ puede tener una infinidad de valores, pero aún así podemos tomar una muestra de ellos de manera ordenada. Dividimos $[a, b]$ en n subintervalos del mismo ancho $\Delta x = (b - a)/n$ y evaluamos f en el punto c_k de cada uno (figura 5.14). El promedio de los n valores de la muestra es

$$\begin{aligned}
\frac{f(c_1) + f(c_2) + \cdots + f(c_n)}{n} &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(c_k) \\
&= \frac{\Delta x}{b - a}\sum_{k=1}^{n} f(c_k) \qquad \Delta x = \frac{b-a}{n},\ \text{entonces } \frac{1}{n} = \frac{\Delta x}{b - a} \\
&= \frac{1}{b - a}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x
\end{aligned}$$

El promedio se obtiene dividiendo una suma de Riemann para f en $[a, b]$ entre $(b - a)$. Conforme incrementamos el tamaño de la muestra y hacemos que la norma de la partición tienda a cero, el promedio se aproxima a $(1/(b - a))\int_a^b f(x)\,dx$. Ambos puntos de vista nos llevan a la siguiente definición.

DEFINICIÓN El promedio o valor medio de una función

Si f es integrable en $[a, b]$, su **valor promedio en** $[a, b]$, también llamado **valor medio** es

$$\text{prom}(f) = \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

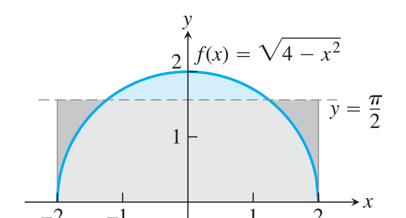


FIGURA 5.15 El valor promedio de $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ en $[-2, 2]$ es $\pi/2$ (ejemplo 5).

EJEMPLO 5 Determinación de un valor promedio

Encontrar el valor promedio de $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ en $[-2, 2]$.

Solución Reconocemos $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ como una función cuya gráfica es el semicírculo superior de radio 2 con centro en el origen (figura 5.15).

El área entre el semicírculo y el eje x de -2 a 2 puede calcularse usando la fórmula geométrica

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\cdot\pi r^2 = \frac{1}{2}\cdot\pi(2)^2 = 2\pi.$$

Debido a que f es no negativa, el área también es el valor de la integral de f, de -2 a 2,

$$\int_{-2}^{2}\sqrt{4 - x^2}\,dx = 2\pi.$$

Por lo tanto, el valor promedio de f es

$$\text{av}(f) = \frac{1}{2 - (-2)}\int_{-2}^{2}\sqrt{4 - x^2}\,dx = \frac{1}{4}(2\pi) = \frac{\pi}{2}.$$

■

EJERCICIOS 5.3

Expresión de límites como integrales

Exprese los límites de los ejercicios 1 a 8 como integrales definidas.

1. $\lim\limits_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} c_k^2\,\Delta x_k$, donde P es una partición de $[0, 2]$.

2. $\lim\limits_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} 2c_k^3\,\Delta x_k$, donde P es una partición de $[-1, 0]$

3. $\lim\limits_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} (c_k^2 - 3c_k)\,\Delta x_k$, donde P es una partición de $[-7, 5]$

4. $\lim\limits_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{c_k}\right)\Delta x_k$, donde P es una partición de $[1, 4]$

5. $\lim\limits_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - c_k}\,\Delta x_k$, donde P es una partición de $[2, 3]$.

6. $\lim\limits_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{4 - c_k^2}\,\Delta x_k$, donde P es una partición de $[0, 1]$.

7. $\lim\limits_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} (\sec c_k)\,\Delta x_k$, donde P es una partición $[-\pi/4, 0]$

8. $\lim\limits_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} (\tan c_k)\,\Delta x_k$, donde P es una partición de $[0, \pi/4]$

Uso de las propiedades y los valores conocidos para encontrar otras integrales

9. Suponga que f y g son integrables y que

$$\int_1^2 f(x)\,dx = -4,\ \int_1^5 f(x)\,dx = 6,\ \int_1^5 g(x)\,dx = 8.$$

Use las reglas listadas en la tabla 5.3 para encontrar

a. $\int_2^2 g(x)\,dx$ **b.** $\int_5^1 g(x)\,dx$

c. $\int_1^2 3f(x)\,dx$ **d.** $\int_2^5 f(x)\,dx$

e. $\int_1^5 [f(x) - g(x)]\,dx$ **f.** $\int_1^5 [4f(x) - g(x)]\,dx$

10. Suponga que f y h son integrables y que

$$\int_1^9 f(x)\,dx = -1,\quad \int_7^9 f(x)\,dx = 5,\quad \int_7^9 h(x)\,dx = 4.$$

Use las reglas listadas en la tabla 5.3 para encontrar

a. $\int_1^9 -2f(x)\,dx$ **b.** $\int_7^9 [f(x) + h(x)]\,dx$

c. $\int_7^9 [2f(x) - 3h(x)]\,dx$ **d.** $\int_9^1 f(x)\,dx$

e. $\int_1^7 f(x)\,dx$ **f.** $\int_9^7 [h(x) - f(x)]\,dx$

11. Suponga que $\int_1^2 f(x)\,dx = 5$. Encuentre

a. $\int_1^2 f(u)\,du$ **b.** $\int_1^2 \sqrt{3} f(z)\,dz$

c. $\int_2^1 f(t)\,dt$ **d.** $\int_1^2 [-f(x)]\,dx$

12. Suponga que $\int_{-3}^0 g(t)\,dt = \sqrt{2}$. Encuentre

a. $\int_0^{-3} g(t)\,dt$ **b.** $\int_{-3}^0 g(u)\,du$

c. $\int_{-3}^0 [-g(x)]\,dx$ **d.** $\int_{-3}^0 \frac{g(r)}{\sqrt{2}}\,dr$

13. Suponga que f es integrable y que $\int_0^3 f(z)\,dz = 3$ y $\int_0^4 f(z)\,dz = 7$. Encuentre

a. $\int_3^4 f(z)\,dz$ **b.** $\int_4^3 f(t)\,dt$

14. Suponga que h es integrable y que $\int_{-1}^1 h(r)\,dr = 0$ y $\int_{-1}^3 h(r)\,dr = 6$. Encuentre

a. $\int_1^3 h(r)\,dr$ **b.** $-\int_3^1 h(u)\,du$

Uso del área para evaluar las integrales definidas

En los ejercicios 15 a 22, grafique los integrandos y use las áreas para evaluar las integrales.

15. $\int_{-2}^4 \left(\frac{x}{2} + 3\right) dx$ **16.** $\int_{1/2}^{3/2} (-2x + 4)\,dx$

17. $\int_{-3}^3 \sqrt{9 - x^2}\,dx$ **18.** $\int_{-4}^0 \sqrt{16 - x^2}\,dx$

19. $\int_{-2}^1 |x|\,dx$ **20.** $\int_{-1}^1 (1 - |x|)\,dx$

21. $\int_{-1}^1 (2 - |x|)\,dx$ **22.** $\int_{-1}^1 \left(1 + \sqrt{1 - x^2}\right) dx$

Use las áreas para evaluar las integrales en los ejercicios 23 a 26.

23. $\int_0^b \frac{x}{2}\,dx,\quad b > 0$ **24.** $\int_0^b 4x\,dx,\quad b > 0$

25. $\int_a^b 2s\,ds,\quad 0 < a < b$ **26.** $\int_a^b 3t\,dt,\quad 0 < a < b$

Evaluaciones

Use los resultados de las ecuaciones (1) y (3) para evaluar las integrales de los ejercicios 27 a 38.

27. $\int_1^{\sqrt{2}} x\,dx$ **28.** $\int_{0.5}^{2.5} x\,dx$ **29.** $\int_\pi^{2\pi} \theta\,d\theta$

30. $\int_{\sqrt{2}}^{5\sqrt{2}} r\,dr$ **31.** $\int_0^{\sqrt[3]{7}} x^2\,dx$ **32.** $\int_0^{0.3} s^2\,ds$

33. $\int_0^{1/2} t^2\,dt$ **34.** $\int_0^{\pi/2} \theta^2\,d\theta$ **35.** $\int_a^{2a} x\,dx$

36. $\int_a^{\sqrt{3}a} x\,dx$ **37.** $\int_0^{\sqrt[3]{b}} x^2\,dx$ **38.** $\int_0^{3b} x^2\,dx$

Use las reglas de la tabla 5.3 y las ecuaciones (1)-(3) para evaluar las integrales de los ejercicios 39 a 50.

39. $\int_3^1 7\,dx$ **40.** $\int_0^{-2} \sqrt{2}\,dx$

41. $\int_0^2 5x\,dx$ **42.** $\int_3^5 \frac{x}{8}\,dx$

43. $\int_0^2 (2t - 3)\,dt$ **44.** $\int_0^{\sqrt{2}} \left(t - \sqrt{2}\right) dt$

45. $\int_2^1 \left(1 + \frac{z}{2}\right) dz$ **46.** $\int_3^0 (2z - 3)\,dz$

47. $\int_1^2 3u^2\,du$ **48.** $\int_{1/2}^1 24u^2\,du$

49. $\int_0^2 (3x^2 + x - 5)\,dx$ **50.** $\int_1^0 (3x^2 + x - 5)\,dx$

Determinación del área

En los ejercicios 51 a 54, use una integral definida para encontrar el área de la región entre la curva dada y el eje x en el intervalo $[0, b]$.

51. $y = 3x^2$ **52.** $y = \pi x^2$

53. $y = 2x$ **54.** $y = \frac{x}{2} + 1$

Valor promedio

En los ejercicios 55 a 62, grafique la función y encuentre su valor promedio en el intervalo dado.

55. $f(x) = x^2 - 1$ en $\left[0, \sqrt{3}\right]$

56. $f(x) = -\dfrac{x^2}{2}$ en $[0, 3]$ **57.** $f(x) = -3x^2 - 1$ en $[0, 1]$

58. $f(x) = 3x^2 - 3$ en $[0, 1]$

59. $f(t) = (t - 1)^2$ en $[0, 3]$

60. $f(t) = t^2 - t$ en $[-2, 1]$

61. $g(x) = |x| - 1$ en **a.** $[-1, 1]$, **b.** $[1, 3]$, y **c.** $[-1, 3]$

62. $h(x) = -|x|$ en **a.** $[-1, 0]$, **b.** $[0, 1]$, y **c.** $[-1, 1]$

Teoría y ejemplos

63. ¿Qué valores de a y b maximizan el valor de

$$\int_a^b (x - x^2)\, dx?$$

(*Sugerencia:* ¿En dónde es positivo el integrando?)

64. ¿Qué valores de a y b minimizan el valor de

$$\int_a^b (x^4 - 2x^2)\, dx?$$

65. Use la desigualdad máx-mín para encontrar las cotas superior e inferior del valor de

$$\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}\, dx.$$

66. (*Continuación del ejercicio 65*). Use la desigualdad máx-mín para encontrar las cotas superior e inferior de

$$\int_0^{0.5} \frac{1}{1 + x^2}\, dx \quad \text{y} \quad \int_{0.5}^1 \frac{1}{1 + x^2}\, dx.$$

Sume las cotas para llegar a una mejor estimación de

$$\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}\, dx.$$

67. Demuestre que el valor de $\int_0^1 \operatorname{sen}(x^2)\, dx$ no puede ser 2.

68. Pruebe que el valor de $\int_1^0 \sqrt{x + 8}\, dx$ está entre $2\sqrt{2} \approx 2.8$ y 3.

69. Integrales de funciones no negativas Use la desigualdad máx-mín para probar que si f es integrable,

$$f(x) \ge 0 \quad \text{en} \quad [a, b] \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\, dx \ge 0.$$

70. Integrales de funciones no positivas Demuestre que si f es integrable,

$$f(x) \le 0 \quad \text{en} \quad [a, b] \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\, dx \le 0.$$

71. Use la desigualdad $\operatorname{sen} x \le x$, que se cumple para $x \ge 0$, para encontrar una cota superior para el valor de $\int_0^1 \operatorname{sen} x\, dx$.

72. La desigualdad $\sec x \ge 1 + (x^2/2)$ se cumple para $(-\pi/2, \pi/2)$. Úsela para encontrar una cota inferior para el valor de $\int_0^1 \sec x\, dx$.

73. Si prom(f) realmente es un valor típico de la función integrable $f(x)$ en $[a, b]$, entonces el número prom(f) debería tener la misma integral que f en $[a, b]$. ¿Es así? Esto es, ¿la expresión siguiente es correcta?

$$\int_a^b \text{prom}(f)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx?$$

Justifique su respuesta.

74. Sería bueno si los valores promedios de funciones integrables obedecieran las reglas siguientes en un intervalo $[a, b]$.

a. $\text{prom}(f + g) = \text{prom}(f) + \text{prom}(g)$

b. $\text{prom}(kf) = k\, \text{prom}(f)$ (k es cualquier número)

c. $\text{prom}(f) \le \text{prom}(g)$ si $f(x) \le g(x)$ en $[a, b]$.

¿Se cumplen siempre estas reglas? Justifique sus respuestas.

75. Use límites de sumas de Riemann, como en el ejemplo 4a, para establecer la ecuación (2).

76. Use límites de sumas de Riemann, como en el ejemplo 4a, para establecer la ecuación (3).

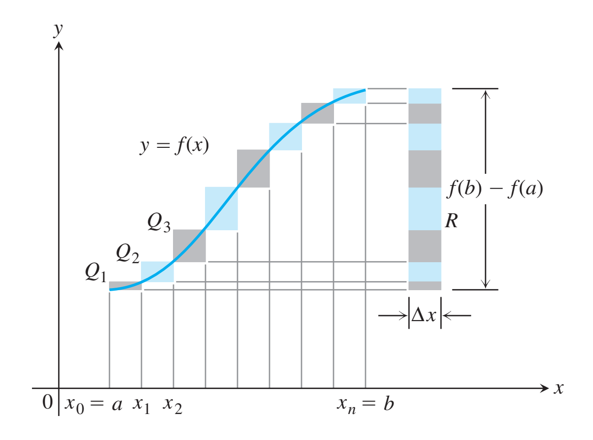
77. Sumas superior e inferior para funciones crecientes

a. Suponga que la gráfica de una función continua $f(x)$ crece de manera constante cuando x se mueve de izquierda a derecha a lo largo de un intervalo $[a, b]$. Sea P una partición de $[a, b]$ en n subintervalos de longitud $\Delta x = (b - a)/n$. Refiérase a la siguiente figura para demostrar que la diferencia entre las sumas superior e inferior para f en esta partición puede representarse gráficamente como el área de un rectángulo R cuyas dimensiones son $[f(b) - f(a)]$ por Δx. (*Sugerencia:* La diferencia $U - L$ es la suma de las áreas de los rectángulos cuyas diagonales $Q_0Q_1, Q_1Q_2, \ldots, Q_{n-1}Q_n$ están a lo largo de la curva. No hay traslape cuando estos rectángulos se desplazan horizontalmente dentro de R).

b. Suponga que en lugar de ser iguales, las longitudes Δx_k de los subintervalos de la partición de $[a, b]$ varían de tamaño. Demuestre que

$$U - L \le |f(b) - f(a)|\, \Delta x_{\text{máx}},$$

donde $\Delta x_{\text{máx}}$ es la norma de P y, por lo tanto, $\lim_{\|P\| \to 0} (U - L) = 0$.



78. Sumas superior e inferior para funciones decrecientes (*Continuación del ejercicio 77*).

a. Dibuje una figura como la del ejercicio 77 para una función continua $f(x)$ cuyos valores decrezcan de manera constante cuando x se mueve de izquierda a derecha a lo largo del intervalo $[a, b]$. Sea P una partición de $[a, b]$ en subintervalos de la misma longitud. Encuentre una expresión para $U - L$ del ejercicio 77a.

b. Suponga que en lugar de ser iguales las longitudes Δx_k de los subintervalos de P varían de tamaño. Demuestre que la desigualdad

$$U - L \leq |f(b) - f(a)|\, \Delta x_{\text{máx}}$$

del ejercicio 77b todavía se cumple y que, por lo tanto, $\lim_{\|P\|\to 0} (U - L) = 0$.

79. Use la fórmula

$$\operatorname{sen} h + \operatorname{sen} 2h + \operatorname{sen} 3h + \cdots + \operatorname{sen} mh = \frac{\cos(h/2) - \cos((m + (1/2))h)}{2 \operatorname{sen}(h/2)}$$

para encontrar el área debajo de la curva $y = \operatorname{sen} x$ de $x = 0$ a $x = \pi/2$ en dos pasos:

a. Haga una partición del intervalo $[0, \pi/2]$ en n subintervalos de la misma longitud, y calcule la suma superior correspondiente U.

b. Después encuentre el límite de U cuando $n \to \infty$ y $\Delta x = (b - a)/n \to 0$.

80. Suponga que f es continua y no negativa en $[a, b]$, como en la figura de la derecha. Insertando puntos

$$x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k, \ldots, x_{n-1}$$

como se muestra, divida $[a, b]$ en n subintervalos de longitud $\Delta x_1 = x_1 - a$, $\Delta x_2 = x_2 - x_1, \ldots, \Delta x_n = b - x_{n-1}$, que no tienen que ser iguales.

a. Si $m_k = \text{mín}\,\{f(x) \text{ para } x \text{ en el } k\text{–ésimo subintervalo}\}$, explique la conexión entre la *suma inferior*

$$L = m_1\,\Delta x_1 + m_2\,\Delta x_2 + \cdots + m_n\,\Delta x_n$$

y la región sombreada en la primera parte de la figura.

b. Si $M_k = \text{máx}\,\{f(x) \text{ para } x \text{ en el } k\text{–ésimo subintervalo}\}$, explique la conexión entre la *suma superior*

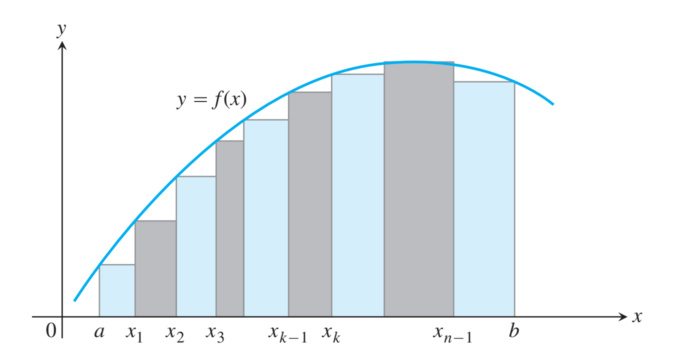
$$U = M_1\,\Delta x_1 + M_2\,\Delta x_2 + \cdots + M_n\,\Delta x_n$$

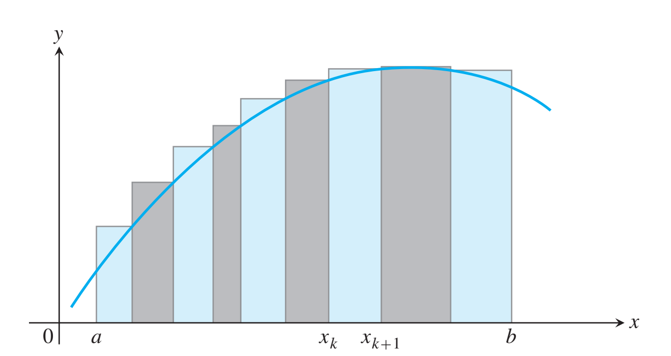
y la región sombreada en la segunda parte de la figura.

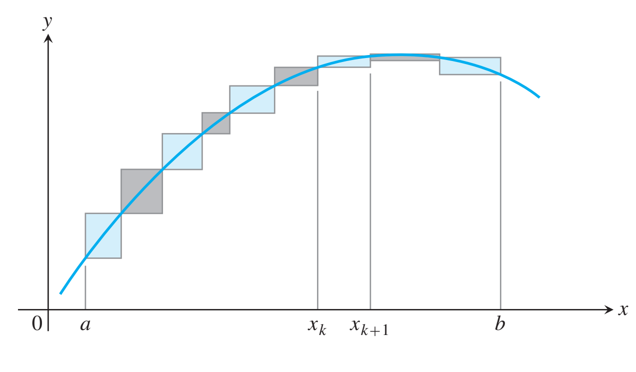
c. Explique la conexión entre $U - L$ y las regiones sombreadas a lo largo de la curva en la tercera parte de la figura.

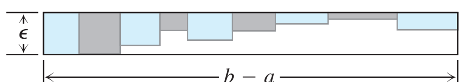
81. Decimos que f es **uniformemente continua** en $[a, b]$ si, dado cualquier $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si x_1, x_2 están en $[a, b]$ y $|x_1 - x_2| < \delta$ entonces $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$. Se puede probar que una función continua en $[a, b]$ es uniformemente continua. Use esto y la figura de la derecha para demostrar que si f es continua y $\epsilon > 0$ está dada, es posible hacer $U - L \leq \epsilon \cdot (b - a)$ haciendo el más largo de los Δx_k's lo suficientemente pequeño.

82. Si en un viaje de 150 millas el promedio de velocidades es de 30 millas/hora, y después regresa sobre el mismo camino de 150 millas a una razón de 50 millas/hora, ¿cuál es su rapidez promedio en todo el viaje? Justifique su respuesta. (*Fuente*: David H. Pleacher, *The Mathematics Teacher,* vol. 85, núm. 6, pp. 445-446, septiembre de 1992).









EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

Determinación de sumas de Riemann

Si su software matemático puede dibujar rectángulos asociados a las sumas de Riemann, úselo para dibujar rectángulos asociados a las sumas de Riemann que convergen a las integrales de los ejercicios 83 a 88. En cada caso, use $n = 4, 10, 20$, y 50 subintervalos de la misma longitud.

83. $\displaystyle\int_0^1 (1 - x)\,dx = \frac{1}{2}$

84. $\displaystyle\int_0^1 (x^2 + 1)\,dx = \frac{4}{3}$

85. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \, dx = 0$

86. $\int_{0}^{\pi/4} \sec^2 x \, dx = 1$

87. $\int_{-1}^{1} |x| \, dx = 1$

88. $\int_{1}^{2} \frac{1}{x} \, dx$ (El valor de la integral es aproximadamente 0.693).

Valor promedio

En los ejercicios 89 a 92, use un software matemático para realizar los siguientes pasos:

a. Trace las funciones en el intervalo dado.

b. Haga una partición del intervalo en $n = 100, 200$, y 1000 subintervalos de la misma longitud, y evalúe la función en el punto medio de cada subintervalo.

c. Calcule el valor promedio de los valores de la función generados en el inciso (b).

d. Resuelva la ecuación $f(x) =$ (valor promedio) para x usando el valor promedio calculado en el inciso (c) para la partición $n = 1000$.

89. $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $[0, \pi]$

90. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ en $[0, \pi]$

91. $f(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ en $\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$

92. $f(x) = x \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x}$ en $\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$

5.4 El teorema fundamental del cálculo

En esta sección presentaremos el teorema fundamental del cálculo, que es el teorema central del cálculo integral. Dicho teorema conecta la integración con la derivación, permitiéndonos calcular integrales usando una antiderivada de la función en lugar de tomar límites de las sumas de Riemann, como hicimos en la sección 5.3. Leibniz y Newton explotaron esta relación y empezaron el desarrollo matemático que fue el combustible de la revolución científica durante los siguientes 200 años.

Durante nuestro análisis presentaremos la versión integral del teorema del valor medio, que es otro teorema importante del cálculo integral, y lo usaremos para probar el teorema fundamental.

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

Sir Isaac Newton
(1642–1727)

Teorema del valor medio para integrales definidas

En la sección anterior definimos el valor promedio de una función continua en un intervalo cerrado [a, b] como la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ dividida entre $b - a$ que es la longitud o ancho del intervalo. El teorema del valor medio para integrales definidas afirma que la función f alcanza *siempre*, por lo menos una vez en el intervalo, el valor promedio.

La gráfica de la figura 5.16 muestra una función continua positiva $y = f(x)$ definida en el intervalo $[a, b]$. Geométricamente, el teorema del valor medio dice que existe un número c en $[a, b]$ tal que el rectángulo con altura igual al valor promedio $f(c)$ de la función y el ancho de la base $b - a$ tiene exactamente la misma área que la región que está debajo de la gráfica de f, de a a b.

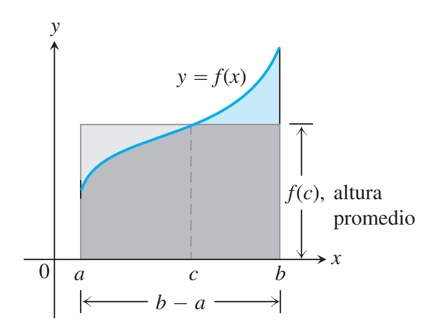


FIGURA 5.16 El valor $f(c)$ en el teorema del valor medio es, en cierto sentido, la altura promedio (o *media*) de f en $[a, b]$. Cuando $f \geq 0$, el área del rectángulo es el área debajo de la gráfica de f de a a b,

$$f(c)(b - a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

TEOREMA 3 Teorema del valor medio para integrales definidas
Si f es continua en $[a, b]$, entonces en algún punto c en $[a, b]$,

$$f(c) = \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Demostración Si dividimos ambos lados de la desigualdad máx-mín (regla 6, tabla 5.3) entre $(b - a)$, obtenemos

$$\text{mín } f \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)\, dx \leq \text{máx } f.$$

Como f es continua, el teorema del valor intermedio para funciones continuas (sección 2.6) dice que f debe alcanzar todos los valores entre mín f y máx f. Por lo tanto, debe alcanzar el valor $(1/(b - a)) \int_a^b f(x)\, dx$ en algún punto c de $[a, b]$. ■

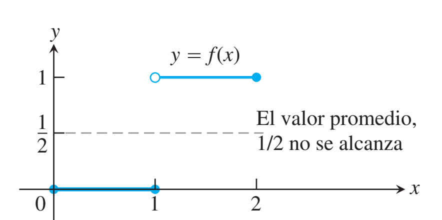


FIGURA 5.17 Una función discontinua no tiene que alcanzar su valor promedio.

Aquí, la continuidad de f es importante. Es posible que una función discontinua nunca alcance su valor promedio (figura 5.17).



EJEMPLO 1 Aplicación del teorema del valor medio para integrales

Encontrar el valor promedio de $f(x) = 4 - x$ en $[0, 3]$ y un punto del dominio en donde f alcanza este valor.

Solución

$$\begin{aligned}
\text{prom}(f) &= \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)\, dx \\
&= \frac{1}{3 - 0} \int_0^3 (4 - x)\, dx = \frac{1}{3}\left(\int_0^3 4\, dx - \int_0^3 x\, dx\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(4(3 - 0) - \left(\frac{3^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right)\right) \qquad \text{Sección 5.3, ecs. (1) y (2)} \\
&= 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}.
\end{aligned}$$

FIGURA 5.18 El área del rectángulo con base $[0, 3]$ y altura $5/2$ (el valor promedio de la función $f(x) = 4 - x$) es igual al área entre la gráfica de f y el eje x, de 0 a 3 (ejemplo 1).

El valor promedio de $f(x) = 4 - x$ en $[0, 3]$ es $5/2$. La función alcanza este valor cuando $4 - x = 5/2$ o $x = 3/2$. (Figura 5.18) ■

En el ejemplo 1, encontramos un punto c en donde f toma su valor promedio haciendo $f(x)$ igual al valor promedio calculado y resolviendo para x. No siempre se puede encontrar fácilmente el valor c. ¿Qué más podemos aprender del teorema del valor medio para integrales? A continuación se da un ejemplo.

EJEMPLO 2 Probar que si f es continua en $[a, b]$, $a \neq b$, y si

$$\int_a^b f(x)\, dx = 0,$$

entonces $f(x) = 0$ al menos una vez en $[a, b]$.

Solución El valor promedio de f en $[a, b]$ es

$$\text{prom}(f) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)\, dx = \frac{1}{b - a} \cdot 0 = 0.$$

De acuerdo con el teorema del valor medio, f alcanza este valor en algún punto $c \in [a, b]$. ■

Teorema fundamental, parte 1

Si $f(t)$ es una función integrable en un intervalo finito I, la integral de cualquier número fijo $a \in I$ a otro número $x \in I$ define una nueva función F cuyo valor en x es

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt. \tag{1}$$

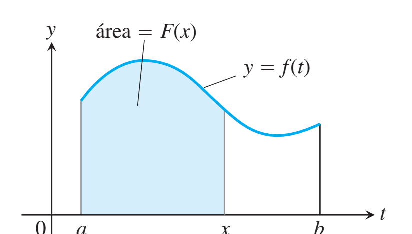


FIGURA 5.19 La función $F(x)$, definida por la ecuación (1), da el área debajo de la gráfica de f, de a a x, cuando f es no negativa y $x > a$.

Por ejemplo, si f es no negativa y x está a la derecha de a, entonces $F(x)$ es el área debajo de la gráfica de a a x (figura 5.19). La variable x es el límite superior de integración de una integral, pero F es como cualquier otra función real de variable real. Para cada valor de la entrada x existe un resultado bien definido numéricamente, en este caso la integral definida de f, de a a x.

La ecuación (1) da una manera de definir funciones nuevas, pero su importancia por el momento es la conexión que hace entre integrales y derivadas. Si f es cualquier función continua, entonces el teorema fundamental del cálculo afirma que F es una función diferenciable de x cuya derivada es la misma f. En todo valor de x,

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\, dt = f(x).$$

Para entender un poco mejor por qué el resultado es válido, analicémoslo desde el punto de vista geométrico.

Si $f \geq 0$ en $[a, b]$, el cálculo de $F'(x)$ a partir de la definición de la derivada implica tomar el límite cuando $h \to 0$ del cociente de diferencias

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h}.$$

Para $h > 0$, el numerador se obtiene restando dos áreas, de manera que es el área debajo la gráfica de f, de x a $x + h$ (figura 5.20). Si h es pequeño, esta área es aproximadamente igual al área del rectángulo de altura $f(x)$ y ancho h, como se ve en la figura 5.20. Esto es,

$$F(x+h) - F(x) \approx hf(x).$$

FIGURA 5.20 En la ecuación (1), $F(x)$ es el área a la izquierda de x. Además, $F(x + h)$ es el área a la izquierda de $x + h$. Entonces, el cociente de diferencias $[F(x + h) - F(x)]/h$ es aproximadamente igual a $f(x)$, la altura del rectángulo que se muestra aquí.

Dividiendo ambos lados de esta aproximación entre h, y haciendo $h \to 0$, es razonable esperar que

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x).$$

Este resultado es cierto aun si la función f no es positiva, y constituye la primera parte del teorema fundamental del cálculo.

TEOREMA 4 Teorema fundamental del cálculo, parte 1

Si f es continua en $[a, b]$, entonces $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ es continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b), y su derivada es $f(x)$;

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\, dt = f(x). \tag{2}$$

Antes de probar el teorema 4, veamos varios ejemplos para entender mejor lo que dice.

EJEMPLO 3 Aplicación del teorema fundamental

Usar el teorema fundamental para encontrar

(a) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x \cos t\,dt$

(b) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$

(c) $\dfrac{dy}{dx}$ si $y = \displaystyle\int_x^5 3t \operatorname{sen} t\,dt$

(d) $\dfrac{dy}{dx}$ si $y = \displaystyle\int_1^{x^2} \cos t\,dt$

Solución

(a) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x \cos t\,dt = \cos x$ Ecuación 2 con $f(t) = \cos t$

(b) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{1+x^2}$ Ecuación 2 con $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$

(c) La regla 1 para integrales de la tabla 5.1, sección 5.3, establece esto para el teorema fundamental.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\int_x^5 3t \operatorname{sen} t\,dt = \frac{d}{dx}\left(-\int_5^x 3t \operatorname{sen} t\,dt\right) \qquad \text{Regla 1}$$

$$= -\frac{d}{dx}\int_5^x 3t \operatorname{sen} t\,dt$$

$$= -3x \operatorname{sen} x$$

(d) El límite de integración superior no es x, sino x^2. Esto hace que y sea una composición de dos funciones,

$$y = \int_1^u \cos t\,dt \qquad \text{y} \qquad u = x^2.$$

Por lo tanto, debemos aplicar la regla de la cadena cuando encontremos dy/dx.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$= \left(\frac{d}{du}\int_1^u \cos t\,dt\right)\cdot\frac{du}{dx}$$

$$= \cos u \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \cos(x^2)\cdot 2x$$

$$= 2x\cos x^2$$

■

EJEMPLO 4 Construcción de una función con una derivada y valor dados

Encontrar una función $y = f(x)$ en el dominio $(-\pi/2, \pi/2)$ con derivada

$$\frac{dy}{dx} = \tan x$$

que satisfaga la condición $f(3) = 5$.

Solución El teorema fundamental facilita la construcción de una función con derivada $\tan x$ que sea igual a 0 en $x = 3$:

$$y = \int_3^x \tan t \, dt.$$

Como $y(3) = \int_3^3 \tan t \, dt = 0$, sólo tenemos que sumar 5 a esta función para construir una con derivada $\tan x$ cuyo valor en $x = 3$ es 5:

$$f(x) = \int_3^x \tan t \, dt + 5.$$

A pesar de que la solución del problema del ejemplo 4 satisface las dos condiciones requeridas, podríamos cuestionarnos si está en una forma útil. La respuesta es sí, ya que hoy en día tenemos computadoras y calculadoras capaces de aproximar integrales. En el capítulo 7 aprenderemos a escribir la solución del ejemplo 4 como

$$y = \ln \left| \frac{\cos 3}{\cos x} \right| + 5.$$

A continuación se da una demostración del teorema fundamental para una función continua arbitraria.

Demostración del teorema 4 Probamos el teorema fundamental aplicando directamente la definición de la derivada a la función $F(x)$, cuando x y $x + h$ están en (a, b). Esto significa escribir el cociente de diferencias

$$\frac{F(x + h) - F(x)}{h} \tag{3}$$

y probar que su límite cuando $h \rightarrow 0$ es el número $f(x)$ para cada x en (a, b).

Cuando reemplazamos $F(x + h)$ y $F(x)$ por sus integrales definidas, el numerador de la ecuación (3) se convierte en

$$F(x + h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t) \, dt - \int_a^x f(t) \, dt.$$

La regla de aditividad para integrales (regla 5, tabla 5.3) simplifica el lado derecho a

$$\int_x^{x+h} f(t) \, dt,$$

de manera que la ecuación (3) se transforma en

$$\begin{aligned} \frac{F(x + h) - F(x)}{h} &= \frac{1}{h}[F(x + h) - F(x)] \\ &= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t) \, dt. \end{aligned} \tag{4}$$

De acuerdo con el teorema del valor medio para integrales definidas, el valor de la última expresión en la ecuación (4) es uno de los valores que toma f en el intervalo entre x y $x + h$. Esto es, para algún número c en este intervalo,

$$\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} f(t)\,dt = f(c). \tag{5}$$

Cuando $h \to 0$, $x + h$ se aproxima a x, forzando a c a hacerlo también (porque c está atrapada entre x y $x + h$). Como f es continua en x, $f(c)$ se aproxima a $f(x)$:

$$\lim_{h\to 0} f(c) = f(x). \tag{6}$$

Entonces, regresando al principio tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{dF}{dx} &= \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} && \text{Definición de derivada}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} f(t)\,dt && \text{Ecuación (4)}\\
&= \lim_{h\to 0} f(c) && \text{Ecuación (5)}\\
&= f(x). && \text{Ecuación (6)}
\end{aligned}$$

Si $x = a$ o b, entonces el límite de la ecuación (3) se interpreta como un límite unilateral con $h \to 0^+$ o $h \to 0^-$, respectivamente. Así pues, el teorema 1 de la sección 3.1 prueba que F es continua para todo punto de $[a, b]$. Esto concluye la prueba. ■

Teorema fundamental parte 2 (El teorema de la evaluación)

Veamos ahora la segunda parte del teorema fundamental del cálculo. En ella se describe cómo evaluar integrales definidas sin usar el cálculo de límites de sumas de Riemann. En lugar de ello, encontramos una antiderivada y la evaluamos en los límites de integración superior e inferior.

TEOREMA 4 (Continuación) El teorema fundamental del cálculo, parte 2
Si f es continua en todos los puntos de $[a, b]$ y F es cualquier antiderivada de f en $[a, b]$, entonces

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Demostración La parte 1 del teorema fundamental nos dice que existe una antiderivada de f, a saber

$$G(x) = \int_{a}^{x} f(t)\,dt.$$

En consecuencia, si F es *cualquier* antiderivada de f, entonces $F(x) = G(x) + C$ para alguna constante C en $a < x < b$ (de acuerdo con el corolario 2 del teorema del valor medio para derivadas, sección 4.2). Toda vez que tanto F como G son continuas en $[a, b]$, vemos que $F(x) = G(x) + C$ también se satisface cuando $x = a$ y $x = b$ tomando límites laterales (cuando $x \to a^+$ y $x \to b^-$).

Evaluando $F(b) - F(a)$, tenemos

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= [G(b) + C] - [G(a) + C] \\ &= G(b) - G(a) \\ &= \int_a^b f(t)\,dt - \int_a^a f(t)\,dt \\ &= \int_a^b f(t)\,dt - 0 \\ &= \int_a^b f(t)\,dt. \end{aligned}$$

■

El teorema dice que para calcular la integral definida de f en $[a, b]$, todo lo que tenemos que hacer es:

1. Encontrar una antiderivada F de f, y
2. Calcular el número $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

La notación usual para $F(b) - F(a)$ es

$$F(x)\Big]_a^b \qquad \text{o} \qquad \Big[F(x)\Big]_a^b,$$

dependiendo de si F tiene uno o más términos.

EJEMPLO 5 Evaluación de integrales

(a) $$\int_0^{\pi} \cos x\,dx = \operatorname{sen} x\Big]_0^{\pi} = \operatorname{sen}\pi - \operatorname{sen} 0 = 0 - 0 = 0$$

(b) $$\int_{-\pi/4}^{0} \sec x \tan x\,dx = \sec x\Big]_{-\pi/4}^{0} = \sec 0 - \sec\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \sqrt{2}$$

(c) $$\begin{aligned} \int_1^4 \left(\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{4}{x^2}\right) dx &= \left[x^{3/2} + \frac{4}{x}\right]_1^4 \\ &= \left[(4)^{3/2} + \frac{4}{4}\right] - \left[(1)^{3/2} + \frac{4}{1}\right] \\ &= [8 + 1] - [5] = 4. \end{aligned}$$

■

El procedimiento utilizado en el ejemplo 5 es mucho más fácil que calcular la suma de Riemann.

Las conclusiones del teorema fundamental nos dicen varias cosas. Se puede reescribir la ecuación (2) como

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = \frac{dF}{dx} = f(x),$$

que dice que si primero se integra la función f y después se deriva el resultado, volvemos nuevamente a la función f. De la misma manera, la ecuación

$$\int_a^x \frac{dF}{dt}\,dt = \int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$$

dice que si primero se deriva la función F y después se integra el resultado, obtenemos de nuevo la función F (ajustada por una constante de integración). En cierto sentido, los pro-

cedimientos de integración y derivación son "inversos" uno del otro. El teorema fundamental también dice que toda función continua f tiene una antiderivada F. Y afirma que la ecuación diferencial $dy/dx = f(x)$ tiene una solución (a saber, la función $y = F(x)$) para toda función continua f.

Área total

La suma de Riemann contiene términos de la forma $f(c_k)\,\Delta_k$ que dan el área de un rectángulo cuando $f(c_k)$ es positiva. Cuando $f(c_k)$ es negativa, el producto $f(c_k)\,\Delta_k$ es el negativo del área del rectángulo. Cuando sumamos tales términos para una función negativa, obtenemos el negativo del área entre la curva y el eje x. Si tomamos entonces el valor absoluto, obtenemos el área positiva.

EJEMPLO 6 Determinación de áreas usando antiderivadas

Calcular el área acotada por el eje x y la parábola $y = 6 - x - x^2$.

Solución Encontramos en dónde cruza la curva el eje x haciendo

$$y = 0 = 6 - x - x^2 = (3 + x)(2 - x),$$

que da

$$x = -3 \qquad \text{o} \qquad x = 2.$$

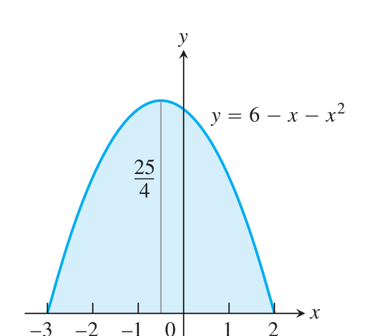


FIGURA 5.21 El área de este arco parabólico se calcula con una integral definida (ejemplo 6).

En la figura 5.21 se da un dibujo de la curva, y es no negativa en $[-3, 2]$.

El área es

$$\int_{-3}^{2} (6 - x - x^2)\,dx = \left[6x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{2}$$

$$= \left(12 - 2 - \frac{8}{3}\right) - \left(-18 - \frac{9}{2} + \frac{27}{3}\right) = 20\tfrac{5}{6}.$$

En la figura 5.21, la curva es un arco de parábola, y es interesante notar que el área debajo de dicho arco es exactamente igual a dos tercios de la base por la altura:

$$\frac{2}{3}(5)\left(\frac{25}{4}\right) = \frac{125}{6} = 20\tfrac{5}{6}.$$ ■

FIGURA 5.22 El área total entre $y = \operatorname{sen} x$ y el eje x para $0 \leq x \leq 2\pi$ es la suma de los valores absolutos de dos integrales (ejemplo 7).

El cálculo del área de la región acotada por la gráfica de una función $y = f(x)$ y el eje x requiere más cuidado cuando la función toma valores tanto positivos como negativos. Debemos ser cuidadosos para partir el intervalo $[a, b]$ en subintervalos en donde la función no cambie de signo. De otra manera, podríamos obtener cancelaciones entre los signos positivo y negativo de las áreas, llegando a un total incorrecto. El área total correcta se obtiene sumando el valor absoluto de la integral definida en cada subintervalo donde $f(x)$ no cambia de signo. El término "área" significará el *área total*.

EJEMPLO 7 Cancelación de áreas

La figura 5.22 muestra la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ entre $x = 0$ y $x = 2\pi$. Calcular

(a) la integral definida de $f(x)$ en $[0, 2\pi]$.

(b) el área entre la gráfica de $f(x)$ y el eje x en $[0, 2\pi]$.

Solución La integral definida para $f(x) = \operatorname{sen} x$ está dada por

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x \bigg]_0^{2\pi} = -[\cos 2\pi - \cos 0] = -[1 - 1] = 0.$$

La integral definida es cero, porque las porciones de la gráfica por arriba y por debajo del eje x hacen que las contribuciones se cancelen.

El área entre la gráfica de $f(x)$ y el eje x en $[0, 2\pi]$ se calcula dividiendo el dominio de sen x en dos partes: el intervalo $[0, \pi]$ en donde es no negativa, y el intervalo $[\pi, 2\pi]$ en donde es no positiva.

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x \bigg]_0^{\pi} = -[\cos \pi - \cos 0] = -[-1 - 1] = 2.$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x \bigg]_{\pi}^{2\pi} = -[\cos 2\pi - \cos \pi] = -[1 - (-1)] = -2.$$

La segunda integral da un valor negativo. El área entre la gráfica y el eje se obtiene sumando los valores absolutos

$$\text{Área} = |2| + |-2| = 4.$$

■

Resumen:

Para encontrar el área entre la gráfica de $y = f(x)$ y el eje x en el intervalo $[a, b]$, haga lo siguiente:

1. Subdivida $[a, b]$ en los ceros de f.
2. Integre f en cada subintervalo.
3. Sume los valores absolutos de las integrales.

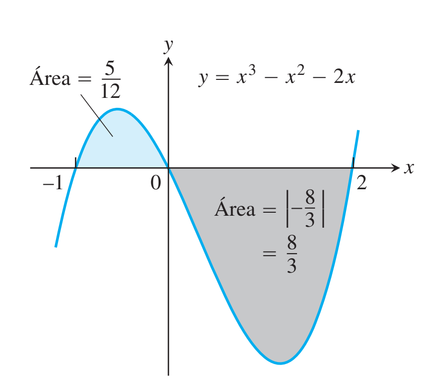


FIGURA 5.23 La región entre la curva $y = x^3 - x^2 - 2x$ y el eje x (ejemplo 8).



EJEMPLO 8 Determinación de áreas usando antiderivadas

Encontrar el área de la región entre el eje x y la gráfica de $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$, $-1 \le x \le 2$.

Solución Primero encontramos los ceros de f. Como

$$f(x) = x^3 - x^2 - 2x = x(x^2 - x - 2) = x(x + 1)(x - 2),$$

los ceros son $x = 0, -1$, y 2 (figura 5.23). Los ceros subdividen a $[-1, 2]$ en dos subintervalos: $[-1, 0]$, en donde $f \ge 0$, y $[0, 2]$, en donde $f \le 0$. Integramos f en cada subintervalo y sumamos los valores absolutos de las integrales calculadas.

$$\int_{-1}^{0} (x^3 - x^2 - 2x)\, dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-1}^{0} = 0 - \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1\right] = \frac{5}{12}$$

$$\int_{0}^{2} (x^3 - x^2 - 2x)\, dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2\right]_{0}^{2} = \left[4 - \frac{8}{3} - 4\right] - 0 = -\frac{8}{3}$$

El área total acotada se obtiene sumando los valores absolutos de las integrales calculadas,

$$\text{Área total acotada} = \frac{5}{12} + \left|-\frac{8}{3}\right| = \frac{37}{12}.$$

■

EJERCICIOS 5.4

Evaluaciones integrales

Evalúe las integrales de los ejercicios 1 a 26.

1. $\int_{-2}^{0}(2x+5)\,dx$

2. $\int_{-3}^{4}\left(5-\frac{x}{2}\right)dx$

3. $\int_{0}^{4}\left(3x-\frac{x^3}{4}\right)dx$

4. $\int_{-2}^{2}(x^3-2x+3)\,dx$

5. $\int_{0}^{1}(x^2+\sqrt{x})\,dx$

6. $\int_{0}^{5}x^{3/2}\,dx$

7. $\int_{1}^{32}x^{-6/5}\,dx$

8. $\int_{-2}^{-1}\frac{2}{x^2}\,dx$

9. $\int_{0}^{\pi}\operatorname{sen}x\,dx$

10. $\int_{0}^{\pi}(1+\cos x)\,dx$

11. $\int_{0}^{\pi/3}2\sec^2 x\,dx$

12. $\int_{\pi/6}^{5\pi/6}\csc^2 x\,dx$

13. $\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\csc\theta\cot\theta\,d\theta$

14. $\int_{0}^{\pi/3}4\sec u\tan u\,du$

15. $\int_{\pi/2}^{0}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt$

16. $\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt$

17. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(8y^2+\operatorname{sen}y)\,dy$

18. $\int_{-\pi/3}^{-\pi/4}\left(4\sec^2 t+\frac{\pi}{t^2}\right)dt$

19. $\int_{1}^{-1}(r+1)^2\,dr$

20. $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(t+1)(t^2+4)\,dt$

21. $\int_{\sqrt{2}}^{1}\left(\frac{u^7}{2}-\frac{1}{u^5}\right)du$

22. $\int_{1/2}^{1}\left(\frac{1}{v^3}-\frac{1}{v^4}\right)dv$

23. $\int_{1}^{\sqrt{2}}\frac{s^2+\sqrt{s}}{s^2}\,ds$

24. $\int_{9}^{4}\frac{1-\sqrt{u}}{\sqrt{u}}\,du$

25. $\int_{-4}^{4}|x|\,dx$

26. $\int_{0}^{\pi}\frac{1}{2}(\cos x+|\cos x|)\,dx$

Derivadas de integrales

Encuentre las derivadas en los ejercicios 27 a 30

a. evaluando la integral y derivando el resultado.

b. derivando directamente la integral.

27. $\frac{d}{dx}\int_{0}^{\sqrt{x}}\cos t\,dt$

28. $\frac{d}{dx}\int_{1}^{\operatorname{sen}x}3t^2\,dt$

29. $\frac{d}{dt}\int_{0}^{t^4}\sqrt{u}\,du$

30. $\frac{d}{d\theta}\int_{0}^{\tan\theta}\sec^2 y\,dy$

Encuentre dy/dx en los ejercicios 31 a 36.

31. $y=\int_{0}^{x}\sqrt{1+t^2}\,dt$

32. $y=\int_{1}^{x}\frac{1}{t}\,dt,\quad x>0$

33. $y=\int_{\sqrt{x}}^{0}\operatorname{sen}(t^2)\,dt$

34. $y=\int_{0}^{x^2}\cos\sqrt{t}\,dt$

35. $y=\int_{0}^{\operatorname{sen}x}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},\quad |x|<\frac{\pi}{2}$

36. $y=\int_{\tan x}^{0}\frac{dt}{1+t^2}$

Área

En los ejercicios 37 a 42, encuentre el área total entre la región y el eje x.

37. $y=-x^2-2x,\quad -3\le x\le 2$

38. $y=3x^2-3,\quad -2\le x\le 2$

39. $y=x^3-3x^2+2x,\quad 0\le x\le 2$

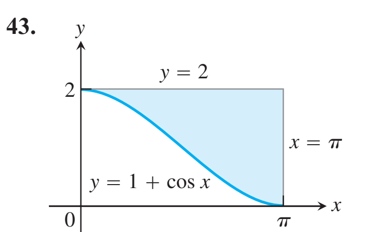
40. $y=x^3-4x,\quad -2\le x\le 2$

41. $y=x^{1/3},\quad -1\le x\le 8$

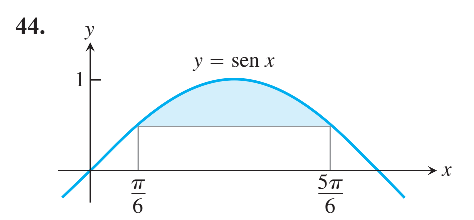
42. $y=x^{1/3}-x,\quad -1\le x\le 8$

Encuentre el área de las regiones sombreadas de los ejercicios 43 a 46.

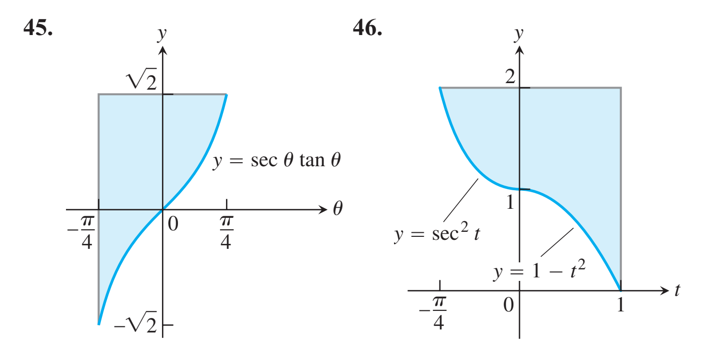
43.



44.



45. **46.**



Problemas de valores iniciales

Cada una de las siguientes funciones resuelve uno de los problemas de valores iniciales de los ejercicios 47 a 50. ¿Qué función resuelve cuál problema? Justifique sus respuestas brevemente.

a. $y = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt - 3$ **b.** $y = \int_0^x \sec t\,dt + 4$

c. $y = \int_{-1}^x \sec t\,dt + 4$ **d.** $y = \int_\pi^x \frac{1}{t}\,dt - 3$

47. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}, \quad y(\pi) = -3$ **48.** $y' = \sec x, \quad y(-1) = 4$

49. $y' = \sec x, \quad y(0) = 4$ **50.** $y' = \frac{1}{x}, \quad y(1) = -3$

Exprese las soluciones de los problemas de valores iniciales de los ejercicios 51 a 54 en términos de integrales.

51. $\frac{dy}{dx} = \sec x, \quad y(2) = 3$

52. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{1 + x^2}, \quad y(1) = -2$

53. $\frac{ds}{dt} = f(t), \quad s(t_0) = s_0$

54. $\frac{dv}{dt} = g(t), \quad v(t_0) = v_0$

Aplicaciones

55. La fórmula de Arquímedes para las parábolas Arquímedes (287-212 a.C.), inventor, ingeniero militar, físico y el mayor matemático de la época clásica del mundo occidental, descubrió que el área debajo de un arco parabólico es igual a dos tercios de la base por la altura. Trace el arco parabólico $y = h - (4h/b^2)x^2$, $-b/2 \le x \le b/2$, suponiendo que h y b son positivos. Después use cálculo integral para encontrar el área de la región acotada entre el arco y el eje x.

56. Ingresos a partir del ingreso marginal Suponga que el ingreso marginal de una compañía que fabrica y vende batidoras de huevo es

$$\frac{dr}{dx} = 2 - 2/(x + 1)^2,$$

donde r está medido en miles de dólares y x en miles de unidades. ¿Cuánto dinero deberá recibir la compañía por una producción de $x = 3$ mil batidoras de huevo? Para averiguarlo, integre el ingreso marginal de $x = 0$ a $x = 3$.

57. Costo a partir del costo marginal El costo marginal de imprimir un cartel cuando se han impreso x carteles es

$$\frac{dc}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

dólares. Encuentre $c(100) - c(1)$, el costo de imprimir del cartel 2 al cartel 100.

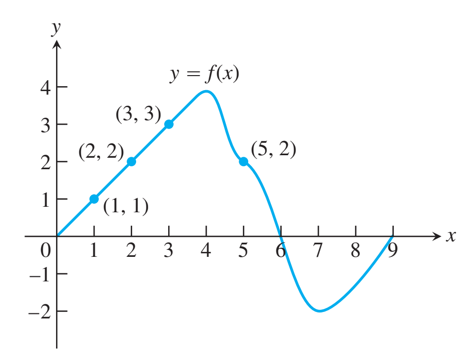
58. (*Continuación del ejercicio 57*). Encuentre $c(400) - c(100)$, el costo de imprimir del cartel 101 al cartel 400.

Obtención de conclusiones acerca del movimiento a partir de las gráficas

59. Suponga que f es la función diferenciable que se muestra en la gráfica siguiente, y que la posición en el tiempo t (seg) de una partícula que se mueve a lo largo de un eje coordenado es

$$s = \int_0^t f(x)\,dx$$

metros. Use la gráfica para contestar las siguientes preguntas. Justifique sus respuestas.



a. ¿Cuál es la velocidad de la partícula en el tiempo $t = 5$?

b. ¿La aceleración de la partícula en el tiempo $t = 5$ es positiva o negativa?

c. ¿Cuál es la posición de la partícula en el tiempo $t = 3$?

d. ¿En qué momento durante los primeros 9 segundos alcanza s su valor máximo?

e. ¿Aproximadamente en qué momento la aceleración es cero?

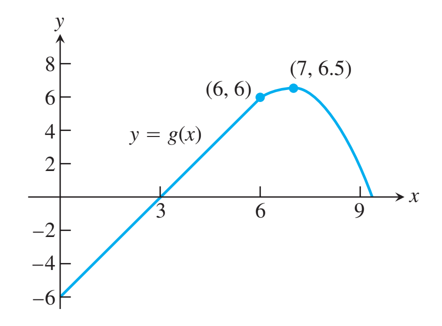
f. ¿Cuándo se está moviendo la partícula hacia el origen? ¿Cuándo lo hace alejándose del origen?

g. ¿En qué lado del origen está la partícula en el tiempo $t = 9$?

60. Suponga que g es la función diferenciable cuya la gráfica aparece aquí, y que la posición en el tiempo t (seg) de una partícula que se mueve a lo largo de un eje coordenado es

$$s = \int_0^t g(x)\,dx$$

metros. Use la gráfica para contestar las siguientes preguntas. Justifique sus respuestas.



a. ¿Cuál es la velocidad de la partícula en el tiempo $t = 3$?

b. ¿La aceleración de la partícula en el tiempo $t = 3$ es positiva o negativa?

c. ¿Cuál es la posición de la partícula en el tiempo $t = 3$?

d. ¿Cuándo pasa la partícula por el origen?

e. ¿En qué momento la aceleración es cero?

f. ¿Cuándo se está moviendo la partícula hacia el origen? ¿Cuándo se está alejando del origen?

g. ¿En qué lado del origen está la partícula en el tiempo $t = 9$?

Teoría y ejemplo

61. Demuestre que si k es una constante positiva, el área entre el eje x y uno de los arcos de la curva $y = \operatorname{sen} kx$ es $2/k$.

62. Encuentre

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}\int_0^x \frac{t^2}{t^4+1}\,dt.$$

63. Suponga que $\int_1^x f(t)\,dt = x^2 - 2x + 1$. Encuentre $f(x)$.

64. Encuentre $f(4)$ si $\int_0^x f(t)\,dt = x\cos \pi x$.

65. Encuentre la linealización de

$$f(x) = 2 - \int_2^{x+1} \frac{9}{1+t}\,dt$$

en $x = 1$.

66. Encuentre la linealización de

$$g(x) = 3 + \int_1^{x^2} \sec(t-1)\,dt$$

at $x = -1$.

67. Suponga que f tiene una derivada positiva para todos los valores de x, y que $f(1) = 0$. ¿Cuáles de los siguientes enunciados deben ser ciertos para la función

$$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt?$$

Justifique sus respuestas.

a. g es una función diferenciable de x.

b. g es una función continua de x.

c. La gráfica de g tiene una tangente horizontal en $x = 1$.

d. g tiene un máximo local en $x = 1$.

e. g tiene un mínimo local en $x = 1$.

f. La gráfica de g tiene un punto de inflexión en $x = 1$.

g. La gráfica de dg/dx cruza el eje x en $x = 1$.

68. Suponga que f tiene una derivada negativa para todos los valores de x, y que $f(1) = 0$. ¿Cuáles de los siguientes enunciados deben ser ciertos para la función

$$h(x) = \int_0^x f(t)\,dt?$$

Justifique sus respuestas.

a. h es una función dos veces diferenciable de x.

b. tanto h como dh/dx son continuas.

c. La gráfica de h tiene una tangente horizontal en $x = 1$.

d. h tiene un máximo local en $x = 1$.

e. h tiene un mínimo local en $x = 1$.

f. La gráfica de h tiene un punto de inflexión en $x = 1$.

g. La gráfica de dh/dx cruza el eje x en $x = 1$.

T **69. El teorema fundamental** Si f es continua, esperamos que

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

sea igual a $f(x)$, como en la demostración de la parte 1 del teorema fundamental. Por ejemplo, si $f(t) = \cos t$, entonces

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} \cos t\,dt = \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h}. \qquad (7)$$

La parte derecha de la ecuación (7) es el cociente de diferencias para la derivada del seno, y esperamos que su límite cuando $h \to 0$ sea $\cos x$.

Grafique $\cos x$ para $-\pi \le x \le 2\pi$. Después dibuje, de ser posible con un color distinto, la gráfica del lado derecho de la ecuación (7) como función de x para $h = 2, 1, 0.5$, y 0.1. Observe cómo las últimas curvas convergen a la gráfica del coseno cuando $h \to 0$.

T **70.** Repita el ejercicio 69 para $f(t) = 3t^2$. ¿Qué es

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} 3t^2\,dt = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}?$$

Grafique $f(x) = 3x^2$ para $-1 \le x \le 1$. Después grafique el cociente $((x+h)^3 - x^3)/h$ como una función de x para $h = 1, 0.5, 0.2$, y 0.1. Observe cómo las últimas curvas convergen a la gráfica de $3x^2$ cuando $h \to 0$.

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

En los ejercicios 71 a 74, sea $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ para la función específica f y el intervalo $[a, b]$. Use un software matemático para realizar los pasos siguientes y contestar las preguntas que se plantean.

a. Trace juntas las funciones f y F en $[a, b]$.

b. Resuelva la ecuación $F'(x) = 0$. ¿Qué puede afirmar acerca de las gráficas de f y F en los puntos donde $F'(x) = 0$? ¿Su observación se basa en la parte 1 del teorema fundamental y en la información proporcionada por la primera derivada? Explique su respuesta.

c. ¿En qué intervalos (aproximadamente) la función F es creciente y en cuáles es decreciente? ¿Qué es cierto acerca de f en esos intervalos?

d. Calcule la derivada f' y trácela junto con F. ¿Qué puede afirmar acerca de la gráfica de F en los puntos donde $f'(x) = 0$? ¿Su observación se basa en la parte 1 del teorema fundamental? Explique su respuesta.

71. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x, \quad [0, 4]$

72. $f(x) = 2x^4 - 17x^3 + 46x^2 - 43x + 12, \quad \left[0, \frac{9}{2}\right]$

73. $f(x) = \operatorname{sen} 2x \cos \frac{x}{3}, \quad [0, 2\pi]$

74. $f(x) = x \cos \pi x, \quad [0, 2\pi]$

En los ejercicios 75 a 78, sea $F(x) = \int_a^{u(x)} f(t)\, dt$ para a, u y f estipulados. Use un software matemático para realizar los pasos siguientes y contestar las preguntas que se plantean.

a. Encuentre el dominio de F.

b. Calcule $F'(x)$ y determine sus ceros. ¿En qué puntos de su dominio F es creciente? ¿En cuáles es decreciente?

c. Calcule $F''(x)$ y determine sus ceros. Identifique los extremos locales y los puntos de inflexión de F.

d. Use la información de los incisos (a)–(c) para hacer un dibujo de $y = F(x)$ en su dominio. Después grafique $F(x)$ con su software matemático para apoyar su dibujo.

75. $a = 1, \quad u(x) = x^2, \quad f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

76. $a = 0, \quad u(x) = x^2, \quad f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

77. $a = 0, \quad u(x) = 1 - x, \quad f(x) = x^2 - 2x - 3$

78. $a = 0, \quad u(x) = 1 - x^2, \quad f(x) = x^2 - 2x - 3$

En los ejercicios 79 y 80, suponga que f es continua y que $u(x)$ es dos veces diferenciable.

79. Calcule $\frac{d}{dx}\int_a^{u(x)} f(t)\, dt$ y verifique su respuesta usando un software matemático.

80. Calcule $\frac{d^2}{dx^2}\int_a^{u(x)} f(t)\, dt$ y verifique su respuesta usando un software matemático.

5.5 Las integrales indefinidas y la regla de sustitución

Una integral definida es un número definido al tomar el límite de sumas de Riemann asociadas a particiones de un intervalo cerrado finito cuya norma tiende a cero. El teorema fundamental del cálculo dice que una integral definida de una función continua puede calcularse fácilmente si somos capaces de encontrar una antiderivada de la función. En general, encontrar antiderivadas resulta más difícil que encontrar derivadas. Sin embargo, vale la pena el esfuerzo de aprender las técnicas para calcularlas.

Recordemos que en la sección 4.8 se mencionó que el conjunto de *todas* las antiderivadas de una función f se llama **integral indefinida** de f respecto de x, lo cual se denota mediante

$$\int f(x)\, dx.$$

La conexión entre las antiderivadas y la integral definida establecida en el teorema fundamental explica ahora esta notación. Cuando encuentre la integral indefinida de una función f, recuerde que siempre se debe incluir una constante arbitraria C.

Debemos distinguir cuidadosamente entre integrales definidas e indefinidas. Una integral definida $\int_a^b f(x)\, dx$ es un *número*. Una integral indefinida $\int f(x)\, dx$ es una *función* más una constante arbitraria C.

Hasta ahora solamente hemos podido encontrar antiderivadas de funciones que reconocemos claramente como derivadas. En esta sección empezaremos a desarrollar técnicas más generales para encontrar antiderivadas. Las primeras técnicas de integración que desarrollaremos se obtienen al invertir las reglas para encontrar derivadas, como la regla de las potencias y la regla de la cadena.

La regla de potencias en la forma integral

Si u es una función diferenciable de x y n es un número racional distinto de -1, la regla de la cadena nos dice que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u^{n+1}}{n+1}\right) = u^n \frac{du}{dx}.$$

Desde otro punto de vista, esta misma ecuación afirma que $u^{n+1}/(n+1)$ es una de las antiderivadas de la función $u^n(du/dx)$. Por lo tanto,

$$\int \left(u^n \frac{du}{dx}\right) dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C.$$

La integral del lado izquierdo de la ecuación suele escribirse en la forma "diferencial" sencilla,

$$\int u^n \, du,$$

que se obtiene al tratar a las dx como diferenciales que se cancelan. Así llegamos a la siguiente regla.

Si u es cualquier función diferenciable, entonces

$$\int u^n \, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1, n \text{ racional}). \tag{1}$$

La ecuación (1) realmente se cumple para cualquier exponente real $n \neq -1$, como veremos en el capítulo 7.

En la obtención de la ecuación (1) supusimos que u era una función diferenciable de la variable x, pero el nombre de la variable no tiene importancia y no aparece en la fórmula final. Podríamos haber representado la variable con θ, t, y, o cualquier otra letra. La ecuación (1) dice que siempre que podamos escribir una integral en la forma

$$\int u^n \, du, \qquad (n \neq -1),$$

con u como una función diferenciable y du como su diferencial, podemos evaluar la integral como $[u^{n+1}/(n+1)] + C$.

EJEMPLO 1 Uso de la regla de potencias

$$\int \sqrt{1+y^2} \cdot 2y \, dy = \int \sqrt{u} \cdot \left(\frac{du}{dy}\right) dy \qquad \text{Sea } u = 1 + y^2,\ du/dy = 2y$$

$$= \int u^{1/2} \, du$$

$$= \frac{u^{(1/2)+1}}{(1/2)+1} + C \qquad \text{Integrar, usando la ecuación (1) con } n = 1/2.$$

$$= \frac{2}{3} u^{3/2} + C \qquad \text{Forma simplificada}$$

$$= \frac{2}{3}(1+y^2)^{3/2} + C \qquad \text{Reemplazar } u \text{ por } 1 + y^2. \blacksquare$$

EJEMPLO 2 Ajuste del integrando con una constante

$$\int \sqrt{4t-1}\,dt = \int \frac{1}{4}\cdot\sqrt{4t-1}\cdot 4\,dt$$

$$= \frac{1}{4}\int \sqrt{u}\cdot\left(\frac{du}{dt}\right)dt \qquad \text{Sea } u = 4t-1,\ du/dt = 4.$$

$$= \frac{1}{4}\int u^{1/2}\,du \qquad \text{Con el } 1/4 \text{ fuera, la integral está ahora en la forma estándar}$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{u^{3/2}}{3/2} + C \qquad \text{Integrar, usando la ecuación (1) con } n = 1/2.$$

$$= \frac{1}{6}u^{3/2} + C \qquad \text{Forma simplificada}$$

$$= \frac{1}{6}(4t-1)^{3/2} + C \qquad \text{Reemplazar } u \text{ por } 4t-1. \quad ■$$

Sustitución: Aplicación de la regla de la cadena hacia atrás

Las sustituciones en los ejemplos 1 y 2 son ejemplos de la siguiente regla general.

TEOREMA 5 La regla de sustitución
Si $u = g(x)$ es una función diferenciable cuyo rango es un intervalo I y f es continua en I, entonces

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du.$$

Demostración La regla es cierta porque, de acuerdo con la regla de la cadena, $F(g(x))$ es una antiderivada de $f(g(x))\cdot g'(x)$ siempre que F sea una antiderivada de f:

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = F'(g(x))\cdot g'(x) \qquad \text{Regla de la cadena}$$

$$= f(g(x))\cdot g'(x). \qquad \text{Porque } F' = f$$

Si hacemos la sustitución $u = g(x)$ entonces

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int \frac{d}{dx}F(g(x))\,dx$$

$$= F(g(x)) + C \qquad \text{Teorema fundamental}$$

$$= F(u) + C \qquad u = g(x)$$

$$= \int F'(u)\,du \qquad \text{Teorema fundamental}$$

$$= \int f(u)\,du \qquad F' = f \quad ■$$

La regla de sustitución proporciona el siguiente método para evaluar la integral

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx,$$

cuando f y g' son funciones continuas:

1. Sustituir $u = g(x)$ y $du = g'(x)\,dx$ para obtener la integral

$$\int f(u)\,du.$$

2. Integrar respecto de u.
3. Reemplazar u por $g(x)$ en el resultado.

EJEMPLO 3 Uso de la sustitución

$$\int \cos(7\theta + 5)\,d\theta = \int \cos u \cdot \frac{1}{7}\,du$$

Sea $u = 7\theta + 5$, $du = 7\,d\theta$, $(1/7)\,du = d\theta$.

$$= \frac{1}{7}\int \cos u\,du$$

Con el (1/7) fuera, la integral está ahora en la forma estándar.

$$= \frac{1}{7}\operatorname{sen} u + C$$

Integrar respecto de u, tabla 4.2.

$$= \frac{1}{7}\operatorname{sen}(7\theta + 5) + C$$

Reemplazar u por $7\theta + 5$.

Podemos verificar esta solución derivando y verificando que obtuvimos la función original $\cos(7\theta + 5)$. ■

EJEMPLO 4 Uso de la sustitución

$$\int x^2 \operatorname{sen}(x^3)\,dx = \int \operatorname{sen}(x^3)\cdot x^2\,dx$$

$$= \int \operatorname{sen} u \cdot \frac{1}{3}\,du$$

Sea $u = x^3$, $du = 3x^2\,dx$, $(1/3)\,du = x^2\,dx$.

$$= \frac{1}{3}\int \operatorname{sen} u\,du$$

$$= \frac{1}{3}(-\cos u) + C$$

Integrar respecto de u.

$$= -\frac{1}{3}\cos(x^3) + C$$

Reemplazar u por x^3. ■

EJEMPLO 5 Uso de identidades y sustitución

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\cos^2 2x}\,dx &= \int \sec^2 2x\,dx && \frac{1}{\cos 2x} = \sec 2x \\
&= \int \sec^2 u \cdot \frac{1}{2}\,du && u = 2x,\ du = 2\,dx,\ dx = (1/2)\,du \\
&= \frac{1}{2}\int \sec^2 u\,du \\
&= \frac{1}{2}\tan u + C && \frac{d}{du}\tan u = \sec^2 u \\
&= \frac{1}{2}\tan 2x + C && u = 2x
\end{aligned}$$

El éxito del método de sustitución depende de encontrar una sustitución que cambie una integral que no podemos evaluar directamente por una que sí podamos. Si la primera sustitución falla, intente simplificar más el integrando con una o dos sustituciones adicionales (vea los ejercicios 49 y 50). Si no se tiene éxito se puede intentar otro tipo de sustitución. Es posible que haya varias formas correctas de proceder, como en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 6 Uso de distintas sustituciones

Evaluar

$$\int \frac{2z\,dz}{\sqrt[3]{z^2+1}}.$$

Solución Podemos usar el método de sustitución de integración como una herramienta exploratoria: sustituimos la parte más problemática del integrando y vemos qué sucede. Para esta integral, podemos intentar $u = z^2 + 1$ o incluso poner a prueba nuestra suerte y tomar u como toda la raíz cúbica. He aquí lo que pasa en cada caso.

Solución 1: Sustituimos $u = z^2 + 1$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{2z\,dz}{\sqrt[3]{z^2+1}} &= \int \frac{du}{u^{1/3}} && \text{Sea } u = z^2+1,\ du = 2z\,dz. \\
&= \int u^{-1/3}\,du && \text{En la forma } \int u^n\,du \\
&= \frac{u^{2/3}}{2/3} + C && \text{Integrar con respecto de } u. \\
&= \frac{3}{2}u^{2/3} + C \\
&= \frac{3}{2}(z^2+1)^{2/3} + C && \text{Reemplazar } u \text{ por } z^2+1.
\end{aligned}$$

Solución 2: Sustituimos, en cambio, por $u = \sqrt[3]{z^2 + 1}$.

$$\int \frac{2z\,dz}{\sqrt[3]{z^2+1}} = \int \frac{3u^2\,du}{u}$$

Sea $u = \sqrt[3]{z^2 + 1}$, $u^3 = z^2 + 1$, $3u^2\,du = 2z\,dz$.

$$= 3\int u\,du$$

$$= 3 \cdot \frac{u^2}{2} + C$$

Integrar respecto de u.

$$= \frac{3}{2}(z^2 + 1)^{2/3} + C$$

Reemplazar u por $(z^2 + 1)^{1/3}$. ■

Las integrales de $\operatorname{sen}^2 x$ y $\cos^2 x$

Algunas veces podemos usar identidades trigonométricas para transformar integrales que no sabemos cómo evaluar, en otras en las que podamos usar la regla de sustitución. Veamos un ejemplo que da las fórmulas de integración para el $\operatorname{sen}^2 x$ y $\cos^2 x$ las cuales aparecen con frecuencia en las aplicaciones.

EJEMPLO 7

(a) $$\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2}\,dx$$

$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$

$$= \frac{1}{2}\int (1 - \cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + C = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C$$

(b) $$\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2}\,dx$$

$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$

$$= \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C$$

Con la parte (a), pero con un signo cambiado ■

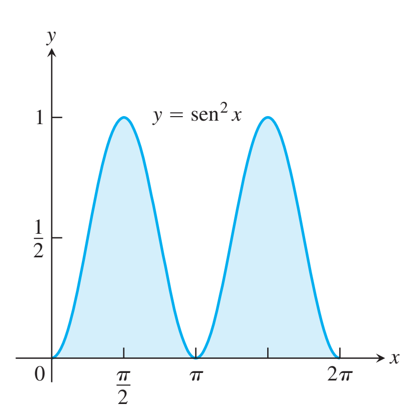


FIGURA 5.24 El área debajo de la curva $y = \operatorname{sen}^2 x$ en $[0, 2\pi]$ es igual a π unidades cuadradas (ejemplo 8).

EJEMPLO 8 Área debajo de la curva $y = \operatorname{sen}^2 x$

La figura 5.24 muestra la gráfica de $g(x) = \operatorname{sen}^2 x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$. Encontrar

(a) la integral definida de $g(x)$ en $[0, 2\pi]$.

(b) el área entre la gráfica de la función y el eje x en $[0, 2\pi]$.

Solución

(a) De acuerdo con el ejemplo 7(a), la integral definida es

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 x\,dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4}\right]_0^{2\pi} = \left[\frac{2\pi}{2} - \frac{\operatorname{sen} 4\pi}{4}\right] - \left[\frac{0}{2} - \frac{\operatorname{sen} 0}{4}\right]$$

$$= [\pi - 0] - [0 - 0] = \pi.$$

(b) La función $\operatorname{sen}^2 x$ es no negativa, de manera que el área es igual a la integral definida, o π. ■

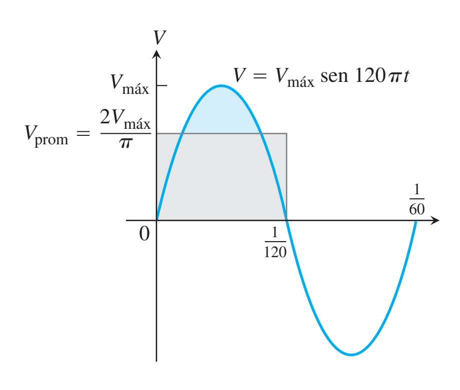


FIGURA 5.25 La gráfica del voltaje $V = V_{máx}$ sen $120\pi t$ en un ciclo completo. Su valor promedio en la mitad de un ciclo es $2V_{máx}/\pi$. Su valor promedio en un ciclo completo es cero (ejemplo 9).

EJEMPLO 9 Electricidad en el hogar

Podemos modelar el voltaje de la instalación eléctrica de nuestra casa con la función seno

$$V = V_{máx} \operatorname{sen} 120\pi t,$$

que expresa el voltaje V en voltios como una función del tiempo t en segundos. La función efectúa 60 ciclos cada segundo (su frecuencia es 60 hertz o 60 Hz). La constante positiva $V_{máx}$ es el **pico del voltaje**.

El valor promedio de V en medio ciclo de 0 a 1/120 seg (vea la figura 5.25) es

$$\begin{aligned} V_{prom} &= \frac{1}{(1/120) - 0} \int_0^{1/120} V_{máx} \operatorname{sen} 120\pi t \, dt \\ &= 120V_{máx}\left[-\frac{1}{120\pi} \cos 120\pi t\right]_0^{1/120} \\ &= \frac{V_{máx}}{\pi}[-\cos \pi + \cos 0] \\ &= \frac{2V_{máx}}{\pi}. \end{aligned}$$

El valor promedio del voltaje en un ciclo completo es cero, como podemos verlo en la figura 5.25. (Vea también el ejercicio 63). Si midiéramos el voltaje con un galvanómetro estándar, la lectura sería cero.

Para medir el voltaje eficientemente, usamos un instrumento que mide la raíz cuadrada del valor promedio del cuadrado del voltaje, a saber

$$V_{rpc} = \sqrt{(V^2)_{prom}}.$$

El subíndice "rpc" significa "raíz del promedio del cuadrado". Como el valor promedio de $V^2 = (V_{máx})^2 \operatorname{sen}^2 120\pi t$ en un ciclo es

$$(V^2)_{prom} = \frac{1}{(1/60) - 0} \int_0^{1/60} (V_{máx})^2 \operatorname{sen}^2 120\pi t \, dt = \frac{(V_{máx})^2}{2},$$

(ejercicio 63, inciso c), la rpc del voltaje es

$$V_{rpc} = \sqrt{\frac{(V_{máx})^2}{2}} = \frac{V_{máx}}{\sqrt{2}}.$$

Los valores dados para las instalaciones eléctricas caseras y los voltajes siempre son valores rpc. Así, "115 voltios de corriente alterna" significa que la rpc del voltaje es 115. El pico del voltaje, que se obtiene a partir de la última ecuación, es

$$V_{máx} = \sqrt{2}\, V_{rpc} = \sqrt{2} \cdot 115 \approx 163 \text{ voltios},$$

que es considerablemente alto. ■

EJERCICIOS 5.5

Evaluación de integrales

Evalúe las integrales indefinidas de los ejercicios 1 a 12, usando la sustitución dada para reducir las integrales a la forma estándar.

1. $\int \operatorname{sen} 3x \, dx, \quad u = 3x$

2. $\int x \operatorname{sen}(2x^2) \, dx, \quad u = 2x^2$

3. $\int \sec 2t \tan 2t \, dt, \quad u = 2t$

4. $\int \left(1 - \cos \frac{t}{2}\right)^2 \operatorname{sen} \frac{t}{2} \, dt, \quad u = 1 - \cos \frac{t}{2}$

5. $\int 28(7x-2)^{-5}\,dx, \quad u = 7x-2$

6. $\int x^3(x^4-1)^2\,dx, \quad u = x^4-1$

7. $\int \frac{9r^2\,dr}{\sqrt{1-r^3}}, \quad u = 1-r^3$

8. $\int 12(y^4+4y^2+1)^2(y^3+2y)\,dy, \quad u = y^4+4y^2+1$

9. $\int \sqrt{x}\,\operatorname{sen}^2(x^{3/2}-1)\,dx, \quad u = x^{3/2}-1$

10. $\int \frac{1}{x^2}\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)dx, \quad u = -\frac{1}{x}$

11. $\int \csc^2 2\theta \cot 2\theta\,d\theta$

   a. Usando $u = \cot 2\theta$ **b.** Usando $u = \csc 2\theta$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x+8}}$

   a. Usando $u = 5x+8$ **b.** Usando $u = \sqrt{5x+8}$

Evalúe las integrales de los ejercicios 13 a 48.

13. $\int \sqrt{3-2s}\,ds$

14. $\int (2x+1)^3\,dx$

15. $\int \frac{1}{\sqrt{5s+4}}\,ds$

16. $\int \frac{3\,dx}{(2-x)^2}$

17. $\int \theta\sqrt[4]{1-\theta^2}\,d\theta$

18. $\int 8\theta\sqrt[3]{\theta^2-1}\,d\theta$

19. $\int 3y\sqrt{7-3y^2}\,dy$

20. $\int \frac{4y\,dy}{\sqrt{2y^2+1}}$

21. $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}\,dx$

22. $\int \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}}\,dx$

23. $\int \cos(3z+4)\,dz$

24. $\int \operatorname{sen}(8z-5)\,dz$

25. $\int \sec^2(3x+2)\,dx$

26. $\int \tan^2 x\sec^2 x\,dx$

27. $\int \operatorname{sen}^5\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}\,dx$

28. $\int \tan^7\frac{x}{2}\sec^2\frac{x}{2}\,dx$

29. $\int r^2\left(\frac{r^3}{18}-1\right)^5 dr$

30. $\int r^4\left(7-\frac{r^5}{10}\right)^3 dr$

31. $\int x^{1/2}\operatorname{sen}(x^{3/2}+1)\,dx$

32. $\int x^{1/3}\operatorname{sen}(x^{4/3}-8)\,dx$

33. $\int \sec\left(v+\frac{\pi}{2}\right)\tan\left(v+\frac{\pi}{2}\right)dv$

34. $\int \csc\left(\frac{v-\pi}{2}\right)\cot\left(\frac{v-\pi}{2}\right)dv$

35. $\int \frac{\operatorname{sen}(2t+1)}{\cos^2(2t+1)}\,dt$

36. $\int \frac{6\cos t}{(2+\operatorname{sen} t)^3}\,dt$

37. $\int \sqrt{\cot y}\csc^2 y\,dy$

38. $\int \frac{\sec z\tan z}{\sqrt{\sec z}}\,dz$

39. $\int \frac{1}{t^2}\cos\left(\frac{1}{t}-1\right)dt$

40. $\int \frac{1}{\sqrt{t}}\cos(\sqrt{t}+3)\,dt$

41. $\int \frac{1}{\theta^2}\operatorname{sen}\frac{1}{\theta}\cos\frac{1}{\theta}\,d\theta$

42. $\int \frac{\cos\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}\operatorname{sen}^2\sqrt{\theta}}\,d\theta$

43. $\int (s^3+2s^2-5s+5)(3s^2+4s-5)\,ds$

44. $\int (\theta^4-2\theta^2+8\theta-2)(\theta^3-\theta+2)\,d\theta$

45. $\int t^3(1+t^4)^3\,dt$

46. $\int \sqrt{\frac{x-1}{x^5}}\,dx$

47. $\int x^3\sqrt{x^2+1}\,dx$

48. $\int 3x^5\sqrt{x^3+1}\,dx$

Simplificación de integrales paso a paso

Si no sabe qué sustitución hacer, intente reducir la integral paso a paso, usando una sustitución de prueba para simplificar un poco la integral, y después otra para simplificarla un poco más. Verá a lo que nos referimos si se fija en la sucesión de sustituciones de los ejercicios 49 y 50.

49. $\int \frac{18\tan^2 x\sec^2 x}{(2+\tan^3 x)^2}\,dx$

   a. $u = \tan x$, seguido por $v = u^3$, después de $w = 2+v$

   b. $u = \tan^3 x$, seguido por $v = 2+u$

   c. $u = 2+\tan^3 x$

50. $\int \sqrt{1+\operatorname{sen}^2(x-1)}\operatorname{sen}(x-1)\cos(x-1)\,dx$

   a. $u = x-1$, seguido por $v = \operatorname{sen} u$, después de $w = 1+v^2$

   b. $u = \operatorname{sen}(x-1)$, seguido por $v = 1+u^2$

   c. $u = 1+\operatorname{sen}^2(x-1)$

Evalúe las integrales de los ejercicios 51 y 52.

51. $\int \frac{(2r-1)\cos\sqrt{3(2r-1)^2+6}}{\sqrt{3(2r-1)^2+6}}\,dr$

52. $\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta\cos^3\sqrt{\theta}}}\,d\theta$

Problemas de valores iniciales

Resuelva los problemas de valores iniciales de los ejercicios 53 a 58.

53. $\frac{ds}{dt} = 12t(3t^2-1)^3, \quad s(1) = 3$

54. $\frac{dy}{dx} = 4x(x^2+8)^{-1/3}, \quad y(0) = 0$

55. $\frac{ds}{dt} = 8\operatorname{sen}^2\left(t+\frac{\pi}{12}\right), \quad s(0) = 8$

56. $\frac{dr}{d\theta} = 3\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right), \quad r(0) = \frac{\pi}{8}$

57. $\dfrac{d^2s}{dt^2} = -4\,\text{sen}\left(2t - \dfrac{\pi}{2}\right), \quad s'(0) = 100, \quad s(0) = 0$

58. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 4\sec^2 2x \tan 2x, \quad y'(0) = 4, \quad y(0) = -1$

59. La velocidad de una partícula que se mueve hacia atrás y hacia delante a lo largo de una recta es $v = ds/dt = 6\,\text{sen}\,2t$ m/seg para toda t. Si $s = 0$ cuando $t = 0$, encuentre el valor de s cuando $t = \pi/2$ sec.

60. La aceleración de una partícula que se mueve hacia atrás y hacia delante a lo largo de una recta es $a = d^2s/dt^2 = \pi^2 \cos \pi t$ m/seg^2 para toda t. Si $s = 0$ y $v = 8$ m/seg cuando $t = 0$, encuentre s cuando $t = 1$ sec.

Teoría y ejemplos

61. Aparentemente es posible integrar 2 sen x cos x respecto de x de tres maneras distintas:

a. $\displaystyle\int 2\,\text{sen}\,x \cos x\,dx = \int 2u\,du \qquad u = \text{sen}\,x,$

$= u^2 + C_1 = \text{sen}^2 x + C_1$

b. $\displaystyle\int 2\,\text{sen}\,x \cos x\,dx = \int -2u\,du \qquad u = \cos x,$

$= -u^2 + C_2 = -\cos^2 x + C_2$

c. $\displaystyle\int 2\,\text{sen}\,x \cos x\,dx = \int \text{sen}\,2x\,dx \qquad 2\,\text{sen}\,x\cos x = \text{sen}\,2x$

$= -\dfrac{\cos 2x}{2} + C_3.$

¿Pueden ser correctas las tres integraciones? Justifique su respuesta.

62. La sustitución $u = \tan x$ da

$$\int \sec^2 x \tan x\,dx = \int u\,du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\tan^2 x}{2} + C.$$

La sustitución $u = \sec x$ da

$$\int \sec^2 x \tan x\,dx = \int u\,du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\sec^2 x}{2} + C.$$

¿Pueden ser correctas las dos integraciones? Justifique su respuesta.

63. (*Continuación del ejemplo 9*).

a. Demuestre, evaluando la integral en la expresión

$$\frac{1}{(1/60) - 0}\int_0^{1/60} V_{\text{máx}}\,\text{sen}\,120\,\pi t\,dt$$

que el valor promedio de $V = V_{\text{máx}}\,\text{sen}\,120\,\pi t$ en un ciclo completo es cero.

b. El circuito que hace funcionar las estufas eléctricas tiene una velocidad de 240 voltios rpc. ¿Cuál es el valor pico del voltaje permisible?

c. Demuestre que

$$\int_0^{1/60} (V_{\text{máx}})^2\,\text{sen}^2\,120\,\pi t\,dt = \frac{(V_{\text{máx}})^2}{120}.$$

5.6 Sustitución y área entre curvas

Hay dos métodos para evaluar, por sustitución, una integral definida. El primero consiste en encontrar una antiderivada mediante sustitución, y después evaluar la integral definida usando el teorema fundamental. Usamos este método en los ejemplos 8 y 9 de la sección anterior. El segundo método extiende directamente el proceso de sustitución para integrales *definidas*. Aplicaremos la fórmula nueva, que se presenta a continuación, para calcular el área entre dos curvas.

Fórmula de sustitución

En la fórmula siguiente, los límites de integración se modifican cuando se cambia la variable de integración mediante sustitución.

TEOREMA 6 Sustitución en integrales definidas

Si g' es continua en el intervalo $[a, b]$ y si f es continua en el rango de g, entonces

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

Demostración Sea F cualquier antiderivada de f. Entonces

$$\begin{aligned}\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx &= F(g(x))\Big]_{x=a}^{x=b} \\ &= F(g(b)) - F(g(a)) \\ &= F(u)\Big]_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ &= \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.\end{aligned}$$

$\frac{d}{dx}F(g(x))$
$= F'(g(x))g'(x)$
$= f(g(x))g'(x)$

Teorema fundamental parte 2 ■

Para usar la fórmula, hacemos la misma sustitución de $u = g(x)$ y $du = g'(x)\,dx$ que usaríamos para evaluar la integral indefinida correspondiente. Después se integra la integral transformada respecto de u, del valor $g(a)$ (el valor de u en $x = a$) al valor $g(b)$ (el valor de u en $x = b$).

EJEMPLO 1 Sustitución por dos métodos

Evaluar $\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$.

Solución Tenemos dos posibilidades.

Método 1: Transformar la integral y evaluar la integral transformada con los límites transformados dados en el teorema 6.

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx \\ &= \int_0^2 \sqrt{u}\,du \\ &= \frac{2}{3}u^{3/2}\Big]_0^2 \\ &= \frac{2}{3}\left[2^{3/2} - 0^{3/2}\right] = \frac{2}{3}\left[2\sqrt{2}\right] = \frac{4\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

Sea $u = x^3 + 1$, $du = 3x^2\,dx$.
Cuando $x = -1$, $u = (-1)^3 + 1 = 0$.
Cuando $x = 1$, $u = (1)^3 + 1 = 2$.

Evaluar la integral definida nueva.

Método 2: Transformar la integral como una integral indefinida, cambiar nuevamente a x y usar los límites originales de x.

$$\begin{aligned}\int 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx &= \int \sqrt{u}\,du && \text{Sea } u = x^3+1,\ du = 3x^2\,dx. \\ &= \frac{2}{3}u^{3/2} + C && \text{Integrar respecto de } u. \\ &= \frac{2}{3}(x^3+1)^{3/2} + C && \text{Reemplazar } u \text{ por } x^3+1. \\ \int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx &= \frac{2}{3}(x^3+1)^{3/2}\Big]_{-1}^{1} && \text{Usar la integral recién encontrada con los límites de integración para } x. \\ &= \frac{2}{3}\left[((1)^3+1)^{3/2} - ((-1)^3+1)^{3/2}\right] \\ &= \frac{2}{3}\left[2^{3/2} - 0^{3/2}\right] = \frac{2}{3}\left[2\sqrt{2}\right] = \frac{4\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

■

¿Cuál método es mejor, evaluar la integral definida transformada con los límites transformados usando el teorema 6, o transformar la integral, integrar y transformar de regreso para usar los límites originales de integración? En el ejemplo 1, el primer método parece más fácil, pero no siempre es así. Generalmente es mejor conocer ambos métodos y usar el que parezca más apropiado en cada caso.

EJEMPLO 2 Uso de la fórmula de sustitución

$$\begin{aligned}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot\theta \csc^2\theta \, d\theta &= \int_1^0 u\cdot(-du) \\ &= -\int_1^0 u\, du \\ &= -\left[\frac{u^2}{2}\right]_1^0 \\ &= -\left[\frac{(0)^2}{2} - \frac{(1)^2}{2}\right] = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Sea $u = \cot\theta$, $du = -\csc^2\theta\, d\theta$, $-du = \csc^2\theta\, d\theta$.
Cuando $\theta = \pi/4$, $u = \cot(\pi/4) = 1$.
Cuando $\theta = \pi/2$, $u = \cot(\pi/2) = 0$.

Integrales definidas para funciones simétricas

La fórmula de sustitución del teorema 6 simplifica los cálculos de integrales definidas de funciones pares e impares (sección 1.4) en un intervalo simétrico $[-a, a]$ (figura 5.26).

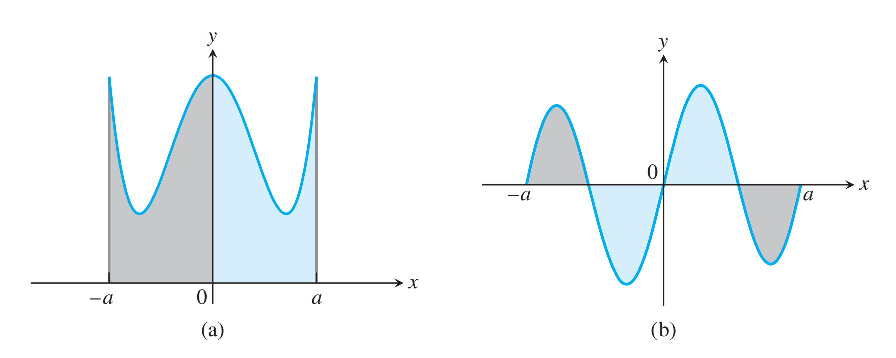


FIGURA 5.26 (a) f par, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$ (b) f impar, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

Teorema 7

Sea f continua en un intervalo simétrico $[-a, a]$.

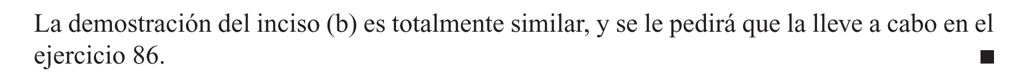
(a) Si f es par, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.

(b) Si f es impar, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

Demostración del inciso (a)

$$
\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} f(x)\,dx &= \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx && \text{Regla aditiva para las integrales definidas}\\
&= -\int_{0}^{-a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx && \text{Regla del orden de integración}\\
&= -\int_{0}^{a} f(-u)(-du) + \int_{0}^{a} f(x)\,dx && \text{Sea } u=-x,\ du=-dx. \text{ Cuando } x=0,\ u=0. \text{ Cuando } x=-a,\ u=a.\\
&= \int_{0}^{a} f(-u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx\\
&= \int_{0}^{a} f(u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx && f \text{ es par, de manera que } f(-u)=f(u).\\
&= 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx
\end{aligned}
$$

La demostración del inciso (b) es totalmente similar, y se le pedirá que la lleve a cabo en el ejercicio 86. ■



Las afirmaciones del teorema 7 siguen siendo válidas cuando f es una función integrable (en lugar de tener la propiedad más fuerte de ser continua), pero su demostración es un poco más complicada, así que la dejaremos para un curso más avanzado.

FIGURA 5.27 La región entre las curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ y las rectas $x = a$ y $x = b$.

FIGURA 5.28 Aproximamos la región con rectángulos perpendiculares al eje x.

EJEMPLO 3 Integral de una función par

Evaluar $\int_{-2}^{2} (x^4 - 4x^2 + 6)\,dx.$

Solución Como $f(x) = x^4 - 4x^2 + 6$ satisface $f(-x) = f(x)$, es par en un intervalo simétrico $[-2, 2]$, de manera que

$$
\begin{aligned}
\int_{-2}^{2} (x^4 - 4x^2 + 6)\,dx &= 2\int_{0}^{2} (x^4 - 4x^2 + 6)\,dx\\
&= 2\left[\frac{x^5}{5} - \frac{4}{3}x^3 + 6x\right]_0^2\\
&= 2\left(\frac{32}{5} - \frac{32}{3} + 12\right) = \frac{232}{15}.
\end{aligned}
$$
■

Área entre curvas

Suponga que queremos encontrar el área de una región acotada por arriba por la curva $y = f(x)$, por abajo por la curva $y = g(x)$, por la izquierda y derecha por las rectas $x = a$ y $x = b$ (figura 5.27). Con suerte, la región podría tener una forma cuya área pudiéramos encontrar geométricamente, pero si f y g son funciones continuas arbitrarias, usualmente tenemos que encontrar el área con una integral.

Para ver cuál sería dicha integral, primero aproximamos la región con n rectángulos verticales, basándonos en una partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$ (figura 5.28). El área del k-ésimo rectángulo (figura 5.29) es

$$\Delta A_k = \text{altura} \times \text{ancho} = [f(c_k) - g(c_k)]\,\Delta x_k.$$

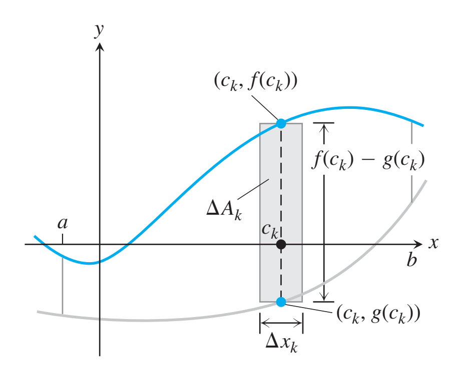


FIGURA 5.29 El área ΔA_k del *k-ésimo* rectángulo es el producto de su altura, $f(c_k) - g(c_k)$, y su ancho, Δx_k.

Aproximamos entonces el área de la región, sumando las áreas de los n rectángulos:

$$A \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta A_k = \sum_{k=1}^{n} [f(c_k) - g(c_k)]\, \Delta x_k. \qquad \text{Suma de Riemann}$$

Cuando $\|P\| \to 0$, las sumas de la derecha se aproximan al límite $\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$ debido a que f y g son continuas. Tomamos el área de la región como el valor de esta integral. Esto es,

$$A = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} [f(c_k) - g(c_k)]\, \Delta x_k = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx.$$

DEFINICIÓN Área entre curvas

Si f y g son continuas con $f(x) \geq g(x)$ en todo $[a, b]$, el **área de la región entre las curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ de a a b** es la integral de $(f - g)$ de a a b:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx.$$

Cuando se aplica esta definición, es útil dibujar las gráficas de las curvas. La gráfica revela cuál curva es la superior f y cuál es la inferior g. También nos ayuda a encontrar los límites de integración si aún no los conocemos. Es posible que sea necesario encontrar también en dónde se intersecan las curvas para determinar los límites de integración, y esto puede obligarnos a resolver la ecuación $f(x) = g(x)$ para valores de x. Después podremos integrar la función $f - g$ para el área entre las intersecciones.

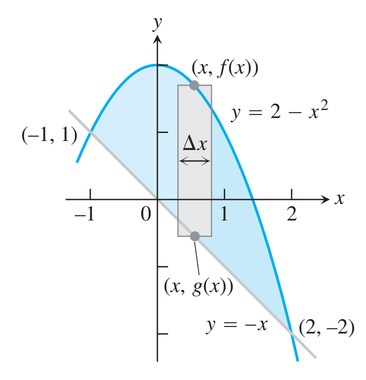


FIGURA 5.30 La región del ejemplo 4, con un rectángulo de aproximación típico.

EJEMPLO 4 Área entre curvas que se intersecan

Encontrar el área de la región acotada por la parábola $y = 2 - x^2$ y la recta $y = -x$.

Solución Primero trazamos las dos curvas (figura 5.30). Los límites de integración se encuentran resolviendo simultáneamente $y = 2 - x^2$ y $y = -x$ para x.

$$2 - x^2 = -x \qquad \text{Igualar } f(x) \text{ y } g(x).$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \qquad \text{Reescribir.}$$

$$(x + 1)(x - 2) = 0 \qquad \text{Factorizar.}$$

$$x = -1, \qquad x = 2. \qquad \text{Resolver.}$$

La región va de $x = -1$ a $x = 2$. Los límites de integración son $a = -1$, $b = 2$.

El área entre las curvas es

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx = \int_{-1}^{2} [(2 - x^2) - (-x)]\, dx$$

$$= \int_{-1}^{2} (2 + x - x^2)\, dx = \left[2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2}$$

$$= \left(4 + \frac{4}{2} - \frac{8}{3}\right) - \left(-2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{9}{2}$$

■

Biografía histórica

Richard Dedekind
(1831–1916)

Si la fórmula para una curva frontera cambia en uno o más puntos, subdividimos la región en subregiones que correspondan a los cambios de la fórmula y aplicamos la fórmula para el área entre las curvas en cada subregión.

EJEMPLO 5 Cambio de la integral para ajustarla a un cambio en la frontera

Encontrar el área de la región en el primer cuadrante, que está acotada por arriba por $y = \sqrt{x}$ y por abajo por el eje x y la recta $y = x - 2$.

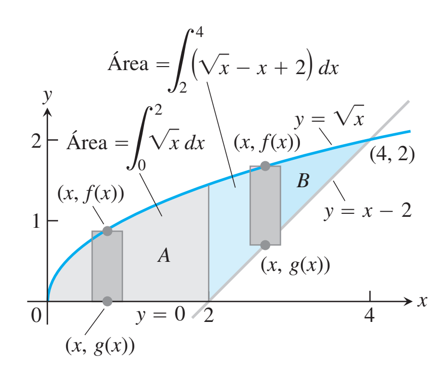


FIGURA 5.31 Cuando la fórmula para una curva frontera cambia, el área total cambia para convertirse en la suma de integrales y coincidir con aquella, una integral para cada una de las regiones sombreadas que se muestran aquí para el ejemplo 5.

Solución El dibujo (figura 5.31) muestra que la cota superior de la región es la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$. La cota inferior cambia de $g(x) = 0$ para $0 \le x \le 2$ a $g(x) = x - 2$ para $2 \le x \le 4$ (coinciden en $x = 2$). Subdividimos la región en $x = 2$ en dos subregiones A y B, que se muestran en la figura 5.31.

Los límites de integración para la región A son $a = 0$ y $b = 2$. El límite izquierdo para la región B es $a = 2$. Para encontrar el límite derecho, resolvemos simultáneamente las ecuaciones $y = \sqrt{x}$ y $y = x - 2$ para x:

$$\sqrt{x} = x - 2 \qquad \text{Igualar } f(x) \text{ y } g(x).$$

$$x = (x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4 \qquad \text{Elevar al cuadrado ambos lados.}$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \qquad \text{Reescribir.}$$

$$(x - 1)(x - 4) = 0 \qquad \text{Factorizar.}$$

$$x = 1, \quad x = 4. \qquad \text{Resolver.}$$

Solamente el valor $x = 4$ satisface la ecuación $\sqrt{x} = x - 2$. El valor $x = 1$ es una raíz ajena, que surge al elevar al cuadrado. El límite derecho es $b = 4$.

$$\text{Para } 0 \le x \le 2: \quad f(x) - g(x) = \sqrt{x} - 0 = \sqrt{x}$$

$$\text{Para } 2 \le x \le 4: \quad f(x) - g(x) = \sqrt{x} - (x - 2) = \sqrt{x} - x + 2$$

Sumamos las áreas de las subregiones A y B para encontrar el área total:

$$\text{Área total} = \underbrace{\int_0^2 \sqrt{x}\,dx}_{\text{área en } A} + \underbrace{\int_2^4 (\sqrt{x} - x + 2)\,dx}_{\text{área en } B}$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^2 + \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_2^4$$

$$= \frac{2}{3}(2)^{3/2} - 0 + \left(\frac{2}{3}(4)^{3/2} - 8 + 8\right) - \left(\frac{2}{3}(2)^{3/2} - 2 + 4\right)$$

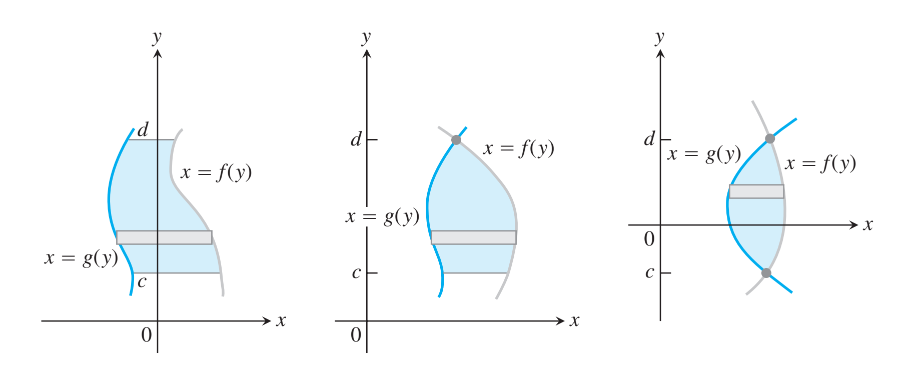
$$= \frac{2}{3}(8) - 2 = \frac{10}{3}.$$

■

Integración con respecto a *y*

Si las curvas que acotan una región están descritas como funciones de y, los rectángulos de aproximación son horizontales en lugar de verticales, y la fórmula básica tiene y en lugar de x.

Para regiones como éstas



usamos la fórmula

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]\, dy.$$

En esta ecuación f siempre denota la curva de la derecha y g la curva de la izquierda, de manera que $f(y) - g(y)$ es no negativo.

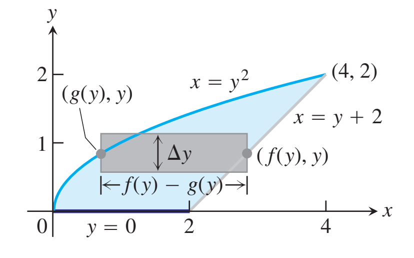


FIGURA 5.32 Si se integra respecto de x, es necesario hacer dos integrales para encontrar el área de esta región. Si se integra respecto de y (ejemplo 6), hay que hacer solamente una integral.

EJEMPLO 6 Determinación del área de la región del ejemplo 5 integrando respecto de y.

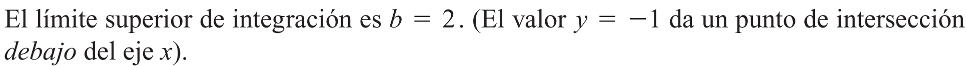
Solución Primero trazamos la región y un rectángulo *horizontal* típico, basándonos en una partición del intervalo de valores de y (figura 5.32). La cota derecha de la región es la recta $x = y + 2$, de manera que $f(y) = y + 2$. La cota izquierda de la región es la curva $x = y^2$, de manera que $g(y) = y^2$. El límite inferior de integración es $y = 0$. Para encontrar el límite superior, resolvemos simultáneamente $x = y + 2$ y $x = y^2$ para y:

$$y + 2 = y^2 \qquad \text{Igualar } f(y) = y + 2 \text{ y } g(y) = y^2.$$

$$y^2 - y - 2 = 0 \qquad \text{Reescribir.}$$

$$(y + 1)(y - 2) = 0 \qquad \text{Factorizar.}$$

$$y = -1, \qquad y = 2 \qquad \text{Resolver.}$$


El límite superior de integración es $b = 2$. (El valor $y = -1$ da un punto de intersección *debajo* del eje x).

El área de la región es

$$A = \int_a^b [f(y) - g(y)]\, dy = \int_0^2 [y + 2 - y^2]\, dy$$

$$= \int_0^2 [2 + y - y^2]\, dy$$

$$= \left[2y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^2$$

$$= 4 + \frac{4}{2} - \frac{8}{3} = \frac{10}{3}.$$


Éste es el resultado del ejemplo 5, encontrado con menos trabajo. ■

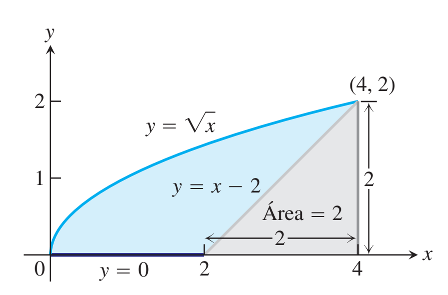


FIGURA 5.33 El área de la región azul es el área debajo de la parábola $y = \sqrt{x}$ menos el área del triángulo (ejemplo 7).

Combinación de integrales con fórmulas geométricas

La manera más rápida de encontrar un área puede ser combinar cálculo con geometría.

EJEMPLO 7 Determinación del área de la región del ejemplo 5 de la manera más rápida

Encontrar el área de la región del ejemplo 5.

Solución El área que queremos es el área que está entre la curva $y = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 4$, y el eje x, *menos* el área del triángulo con base 2 y altura 2 (figura 5.33):

$$\begin{aligned}\text{Área} &= \int_0^4 \sqrt{x}\,dx - \frac{1}{2}(2)(2)\\ &= \frac{2}{3}x^{3/2}\Big]_0^4 - 2\\ &= \frac{2}{3}(8) - 0 - 2 = \frac{10}{3}.\end{aligned}$$

Conclusión de los ejemplos 5–7 Algunas veces es más fácil encontrar el área entre dos curvas integrando con respecto a y en lugar hacerlo con respecto a x. También puede ayudar combinar geometría con cálculo. Después de trazar la región, tómese unos instantes para pensar en la mejor manera de proceder.

EJERCICIOS 5.6

Evaluación de las integrales definidas

Use la fórmula de sustitución del teorema 6 para evaluar las integrales de los ejercicios 1 a 24.

1. a. $\int_0^3 \sqrt{y+1}\,dy$ **b.** $\int_{-1}^0 \sqrt{y+1}\,dy$

2. a. $\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,dr$ **b.** $\int_{-1}^1 r\sqrt{1-r^2}\,dr$

3. a. $\int_0^{\pi/4} \tan x \sec^2 x\,dx$ **b.** $\int_{-\pi/4}^0 \tan x \sec^2 x\,dx$

4. a. $\int_0^{\pi} 3\cos^2 x \,\text{sen}\, x\,dx$ **b.** $\int_{2\pi}^{3\pi} 3\cos^2 x\,\text{sen}\, x\,dx$

5. a. $\int_0^1 t^3(1+t^4)^3\,dt$ **b.** $\int_{-1}^1 t^3(1+t^4)^3\,dt$

6. a. $\int_0^{\sqrt{7}} t(t^2+1)^{1/3}\,dt$ **b.** $\int_{-\sqrt{7}}^0 t(t^2+1)^{1/3}\,dt$

7. a. $\int_{-1}^1 \frac{5r}{(4+r^2)^2}\,dr$ **b.** $\int_0^1 \frac{5r}{(4+r^2)^2}\,dr$

8. a. $\int_0^1 \frac{10\sqrt{v}}{(1+v^{3/2})^2}\,dv$ **b.** $\int_1^4 \frac{10\sqrt{v}}{(1+v^{3/2})^2}\,dv$

9. a. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ **b.** $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

10. a. $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+9}}\,dx$ **b.** $\int_{-1}^0 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+9}}\,dx$

11. a. $\int_0^{\pi/6} (1-\cos 3t)\,\text{sen}\, 3t\,dt$ **b.** $\int_{\pi/6}^{\pi/3} (1-\cos 3t)\,\text{sen}\, 3t\,dt$

12. a. $\int_{-\pi/2}^0 \left(2+\tan\frac{t}{2}\right)\sec^2\frac{t}{2}\,dt$ **b.** $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(2+\tan\frac{t}{2}\right)\sec^2\frac{t}{2}\,dt$

13. a. $\int_0^{2\pi} \frac{\cos z}{\sqrt{4+3\,\text{sen}\, z}}\,dz$ **b.** $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos z}{\sqrt{4+3\,\text{sen}\, z}}\,dz$

14. a. $\int_{-\pi/2}^0 \frac{\text{sen}\, w}{(3+2\cos w)^2}\,dw$ **b.** $\int_0^{\pi/2} \frac{\text{sen}\, w}{(3+2\cos w)^2}\,dw$

15. $\int_0^1 \sqrt{t^5+2t}\,(5t^4+2)\,dt$ **16.** $\int_1^4 \frac{dy}{2\sqrt{y}\,(1+\sqrt{y})^2}$

17. $\int_0^{\pi/6} \cos^{-3} 2\theta\,\text{sen}\, 2\theta\,d\theta$ **18.** $\int_{\pi}^{3\pi/2} \cot^5\left(\frac{\theta}{6}\right)\sec^2\left(\frac{\theta}{6}\right)d\theta$

19. $\int_0^{\pi} 5(5-4\cos t)^{1/4}\,\text{sen}\, t\,dt$ **20.** $\int_0^{\pi/4} (1-\text{sen}\, 2t)^{3/2}\cos 2t\,dt$

21. $\int_0^1 (4y-y^2+4y^3+1)^{-2/3}(12y^2-2y+4)\,dy$

22. $\int_0^1 (y^3+6y^2-12y+9)^{-1/2}(y^2+4y-4)\,dy$

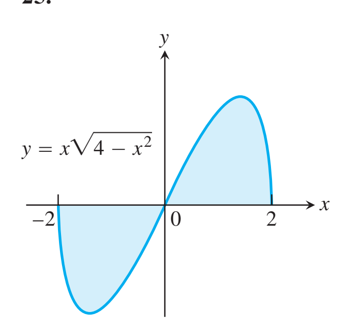
23. $\displaystyle\int_0^{\sqrt[3]{\pi^2}} \sqrt{\theta}\cos^2(\theta^{3/2})\,d\theta$

24. $\displaystyle\int_{-1}^{-1/2} t^{-2}\,\mathrm{sen}^2\left(1+\frac{1}{t}\right)dt$

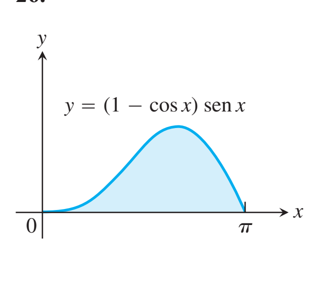
Área

Encuentre el área total de las regiones sombreadas en los ejercicios 25 a 40.

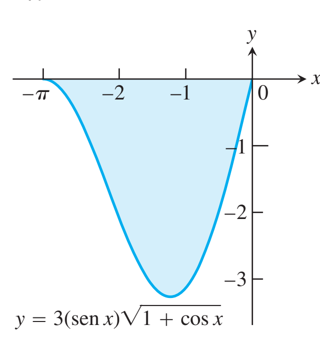
25.



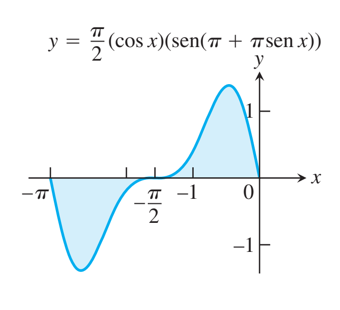
26.



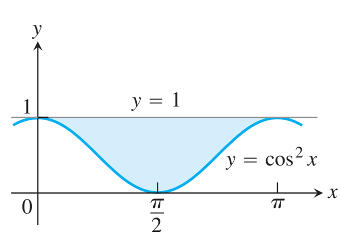
27.



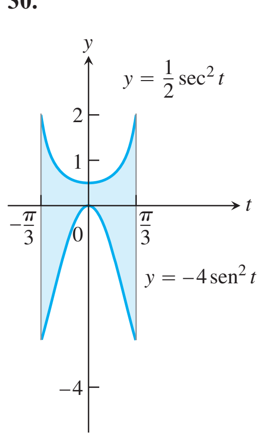
28.



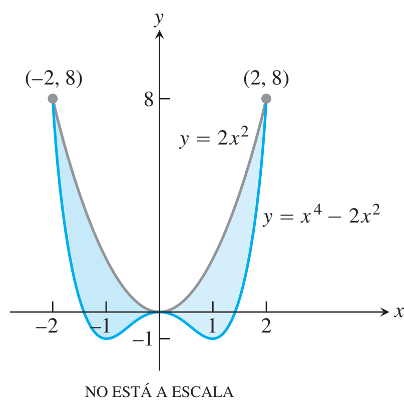
29.



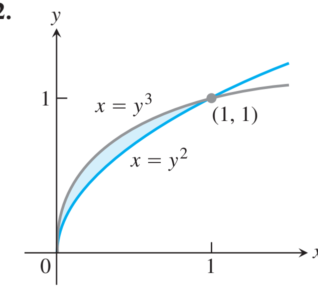
30.



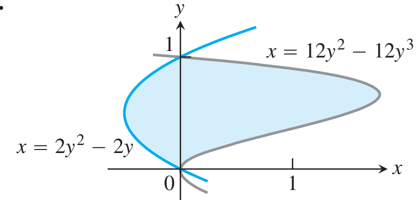
31.



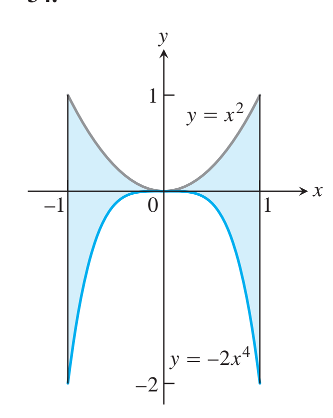
32.



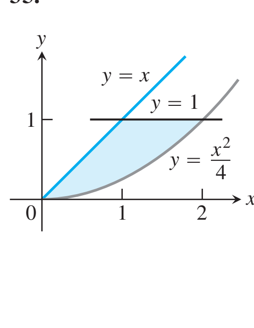
33.



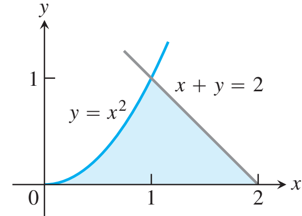
34.



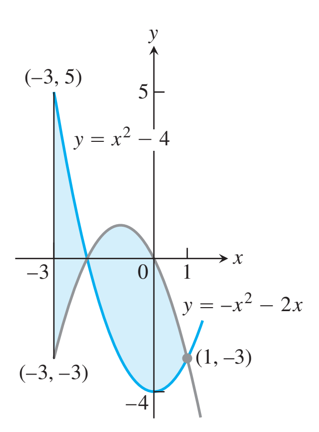
35.



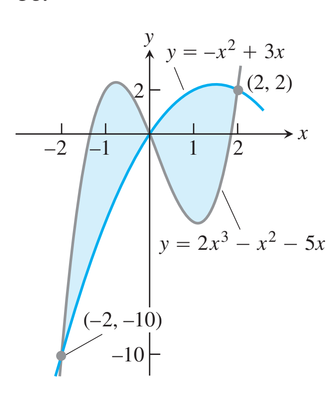
36.



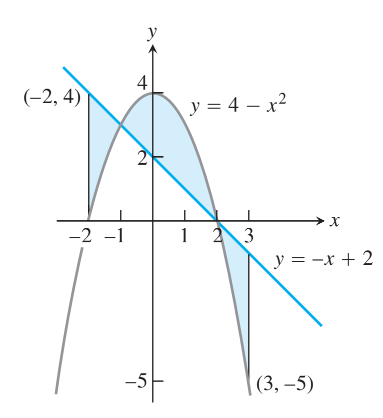
37.



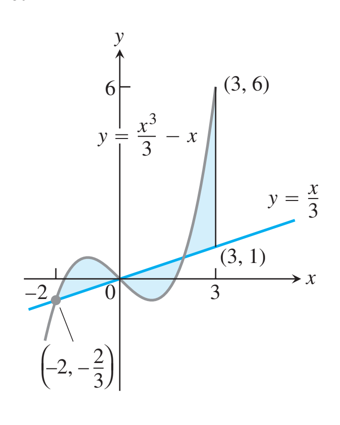
38.



39.



40.



Encuentre las áreas de las regiones acotadas por las rectas y curvas de los ejercicios 41 a 50.

41. $y = x^2 - 2$ y $y = 2$

42. $y = 2x - x^2$ y $y = -3$

43. $y = x^4$ y $y = 8x$

44. $y = x^2 - 2x$ y $y = x$

45. $y = x^2$ y $y = -x^2 + 4x$

46. $y = 7 - 2x^2$ y $y = x^2 + 4$

47. $y = x^4 - 4x^2 + 4$ y $y = x^2$

48. $y = x\sqrt{a^2 - x^2}$, $a > 0$, y $y = 0$

49. $y = \sqrt{|x|}$ y $5y = x + 6$ (¿Cuántos puntos de intersección hay?)

50. $y = |x^2 - 4|$ y $y = (x^2/2) + 4$

Encuentre las áreas de las regiones acotadas por las rectas y curvas de los ejercicios 51 a 58.

51. $x = 2y^2$, $x = 0$, y $y = 3$

52. $x = y^2$ y $x = y + 2$

53. $y^2 - 4x = 4$ y $4x - y = 16$

54. $x - y^2 = 0$ y $x + 2y^2 = 3$

55. $x + y^2 = 0$ y $x + 3y^2 = 2$

56. $x - y^{2/3} = 0$ y $x + y^4 = 2$

57. $x = y^2 - 1$ y $x = |y|\sqrt{1 - y^2}$

58. $x = y^3 - y^2$ y $x = 2y$

Encuentre las áreas de las regiones acotadas por las curvas de los ejercicios 59 a 62.

59. $4x^2 + y = 4$ y $x^4 - y = 1$

60. $x^3 - y = 0$ y $3x^2 - y = 4$

61. $x + 4y^2 = 4$ y $x + y^4 = 1$, para $x \geq 0$

62. $x + y^2 = 3$ y $4x + y^2 = 0$

Encuentre las áreas de las regiones acotadas por las rectas y curvas de los ejercicios 63 a 70.

63. $y = 2 \operatorname{sen} x$ y $y = \operatorname{sen} 2x$, $0 \leq x \leq \pi$

64. $y = 8 \cos x$ y $y = \sec^2 x$, $-\pi/3 \leq x \leq \pi/3$

65. $y = \cos(\pi x/2)$ y $y = 1 - x^2$

66. $y = \operatorname{sen}(\pi x/2)$ y $y = x$

67. $y = \sec^2 x$, $y = \tan^2 x$, $x = -\pi/4$, y $x = \pi/4$

68. $x = \tan^2 y$ y $x = -\tan^2 y$, $-\pi/4 \leq y \leq \pi/4$

69. $x = 3 \operatorname{sen} y \sqrt{\cos y}$ y $x = 0$, $0 \leq y \leq \pi/2$

70. $y = \sec^2(\pi x/3)$ y $y = x^{1/3}$, $-1 \leq x \leq 1$

71. Encuentre el área de la región, con forma de hélice, acotada por la curva $x - y^3 = 0$ y la recta $x - y = 0$.

72. Encuentre el área de la región, con forma de hélice, acotada por las curvas $x - y^{1/3} = 0$ y $x - y^{1/5} = 0$.

73. Encuentra el área de la región en el primer cuadrante, acotada por la recta $y = x$, la recta $x = 2$, la curva $y = 1/x^2$, y el eje x.

74. Encuentra el área de la región "triangular" en el primer cuadrante, acotada a la izquierda por el eje y y a la derecha por las curvas $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x$.

75. La región acotada por abajo por la parábola $y = x^2$ y por arriba por la recta $y = 4$ se tiene que dividir en dos subregiones de la misma área, cortándolas con una recta horizontal $y = c$.

a. Trace la región y dibuje, a lo largo de ella, la recta $y = c$ que parezca correcta. En términos de c, ¿cuáles son las coordenadas de los puntos donde se intersecan la recta y la parábola? Añádalos a su figura.

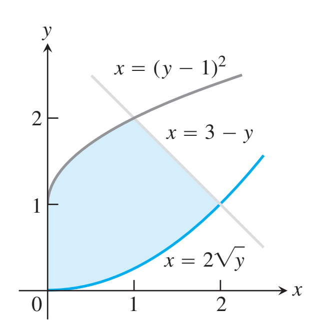
b. Encuentre c integrando con respecto a y. (Esto coloca a c en los límites de integración).

c. Encuentre c integrando con respecto a x. (Esto también coloca a c en el integrando).

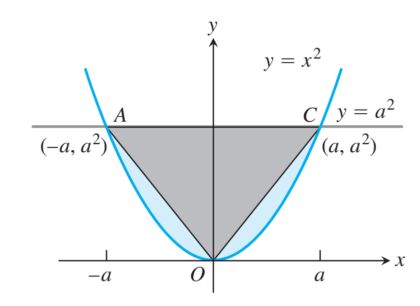
76. Encuentre el área de la región entre la curva $y = 3 - x^2$ y la recta $y = -1$ integrando con respecto **a.** x, **b.** y.

77. Encuentre el área de la región en el primer cuadrante, acotada a la izquierda por el eje y, abajo por la curva $y = x/4$, arriba y a la izquierda por la curva $y = 1 + \sqrt{x}$, y arriba y a la derecha por la curva $y = 2/\sqrt{x}$.

78. Encuentre el área de la región en el primer cuadrante, acotada a la izquierda por el eje y, abajo por la curva $x = 2\sqrt{y}$, arriba y a la izquierda por la curva $x = (y - 1)^2$, y arriba y a la derecha por la recta $x = 3 - y$.



79. Aquí la figura muestra un triángulo AOC inscrito en la región acotada por la parábola $y = x^2$ y por la recta $y = a^2$. Encuentre el límite de la razón del área del triángulo al área de la región parabólica cuando a tiende a cero.

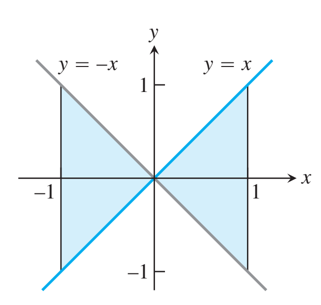


80. Suponga que el área de la región entre la gráfica de una función f continua y positiva y el eje x de $x = a$ a $x = b$ es 4 unidades cuadradas. Encuentre el área entre las curvas $y = f(x)$ y $y = 2f(x)$ de $x = a$ a $x = b$.

81. ¿Cuáles de las siguientes integrales, si alguna, calcula el área de la región sombreada que se muestra aquí? Justifique su respuesta.

a. $\int_{-1}^{1} (x - (-x))\, dx = \int_{-1}^{1} 2x\, dx$

b. $\int_{-1}^{1} (-x - (x))\, dx = \int_{-1}^{1} -2x\, dx$



82. ¿Cierto, algunas veces cierto, o falso? El área de la región entre las gráficas de las funciones continuas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ $(a < b)$ is

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx.$$

Justifique su respuesta.

Teoría y ejemplo

83. Suponga que $F(x)$ es una antiderivada de $f(x) = (\operatorname{sen} x)/x$, $x > 0$. Exprese

$$\int_1^3 \frac{\operatorname{sen} 2x}{x}\, dx$$

en términos de F.

84. Demuestre que si f es continua, entonces

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 f(1 - x)\, dx.$$

85. Suponga que

$$\int_0^1 f(x)\, dx = 3.$$

Encuentre

$$\int_{-1}^0 f(x)\, dx$$

si **a.** f es par, **b.** f es impar.

86. **a.** Demuestre que si f es impar en $[-a, a]$, entonces

$$\int_{-a}^a f(x)\, dx = 0.$$

b. Verifique el resultado del inciso (a) con $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $a = \pi/2$.

87. Si f es una función continua, encuentre el valor de la integral

$$I = \int_0^a \frac{f(x)\, dx}{f(x) + f(a - x)}$$

haciendo la sustitución $u = a - x$ y sumando el resultado a la integral I.

88. Use una sustitución para probar que, para todos los números positivos x y y,

$$\int_x^{xy} \frac{1}{t}\,dt = \int_1^{y} \frac{1}{t}\,dt.$$

La propiedad de desplazamiento para integrales definidas

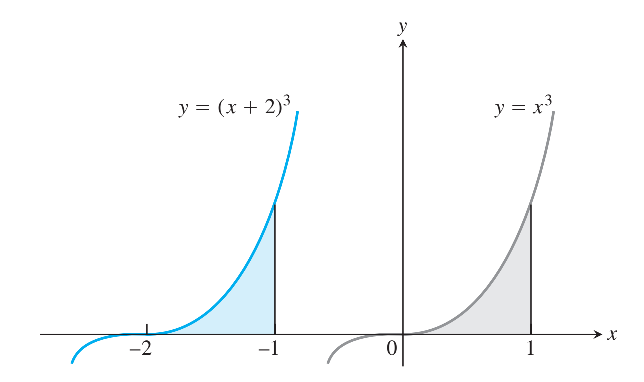
Una propiedad básica de las integrales definidas es que son invariantes bajo traslaciones, como expresa la ecuación.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a-c}^{b-c} f(x+c)\,dx. \qquad (1)$$

La ecuación se satisface siempre que f es integrable y está definida para los valores necesarios de x. Por ejemplo, la figura siguiente muestra que

$$\int_{-2}^{-1} (x+2)^3\,dx = \int_0^1 x^3\,dx$$

porque las áreas sombreadas son congruentes.



89. Use una sustitución para verificar la ecuación (1).

90. Para cada una de las siguientes funciones: grafique $f(x)$ en $[a, b]$, y $f(x+c)$ en $[a-c, b-c]$ para convencerse de que la ecuación (1) es razonable.

a. $f(x) = x^2, \quad a = 0, \quad b = 1, \quad c = 1$

b. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad a = 0, \quad b = \pi, \quad c = \pi/2$

c. $f(x) = \sqrt{x-4}, \quad a = 4, \quad b = 8, \quad c = 5$

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

En los ejercicios 91 a 94 encontrará el área entre las curvas en el plano cuando no se pueden determinar sus puntos de intersección mediante operaciones algebraicas sencillas. Use un software matemático para realizar los siguientes pasos.

a. Trace juntas las curvas para ver cómo son y cuántos puntos de intersección tienen.

b. Use la resolución numérica de ecuaciones de su software para encontrar todos los puntos de intersección.

c. Integre $|f(x) - g(x)|$ en pares de valores de intersecciones consecutivos.

d. Sume las integrales encontradas en el inciso (c).

91. $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} - 2x + \dfrac{1}{3}, \quad g(x) = x - 1$

92. $f(x) = \dfrac{x^4}{2} - 3x^3 + 10, \quad g(x) = 8 - 12x$

93. $f(x) = x + \operatorname{sen}(2x), \quad g(x) = x^3$

94. $f(x) = x^2 \cos x, \quad g(x) = x^3 - x$

Capítulo 5 Preguntas de repaso

1. ¿Cómo se pueden estimar cantidades como distancia recorrida, área y valor promedio con sumas finitas? ¿Por qué sería necesario hacerlo?

2. ¿Qué es la notación sigma? ¿Qué ventajas ofrece? Dé ejemplos.

3. ¿Qué es una suma de Riemann? ¿Por qué resulta útil saberlo?

4. ¿Qué es la norma de una partición de un intervalo cerrado?

5. ¿Qué es la integral definida de una función f en un intervalo cerrado $[a, b]$? ¿Cuándo se sabe que tal integral existe?

6. ¿Cuál es la relación entre integrales definidas y área? Describa alguna otra interpretación de las integrales definidas.

7. ¿Qué es el valor promedio de una función integrable en un intervalo cerrado? ¿La función debe alcanzar su valor promedio? Explique.

8. Describa las reglas para trabajar con integrales definidas (tabla 5.3). Dé ejemplos.

9. ¿Qué es el teorema fundamental del cálculo? ¿Por qué es tan importante? Ilustre cada parte del teorema con un ejemplo.

10. ¿Por qué el teorema fundamental del cálculo proporciona una solución al problema de valores iniciales $dy/dx = f(x)$, $y(x_0) = y_0$, cuando f es continua?

11. ¿Cómo se relacionan la integración por sustitución y la regla de la cadena?

12. ¿Cómo se pueden evaluar integrales indefinidas por sustitución? Dé ejemplos.

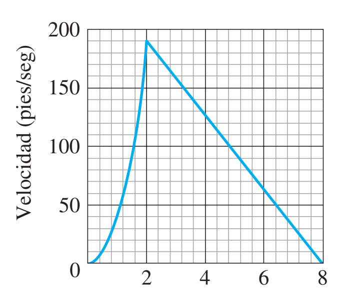
13. ¿Cómo funciona el método de sustitución en integrales definidas? Dé ejemplos.

14. ¿Cómo se define y se calcula el área de la región entre las gráficas de dos funciones continuas? Dé un ejemplo.

Capítulo 5 Ejercicios de práctica

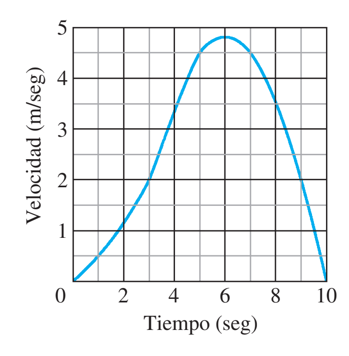
Sumas finitas y estimaciones

1. La figura siguiente muestra la gráfica de la velocidad (pies/seg) de un modelo de cohete para los primeros 8 segundos después del lanzamiento. El cohete acelera hacia arriba durante los primeros 2 segundos y después sigue subiendo hasta alcanzar su máxima altura en $t = 8$ seg.



   a. Suponiendo que el cohete fue lanzado desde el nivel del suelo, ¿aproximadamente qué altura alcanzó? (Éste es el cohete de la sección 3.3, ejercicio 17, pero no es necesario realizar el ejercicio 17 para hacer éste).
   b. Trace una gráfica de la altura que alcanza el cohete, sobre el nivel del suelo, como una función del tiempo para $0 \le t \le 8$.

2. a. La figura siguiente muestra la gráfica de la velocidad (m/seg) de un cuerpo que se mueve a lo largo del eje s durante el intervalo de tiempo de $t = 0$ a $t = 10$ seg. ¿Aproximadamente cuánto recorrió el cuerpo durante esos 10 segundos?
   b. Trace una gráfica de s como una función de t para $0 \le t \le 10$ suponiendo que $s(0) = 0$.



3. Suponga que $\sum_{k=1}^{10} a_k = -2$ y $\sum_{k=1}^{10} b_k = 25$. Encuentre el valor de

   a. $\sum_{k=1}^{10} \frac{a_k}{4}$ b. $\sum_{k=1}^{10} (b_k - 3a_k)$
   c. $\sum_{k=1}^{10} (a_k + b_k - 1)$ d. $\sum_{k=1}^{10} \left(\frac{5}{2} - b_k\right)$

4. Suponga que $\sum_{k=1}^{20} a_k = 0$ y $\sum_{k=1}^{20} b_k = 7$. Encuentre el valor de

   a. $\sum_{k=1}^{20} 3a_k$ b. $\sum_{k=1}^{20} (a_k + b_k)$
   c. $\sum_{k=1}^{20} \left(\frac{1}{2} - \frac{2b_k}{7}\right)$ d. $\sum_{k=1}^{20} (a_k - 2)$

Integrales definidas

En los ejercicios 5 a 8, exprese cada límite como una integral definida. Después evalúe la integral para encontrar el valor del límite. En cada caso, P es una partición del intervalo dado, y los números c_k están elegidos en los subintervalos de P.

5. $\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} (2c_k - 1)^{-1/2} \, \Delta x_k$, donde P es una partición de $[1, 5]$.

6. $\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} c_k(c_k{}^2 - 1)^{1/3} \, \Delta x_k$, donde P es una partición de $[1, 3]$.

7. $\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \left(\cos\left(\frac{c_k}{2}\right)\right) \Delta x_k$, donde P es una partición de $[-\pi, 0]$

8. $\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} (\text{sen } c_k)(\cos c_k) \, \Delta x_k$, donde P es una partición de $[0, \pi/2]$.

9. Si $\int_{-2}^{2} 3f(x)\, dx = 12$, $\int_{-2}^{5} f(x)\, dx = 6$, y $\int_{-2}^{5} g(x)\, dx = 2$, encuentre los valores de las siguientes expresiones.

   a. $\int_{-2}^{2} f(x)\, dx$ b. $\int_{2}^{5} f(x)\, dx$
   c. $\int_{5}^{-2} g(x)\, dx$ d. $\int_{-2}^{5} (-\pi g(x))\, dx$
   e. $\int_{-2}^{5} \left(\frac{f(x) + g(x)}{5}\right) dx$

10. Si $\int_{0}^{2} f(x)\, dx = \pi$, $\int_{0}^{2} 7g(x)\, dx = 7$, y $\int_{0}^{1} g(x)\, dx = 2$, encuentre los valores de las siguientes expresiones.

   a. $\int_{0}^{2} g(x)\, dx$ b. $\int_{1}^{2} g(x)\, dx$
   c. $\int_{2}^{0} f(x)\, dx$ d. $\int_{0}^{2} \sqrt{2}\, f(x)\, dx$
   e. $\int_{0}^{2} (g(x) - 3f(x))\, dx$

Área

En los ejercicios 11 a 14, encuentre el área total de la región entre la gráfica de f y el eje x.

11. $f(x) = x^2 - 4x + 3, \quad 0 \le x \le 3$

12. $f(x) = 1 - (x^2/4), \quad -2 \le x \le 3$

13. $f(x) = 5 - 5x^{2/3}, \quad -1 \le x \le 8$

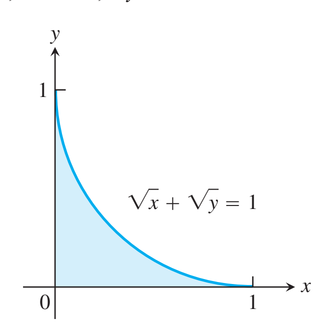
14. $f(x) = 1 - \sqrt{x}, \quad 0 \le x \le 4$

Encuentre las áreas de las regiones acotadas por las curvas y rectas de los ejercicios 15 a 26.

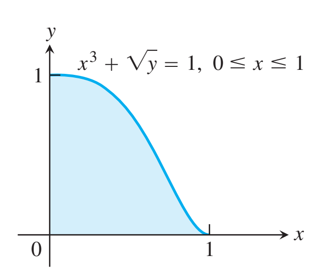
15. $y = x, \quad y = 1/x^2, \quad x = 2$

16. $y = x, \quad y = 1/\sqrt{x}, \quad x = 2$

17. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1, \quad x = 0, \quad y = 0$



18. $x^3 + \sqrt{y} = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad \text{para} \quad 0 \le x \le 1$



19. $x = 2y^2, \quad x = 0, \quad y = 3$ **20.** $x = 4 - y^2, \quad x = 0$

21. $y^2 = 4x, \quad y = 4x - 2$

22. $y^2 = 4x + 4, \quad y = 4x - 16$

23. $y = \operatorname{sen} x, \quad y = x, \quad 0 \le x \le \pi/4$

24. $y = |\operatorname{sen} x|, \quad y = 1, \quad -\pi/2 \le x \le \pi/2$

25. $y = 2 \operatorname{sen} x, \quad y = \operatorname{sen} 2x, \quad 0 \le x \le \pi$

26. $y = 8 \cos x, \quad y = \sec^2 x, \quad -\pi/3 \le x \le \pi/3$

27. Encuentre el área de la región "triangular" acotada por la izquierda por $x + y = 2$, por la derecha por $y = x^2$, y arriba por $y = 2$.

28. Encuentre el área de la región "triangular" acotada por la izquierda por $y = \sqrt{x}$, por la derecha por $y = 6 - x$, y abajo por $y = 1$.

29. Encuentre los valores extremos de $f(x) = x^3 - 3x^2$ y encuentre el área de la región acotada por la gráfica de f y el eje x.

30. Encuentre el área de la región cortada en el primer cuadrante por la curva $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$.

31. Encuentre el área total de la región acotada por la curva $x = y^{2/3}$ y las rectas $x = y$ y $y = -1$.

32. Encuentre el área total de la región acotada por las curvas $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x$ para $0 \le x \le 3\pi/2$.

Problemas de valores iniciales

33. Pruebe que $y = x^2 + \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ resuelve el problema de valores iniciales

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2 - \frac{1}{x^2}; \quad y'(1) = 3, \quad y(1) = 1.$$

34. Demuestre que $y = \int_0^x \left(1 + 2\sqrt{\sec t}\right) dt$ resuelve el problema de valores iniciales

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{\sec x}\tan x; \quad y'(0) = 3, \quad y(0) = 0.$$

Exprese las soluciones de los problemas de valores iniciales en los ejercicios 35 y 36 en términos de integrales.

35. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, \quad y(5) = -3$

36. $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{2 - \operatorname{sen}^2 x}, \quad y(-1) = 2$

Evaluación de integrales indefinidas

Evalúe las integrales de los ejercicios 37 a 44.

37. $\int 2(\cos x)^{-1/2} \operatorname{sen} x\,dx$ **38.** $\int (\tan x)^{-3/2} \sec^2 x\,dx$

39. $\int (2\theta + 1 + 2\cos(2\theta + 1))\,d\theta$

40. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{2\theta - \pi}} + 2\sec^2(2\theta - \pi)\right) d\theta$

41. $\int \left(t - \frac{2}{t}\right)\left(t + \frac{2}{t}\right) dt$ **42.** $\int \frac{(t+1)^2 - 1}{t^4}\,dt$

43. $\int \sqrt{t}\operatorname{sen}(2t^{3/2})\,dt$ **44.** $\int \sec\theta\tan\theta\sqrt{1 + \sec\theta}\,d\theta$

Evaluación de integrales definidas

Evalúe las integrales de los ejercicios 45 a 70.

45. $\int_{-1}^{1} (3x^2 - 4x + 7)\,dx$ **46.** $\int_0^1 (8s^3 - 12s^2 + 5)\,ds$

47. $\int_1^2 \frac{4}{v^2}\,dv$ **48.** $\int_1^{27} x^{-4/3}\,dx$

49. $\int_1^4 \frac{dt}{t\sqrt{t}}$ **50.** $\int_1^4 \frac{\left(1 + \sqrt{u}\right)^{1/2}}{\sqrt{u}}\,du$

51. $\int_0^1 \frac{36\,dx}{(2x + 1)^3}$ **52.** $\int_0^1 \frac{dr}{\sqrt[3]{(7 - 5r)^2}}$

53. $\int_{1/8}^{1} x^{-1/3}(1 - x^{2/3})^{3/2}\,dx$ **54.** $\int_0^{1/2} x^3(1 + 9x^4)^{-3/2}\,dx$

55. $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 5r\,dr$ **56.** $\int_0^{\pi/4} \cos^2\left(4t - \frac{\pi}{4}\right) dt$

57. $\int_0^{\pi/3} \sec^2 \theta \, d\theta$

58. $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \csc^2 x \, dx$

59. $\int_{\pi}^{3\pi} \cot^2 \frac{x}{6} \, dx$

60. $\int_0^{\pi} \tan^2 \frac{\theta}{3} \, d\theta$

61. $\int_{-\pi/3}^{0} \sec x \tan x \, dx$

62. $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \csc z \cot z \, dz$

63. $\int_0^{\pi/2} 5(\operatorname{sen} x)^{3/2} \cos x \, dx$

64. $\int_{-1}^{1} 2x \operatorname{sen}(1 - x^2) \, dx$

65. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 15 \operatorname{sen}^4 3x \cos 3x \, dx$

66. $\int_0^{2\pi/3} \cos^{-4}\left(\frac{x}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) dx$

67. $\int_0^{\pi/2} \frac{3 \operatorname{sen} x \cos x}{\sqrt{1 + 3 \operatorname{sen}^2 x}} \, dx$

68. $\int_0^{\pi/4} \frac{\sec^2 x}{(1 + 7 \tan x)^{2/3}} \, dx$

69. $\int_0^{\pi/3} \frac{\tan \theta}{\sqrt{2 \sec \theta}} \, d\theta$

70. $\int_{\pi^2/36}^{\pi^2/4} \frac{\cos \sqrt{t}}{\sqrt{t \operatorname{sen} \sqrt{t}}} \, dt$

Valores promedios

71. Encuentre el valor promedio de $f(x) = mx + b$

a. en $[-1, 1]$

b. en $[-k, k]$

72. Encuentre el valor promedio de

a. $y = \sqrt{3x}$ en $[0, 3]$

b. $y = \sqrt{ax}$ en $[0, a]$

73. Sea f una función diferenciable en $[a, b]$. En el capítulo 2 definimos la razón de cambio promedio de f en $[a, b]$ como

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

y la razón de cambio instantánea de f en x como $f'(x)$. En este capítulo definimos el valor promedio de una función. Para que la nueva definición de promedio sea consistente con la anterior, debemos tener que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \text{valor promedio de } f' \text{ en } [a, b].$$

¿Es éste el caso? Justifique su respuesta.

74. ¿Es cierto que el valor promedio de una función integrable en un intervalo de longitud 2 es la mitad de la integral de la función en el intervalo? Justifique su respuesta.

T **75.** Calcule el valor promedio de la función temperatura

$$f(x) = 37 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{365}(x - 101)\right) + 25$$

para un año de 365 días. Ésta es una manera de estimar la temperatura promedio anual del aire en Fairbanks, Alaska. El valor numérico oficial del promedio de las temperaturas diarias durante un año, proporcionado por el Servicio Meteorológico Nacional de Estados Unidos, es 25.7ºF, que es ligeramente mayor que el valor de $f(x)$. La figura 3.33 muestra por qué.

T **76. Calor específico de un gas** El calor específico C_v es la cantidad de calor requerido para elevar 1ºC la temperatura de una masa de gas dada con volumen constante, medida en unidades cal/grado-mol (calorías por grado de molécula-gramo). El calor específico del oxígeno depende de su temperatura T, y satisface la fórmula

$$C_v = 8.27 + 10^{-5}(26T - 1.87T^2).$$

Encuentre el valor promedio de C_v para $20° \le T \le 675°$C y la temperatura en la que se alcanza.

Derivación de integrales

En los ejercicios 77 a 80 encuentre dy/dx.

77. $y = \int_2^x \sqrt{2 + \cos^3 t} \, dt$

78. $y = \int_2^{7x^2} \sqrt{2 + \cos^3 t} \, dt$

79. $y = \int_x^1 \frac{6}{3 + t^4} \, dt$

80. $y = \int_{\sec x}^{2} \frac{1}{t^2 + 1} \, dt$

Teoría y ejemplo

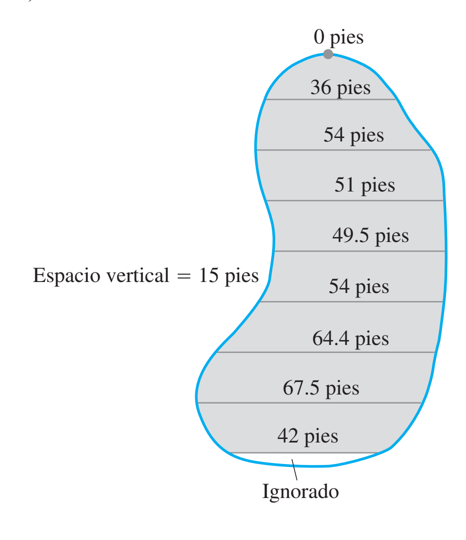
81. ¿Es cierto que toda función $y = f(x)$ que es diferenciable en $[a, b]$ es a su vez la derivada de alguna función en $[a, b]$? Justifique su respuesta.

82. Suponga que $F(x)$ es una antiderivada de $f(x) = \sqrt{1 + x^4}$. Exprese $\int_0^1 \sqrt{1 + x^4} \, dx$ en términos de F, y justifique su respuesta.

83. Encuentre dy/dx si $y = \int_x^1 \sqrt{1 + t^2} \, dt$. Explique los pasos principales que realizó para su cálculo.

84. Encuentre dy/dx si $y = \int_{\cos x}^0 (1/(1 - t^2)) \, dt$. Explique los pasos principales que realizó para su cálculo.

85. Un solar nuevo para estacionamiento Para satisfacer la demanda, la localidad en donde usted vive ha asignado el área que se muestra aquí para instalar un nuevo estacionamiento. Como ingeniero de la localidad, el ayuntamiento le pidió que averiguara si el solar se puede construir con $10,000. El costo para limpiar el terreno será de $0.10 por pie cuadrado, y el pavimentado costará $2.00 el pie cuadrado. ¿Se puede hacer el trabajo con $10,000? Use una estimación con sumas inferiores para averiguarlo. (Las respuestas pueden variar ligeramente, dependiendo de la estimación usada).



86. Los paracaidistas A y B están a bordo de un helicóptero que vuela a 6400 pies. El paracaidista A salta y desciende durante 4 segundos antes de abrir su paracaídas. Entonces, el helicóptero sube a 7000 pies y se queda ahí. Cuarenta y cinco segundos después de que A abandonó la nave, B salta y desciende 13 segundos antes de abrir su paracaídas. Ambos paracaidistas descienden a 16 pies/seg con los paracaídas abiertos. Suponga que los paracaidistas caen libremente (sin resistencia efectiva del aire) antes de abrir sus paracaídas.

a. ¿A qué altitud se abrió el paracaídas de A?

b. ¿A qué altitud se abrió el paracaídas de B?

c. ¿Qué paracaidista aterriza primero?

Promedio del inventario diario

En economía se usa el valor promedio para analizar problemas como el inventario promedio diario. Si $I(t)$ es el número de radios, llantas, zapatos o cualquier producto que una empresa tiene a la mano en el día t (llamamos a I una **función inventario**) el valor promedio de I en el periodo $[0, T]$ se llama el inventario promedio diario de la empresa para el periodo.

$$\textbf{Inventario promedio diario} = \text{prom}(I) = \frac{1}{T}\int_0^T I(t)\,dt.$$

Si h es el costo, en dólares, de almacenar un artículo por día, el producto $\text{av}(I)\cdot h$ es el **costo promedio diario de inventario** para el periodo.

87. El almacén mayorista Distribuidores Tracey Burr (DTB) recibe un cargamento de 1200 cajas de barras de chocolate cada 30 días. DTB vende el chocolate a minoristas a una razón fija, y t días después de llegar el cargamento, el inventario de cajas disponible es $I(t) = 1200 - 40t$, $0 \le t \le 30$. ¿Cuál es el inventario promedio diario de DTB para un periodo de 30 días? ¿Cuál es el costo promedio diario de almacenamiento si el costo de almacenar una caja es de 3 centavos al día?

88. Rich Wholesale Foods, un fabricante de galletas, almacena las cajas de galletas en un depósito con aire acondicionado para embarcarlas cada 14 días. Rich intenta guardar 600 cajas de reserva para enfrentar picos de demanda ocasionales, de manera que una función inventario típica de 14 días es $I(t) = 600 + 600t$, $0 \le t \le 14$. El costo de almacenaje diario de cada caja es 4 centavos por día. Encuentre el inventario promedio diario y el costo promedio de almacenaje diario de Rich.

89. La empacadora Solon recibe 450 tambos de bolitas de plástico cada 30 días. La función inventario (tambos disponibles como una función de días) es $I(t) = 450 - t^2/2$. Encuentre el inventario promedio diario. Determine también el costo promedio diario de almacenamiento si el costo de almacenaje para un tambo es de 2 centavos por día.

90. Mitchell Mailorder recibe un embarque de 600 cajas de calcetines deportivos cada 60 días. El número de cajas disponibles t días después de la llegada del embarque es $I(t) = 600 - 20\sqrt{15t}$. Encuentre el inventario promedio diario. Determine también el costo promedio diario de almacenamiento si el costo de inventario para una caja es de 1/2 centavo por día.

Capítulo 5 Ejercicios adicionales y avanzados

Teoría y ejemplos

1. a. Si $\int_0^1 7f(x)\,dx = 7$, entonces es cierto $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$?

b. Si $\int_0^1 f(x)\,dx = 4$ y $f(x) \ge 0$, entonces es cierto

$$\int_0^1 \sqrt{f(x)}\,dx = \sqrt{4} = 2?$$

Justifique sus respuestas.

2. Suponga que $\int_{-2}^2 f(x)\,dx = 4$, $\int_2^5 f(x)\,dx = 3$, $\int_{-2}^5 g(x)\,dx = 2$.

¿Cuáles de los siguientes enunciados son ciertos?

a. $\int_5^2 f(x)\,dx = -3$ **b.** $\int_{-2}^5 (f(x) + g(x)) = 9$

c. $f(x) \le g(x)$ en el intervalo $-2 \le x \le 5$

3. Problema de valores iniciales Demuestre que

$$y = \frac{1}{a}\int_0^x f(t)\,\text{sen}\,a(x - t)\,dt$$

revuelva el problema de valores iniciales

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = f(x), \qquad \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{y} \quad y = 0 \text{ cuando } x = 0.$$

(*Sugerencia:* $\text{sen}\,(ax - at) = \text{sen}\,ax\cos at - \cos ax\,\text{sen}\,at$).

4. Proporcionalidad Suponga que x y y se relacionan mediante la ecuación

$$x = \int_0^y \frac{1}{\sqrt{1 + 4t^2}}\,dt.$$

Demuestre que d^2y/dx^2 es proporcional a y, y encuentre la constante de proporcionalidad.

5. Encuentre $f(4)$ si

a. $\int_0^{x^2} f(t)\,dt = x\cos\pi x$ **b.** $\int_0^{f(x)} t^2\,dt = x\cos\pi x$.

6. Encuentre $f(\pi/2)$ a partir de la siguiente información.

i. f es positiva y continua.

ii. El área debajo de la curva $y = f(x)$ de $x = 0$ a $x = a$ es

$$\frac{a^2}{2} + \frac{a}{2}\,\text{sen}\,a + \frac{\pi}{2}\cos a.$$

7. El área de la región en el plano xy acotada por el eje x, la curva $y = f(x)$, $f(x) \geq 0$, y las rectas $x = 1$ y $x = b$ es igual a $\sqrt{b^2 + 1} - \sqrt{2}$ para toda $b > 1$. Encuentre $f(x)$.

8. Demuestre que

$$\int_0^x \left(\int_0^u f(t)\, dt \right) du = \int_0^x f(u)(x - u)\, du.$$

(*Sugerencia:* Exprese la integral del lado derecho como la diferencia de dos integrales. Después pruebe que ambos lados de la igualdad tienen la misma derivada con respecto a x).

9. **Determinación de una curva** Encuentre la ecuación para la curva en el plano xy que pasa por el punto $(1, -1)$ si su pendiente en x es siempre $3x^2 + 2$.

10. **Desplazamiento de tierra** Usted está utilizando una pala para sacar tierra de un agujero, con una velocidad inicial de 32 pies-/seg. La tierra debe subir 17 pies arriba del punto donde la lanza para poder librar el borde del agujero. ¿Es suficiente la fuerza con la que la está lanzando para sacarla del agujero, o debe lanzarla más fuerte?

Funciones continuas a pedazos

A pesar de que estamos interesados principalmente en funciones continuas, en la práctica muchas funciones son continuas a pedazos. Una función $f(x)$ es **continua a pedazos en un intervalo cerrado *I*** si f tiene solamente un número finito de discontinuidades en I, los límites

$$\lim_{x \to c^-} f(x) \text{ y } \lim_{x \to c^+} f(x)$$

existen y son finitos en todo punto interior de I, y los límites laterales apropiados existen y son finitos en los extremos de I. Todas las funciones continuas a pedazos son integrables. Los puntos de discontinuidad subdividen a I en subintervalos abiertos o semiabiertos en donde f es continua, y los criterios de límites anteriores garantizan que f tiene una extensión continua en la cerradura de cada subintervalo. Para integrar una función continua a pedazos, integramos las extensiones individuales y sumamos los resultados. La integral de

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & -1 \leq x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x < 2 \\ -1, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

(figura 5.34) en $[-1, 3]$ es

$$\begin{aligned} \int_{-1}^3 f(x)\, dx &= \int_{-1}^0 (1 - x)\, dx + \int_0^2 x^2\, dx + \int_2^3 (-1)\, dx \\ &= \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 + \left[-x \right]_2^3 \\ &= \frac{3}{2} + \frac{8}{3} - 1 = \frac{19}{6}. \end{aligned}$$

El teorema fundamental del cálculo es válido para funciones continuas a pedazos, con la restricción de que $(d/dx)\int_a^x f(t)\, dt$ se espera sea igual a $f(x)$ solamente en los valores de x donde f es continua. Hay una restricción similar en la regla de Leibniz que aparece más adelante.

Grafique las funciones de los ejercicios 11 a 16, e intégrelas sobre sus dominios.

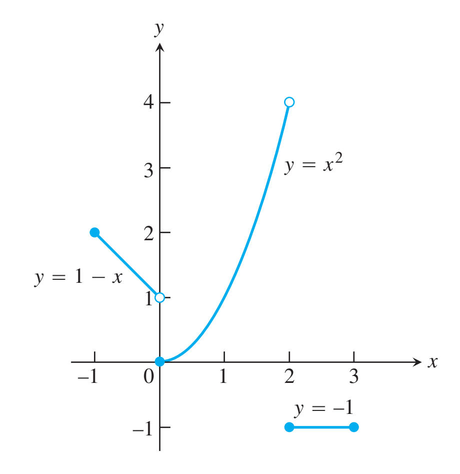


FIGURA 5.34 Las funciones continuas a pedazos como ésta se integran pedazo a pedazo.

11. $f(x) = \begin{cases} x^{2/3}, & -8 \leq x < 0 \\ -4, & 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$

12. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, & -4 \leq x < 0 \\ x^2 - 4, & 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$

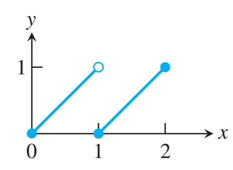
13. $g(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ \operatorname{sen} \pi t, & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$

14. $h(z) = \begin{cases} \sqrt{1 - z}, & 0 \leq z < 1 \\ (7z - 6)^{-1/3}, & 1 \leq z \leq 2 \end{cases}$

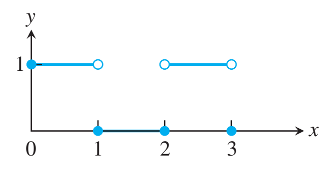
15. $f(x) = \begin{cases} 1, & -2 \leq x < -1 \\ 1 - x^2, & -1 \leq x < 1 \\ 2, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

16. $h(r) = \begin{cases} r, & -1 \leq r < 0 \\ 1 - r^2, & 0 \leq r < 1 \\ 1, & 1 \leq r \leq 2 \end{cases}$

17. Encuentre el valor promedio de la función dibujada en la figura siguiente.



18. Encuentre el valor promedio de la función dibujada en la figura siguiente.



Regla de Leibniz

En las aplicaciones, algunas veces encontramos funciones como

$$f(x) = \int_{\operatorname{sen} x}^{x^2} (1 + t)\, dt \qquad \text{y} \qquad g(x) = \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \operatorname{sen} t^2\, dt,$$

definidas por integrales que tienen al mismo tiempo una variable en los límites superiores de integración y una variable en los límites inferiores de integración. La primera integral puede evaluarse directamente, pero la segunda no. Sin embargo, podemos encontrar la derivada de cualquier integral usando la fórmula llamada **regla de Leibniz**.

> **Regla de Leibniz**
>
> Si f es continua en $[a, b]$, y si $u(x)$ y $v(x)$ son funciones diferenciables de x cuyos valores están en $[a, b]$, entonces
>
> $$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\, dt = f(v(x))\frac{dv}{dx} - f(u(x))\frac{du}{dx}.$$

La figura 5.35 da una interpretación geométrica de la regla de Leibniz. En ella se muestra una alfombra de ancho variable $f(t)$, que se enrolla a la izquierda al mismo tiempo x que se desenrolla a la derecha. (En la interpretación, el tiempo es x, no t.) En el tiempo x, el piso está cubierto de $u(x)$ a $v(x)$. La razón du/dx en la que la alfombra está siendo enrollada no tiene que ser la misma que la razón dv/dx en la que está siendo desenrrollada. En cualquier tiempo dado x, el área cubierta por la alfombra es

$$A(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\, dt.$$

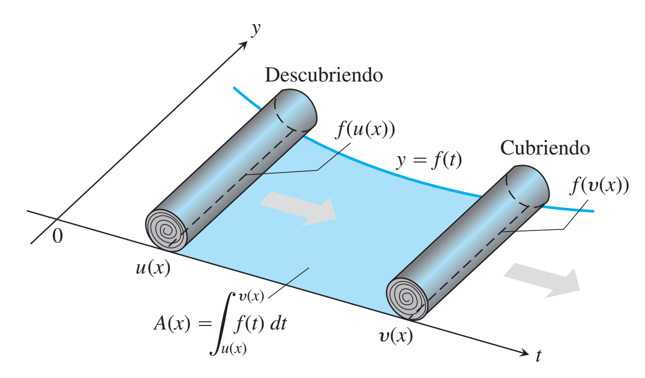


FIGURA 5.35 Enrollando y desenrollando una alfombra: una interpretación geométrica de la regla de Leibniz:

$$\frac{dA}{dx} = f(v(x))\frac{dv}{dx} - f(u(x))\frac{du}{dx}.$$

¿A qué razón está cambiando el área cubierta? En el instante x, $A(x)$ está creciendo por el ancho $f(v(x))$ de la alfombra que se desenrolla, multiplicado por la razón dv/dx en la que se desenrolla. Esto es, $A(x)$ está creciendo a la razón

$$f(v(x))\frac{dv}{dx}.$$

Al mismo tiempo, A está decreciendo a la razón

$$f(u(x))\frac{du}{dx},$$

el ancho del extremo en que está siendo enrollada, multiplicado por la razón du/dx. La razón de cambio neta en A es

$$\frac{dA}{dx} = f(v(x))\frac{dv}{dx} - f(u(x))\frac{du}{dx},$$

que es, precisamente, la regla de Leibniz.

Para probar la regla, sea F una antiderivada de f en $[a, b]$. Entonces,

$$\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\, dt = F(v(x)) - F(u(x)).$$

Derivando ambos lados de esta ecuación respecto de x, se obtiene la ecuación que buscamos:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\, dt &= \frac{d}{dx}\Big[F(v(x)) - F(u(x))\Big]\\ &= F'(v(x))\frac{dv}{dx} - F'(u(x))\frac{du}{dx} \qquad \text{Regla de la cadena}\\ &= f(v(x))\frac{dv}{dx} - f(u(x))\frac{du}{dx}.\end{aligned}$$

Use la regla de Leibniz para encontrar las derivadas de las funciones de los ejercicios 19 a 21.

19. $f(x) = \displaystyle\int_{1/x}^{x} \frac{1}{t}\, dt$ **20.** $f(x) = \displaystyle\int_{\cos x}^{\operatorname{sen} x} \frac{1}{1 - t^2}\, dt$

21. $g(y) = \displaystyle\int_{\sqrt{y}}^{2\sqrt{y}} \operatorname{sen} t^2\, dt$

22. Use la regla de Leibniz para encontrar el valor de x que maximiza el valor de la integral

$$\int_{x}^{x+3} t(5 - t)\, dt.$$

Problemas como éstos surgen en la teoría matemática de las elecciones políticas. Vea "The Entry Problem in a Political Race", de Steven J. Brams y Philip D. Straffin, Jr., en *Political Equilibrium*, Peter Ordeshook y Kenneth Shepfle, editores, Kluwer-Nijhoff, Boston, 1982, pp 181-195.

Aproximación de sumas finitas con integrales

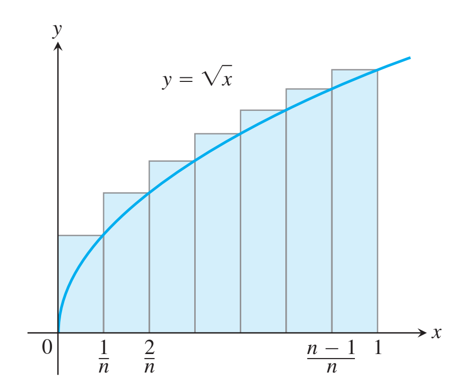
En muchas aplicaciones de cálculo se usan las integrales para aproximar sumas finitas, es decir, el procedimiento inverso del usual, que consiste en usar sumas finitas para aproximar integrales.

Por ejemplo, estimemos la suma de las raíces cuadradas de los primeros n enteros positivos, $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}$. La integral

$$\int_0^1 \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3} x^{3/2} \Big]_0^1 = \frac{2}{3}$$

es el límite de las sumas superiores

$$S_n = \sqrt{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{n} + \sqrt{\frac{2}{n}} \cdot \frac{1}{n} + \cdots + \sqrt{\frac{n}{n}} \cdot \frac{1}{n} = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}{n^{3/2}}.$$



Por lo tanto, cuando n es grande, S_n estará cerca de $2/3$ y tendremos

$$\text{Suma de las raíces} = \sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n} = S_n \cdot n^{3/2} \approx \frac{2}{3} n^{3/2}.$$

La siguiente tabla muestra qué tan buena puede ser la aproximación.

n	Suma de las raíces	$(2/3)n^{3/2}$	Error relativo
10	22.468	21.082	$1.386/22.468 \approx 6\%$
50	239.04	235.70	1.4%
100	671.46	666.67	0.7%
1000	21,097	21,082	0.07%

23. Evalúe

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^5 + 2^5 + 3^5 + \cdots + n^5}{n^6}$$

probando que el límite es

$$\int_0^1 x^5\, dx$$

y evaluando la integral.

24. Vea el ejercicio 23. Evalúe

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4}(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3).$$

25. Sea $f(x)$ una función continua. Exprese

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n}\right)\right]$$

como una integral definida.

26. Use la regla de Leibniz para evaluar

a. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}(2 + 4 + 6 + \cdots + 2n)$,

b. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{16}}(1^{15} + 2^{15} + 3^{15} + \cdots + n^{15})$,

c. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{n} + \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} + \operatorname{sen}\frac{3\pi}{n} + \cdots + \operatorname{sen}\frac{n\pi}{n}\right)$.

¿Qué se puede decir de los siguientes límites?

d. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{17}}(1^{15} + 2^{15} + 3^{15} + \cdots + n^{15})$

e. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{15}}(1^{15} + 2^{15} + 3^{15} + \cdots + n^{15})$

27. a. Demuestre que el área A_n de un polígono regular de n lados en un círculo de radio r es

$$A_n = \frac{nr^2}{2} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}.$$

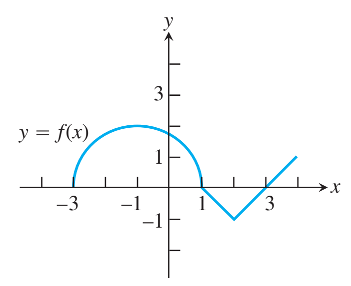
b. Encuentre el límite de A_n cuando $n \to \infty$. ¿Es esta respuesta consistente con lo que sabemos acerca del área de un círculo?

28. Una ecuación diferencial Pruebe que $y = \operatorname{sen} x + \int_x^{\pi} \cos 2t\, dt + 1$ satisface las dos condiciones siguientes:

i. $y'' = -\operatorname{sen} x + 2 \operatorname{sen} 2x$

ii. $y = 1$ y $y' = -2$ cuando $x = \pi$.

29. Una función definida por una integral Como se muestra a continuación, la gráfica de una función f consiste en un semicírculo y dos segmentos de recta. Sea $g(x) = \int_1^x f(t)\, dt$.



a. Encuentre $g(1)$. **b.** Encuentre $g(3)$. **c.** Encuentre $g(-1)$.

d. Encuentre todos los valores de x en el intervalo abierto $(-3, 4)$ en donde g tiene un máximo relativo.

e. Escriba una ecuación para la recta tangente a la gráfica de g en $x = -1$.

f. Encuentre la coordenada x de cada punto de inflexión de la gráfica de g en el intervalo abierto $(-3, 4)$.

g. Encuentre el rango de g.

Capítulo 5 Proyectos de aplicación tecnológica

Módulo Mathematica/Maple

Uso de sumas de Riemann para estimar áreas, volúmenes y longitudes de curvas

Vea y aproxime áreas y volúmenes en la parte I.

Módulo Mathematica/Maple

Sumas de Riemann, integrales definidas y el teorema fundamental del cálculo

Las partes I, II y III desarrollan sumas de Riemann e integrales definidas. La parte IV continúa con el desarrollo de las sumas de Riemann e integrales definidas, usando el teorema fundamental para resolver problemas previamente investigados.

Módulo Mathematica/Maple

Recolector de agua de lluvia, elevadores y cohetes

La parte I ilustra que el área debajo de la curva es la misma que el área de un rectángulo apropiado para ejemplos tomados del capítulo. Calcularemos la cantidad de agua acumulada en cubetas de formas distintas cuando la cubeta se llena y se vacía.

Módulo Mathematica/Maple

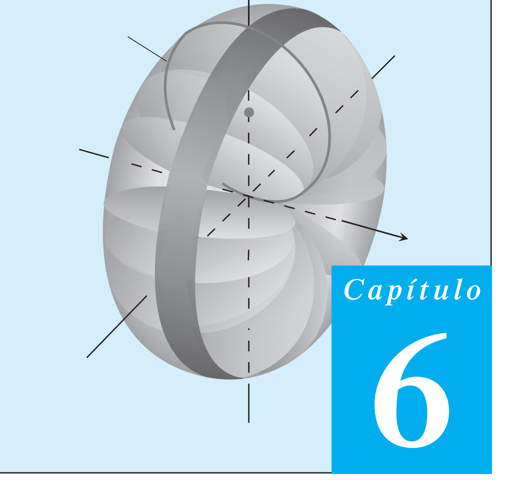
Movimiento a lo largo de rectas, parte II

Observaremos la forma de la gráfica a través de animaciones de las relaciones derivadas entre la posición, la velocidad y la aceleración. Las figuras del texto pueden animarse usando este software.

Módulo Mathematica/Maple

Deformación de vigas

Estudiaremos la forma en que se deforman las vigas, determinaremos sus máximas deformaciones, concavidades y puntos de inflexión, e interpretaremos los resultados en términos de la compresión y tensión de la viga.



Capítulo

6

APLICACIONES DE LAS INTEGRALES DEFINIDAS

INTRODUCCIÓN En el capítulo 5 descubrimos la relación entre el proceso de integración y las sumas de Riemann

$$S_P = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k$$

asociadas con una partición P del intervalo cerrado finito $[a, b]$. Ahí aprendimos que, para una función continua f en $[a, b]$, el límite de S_P cuando la norma de la partición $\|P\|$ se aproxima a cero es el número

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

donde F es cualquier antiderivada de f. Aplicamos esto a los problemas en que se nos pidió calcular el área entre el eje x y la gráfica de $y = f(x)$ para $a \leq x \leq b$ y para determinar el área comprendida entre dos curvas.

En este capítulo veremos cómo la aplicación de estos conceptos nos permite determinar volúmenes, longitudes de curvas planas, centros de masa, áreas de superficies de volúmenes, trabajo y fuerzas de fluido sobre paredes planas. Todas estas medidas son límites de sumas de Riemann de funciones continuas en intervalos cerrados, esto es, integrales definidas que pueden evaluarse mediante el Teorema Fundamental del Cálculo.

6.1 Cálculo de volúmenes por secciones transversales y por rotación alrededor de un eje

En esta sección se definirán volúmenes de sólidos cuyas secciones transversales son regiones planas. La **sección transversal** de un sólido S es la región plana formada por la intersección de S con un plano (figura 6.1).

Suponga que queremos determinar el volumen de un sólido S como el de la figura 6.1. Para empezar, ampliaremos la definición que da la geometría clásica de un cilindro, para aplicarlo a los sólidos cilíndricos con base arbitraria (figura 6.2). Si se conocen el área de la base, A, y la altura h del sólido cilíndrico, su volumen es

$$\text{Volumen} = \text{área de la base} \times \text{altura} = A \cdot h.$$

Esta ecuación constituye la base para definir los volúmenes de muchos sólidos no cilíndricos a partir del *método por partes*.

Si la sección transversal del sólido S en cada punto x del intervalo $[a, b]$ es una región $R(x)$ de área $A(x)$, y A es una función continua de x, podemos definir y calcular el volumen del sólido S como una integral definida de la manera siguiente:

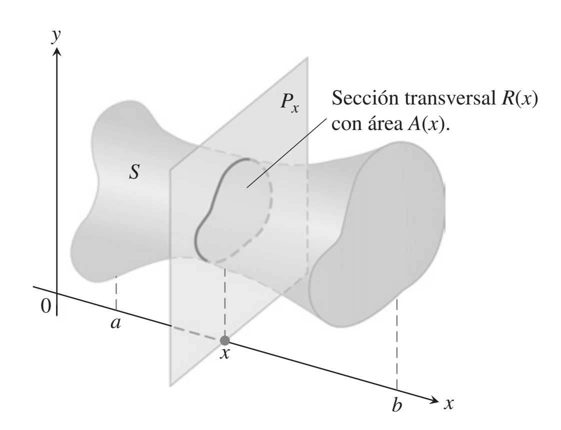


FIGURA 6.1 Una sección transversal del sólido S, formada por la intersección de S con un plano P_x perpendicular al eje x, y que pasa por el punto x en el intervalo $[a, b]$.

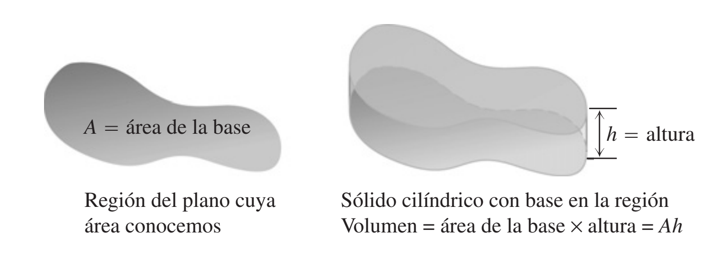


FIGURA 6.2 El volumen de un sólido cilíndrico siempre se define como el área de su base por su altura.

Dividimos $[a, b]$ en subintervalos de ancho (longitud) Δx_k y partimos el sólido, como si fuese una hogaza de pan, en planos perpendiculares al eje x en los puntos de la partición $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Los planos P_{x_k}, perpendiculares al eje x en los puntos de la partición, dividen S en placas delgadas (como finas rebanadas de una hogaza de pan). Una placa representativa se muestra en la figura 6.3. Aproximamos el volumen de la placa entre el plano en x_{k-1} y el plano x_k mediante un sólido cilíndrico con base de área $A(x_k)$ y altura $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ (figura 6.4). El volumen V_k de este sólido cilíndrico es $A(x_k) \cdot \Delta x_k$, que es aproximadamente el mismo volumen que el de la placa:

$$\text{Volumen de la } k\text{–ésima placa} \approx V_k = A(x_k)\, \Delta x_k.$$

Por lo tanto, el volumen V del sólido completo S se aproxima a partir de la suma de estos volúmenes cilíndricos,

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} V_k = \sum_{k=1}^{n} A(x_k)\, \Delta x_k.$$

Ésta es una suma de Riemann para la función $A(x)$ en $[a, b]$. Es de esperar que las aproximaciones dadas por estas sumas mejoren conforme la norma de la partición de $[a, b]$ tienda a cero, de modo que definimos el volumen del sólido S como la integral definida límite de las sumas de Riemann.

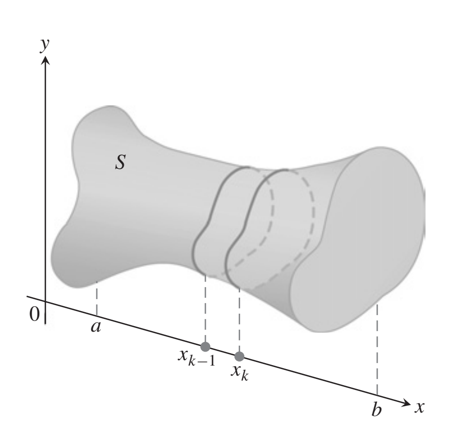


FIGURA 6.3 Una placa delgada representativa en el sólido S.

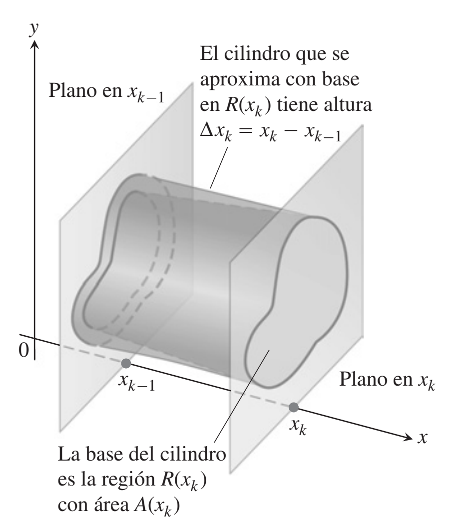


FIGURA 6.4 La placa sólida delgada de la figura 6.3 se aproxima mediante el sólido cilíndrico con base $R(x_k)$, que tiene área $A(x_k)$ y altura $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

DEFINICIÓN Volumen

El **volumen** de un sólido de área de sección transversal integrable conocida $A(x)$ desde $x = a$ hasta $x = b$, es la integral de A desde a hasta b,

$$V = \int_a^b A(x)\, dx.$$

Esta definición se aplica siempre que $A(x)$ sea continua o, de manera más general, cuando es integrable. Para aplicar la fórmula de la definición en el cálculo del volumen de un sólido, deben realizarse los pasos siguientes:

Cálculo del volumen de un sólido

1. *Bosqueje el sólido y una sección transversal representativa.*
2. *Determine una fórmula para A(x)*, el área de una sección transversal representativa.
3. *Determine los límites de integración.*
4. *Integre A(x)* por medio del Teorema Fundamental.

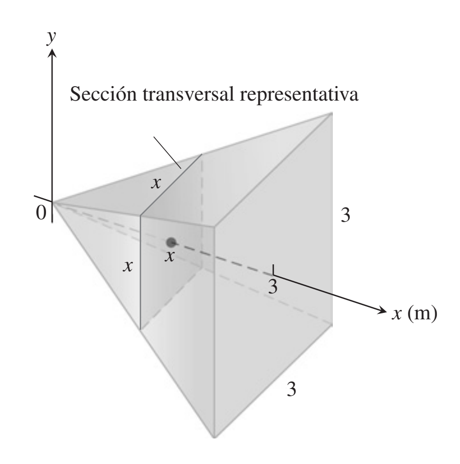


FIGURA 6.5 Las secciones transversales de la pirámide del ejemplo 1 son cuadrados.

EJEMPLO 1 Volumen de una pirámide

Una pirámide de 3 m de altura tiene una base cuadrada que tiene 3 m por lado. La sección transversal de la pirámide, perpendicular a una altura de x m del vértice, es un cuadrado de x m por lado. Determinar el volumen de la pirámide.

Solución

1. *Bosquejar*. Comenzamos por dibujar la pirámide con su altura a lo largo del eje x y su vértice en el origen, e incluimos una sección transversal representativa (figura 6.5).
2. *Determinación de una fórmula para A(x).* La sección transversal en x es un cuadrado de x metros por lado, de modo que su área es

$$A(x) = x^2.$$

3. *Definición de los límites de integración*. Los cuadrados se encuentran en los planos de $x = 0$ a $x = 3$.
4. *Integración para determinar el volumen.*

$$V = \int_0^3 A(x)\, dx = \int_0^3 x^2\, dx = \frac{x^3}{3}\bigg]_0^3 = 9\ \text{m}^3$$ ■

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

Bonaventura Cavalieri (1598–1647)

EJEMPLO 2 Principio de Cavalieri

El principio de Cavalieri establece que sólidos con alturas iguales e idénticas áreas de sección transversal en cada altura tienen el mismo volumen (figura 6.6). Esto es consecuencia directa de la definición de volumen, ya que la función del área de la sección transversal $A(x)$ y el intervalo $[a, b]$ son los mismos para ambos sólidos. ■

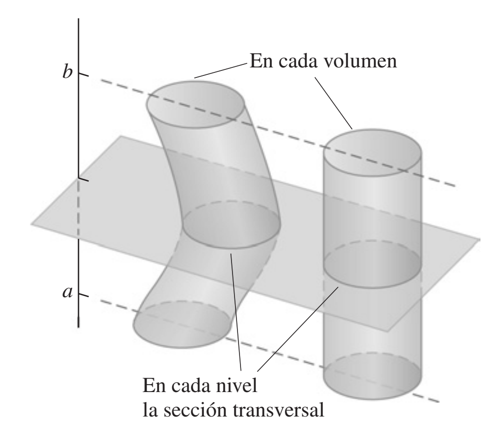
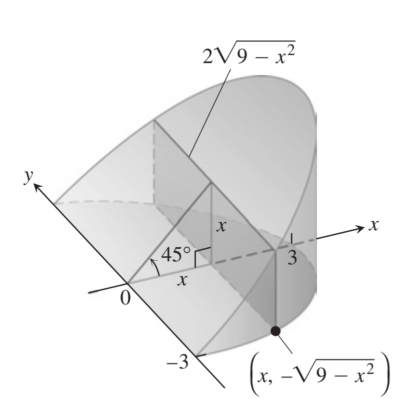
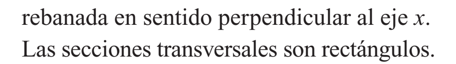


FIGURA 6.6 *Principio de Cavalieri*. Estos sólidos tienen el mismo volumen. Esto puede ilustrarse con una pila de monedas (ejemplo 2).

EJEMPLO 3 Volumen de una cuña

Se corta una cuña curva de una cilindro con radio 3 en dos planos. Uno de los planos es perpendicular al eje del cilindro; el otro cruza al primero formando un ángulo de 45° en el centro del cilindro. Determinar el volumen de la cuña.




FIGURA 6.7 La cuña del ejemplo 3 es rebanada en sentido perpendicular al eje x. Las secciones transversales son rectángulos.

Solución Dibujamos la cuña y bosquejamos una sección transversal representativa, perpendicular al eje x (figura 6.7). La sección transversal en x es un rectángulo de área

$$A(x) = (\text{altura})(\text{ancho}) = (x)\left(2\sqrt{9-x^2}\right)$$
$$= 2x\sqrt{9-x^2}.$$

Los rectángulo van desde $x = 0$ hasta $x = 3$, de modo que tenemos

$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_0^3 2x\sqrt{9-x^2}\,dx$$
$$= -\frac{2}{3}(9-x^2)^{3/2}\Big]_0^3$$
$$= 0 + \frac{2}{3}(9)^{3/2}$$
$$= 18.$$

Sea $u = 9 - x^2$, $du = -2x\,dx$, integrando y sustituyendo.

■

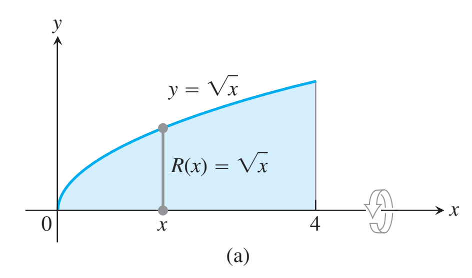
Sólidos de revolución: el método de los discos

El sólido generado al hacer girar una región plana alrededor de un eje se denomina **sólido de revolución**. Para determinar el volumen de un sólido como el que se muestra en la figura 6.8, sólo necesitamos tener en cuenta que el área de la sección transversal $A(x)$ es el área de un disco con radio $R(x)$, la distancia entre la frontera de la región plana y el eje de rotación. En consecuencia, el área es

$$A(x) = \pi(\text{radio})^2 = \pi[R(x)]^2.$$

De este modo, la definición de volumen nos da

$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \pi[R(x)]^2\,dx.$$



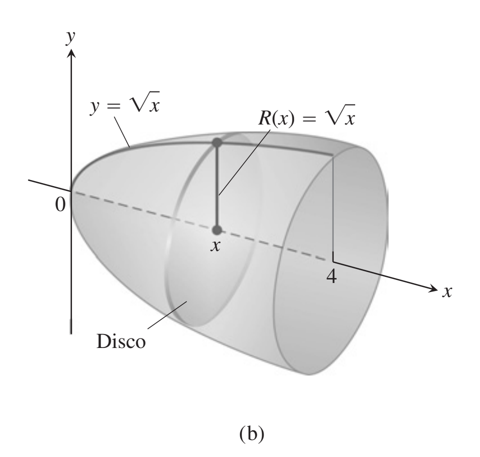


FIGURA 6.8 (a) La región y (b) el sólido de revolución del ejemplo 4.

A este método para calcular el volumen de un sólido de revolución se le denomina con frecuencia **método de los discos**, ya que la sección transversal es un disco circular con radio $R(x)$.

EJEMPLO 4 Un sólido de revolución (rotación alrededor del eje x)

La región entre la curva $y = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 4$, y el eje x se hace girar alrededor del eje x para generar un sólido. Determinar su volumen.

Solución Dibujamos figuras que muestren la región, un radio típico y el sólido generado (figura 6.8). El volumen es

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b \pi[R(x)]^2\,dx \\ &= \int_0^4 \pi\left[\sqrt{x}\right]^2 dx \qquad R(x) = \sqrt{x} \\ &= \pi\int_0^4 x\,dx = \pi\left.\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \pi\frac{(4)^2}{2} = 8\pi. \end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Volumen de una esfera

La circunferencia

$$x^2 + y^2 = a^2$$

se hacer girar alrededor del eje x para generar una esfera. Determinar el volumen de esta última.

Solución Imagine que cortamos la esfera en delgadas rebanadas por medio de planos perpendiculares al eje x (figura 6.9). El área de la sección transversal en un punto representativo x, entre $-a$ y a es

$$A(x) = \pi y^2 = \pi(a^2 - x^2).$$

Por lo tanto, el volumen es

$$V = \int_{-a}^{a} A(x)\,dx = \int_{-a}^{a} \pi(a^2 - x^2)\,dx = \pi\left[a^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi a^3.$$

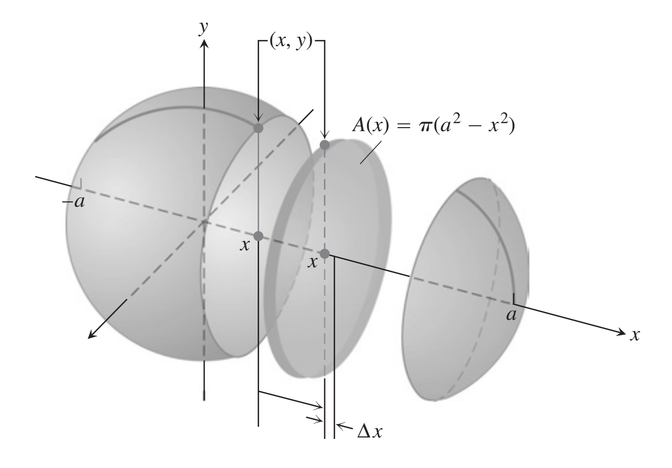


FIGURA 6.9 La esfera generada por la rotación de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ alrededor del eje x. El radio es $R(x) = y = \sqrt{a^2 - x^2}$ (ejemplo 5).

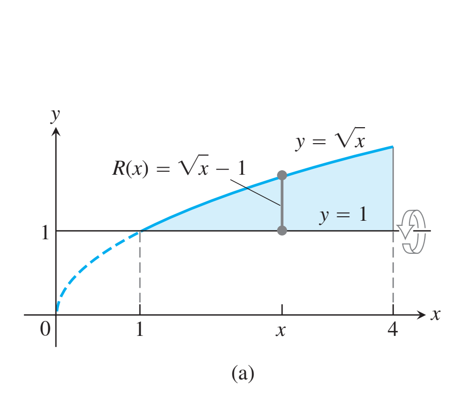
El eje de rotación en el ejemplo siguiente no es el eje x, pero la regla para calcular el volumen es la misma: Integrar $\pi(\text{radio})^2$ entre límites apropiados.

EJEMPLO 6 Un sólido de revolución (rotación alrededor de la recta $y = 1$)

Determinar el volumen del sólido resultante al hacer girar, alrededor de la recta $y = 1$, la región acotada por $y = \sqrt{x}$ y las rectas $y = 1$, $x = 4$.

Solución Dibujamos figuras que muestren la región, el radio típico y el sólido resultante (figura 6.10). El volumen es

$$\begin{aligned} V &= \int_1^4 \pi[R(x)]^2\, dx \\ &= \int_1^4 \pi\left[\sqrt{x} - 1\right]^2 dx \\ &= \pi \int_1^4 \left[x - 2\sqrt{x} + 1\right] dx \\ &= \pi\left[\frac{x^2}{2} - 2 \cdot \frac{2}{3} x^{3/2} + x\right]_1^4 = \frac{7\pi}{6}. \end{aligned}$$



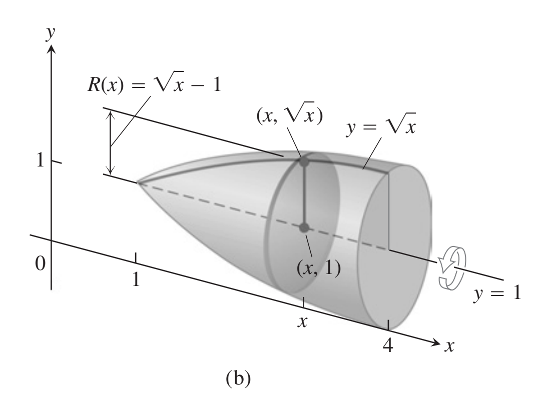


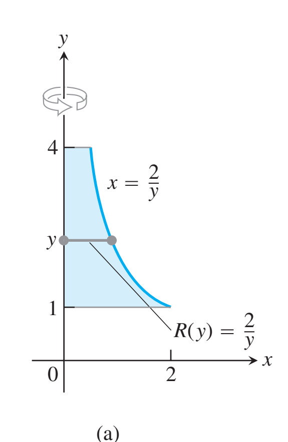
FIGURA 6.10 (a) La región y (b) el sólido de revolución del ejemplo 6. ■

Para determinar el volumen de un sólido generado al hacer girar una región entre el eje y y una curva $x = R(y)$, $c \leq y \leq d$, respecto del eje y, utilizamos el mismo método, reemplazando x con y. En este caso, la sección transversal circular es

$$A(y) = \pi[\text{radio}]^2 = \pi[R(y)]^2.$$

EJEMPLO 7 Rotación alrededor del eje y

Determinar el volumen del sólido resultante al hacer girar la región comprendida entre el eje y y la curva $x = 2/y$, $1 \leq y \leq 4$, alrededor del eje y.



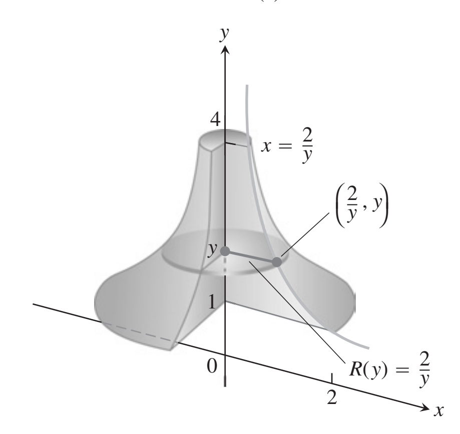


FIGURA 6.11 (a) La región y (b) parte del sólido de revolución del ejemplo 7.

Solución Dibujamos figuras que muestren la región, un radio típico y el sólido resultante (figura 6.11). El volumen es

$$\begin{aligned} V &= \int_1^4 \pi[R(y)]^2\, dy \\ &= \int_1^4 \pi\left(\frac{2}{y}\right)^2 dy \\ &= \pi\int_1^4 \frac{4}{y^2}\, dy = 4\pi\left[-\frac{1}{y}\right]_1^4 = 4\pi\left[\frac{3}{4}\right] \\ &= 3\pi. \end{aligned}$$

EJEMPLO 8 Rotación alrededor de un eje vertical

Determine el volumen del sólido resultante al hacer girar la región comprendida entre la parábola $x = y^2 + 1$ y la recta $x = 3$ alrededor de la recta $x = 3$.

Solución Dibujamos figuras que muestren la región, un radio típico y el sólido resultante (figura 6.12). Observe que las secciones transversales son perpendiculares a la recta $x = 3$. El volumen es

$$\begin{aligned} V &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \pi[R(y)]^2\, dy \\ &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \pi[2 - y^2]^2\, dy \qquad R(y) = 3 - (y^2 + 1) = 2 - y^2 \\ &= \pi\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} [4 - 4y^2 + y^4]\, dy \\ &= \pi\left[4y - \frac{4}{3}y^3 + \frac{y^5}{5}\right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \\ &= \frac{64\pi\sqrt{2}}{15}. \end{aligned}$$

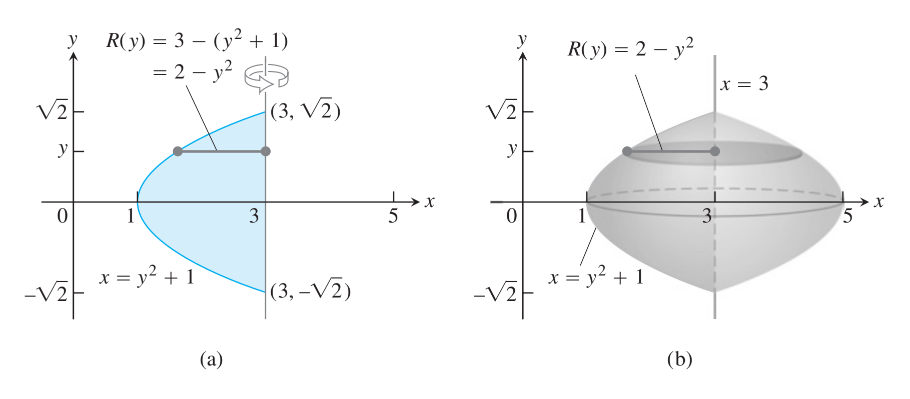


FIGURA 6.12 (a) La región y (b) el sólido de revolución del ejemplo 8.

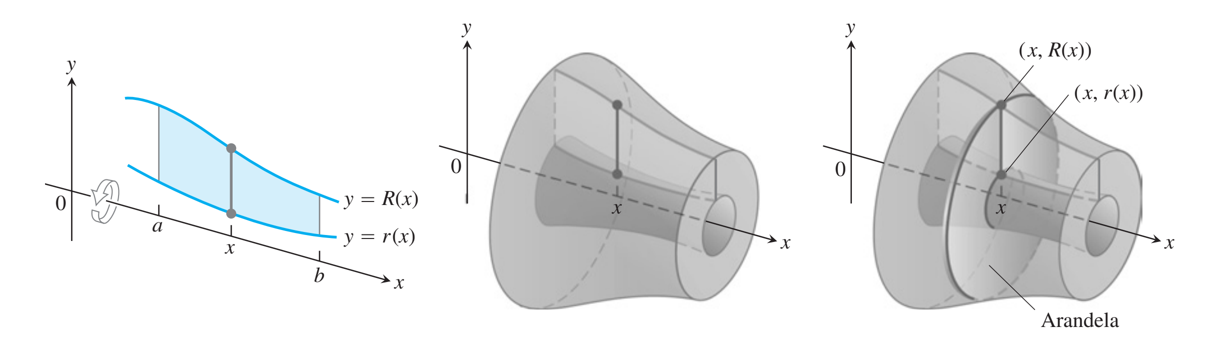
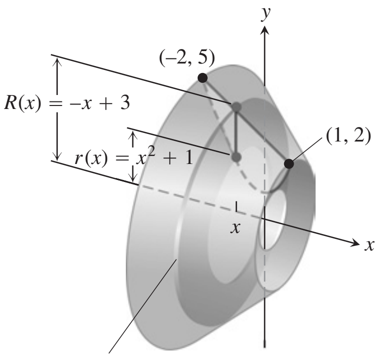


FIGURA 6.13 Las secciones transversales del sólido de revolución generado son arandelas, no discos, por lo que la integral $\int_a^b A(x)\,dx$ lleva a una fórmula ligeramente diferente.

y
(–2, 5)
R(x) = –x + 3
y = –x + 3
r(x) = x² + 1
(1, 2)
y = x² + 1
–2
x
0
1
x
Intervalo de integración

(a)



Sección transversal, arandela
Radio exterior: $R(x) = -x + 3$
Radio interior: $r(x) = x^2 + 1$

(b)

FIGURA 6.14 (a) La región del ejemplo 9 generada por el segmento de recta perpendicular al eje de rotación. (b) Cuando la región se hace girar alrededor del eje x, el segmento de recta genera una arandela.

Sólidos de revolución: el método de las arandelas

Si la región que se hace girar para generar un sólido no se acerca al eje de rotación ni está en él, el sólido tendrá un agujero (figura 6.13). En lugar de discos, las secciones transversales perpendiculares al eje de rotación son arandelas (la superficie circular en la parte central de la última imagen de la figura 6.13). Las dimensiones de una arandela representativa son

Radio exterior:	$R(x)$
Radio interior:	$r(x)$

El área de la arandela es

$$A(x) = \pi[R(x)]^2 - \pi[r(x)]^2 = \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2).$$

En consecuencia, la definición de volumen nos da

$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2)\,dx.$$

Este método para calcular el volumen de un sólido de revolución se denomina **método de las arandelas**, ya que cada pieza es una arandela circular con radio exterior $R(x)$ y radio interior $r(x)$.

EJEMPLO 9 Arandelas como secciones transversales (rotación alrededor del eje x)

Para generar un sólido se hace girar la región acotada por la curva $y = x^2 + 1$ y la recta $y = -x + 3$ alrededor del eje x. Determinar el volumen del sólido.

Solución

1. Dibuje la región y haga el bosquejo de un segmento de recta que la cruce y sea perpendicular al eje de rotación (el segmento en la parte central de la figura 6.14).
2. Determine los radios exterior e interior de la arandela que se generaría al hacer girar este segmento alrededor del eje x.

Estos radios son las distancias entre los extremos del segmento de recta y el eje de rotación (figura 6.14).

$$\text{Radio exterior:} \quad R(x) = -x + 3$$
$$\text{Radio interior:} \quad r(x) = x^2 + 1$$

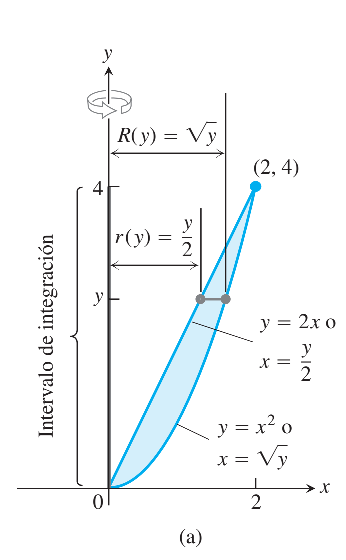
3. Determine los límites de integración determinando las coordenadas x de los puntos de intersección de la curva y la recta de la figura 6.14a.

$$x^2 + 1 = -x + 3$$
$$x^2 + x - 2 = 0$$
$$(x + 2)(x - 1) = 0$$
$$x = -2, \quad x = 1$$

4. Evalúe la integral del volumen.

$$V = \int_a^b \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2)\, dx$$
$$= \int_{-2}^{1} \pi((-x + 3)^2 - (x^2 + 1)^2)\, dx \qquad \text{Valores de los pasos 2 y 3}$$
$$= \int_{-2}^{1} \pi(8 - 6x - x^2 - x^4)\, dx$$
$$= \pi\left[8x - 3x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_{-2}^{1} = \frac{117\pi}{5}$$

■



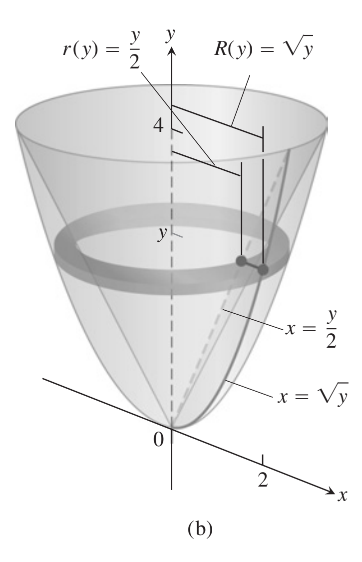


FIGURA 6.15 (a) La región que será rotada alrededor del eje y, los radios de las arandelas y los límites de integración del ejemplo 10. (b) La arandela barrida por el segmento de recta de la parte (a).

Para determinar el volumen de un sólido formado al hacer girar una región alrededor del eje y utilizamos el mismo procedimiento que en el ejemplo 9, pero integramos respecto de y en lugar de hacerlo respecto de x. En esta situación, el segmento de recta barre una arandela representativa perpendicular al eje y (el eje de rotación), y los radios exterior e interior de la arandela son funciones de y.



EJEMPLO 10 Arandelas como secciones transversales (rotación respecto del eje y)

Para generar un sólido, se hace girar la región acotada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 2x$ en el primer cuadrante alrededor del eje y. Determinar el volumen del sólido.

Solución Primero bosquejamos la región y trazamos un segmento de recta en la región, que sea perpendicular al eje de rotación (el eje y). Vea la figura 6.15a.

Los radios de la arandela barrida por el segmento de recta son $R(y) = \sqrt{y}$, $r(y) = y/2$ (figura 6.15).

La recta y la parábola se intersecan en $y = 0$ y $y = 4$, por lo que los límites de integración son $c = 0$ y $d = 4$. Integramos para determinar el volumen:

$$V = \int_c^d \pi([R(y)]^2 - [r(y)]^2)\, dy$$
$$= \int_0^4 \pi\left(\left[\sqrt{y}\right]^2 - \left[\frac{y}{2}\right]^2\right) dy$$
$$= \pi \int_0^4 \left(y - \frac{y^2}{4}\right) dy = \pi\left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{12}\right]_0^4 = \frac{8}{3}\pi.$$

■

Resumen

Sin importar cómo se determine el área de la sección transversal $A(x)$ de una placa representativa, la parte medular de los cálculos que hicimos en todos nuestros ejemplos es la definición del volumen como la integral definida $V = \int_a^b A(x)\,dx$.

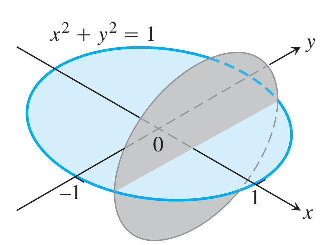
EJERCICIOS 6.1

Áreas de secciones transversales

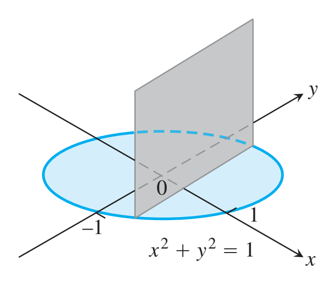
En los ejercicios 1 y 2, determine la fórmula para el área $A(x)$ de las secciones transversales del sólido perpendicular al eje x.

1. El sólido que se encuentra entre los planos perpendiculares al eje x en $x = -1$ y $x = 1$. En cada caso, las secciones transversales perpendiculares al eje x entre estos planos van de la semicircunferencia $y = -\sqrt{1 - x^2}$ a la semicircunferencia $y = \sqrt{1 - x^2}$.

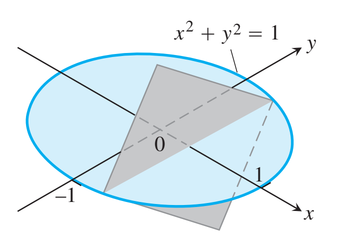
a. Las secciones transversales son discos circulares con diámetros en el plano xy.



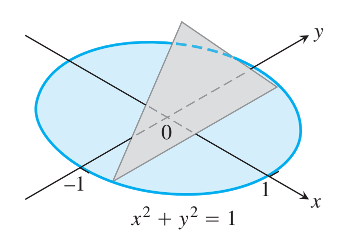
b. Las secciones transversales son cuadrados con base en el plano xy.



c. Las secciones transversales son cuadrados con diagonales en el plano xy. (La longitud de la diagonal de un cuadrado es $\sqrt{2}$ veces la longitud de sus lados).

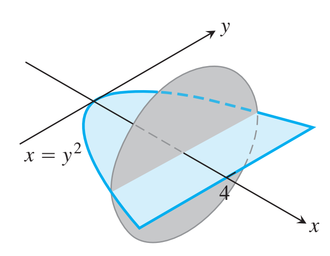


d. Las secciones transversales son triángulos equiláteros con bases en el plano xy.

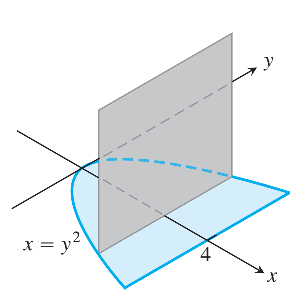


2. El sólido se encuentra entre los planos perpendiculares al eje x en $x = 0$ y $x = 4$. Las secciones transversales perpendiculares al eje x entre estos planos van de la parábola $y = -\sqrt{x}$ a la parábola $y = \sqrt{x}$.

a. Las secciones transversales son discos circulares con diámetros en el plano xy.



b. Las secciones transversales son cuadrados con bases en el plano xy.



c. Las secciones transversales son cuadrados con diagonales en el plano xy.

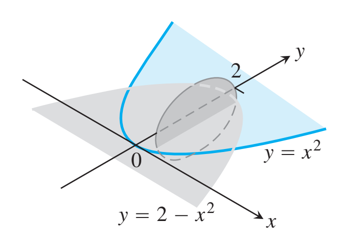
d. Las secciones transversales son triángulos equiláteros con bases en el plano xy.

Cálculo de volúmenes por partes

Determine el volumen de cada uno de los sólidos de los ejercicios 3 a 10.

3. El sólido se encuentra entre los planos perpendiculares al eje x en $x = 0$ y $x = 4$. Las secciones trasversales perpendiculares al eje en el intervalo $0 \leq x \leq 4$ son cuadrados que van de la parábola $y = -\sqrt{x}$ a la parábola $y = \sqrt{x}$.

4. El sólido se encuentra entre los planos perpendiculares al eje x en $x = -1$ y $x = 1$. Las secciones trasversales perpendiculares al eje x son discos circulares cuyos diámetros van de la parábola $y = x^2$ a la parábola $y = 2 - x^2$.

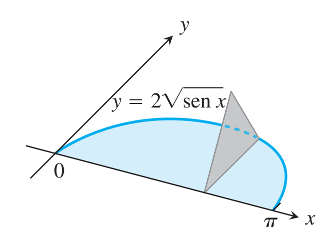


5. El sólido se encuentra entre los planos perpendiculares al eje x en $x = -1$ y $x = 1$. Las secciones trasversales perpendiculares al eje x entre estos planos son cuadrados cuyas bases van de la semicircunferencia $y = -\sqrt{1 - x^2}$ a la semicircunferencia $y = \sqrt{1 - x^2}$.

6. El sólido está entre los planos perpendiculares al eje x en $x = -1$ y $x = 1$. Las secciones trasversales perpendiculares al eje x entre estos planos son cuadrados cuyas diagonales van de la semicircunferencia $y = -\sqrt{1 - x^2}$ a la semicircunferencia $y = \sqrt{1 - x^2}$.

7. La base de un sólido es la región entre la curva $y = 2\sqrt{\operatorname{sen} x}$ y el intervalo $[0, \pi]$ en el eje x. Las secciones transversales perpendiculares al eje x son

a. triángulos equiláteros con bases que van del eje x a la curva, como se muestra en la figura.



b. cuadrados con bases que van del eje x a la curva.

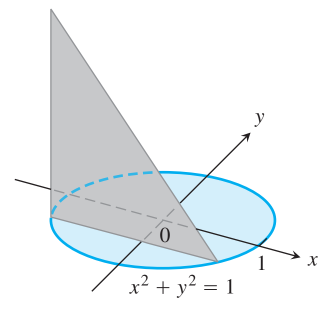
8. El sólido se encuentra entre los planos perpendiculares al eje x en $x = -\pi/3$ y $x = \pi/3$. Las secciones trasversales perpendiculares al eje x son

a. discos circulares con diámetros que van de la curva $y = \tan x$ a la curva $y = \sec x$.

b. cuadrados cuyas bases van de la curva $y = \tan x$ a la curva $y = \sec x$.

9. El sólido está entre los planos perpendiculares al eje y en $y = 0$ y $y = 2$. Las secciones trasversales perpendiculares al eje y son discos circulares con diámetros que van del eje y a la parábola $x = \sqrt{5}y^2$.

10. La base del sólido es el disco $x^2 + y^2 \leq 1$. Las secciones transversales son triángulos rectángulos isósceles determinados por planos perpendiculares al eje y entre $y = -1$ y $y = 1$, con uno de los catetos en el disco.

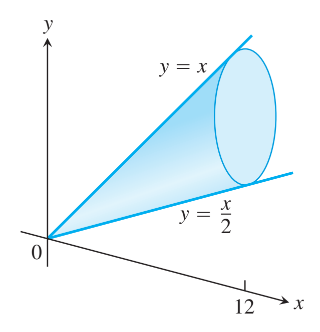


11. Un sólido retorcido Un cuadrado cuyos lados tienen longitud s se encuentra en un plano perpendicular a la recta L. Un vértice del cuadrado está en L. Conforme este cuadrado se mueve una distancia h a lo largo de L, da una vuelta alrededor de L para generar una columna con forma de sacacorchos con secciones transversales cuadradas.

a. Determine el volumen de la columna.

b. ¿Cuál será el volumen si el cuadrado da dos vueltas en lugar de una? Justifique su respuesta.

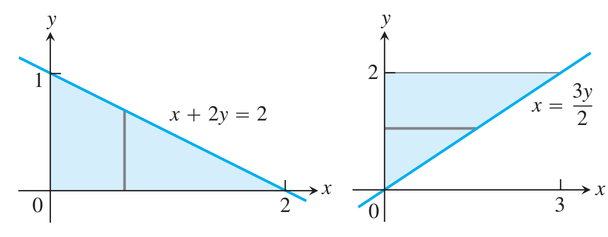
12. Principio de Cavalieri Un sólido se encuentra entre los planos perpendiculares al eje x en $x = 0$ y $x = 12$. Las secciones trasversales son discos circulares determinados por planos perpendiculares al eje x, cuyos diámetros van de la recta $y = x/2$ a la recta $y = x$, como se muestra en la figura siguiente. Explique por qué el sólido tiene el mismo volumen que un cono circular recto con base de radio 3 y altura 12.



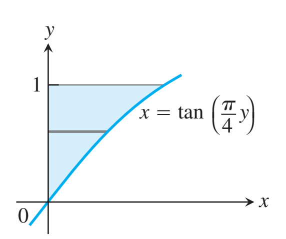
Cálculo de volúmenes por el método de los discos

En los ejercicios del 13 a 16, determine el volumen del sólido generado al hacer girar la región sombreada alrededor del eje dado.

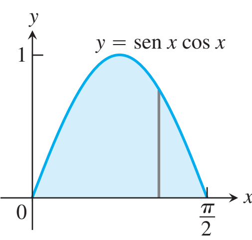
13. Alrededor del eje x. **14.** Alrededor del eje y.



15. Alrededor del eje y.



16. Alrededor del eje x.



En los ejercicios 17 a 22, determine los volúmenes de los sólidos generados al hacer girar las regiones acotadas por las rectas y curvas alrededor del eje x.

17. $y = x^2, \quad y = 0, \quad x = 2$

18. $y = x^3, \quad y = 0, \quad x = 2$

19. $y = \sqrt{9 - x^2}, \quad y = 0$

20. $y = x - x^2, \quad y = 0$

21. $y = \sqrt{\cos x}, \quad 0 \le x \le \pi/2, \quad y = 0, \quad x = 0$

22. $y = \sec x, \quad y = 0, \quad x = -\pi/4, \quad x = \pi/4$

En los ejercicios 23 y 24, determine el volumen del sólido generado al hacer girar la región alrededor de la recta dada.

23. La región en el primer cuadrante, acotada en la parte superior por la recta $y = \sqrt{2}$, en la inferior por la curva $y = \sec x \tan x$, y a la izquierda por el eje y, alrededor de la recta $y = \sqrt{2}$

24. La región en el primer cuadrante, acotada en la parte superior por la recta $y = 2$, en la inferior por la curva $y = 2 \operatorname{sen} x$, $0 \le x \le \pi/2$, y a la izquierda por el eje y, alrededor de la recta $y = 2$.

En los ejercicios 25 a 30, determine el volumen de cada uno de los sólidos generados al hacer girar la región acotada por las rectas y curvas dadas alrededor del eje y.

25. La región circundada por $x = \sqrt{5}y^2, \quad x = 0, \quad y = -1, y = 1$

26. La región circundada por $x = y^{3/2}, \quad x = 0, \quad y = 2$

27. La región circundada por $x = \sqrt{2 \operatorname{sen} 2y}, \quad 0 \le y \le \pi/2, \quad x = 0$

28. La región circundada por $x = \sqrt{\cos(\pi y/4)}, \quad -2 \le y \le 0, \quad x = 0$

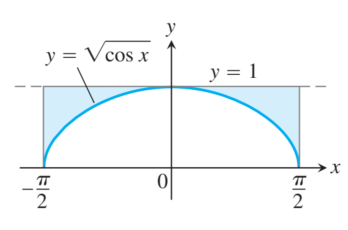
29. $x = 2/(y + 1), \quad x = 0, \quad y = 0, \quad y = 3$

30. $x = \sqrt{2y}/(y^2 + 1), \quad x = 0, \quad y = 1$

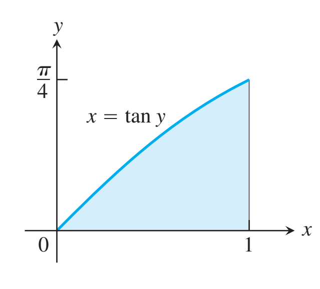
Cálculo de volúmenes por el método de las arandelas

En los ejercicios 31 y 32, determine el volumen de cada uno de los sólidos generados al hacer girar las regiones sombreadas alrededor del eje indicado.

31. El eje x.



32. El eje y.



En los ejercicios 33 a 38, determine el volumen del sólido generado al hacer girar las regiones acotadas por las rectas y las curvas dadas alrededor del eje x.

33. $y = x, \quad y = 1, \quad x = 0$

34. $y = 2\sqrt{x}, \quad y = 2, \quad x = 0$

35. $y = x^2 + 1, \quad y = x + 3$

36. $y = 4 - x^2, \quad y = 2 - x$

37. $y = \sec x, \quad y = \sqrt{2}, \quad -\pi/4 \le x \le \pi/4$

38. $y = \sec x, \quad y = \tan x, \quad x = 0, \quad x = 1$

En los ejercicios 39 a 42, determine el volumen del sólido generado al hacer girar cada región alrededor del eje y.

39. La región circundada por el triángulo con vértices (1, 0), (2, 1) y (1, 1).

40. La región circundada por el triángulo con vértices (0, 1), (1, 0) y (1, 1).

41. La región en el primer cuadrante, acotada en la parte superior por la parábola $y = x^2$, en la inferior por el eje x, y a la derecha por la recta $x = 2$.

42. La región en el primer cuadrante, acotada a la izquierda por la circunferencia $x^2 + y^2 = 3$, a la derecha por la recta $x = \sqrt{3}$, y en la partes superior por la recta $y = \sqrt{3}$

En los ejercicios 43 y 44, determine el volumen del sólido generado al hacer girar cada región alrededor del eje dado.

43. La región en el primer cuadrante, acotada en la parte superior por la curva $y = x^2$, en la inferior por el eje x, y a la derecha por la recta $x = 1$, alrededor de la recta $x = -1$.

44. La región en el segundo cuadrante, acotada en la parte superior por la curva $y = -x^3$, en la inferior por el eje x, y a la izquierda por la recta $x = -1$, alrededor de la recta $x = -2$.

Cálculo de volúmenes de sólidos de revolución

45. Determine el volumen del sólido generado al hacer girar la región acotada por $y = \sqrt{x}$ y las rectas $y = 2$ y $x = 0$, alrededor de

a. el eje x.
b. el eje y.
c. la recta $y = 2$.
d. la recta $x = 4$.

46. Determine el volumen del sólido generado al hacer girar la región triangular acotada por las rectas $y = 2x$, $y = 0$ y $x = 1$ alrededor de

a. la recta $x = 1$.
b. la recta $x = 2$.

47. Determine el volumen del sólido generado al hacer girar la región acotada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 1$, alrededor de

a. la recta $y = 1$.
b. la recta $y = 2$.
c. la recta $y = -1$.

48. Por medio de integración, determine el volumen del sólido generado al hacer girar la región triangular con vértices (0, 0), (b, 0), (0, h), alrededor de

a. el eje x.
b. el eje y.

Teoría y ejemplos de aplicación

49. Volumen de un toro El disco $x^2 + y^2 \le a^2$ se hace girar alrededor de la recta $x = b$ ($b > a$) para generar un sólido con forma de dona, al cual se le denomina *toro*. Determine su volumen. (*Su-*

gerencia: $\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2 - y^2}\,dy = \pi a^2/2$, ya que es el área de un semicírculo con radio a).

50. Volumen de un tazón La forma de un tazón puede generarse al hacer girar la gráfica de $y = x^2/2$ entre $y = 0$ y $y = 5$ alrededor del eje y.

a. Determine el volumen del tazón.

b. Razones relacionadas Si llenamos el tazón con agua a una velocidad constante de 3 unidades cúbicas por segundo, ¿qué tan rápido sube el nivel del agua en el tazón cuando el agua tiene una profundidad de 4 unidades?

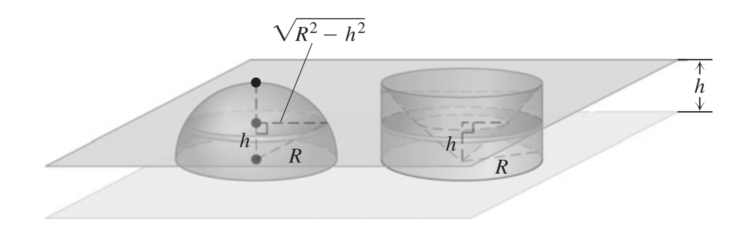
51. Volumen de un tazón

a. Un tazón semiesférico con radio a contiene agua a una profundidad h. Determine el volumen del agua en el tazón.

b. Razones relacionadas En un tazón semiesférico de concreto con radio de 5 m, entra agua a una velocidad de $0.2\ \text{m}^3/\text{seg}$. ¿Qué tan rápido se eleva el nivel del agua cuando ésta tiene una profundidad de 4 m?

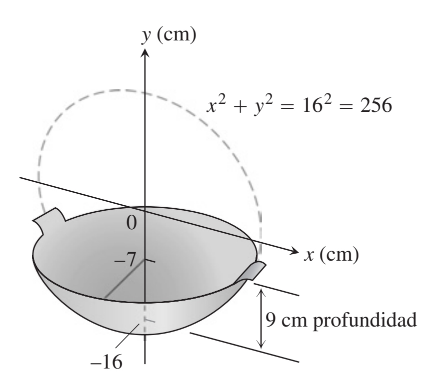
52. Explique cómo se podría estimar el volumen de un sólido de revolución midiendo la sombra proyectada sobre una mesa paralela a su eje de rotación por un foco de luz ubicado directamente encima del tazón.

53. Volumen de una semiesfera Deduzca la fórmula $V = (2/3)\pi R^3$ para calcular el volumen de una semiesfera con radio R, comparando sus secciones transversales con las secciones transversales de un cilindro circular recto sólido con radio R y altura R, del cual se quita un cono circular recto sólido con base R y altura R, como se sugiere en la figura siguiente.

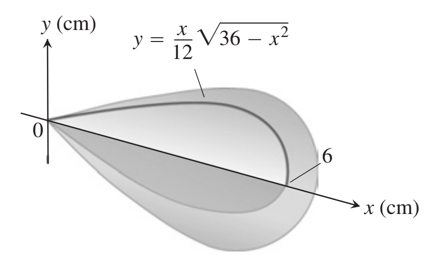


54. Volumen de un cono Determine mediante cálculo el volumen de un cono circular recto de altura h y radio de la base r.

55. Diseño de una sartén Se le pide diseñar una sartén con forma de tazón esférico con asas. Su experiencia doméstica le indica que puede obtener una sartén con capacidad para 3 L si la construye con 9 cm de profundidad y un radio de 16 cm. Para asegurarse de ello, imagine la sartén como un sólido de revolución semejante al que se muestra a continuación y calcule su volumen con una integral. ¿Qué volumen tiene la sartén realmente? Redondee la respuesta al centímetro cúbico más cercano ($1\text{ L} = 1000\text{ cm}^3$).



56. Diseño de una aplomada Se le ha pedido que diseñe una plomada que pese alrededor de 190 g. Para cumplir su cometido, decide que su forma debe ser parecida a la del sólido de revolución que se muestra a continuación. Determine el volumen de la plomada. Si para su fabricación elige latón que tiene un peso de $8.5\ \text{g/cm}^3$, ¿cuánto pesará la plomada (redondee al gramo más cercano)?



57. Máximo-mínimo El arco $y = \operatorname{sen} x$, $0 \le x \le \pi$, se hace girar alrededor de la recta $y = c$, $0 \le c \le 1$, para generar el sólido ilustrado en la figura 6.16.

a. Determine el valor de c que minimiza el volumen del sólido. ¿Cuál es el volumen mínimo?

b. ¿Cuál es el valor de c en [0, 1] que maximiza el volumen del sólido?

T **c.** Grafique el volumen del sólido como una función de c, primero para $0 \le c \le 1$ y después sobre un dominio más grande. ¿Qué le sucede al volumen del sólido cuando c se aleja de [0, 1]? ¿Esto tiene sentido desde el punto de vista físico? Justifique sus respuestas.

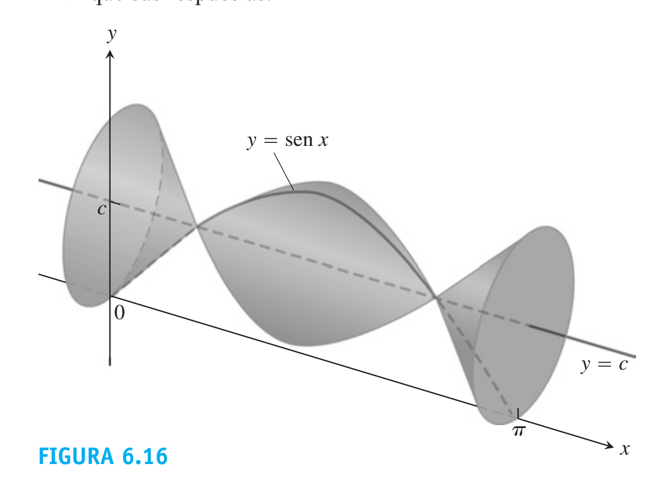


FIGURA 6.16

58. Tanque auxiliar de gasolina Con el propósito de ampliar el alcance de un helicóptero, usted tiene que diseñar un tanque auxiliar de gasolina que deberá caber en la parte inferior del fuselaje. Después de experimentar un poco en su mesa de dibujo, decide que la forma del tanque será parecida a la de la superficie generada al hacer girar la curva $y = 1 - (x^2/16)$, $-4 \leq x \leq 4$, alrededor del eje c (las medidas están en pies).

a. ¿Cuántos pies cúbicos de gasolina podrá contener el tanque (redondee al pie cúbico más cercano)?

b. Un pie cúbico equivale a 7.481 galones. Si el helicóptero recorre 2 millas por galón, ¿cuántas millas adicionales podrá volar una vez que se le instale el tanque (redondee a la milla más cercana)?

6.2 Cálculo de volúmenes por medio de casquillos cilíndricos

En la sección 6.1 se definió el volumen de un sólido S como la integral definida

$$V = \int_a^b A(x)\,dx,$$

en donde $A(x)$ es una área de sección transversal integrable de S, que va de $x = a$ a $x = b$. El área $A(x)$ se obtuvo partiendo el sólido con un plano perpendicular al eje x. En esta sección utilizaremos la misma definición de integral para calcular el volumen, pero obtendremos el área partiendo al sólido de una manera diferente: utilizando cilindros circulares rectos de radios crecientes, como si empleáramos una cortadora de galletas. El sólido se corta de manera perpendicular al eje x, con el eje del cilindro paralelo al eje y. El eje vertical de cada cilindro es la misma recta, pero los radios de los cilindros son más grandes en cada parte. Así, el sólido S se parte en delgados casquillos cilíndricos de grosor constante, cuyo radio crece cuando se alejan del eje común, igual que los anillos circulares que conforman la corteza de un árbol. Si un casquillo cilíndrico de estas características se extiende, es posible ver que su volumen es aproximadamente el de una pieza rectangular con área $A(x)$ y grosor Δx. Esto nos permite aplicar la misma definición de integral que hemos venido utilizando para calcular el volumen. Antes de describir el método en general, veamos un ejemplo para comprenderlo mejor.

EJEMPLO 1 Determinación de un volumen por medio de casquillos

La región circundada por el eje x y la parábola $y = f(x) = 3x - x^2$ se hace girar alrededor de la recta vertical $x = -1$ para generar la forma de un sólido (figura 6.17). Determinar el volumen del sólido.

Solución En este caso, utilizar el método de las arandelas que se explicó en la sección 6.1 sería complicado, ya que necesitaríamos expresar los valores de x de las ramas izquier-

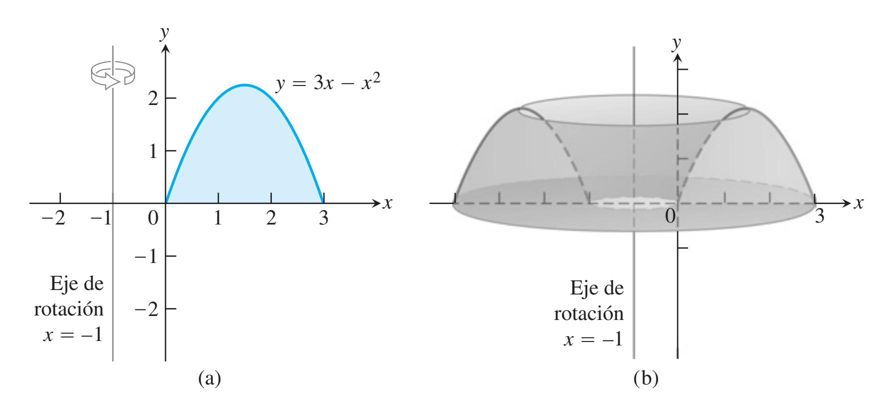


FIGURA 6.17 (a) La gráfica de la región del ejemplo 1, antes de hacerla girar. (b) El sólido formado cuando la región de la parte (a) se hace girar alrededor del eje de rotación $x = -1$.

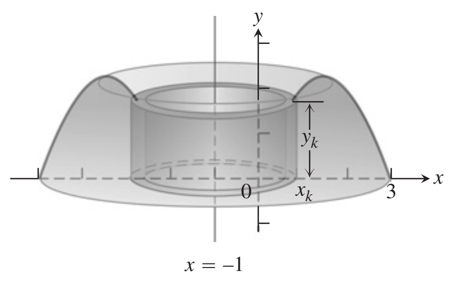


FIGURA 6.18 Un casquillo cilíndrico de altura y_k, obtenido al hacer girar una franja vertical de grosor Δx alrededor de la recta $x = -1$. El radio exterior del cilindro está en x_k, donde la altura de la parábola es $y_k = 3x_k - x_k^2$ (ejemplo 1).

da y derecha de la parábola en términos de y. (Estos valores de x son los radios exterior e interior de una arandela representativa, lo cual da lugar a fórmulas complicadas). En lugar de hacer rotar una tira horizontal de grosor Δy, hacemos girar una *tira vertical* de grosor Δx. Esta rotación produce un *casquillo cilíndrico* de altura y_k por arriba de un punto x_k en la base de la tira vertical y de grosor Δx. La parte sombreada en el centro de la figura 6.18 ilustra el casquillo cilíndrico. Podemos considerar dicho casquillo cilíndrico como una aproximación a una parte del sólido, la cual se obtiene haciendo un corte recto y paralelo al eje de rotación, muy cerca del agujero central. Luego cortamos otra parte cilíndrica, haciendo mayor el agujero central, luego otra y así sucesivamente, hasta obtener n cilindros. Los radios de los cilindros crecen de forma gradual, y sus alturas siguen el contorno de la parábola: primero son crecientes y luego decrecientes (figura 6.17a).

Cada parte está sobre un subintervalo del eje x de longitud (ancho) Δx. Su radio es aproximadamente $(1 + x_k)$, y su altura es más o menos $3x_k - x_k^2$. Si desenrollamos el cilindro en x_k y lo extendemos, se convierte en (casi) una placa rectangular con grosor Δx (figura 6.19). La circunferencia externa del k–ésimo cilindro es $2\pi \cdot \text{radio} = 2\pi(1 + x_k)$, que es la longitud de la placa rectangular. Por lo tanto, el volumen del casquillo cilíndrico es aproximadamente el de este sólido rectangular, es decir,

$$\begin{aligned}\Delta V_k &= \text{circunferencia} \times \text{altura} \times \text{grosor}\\ &= 2\pi(1 + x_k) \cdot \left(3x_k - x_k^2\right) \cdot \Delta x.\end{aligned}$$

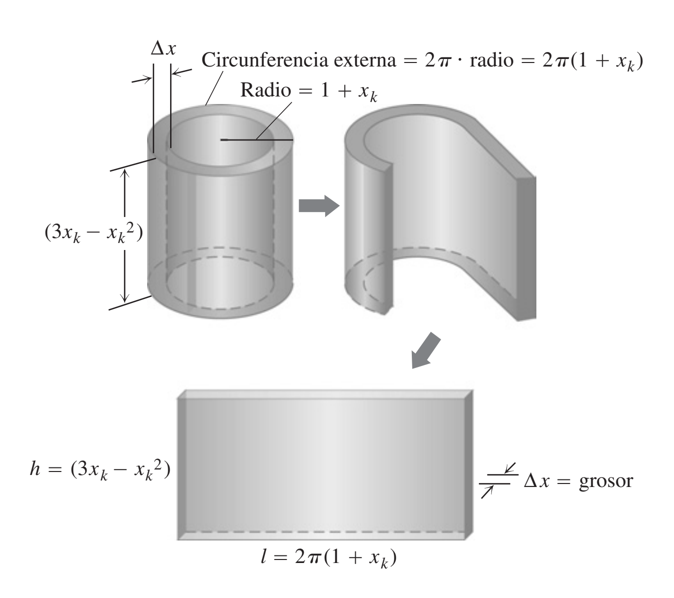


FIGURA 6.19 Imagine que corta y desenrolla un casquillo cilíndrico para obtener un sólido plano (casi) rectangular (ejemplo 1).

Al sumar todos los volúmenes ΔV_k de los casquillos cilíndricos en el intervalo [0, 3] se obtiene la suma de Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta V_k = \sum_{k=1}^{n} 2\pi(x_k + 1)\left(3x_k - x_k^2\right) \Delta x.$$

Tomando el límite cuando el grosor $\Delta x \to 0$ se obtiene la integral del volumen

$$\begin{aligned} V &= \int_0^3 2\pi(x+1)(3x-x^2)\,dx \\ &= \int_0^3 2\pi(3x^2+3x-x^3-x^2)\,dx \\ &= 2\pi\int_0^3 (2x^2+3x-x^3)\,dx \\ &= 2\pi\left[\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4\right]_0^3 \\ &= \frac{45\pi}{2}. \end{aligned}$$

A continuación generalizaremos el procedimiento utilizado en el ejemplo 1.

Método de los casquillos

Suponga que la región acotada por la gráfica de una función continua no negativa $y = f(x)$ y el eje x en el intervalo finito cerrado $[a, b]$ se encuentra a la derecha de la recta vertical $x = L$ (figura 6.20a). Daremos por sentado que $a \geq L$, por lo que la recta vertical podría tocar la región, pero no atravesarla. Generamos un sólido, S, al hacer girar esta región alrededor de la recta vertical L.

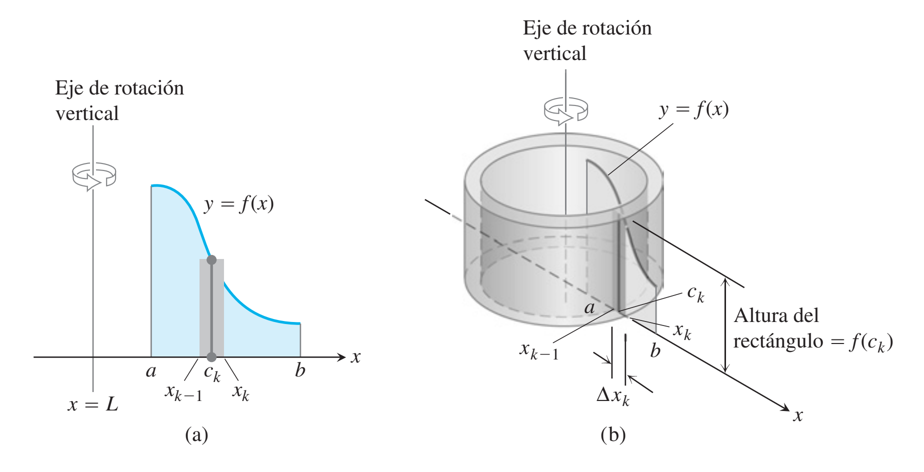


FIGURA 6.20 Cuando la región que se muestra en (a) se hace girar alrededor de la recta vertical $x = L$, se produce un sólido que puede rebanarse en casquillos cilíndricos. Un casquillo típico se muestra en (b).

Sea P una partición del intervalo $[a, b]$, dada por los puntos $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, y sea c_k el punto medio del k–ésimo subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$. La región de la figura 6.20a se aproxima por medio de rectángulos con base en esta partición de $[a, b]$. Un rectángulo de aproximación típico tiene una altura $f(c_k)$ y un ancho $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Si este rectángulo se hace girar alrededor de la recta vertical $x = L$, genera un casquillo, como se muestra en la figura 6.20b. Una fórmula geométrica nos indica que el volumen del casquillo obtenido a partir del rectángulo es

$$\begin{aligned} \Delta V_k &= 2\pi \times \text{radio promedio del casquillo} \times \text{altura del casquillo} \times \text{grosor} \\ &= 2\pi \cdot (c_k - L) \cdot f(c_k) \cdot \Delta x_k. \end{aligned}$$

Aproximamos el volumen del sólido S por medio de la suma de los volúmenes de los casquillos generados por los n rectángulos basados en la partición P:

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k .$$

El límite de esta suma de Riemann cuando $\|P\| \to 0$ proporciona el volumen del sólido como una integral definida:

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b 2\pi(\text{radio del casquillo})(\text{altura del casquillo})\, dx . \\ &= \int_a^b 2\pi(x - L)f(x)\, dx . \end{aligned}$$

Nos referimos a la variable de integración, en este caso x, como la **variable del grosor**. Usaremos la primera integral en lugar de la segunda que tiene una fórmula en el integrando, a fin de hacer hincapié en el *procedimiento* que sigue el método de los casquillos. Esto permitirá también usar la integral para rotaciones alrededor de una recta horizontal L.

Fórmula de los casquillos para rotación alrededor de una recta vertical
El volumen del sólido generado al hacer girar la región entre el eje x y la gráfica de una función continua $y = f(x) \geq 0, L \leq a \leq x \leq b$, alrededor de la recta vertical $x = L$ es

$$V = \int_a^b 2\pi \begin{pmatrix}\text{radio del} \\ \text{casquillo}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\text{altura del} \\ \text{casquillo}\end{pmatrix} dx .$$

EJEMPLO 2 Casquillos cilíndricos rotando alrededor del eje y

La región acotada por la curva $y = \sqrt{x}$, el eje x y la recta $x = 4$ se hace girar alrededor del eje y para generar un sólido. Determinar el volumen del sólido.

Solución Bosqueje la región y trace un segmento de recta que la cruce en forma *paralela* al eje de rotación (figura 6.21a). Etiquete la altura del segmento (altura del casquillo) y la distancia desde el eje de rotación (radio del casquillo). (En la figura 6.21b se dibujó el casquillo, pero usted no necesita hacerlo).

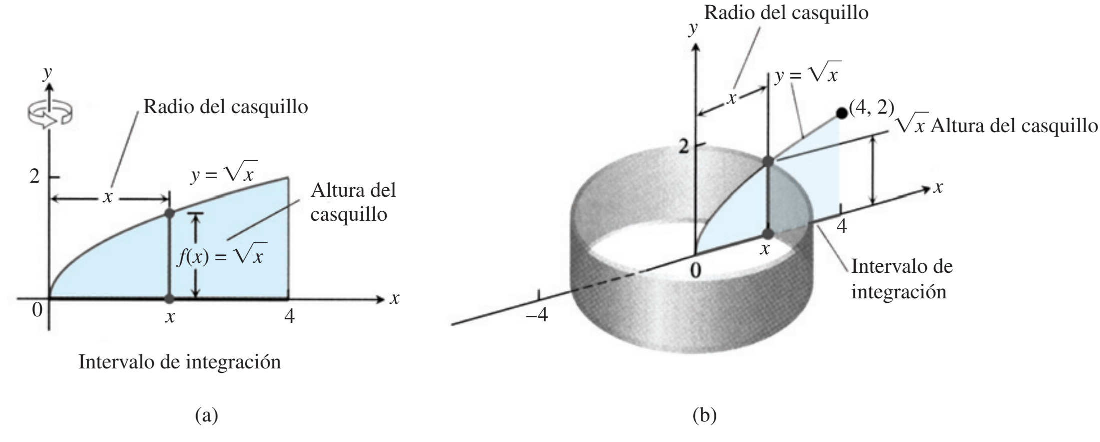


FIGURA 6.21 (a) La región, las dimensiones del casquillo y el intervalo de integración del ejemplo 2. (b) El casquillo barrido por el segmento vertical de la parte (a), con un ancho de Δx.

La variable del grosor del casquillo es x, de modo que los límites de integración para la fórmula del casquillo son $a = 0$ y $b = 4$ (figura 6.20). Por lo tanto, el volumen es

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b 2\pi \begin{pmatrix}\text{radio del}\\ \text{casquillo}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{altura del}\\ \text{casquillo}\end{pmatrix} dx \\ &= \int_0^4 2\pi(x)\left(\sqrt{x}\right) dx \\ &= 2\pi \int_0^4 x^{3/2}\, dx = 2\pi\left[\frac{2}{5}x^{5/2}\right]_0^4 = \frac{128\pi}{5}. \end{aligned}$$

Hasta el momento hemos utilizado ejes de rotación verticales. Para ejes horizontales, reemplazamos las x por y.

EJEMPLO 3 Casquillos cilíndricos rotando alrededor del eje x

La región acotada por la curva $y = \sqrt{x}$, el eje x y la recta $x = 4$ se hace girar alrededor del eje x para generar un sólido. Determinar el volumen del sólido.

Solución Bosqueje la región y trace un segmento de recta que la cruce en forma *paralela* al eje de rotación (figura 6.22a). Etiquete la longitud del segmento (altura del casquillo) y la distancia desde el eje de rotación (radio del casquillo). (En la figura 6.22b se dibujó el casquillo, pero no es necesario que usted lo haga).

En este caso, la variable del grosor del casquillo es y, de modo que los límites de integración para la fórmula del método de casquillos son $a = 0$ y $b = 2$ (a lo largo del eje y en la figura 6.22). El volumen del sólido es

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b 2\pi \begin{pmatrix}\text{radio del}\\ \text{casquillo}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{altura del}\\ \text{casquillo}\end{pmatrix} dy \\ &= \int_0^2 2\pi(y)(4 - y^2)\, dy \\ &= \int_0^2 2\pi(4y - y^3)\, dy \\ &= 2\pi\left[2y^2 - \frac{y^4}{4}\right]_0^2 = 8\pi. \end{aligned}$$

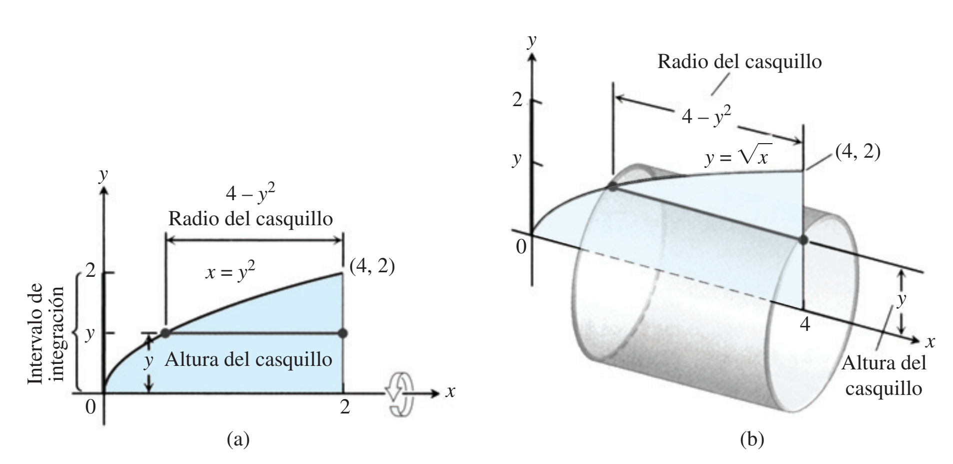


FIGURA 6.22 (a) La región, las dimensiones del casquillo y el intervalo de integración del ejemplo 3. (b) El casquillo barrido por el segmento horizontal de la parte (a), con un ancho de Δy.

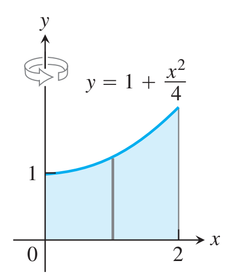
> **Resumen del método de los casquillos**
>
> Sin importar la posición del eje de rotación (horizontal o vertical), los pasos para poner en práctica el método de los casquillos son:
>
> 1. *Dibujar la región y trazar un segmento de recta* que la cruce en forma *paralela* al eje de rotación. *Etiquetar* la altura o longitud del segmento (altura del casquillo) y la distancia desde el eje de rotación (radio del casquillo).
> 2. *Determinar* los límites de integración para la variable del grosor.
> 3. *Integrar* el producto 2π (radio del casquillo)(altura del casquillo) respecto de la variable del grosor (x o y) para determinar el volumen.

El método de los casquillos proporciona la misma respuesta que el de las arandelas al calcular el volumen de una región. La afirmación anterior se ilustra en los ejercicios 33 y 34, aunque aquí no se demostrará. Ambas fórmulas para calcular el volumen en realidad son casos especiales de un método general para determinación de volúmenes que veremos al estudiar las integrales dobles y triples en el capítulo 15. Dicha método nos permitirá calcular volúmenes de otros sólidos, además de los que se obtienen al hacer girar una región.

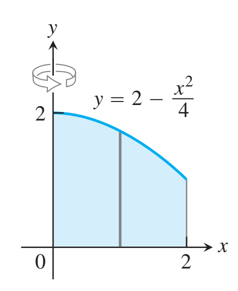
EJERCICIOS 6.2

En los ejercicios 1 a 6, utilice el método de los casquillos para determinar el volumen de los sólidos generados al hacer girar la región sombreada alrededor del eje indicado.

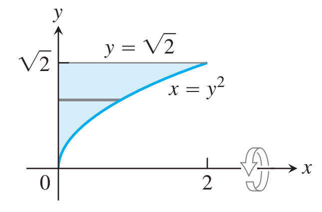
1.



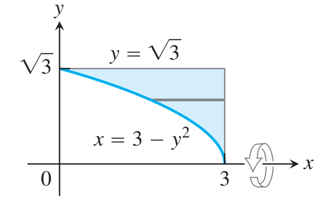
2.



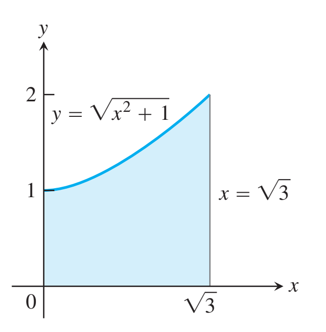
3.



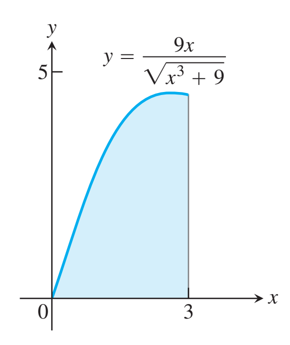
4.



5. El eje y.



6. El eje x.



Rotación alrededor del eje *y*

Utilice el método de los casquillos para determinar el volumen de cada uno de los sólidos que se obtienen al hacer girar las regiones acotadas por las curvas y las rectas dadas en los ejercicios 7 al 14 alrededor del eje y.

7. $y = x, \quad y = -x/2, \quad x = 2$

8. $y = 2x, \quad y = x/2, \quad x = 1$

9. $y = x^2, \quad y = 2 - x, \quad x = 0$, para $x \geq 0$

10. $y = 2 - x^2, \quad y = x^2, \quad x = 0$

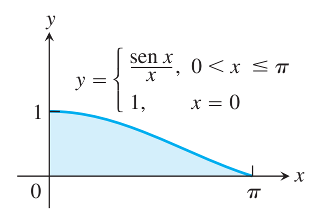
11. $y = 2x - 1, \quad y = \sqrt{x}, \quad x = 0$

12. $y = 3/\left(2\sqrt{x}\right), \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 4$

13. Sea $f(x) = \begin{cases} (\operatorname{sen} x)/x, & 0 < x \leq \pi \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

a. Demuestre que $x f(x) = \operatorname{sen} x, 0 \leq x \leq \pi$.

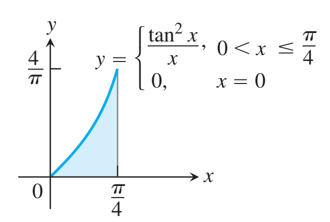
b. Determine el volumen del sólido generado al hacer girar la región sombreada alrededor del eje y.



14. Sea $g(x) = \begin{cases} (\tan x)^2/x, & 0 < x \leq \pi/4 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

a. Demuestre que $x g(x) = (\tan x)^2, 0 \leq x \leq \pi/4$.

b. Determine el volumen del sólido generado al hacer girar la región sombreada alrededor del eje y.



Rotación alrededor del eje x

Utilice el método de los casquillos para determinar los volúmenes de los sólidos generados al hacer girar las regiones acotadas por las curvas y las rectas en los ejercicios 15 a 22, alrededor del eje x.

15. $x = \sqrt{y}, \quad x = -y, \quad y = 2$

16. $x = y^2, \quad x = -y, \quad y = 2, \quad y \geq 0$

17. $x = 2y - y^2, \quad x = 0$

18. $x = 2y - y^2, \quad x = y$

19. $y = |x|, \quad y = 1$

20. $y = x, \quad y = 2x, \quad y = 2$

21. $y = \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad y = x - 2$

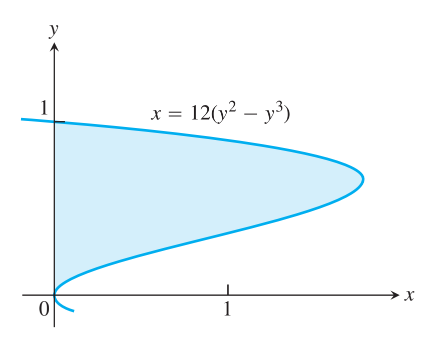
22. $y = \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad y = 2 - x$

Rotación alrededor de rectas horizontales

En los ejercicios 23 y 24, utilice el método de los casquillos para determinar los volúmenes de los sólidos generados al hacer girar las regiones sombreadas alrededor de los ejes indicados.

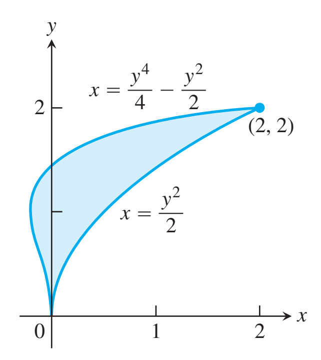
23. **a.** El eje x. **b.** La recta $y = 1$

c. La recta $y = 8/5$ **d.** La recta $y = -2/5$



24. **a.** El eje x. **b.** La recta $y = 2$

c. La recta $y = 5$ **d.** La recta $y = -5/8$



Comparación de los métodos de las arandelas y de los casquillos

Aunque no sucede así en todos los casos, tanto el método de las arandelas como el de los casquillos podrían funcionar bien para determinar el volumen del sólido generado al hacer girar la región alrededor de los ejes coordenados. Por ejemplo, cuando una región se hace girar alrededor del eje y y se utiliza el método de las arandelas para calcular su volumen, es necesario integrar respecto de y; sin embargo podría ocurrir que sea imposible expresar el integrando en términos de y. En tal caso, el método de los casquillos nos permitirá integrar respecto de x. Los ejercicios 25 y 26 proporcionan buenos ejemplos en este sentido.

25. Calcule el volumen del sólido generado al hacer girar la región acotada por $y = x$ y $y = x^2$ alrededor de cada eje coordenado, utilizando

a. el método de los casquillos. **b.** el método de las arandelas.

26. Calcule el volumen del sólido generado al hacer girar la región triangular acotada por $2y = x + 4$, $y = x$ y $x = 0$ alrededor de

a. el eje x; use el método de las arandelas.

b. el eje y; emplee el método de los casquillos.

c. la recta $x = 4$; utilice el método de los casquillos.

d. la recta $y = 8$; utilice el método de las arandelas.

Elección entre el método de las arandelas y el de los casquillos

En los ejercicios 27 a 32, determine el volumen de los sólidos generados al hacer girar las regiones alrededor de los ejes dados. Si considera que sería mejor utilizar el método de las arandelas en alguno de ellos, hágalo.

27. El triángulo con vértices (1, 1), (1, 2) y (2, 2) alrededor de

a. el eje x. **b.** el eje y.
c. la recta $x = 10/3$. **d.** la recta $y = 1$.

28. La región acotada por $y = \sqrt{x}$, $y = 2$, $x = 0$ alrededor de

a. el eje x. **b.** el eje y.
c. la recta $x = 4$. **d.** la recta $y = 2$.

29. La región del primer cuadrante, acotada por la curva $x = y - y^3$ alrededor de

a. el eje x. **b.** la recta $y = 1$.

30. La región del primer cuadrante, acotada por $x = y - y^3$, $x = 1$, y $y = 1$ alrededor de

a. el eje x. **b.** el eje y.
c. la recta $x = 1$ **d.** la recta $y = 1$

31. La región acotada por $y = \sqrt{x}$ y $y = x^2/8$ alrededor de

a. el eje x. **b.** el eje y.

32. La región acotada por $y = 2x - x^2$ y $y = x$ alrededor de

a. el eje y. **b.** la recta $x = 1$

33. La región del primer cuadrante, acotada por arriba por la curva $y = 1/x^{1/4}$, a la izquierda por la recta $x = 1/16$, y por abajo por la recta $y = 1$, se hace girar alrededor del eje x para generar un sólido. Determine el volumen del sólido por medio de

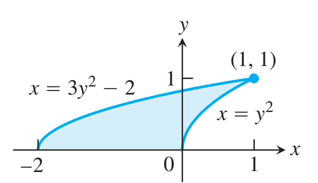
a. el método de las arandelas. **b.** el método de los casquillos.

34. La región del primer cuadrante, acotada por arriba por la curva $y = 1/\sqrt{x}$, a la izquierda por la recta $x = 1/4$, y por abajo por la recta $y = 1$, se hace girar alrededor del eje y para generar un sólido. Determine el volumen del sólido por medio de

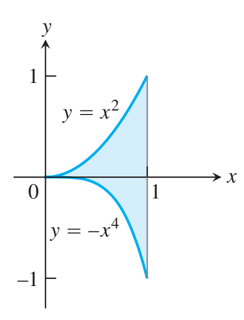
a. el método de las arandelas. **b.** el método de los casquillos.

Elección entre el método de los discos, el de las arandelas y el de los casquillos

35. La región que se muestra a continuación se hace girar alrededor del eje x para generar un sólido. ¿Cuál de los métodos (el de discos, el de arandelas, o el de casquillos) podría utilizarse para determinar el volumen del sólido? ¿Cuántas integrales son necesarias en cada caso? Explique.



36. La región que se muestra a continuación se hace girar alrededor del eje x para generar un sólido. ¿Cuál de los métodos (el de discos, el de arandelas, o el de casquillos) podría utilizarse para determinar el volumen del sólido? ¿Cuántas integrales son necesarias en cada caso? Justifique sus respuestas.



6.3 Longitudes de curvas planas

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

Arquímedes
(287-212 a. de C.)

Sabemos qué significa longitud de un segmento de recta, pero sin el cálculo no sabríamos a ciencia cierta qué es longitud de una curva en general. La idea de calcular la longitud de una curva que va del punto A al punto B por medio de la subdivisión de la curva en muchas partes y la unión de los puntos sucesivos de la división mediante segmentos de recta, se remonta a los antiguos griegos. Arquímedes utilizó este método para aproximar el perímetro de una circunferencia: inscribió un polígono de n lados y utilizó propiedades geométricas para calcular el perímetro de éste (figura 6.23). La extensión de esta idea al cálculo de la

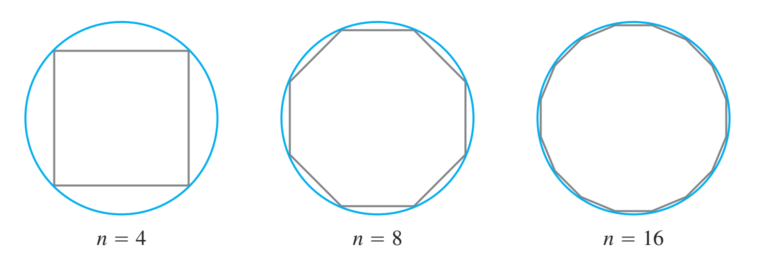


FIGURA 6.23 Arquímedes utilizó los perímetros de polígonos inscritos para aproximar el perímetro de una circunferencia. Para $n = 96$ el método de aproximación da $\pi \approx 3.14103$ como el perímetro de una circunferencia de radio uno.

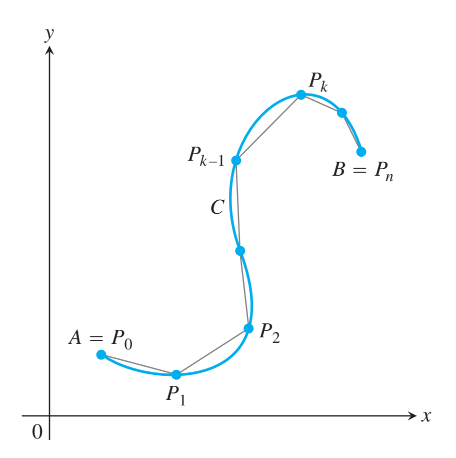


FIGURA 6.24 La curva C definida paramétricamente por las ecuaciones $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$. La longitud de la curva de A a B se aproxima por la suma de las longitudes de los segmentos de recta de la trayectoria poligonal que inicia en $A = P_0$, luego va a P_1, y así sucesivamente, finalizando en $B = P_n$.

longitud de una curva más general se muestra en la figura 6.24. A continuación describiremos cómo funciona este método.

Longitud de una curva definida en forma paramétrica

Sea C una curva dada en forma paramétrica por medio de las ecuaciones

$$x = f(t) \quad \text{y} \quad y = g(t), \quad a \leq t \leq b.$$

Suponemos que las funciones f y g tienen derivadas continuas en el intervalo $[a, b]$, cuyo valor no es igual a cero simultáneamente. Se dice que tales funciones son **continuamente diferenciables** y a la curva C definida por ellas se le denomina **curva suave**. Puede ser útil imaginar la curva como la trayectoria de una partícula que se mueve del punto $A = (f(a), g(a))$ en el instante $t = a$, al punto $B = (f(b), g(b))$ como se ilustra en la figura 6.24. Subdividimos la trayectoria (o arco) AB en n partes en los puntos $A = P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n = B$. Estos puntos corresponden a una partición del intervalo $[a, b]$ por medio de $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$, en donde $P_k = (f(t_k), g(t_k))$. Después, unimos los puntos sucesivos de esta subdivisión mediante segmentos de recta (figura 6.24). Un segmento representativo tiene longitud

$$\begin{aligned} L_k &= \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} \\ &= \sqrt{[f(t_k) - f(t_{k-1})]^2 + [g(t_k) - g(t_{k-1})]^2} \end{aligned}$$

(vea la figura 6.25). Si Δt_k es pequeña, la longitud L_k es aproximadamente igual a la longitud del arco $P_{k-1}P_k$. De acuerdo con el teorema del valor medio, existen números t_k^* y t_k^{**} en $[t_{k-1}, t_k]$ tales que

$$\Delta x_k = f(t_k) - f(t_{k-1}) = f'(t_k^*)\, \Delta t_k,$$

$$\Delta y_k = g(t_k) - g(t_{k-1}) = g'(t_k^{**})\, \Delta t_k.$$

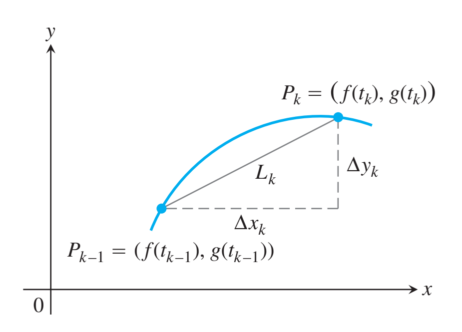


FIGURA 6.25 El arco $P_{k-1}P_k$ se aproxima por el segmento de recta que se muestra aquí, con una longitud $L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$.

Suponiendo que la trayectoria de A a B se recorre exactamente una vez cuando t aumenta de $t = a$ a $t = b$, sin invertir la dirección del movimiento ni pasar dos veces por el mismo punto, un cálculo intuitivo de la "longitud" de la curva AB es igual a la suma de todas las longitudes L_k:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} L_k &= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{[f'(t_k^*)]^2 + [g'(t_k^{**})]^2}\, \Delta t_k. \end{aligned}$$

Aunque la suma de la derecha no es exactamente una suma de Riemann (ya que f' y g' se evalúan en diferentes puntos), un teorema de cálculo avanzado garantiza que su límite, conforme la norma de la partición tiende a cero, es la integral definida

$$\int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt.$$

Por lo tanto, es razonable definir la longitud de la curva de A a B como esta integral.

DEFINICIÓN Longitud de una curva parametrizada

Si una curva C está definida en forma paramétrica por $x = f(t)$ y $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$, donde f' y g' son continuas y no simultáneamente iguales a cero en $[a, b]$, y C se recorre una sola vez cuando t aumenta de $t = a$ a $t = b$, entonces la **longitud de C** es la integral definida

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt.$$

Una curva suave C no pasa dos veces por el mismo lugar ni invierte la dirección del movimiento en el intervalo de tiempo $[a, b]$, ya que $(f')^2 + (g')^2 > 0$ en todo el intervalo.

Si $x = f(t)$ y $y = g(t)$ y utilizamos la notación de Leibniz, obtenemos el siguiente resultado para la longitud de arco:

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt. \qquad (1)$$

¿Qué sucede si existen dos parametrizaciones diferentes para una curva C cuya longitud queremos determinar? ¿importa cuál utilicemos? Con base en cálculo avanzado, la respuesta es que no, siempre y cuando la parametrización que elijamos cumpla las condiciones establecidas en la definición de la longitud de C (vea el ejercicio 29).

EJEMPLO 1 El perímetro de una circunferencia

Determinar la longitud de la circunferencia de radio r definida en forma paramétrica por

$$x = r\cos t \qquad \text{y} \qquad y = r\,\text{sen}\, t, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Solución A medida que t varía de 0 a 2π, la circunferencia se recorre exactamente una vez, convirtiéndose en

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Encontramos

$$\frac{dx}{dt} = -r\,\text{sen}\, t, \quad \frac{dy}{dt} = r\cos t$$

y

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = r^2(\text{sen}^2 t + \cos^2 t) = r^2.$$

Por lo que

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2}\, dt = r\Big[t\Big]_0^{2\pi} = 2\pi r. \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 2 Aplicación de la fórmula paramétrica para calcular la longitud de una curva

Determinar la longitud de la astroide (figura 6.26)

$$x = \cos^3 t, \qquad y = \operatorname{sen}^3 t, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

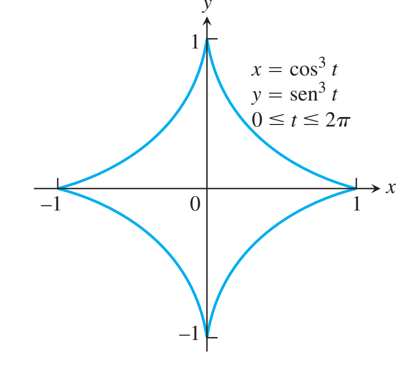


FIGURA 6.26 La astroide del ejemplo 2.

Solución Como consecuencia de la simetría de la curva con respecto a los ejes de coordenadas, su longitud es cuatro veces la longitud de la parte del primer cuadrante. Tenemos

$$x = \cos^3 t, \qquad y = \operatorname{sen}^3 t$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = [3\cos^2 t(-\operatorname{sen} t)]^2 = 9\cos^4 t \operatorname{sen}^2 t$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = [3\operatorname{sen}^2 t(\cos t)]^2 = 9\operatorname{sen}^4 t \cos^2 t$$

$$\begin{aligned}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} &= \sqrt{9\cos^2 t \operatorname{sen}^2 t\underbrace{(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t)}_{1}} \\ &= \sqrt{9\cos^2 t \operatorname{sen}^2 t} \\ &= 3|\cos t \operatorname{sen} t| \\ &= 3\cos t \operatorname{sen} t. \end{aligned}$$

$\cos t \operatorname{sen} t \ge 0$ para $0 \le t \le \pi/2$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\text{Longitud de la parte del primer cuadrante} &= \int_0^{\pi/2} 3\cos t \operatorname{sen} t\, dt \\ &= \frac{3}{2}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} 2t\, dt \\ &= -\frac{3}{4}\cos 2t\Big]_0^{\pi/2} = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

$\cos t \operatorname{sen} t = (1/2)\operatorname{sen} 2t$

La longitud de la astroide es cuatro veces esto: $4(3/2) = 6$. $\blacksquare$

Biografía histórica

Gregory St. Vincent
(1584–1667)

Longitud de una curva $y = f(x)$

Dada una función continuamente diferenciable $y = f(x)$, $a \le x \le b$, podemos asignar $x = t$ como un parámetro. Entonces, la gráfica de la función f es la curva definida paramétricamente por

$$x = t \quad \text{y} \quad y = f(t), \qquad a \le t \le b,$$

un caso especial de lo que hemos considerado antes. Entonces,

$$\frac{dx}{dt} = 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{dy}{dt} = f'(t).$$

Según los cálculos que hicimos en la sección 3.5, tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = f'(t)$$

de lo cual obtenemos

$$\begin{aligned}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 &= 1 + [f'(t)]^2 \\ &= 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \\ &= 1 + [f'(x)]^2.\end{aligned}$$

Al sustituir lo anterior en la ecuación (1) se obtiene la fórmula de la longitud de arco para la gráfica de $y = f(x)$.

Fórmula para la longitud de $y = f(x)$, $\quad a \le x \le b$

Si f es continuamente diferenciable en el intervalo cerrado $[a, b]$, la longitud de la curva (gráfica) $y = f(x)$ de $x = a$ a $x = b$ es

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx. \qquad (2)$$

EJEMPLO 3 Aplicación de la fórmula de longitud de arco en una gráfica

Determinar la longitud de la curva

$$y = \frac{4\sqrt{2}}{3}x^{3/2} - 1, \qquad 0 \le x \le 1.$$

Solución Utilizamos la ecuación (2) con $a = 0$, $b = 1$ y

$$\begin{aligned} y &= \frac{4\sqrt{2}}{3}x^{3/2} - 1 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{3}{2}x^{1/2} = 2\sqrt{2}x^{1/2} \\ \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 &= \left(2\sqrt{2}x^{1/2}\right)^2 = 8x.\end{aligned}$$

La longitud de la curva de $x = 0$ a $x = 1$ es

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 8x}\, dx$$

Ecuación (2) con $a = 0$, $b = 1$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8}(1 + 8x)^{3/2}\Big]_0^1 = \frac{13}{6}.$$

Haga $u = 1 + 8x$, integre y reemplace u por $1 + 8x$. ■

Trabajo con discontinuidades en *dy/dx*

En un punto de la curva en donde dy/dx no exista, dx/dy puede existir y es posible determinar la longitud de la curva expresando x como función de y y aplicando la ecuación siguiente, que es análoga a la ecuación (2):

Fórmula para determinar la longitud de $x = g(y), \quad c \leq y \leq d$

Si g es continuamente diferenciable en $[c, d]$, la longitud de la curva $x = g(y)$ de $y = c$ a $y = d$ es

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2}\, dy. \tag{3}$$

EJEMPLO 4 Longitud de una gráfica con discontinuidad en *dy/dx*

Determinar la longitud de la curva $y = (x/2)^{2/3}$ de $x = 0$ a $x = 2$.

Solución La derivada

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^{-1/3}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{x}\right)^{1/3}$$

no está definida en $x = 0$, por lo que no podemos determinar la longitud de la curva por medio de la ecuación (2).

Por lo tanto, reescribimos la ecuación para expresar x en términos de y:

$$y = \left(\frac{x}{2}\right)^{2/3}$$

$$y^{3/2} = \frac{x}{2} \qquad \text{Elevar ambos lados a la 3/2.}$$

$$x = 2y^{3/2}. \qquad \text{Despejar } x.$$

Con base en lo anterior, vemos que la curva cuya longitud queremos determinar es también la gráfica de $x = 2y^{3/2}$ de $y = 0$ a $y = 1$ (figura 6.27).

La derivada

$$\frac{dx}{dy} = 2\left(\frac{3}{2}\right)y^{1/2} = 3y^{1/2}$$

es continua en [0, 1]. Por consiguiente, podemos utilizar la ecuación (3) para determinar la longitud de la curva:

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \int_0^1 \sqrt{1 + 9y}\, dy \qquad \text{Ecuación (3) con } c = 0, d = 1.$$

$$= \frac{1}{9}\cdot\frac{2}{3}(1 + 9y)^{3/2}\Big]_0^1 \qquad \text{Haga } u = 1 + 9y,\ du/9 = dy, \text{ integre y sustituya.}$$

$$= \frac{2}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right) \approx 2.27.$$

■

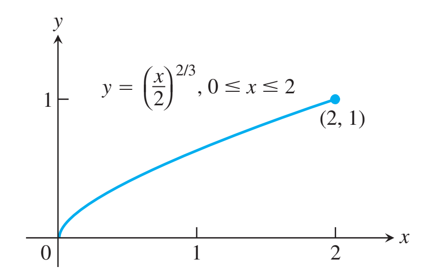


FIGURA 6.27 La gráfica de $y = (x/2)^{2/3}$ desde $x = 0$ hasta $x = 2$, también es la gráfica de $x = 2y^{3/2}$ desde $y = 0$ hasta $y = 1$ (ejemplo 4).

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

James Gregory
(1638-1675)

Fórmula para longitud de arco en forma diferencial

La ecuación (1) suele escribirse en términos de diferenciales, en lugar de emplear derivadas. Esto se hace formalmente escribiendo $(dt)^2$ dentro del radical en lugar de dt fuera del radical y escribiendo

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2(dt)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\,dt\right)^2 = (dx)^2$$

y

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2(dt)^2 = \left(\frac{dy}{dt}\,dt\right)^2 = (dy)^2.$$

También se acostumbra eliminar los paréntesis en $(dx)^2$ y escribir simplemente dx^2, por lo que la ecuación (1) se transforma en

$$L = \int \sqrt{dx^2 + dy^2}. \qquad (4)$$

Estas diferenciales pueden considerarse como una forma de resumir y simplificar las propiedades de las integrales. Para conocer una definición matemática precisa de las diferenciales, consulte un texto más avanzado.

Para realizar el cálculo de la integral, dx y dy deben expresarse en términos de la misma variable, y se deben proporcionar los límites adecuados en la ecuación (4).

Un método útil para recordar la ecuación (4) consiste en escribir

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \qquad (5)$$

y tratar ds como una diferencial de la longitud de arco, que puede integrarse entre los límites adecuados para obtener la longitud total de la curva. La figura 6.28a proporciona la interpretación precisa de ds para la ecuación (5). La figura 6.28b no es precisa, pero se considerará una aproximación simplificada de la figura 6.28a.

Con la ecuación (5) en mente, la manera más rápida de recordar las fórmulas para calcular la longitud de arco es recordando la ecuación

$$\text{Longitud de arco} = \int ds.$$

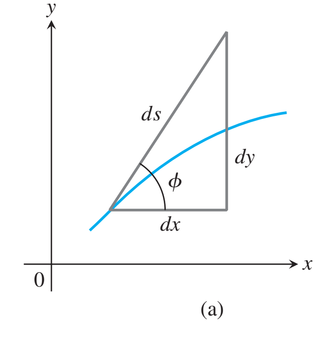
Si escribimos $L = \int ds$ y tenemos la gráfica de $y = f(x)$, podemos reescribir la ecuación (5) para obtener

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 + \frac{dy^2}{dx^2}dx^2} = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}\,dx = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx,$$

con lo que se obtiene la ecuación (2). Si, en cambio, tenemos $x = g(y)$, reescribimos así la ecuación (5):

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dy^2 + \frac{dx^2}{dy^2}dy^2} = \sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}}\,dy = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy,$$

y obtenemos la ecuación (3).



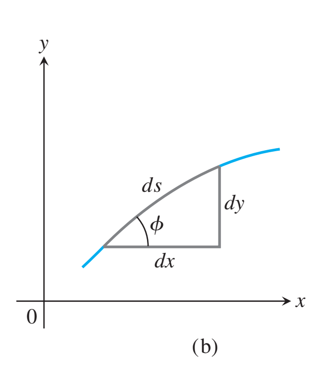


FIGURA 6.28 Diagramas para recordar la ecuación $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

EJERCICIOS 6.3

Longitudes de curvas parametrizadas

En los ejercicios 1 a 6, determine las longitudes de las curvas.

1. $x = 1 - t, \quad y = 2 + 3t, \quad -2/3 \le t \le 1$
2. $x = \cos t, \quad y = t + \operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le \pi$
3. $x = t^3, \quad y = 3t^2/2, \quad 0 \le t \le \sqrt{3}$
4. $x = t^2/2, \quad y = (2t + 1)^{3/2}/3, \quad 0 \le t \le 4$
5. $x = (2t + 3)^{3/2}/3, \quad y = t + t^2/2, \quad 0 \le t \le 3$
6. $x = 8\cos t + 8t \operatorname{sen} t, \quad y = 8 \operatorname{sen} t - 8t\cos t, \quad 0 \le t \le \pi/2$

Determinación de longitudes de curvas

En los ejercicios 7 a 16, determine la longitud de cada curva. Si tiene una calculadora gráfica, utilícela para graficar estas curvas.

7. $y = (1/3)(x^2 + 2)^{3/2}$ de $x = 0$ to $x = 3$
8. $y = x^{3/2}$ de $x = 0$ a $x = 4$
9. $x = (y^3/3) + 1/(4y)$ de $y = 1$ a $y = 3$
   (*Sugerencia:* $1 + (dx/dy)^2$ es un cuadrado perfecto).
10. $x = (y^{3/2}/3) - y^{1/2}$ de $y = 1$ a $y = 9$
    (*Sugerencia:* $1 + (dx/dy)^2$ es un cuadrado perfecto).
11. $x = (y^4/4) + 1/(8y^2)$ de $y = 1$ a $y = 2$
    (*Sugerencia:* $1 + (dx/dy)^2$ es un cuadrado perfecto).
12. $x = (y^3/6) + 1/(2y)$ de $y = 2$ a $y = 3$
    (*Sugerencia:* $1 + (dx/dy)^2$ es un cuadrado perfecto).
13. $y = (3/4)x^{4/3} - (3/8)x^{2/3} + 5, \quad 1 \le x \le 8$
14. $y = (x^3/3) + x^2 + x + 1/(4x + 4), \quad 0 \le x \le 2$
15. $x = \int_0^y \sqrt{\sec^4 t - 1}\, dt, \quad -\pi/4 \le y \le \pi/4$
16. $y = \int_{-2}^x \sqrt{3t^4 - 1}\, dt, \quad -2 \le x \le -1$

T Determinación de integrales para longitudes de curvas

En los ejercicios 17 a 24, haga lo siguiente.

a. Establezca una integral para calcular la longitud de la curva.
b. Grafique la curva para ver su forma.
c. Utilice el evaluador de integrales de su calculadora gráfica o computadora para determinar, de forma numérica, la longitud de la curva.

17. $y = x^2, \quad -1 \le x \le 2$
18. $y = \tan x, \quad -\pi/3 \le x \le 0$
19. $x = \operatorname{sen} y, \quad 0 \le y \le \pi$
20. $x = \sqrt{1 - y^2}, \quad -1/2 \le y \le 1/2$
21. $y^2 + 2y = 2x + 1$ de $(-1, -1)$ a $(7, 3)$
22. $y = \operatorname{sen} x - x\cos x, \quad 0 \le x \le \pi$
23. $y = \int_0^x \tan t\, dt, \quad 0 \le x \le \pi/6$
24. $x = \int_0^y \sqrt{\sec^2 t - 1}\, dt, \quad -\pi/3 \le y \le \pi/4$

Teoría y aplicaciones

25. ¿Existe alguna curva suave (continuamente diferenciable) $y = f(x)$, cuya longitud en el intervalo $0 \le x \le a$ sea siempre $\sqrt{2}a$? Justifique su respuesta.

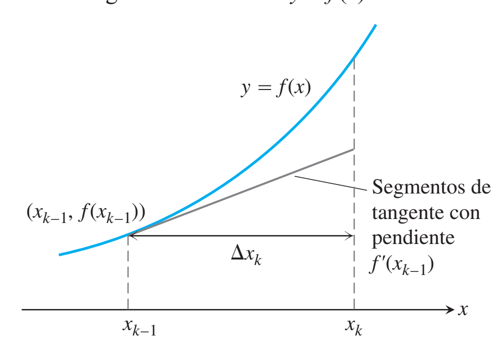
26. **Uso de tangentes para deducir la fórmula de la longitud de una curva** Suponga que f es suave en $[a, b]$ y que dividimos este intervalo en la forma usual. En cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$, construimos un pequeño *segmento de tangente* en el punto $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$, como se muestra en la figura siguiente.

    a. Demuestre que la longitud del k–ésimo segmento de tangente en el intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ es igual a $\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f'(x_{k-1})\,\Delta x_k)^2}$.

    b. Demuestre que

    $$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (\text{longitud del } k\text{-ésimo segmento de tangente}) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx,$$

    que es la longitud L de la curva $y = f(x)$ de a a b.



27. a. Determine una curva que pase por el punto (1, 1), cuya integral de longitud sea

    $$L = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\, dx.$$

    b. ¿Cuántas curvas cumplen con lo anterior? Justifique su respuesta.

28. a. Determine una curva que pase por el punto (0, 1) y cuya integral de longitud sea

    $$L = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{y^4}}\, dy.$$

    b. ¿Cuántas curvas cumplen con lo anterior? Justifique su respuesta.

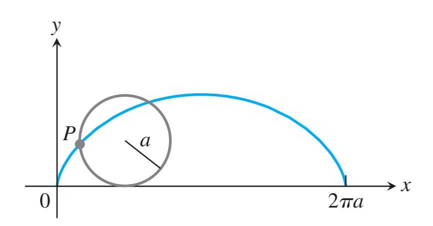
29. **La longitud es independiente de la parametrización** Para ilustrar el hecho de que el resultado que obtenemos en nuestra

aproximación de la longitud no depende de la forma en que parametrizamos nuestras curvas (salvo por las restricciones mencionadas con anterioridad acerca de regresar y recorrer una parte dos veces), calcule la longitud de la semicircunferencia $y = \sqrt{1 - x^2}$ con estas dos parametrizaciones:

a. $x = \cos 2t, \quad y = \operatorname{sen} 2t, \quad 0 \leq t \leq \pi/2$

b. $x = \operatorname{sen} \pi t, \quad y = \cos \pi t, \quad -1/2 \leq t \leq 1/2$

30. Determine la longitud de un arco de la cicloide $x = a(\theta - \operatorname{sen}\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, que se muestra en la figura siguiente. Una **cicloide** es la curva que recorre un punto P en la circunferencia de un círculo que rueda sin resbalar a lo largo de una línea recta, como el eje x.



EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

En los ejercicios 31 a 36, utilice su computadora y el software apropiado para realizar los siguientes pasos con la curva dada sobre el intervalo cerrado.

a. Trace la curva junto con las trayectorias poligonales aproximadas para $n = 2, 4, 8$ puntos en la partición del intervalo. (Vea la figura 6.24).

b. Determine la aproximación correspondiente a la longitud de la curva, sumando las longitudes de los segmentos de recta.

c. Evalúe la longitud de la curva por medio de una integral. Compare sus aproximaciones para $n = 2, 4, 8$ con la longitud real dada por la integral. ¿Cómo se compara la longitud real con las aproximaciones a medida que n crece? Explique su respuesta.

31. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad -1 \leq x \leq 1$

32. $f(x) = x^{1/3} + x^{2/3}, \quad 0 \leq x \leq 2$

33. $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x^2), \quad 0 \leq x \leq \sqrt{2}$

34. $f(x) = x^2 \cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi$

35. $f(x) = \dfrac{x - 1}{4x^2 + 1}, \quad -\dfrac{1}{2} \leq x \leq 1$

36. $f(x) = x^3 - x^2, \quad -1 \leq x \leq 1$

37. $x = \dfrac{1}{3}t^3, \quad y = \dfrac{1}{2}t^2, \quad 0 \leq t \leq 1$

38. $x = 2t^3 - 16t^2 + 25t + 5, \quad y = t^2 + t - 3,$
$0 \leq t \leq 6$

39. $x = t - \cos t, \quad y = 1 + \operatorname{sen} t, \quad -\pi \leq t \leq \pi$

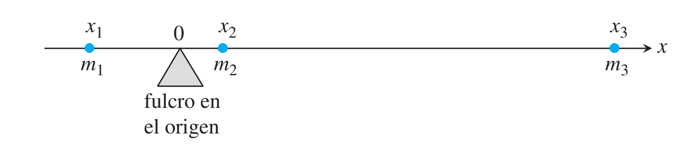
40. $x = e^t \cos t, \quad y = e^t \operatorname{sen} t, \quad 0 \leq t \leq \pi$

6.4 Momentos y centro de masa

Muchas estructuras y sistemas mecánicos se comportan como si sus masas estuviesen concentradas en un solo punto, llamado *centro de masa* (figura 6.29). Es importante saber cómo localizar este punto y hacerlo es una tarea básicamente matemática. Por el momento, sólo analizaremos objetos con una o dos dimensiones. Los objetos tridimensionales se estudian mejor con las integrales múltiples que revisaremos en el capítulo 15.

Masas a lo largo de una recta

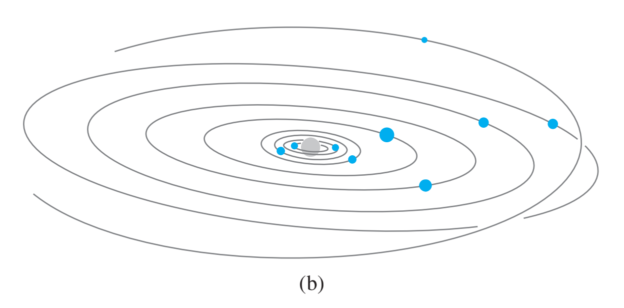
Desarrollaremos nuestro modelo matemático por etapas. La primera consiste en imaginar las masas m_1, m_2 y m_3 en un eje rígido horizontal, x, apoyado en un punto (denominado *fulcro* o *fulcrum*) en el origen.



El sistema resultante puede quedar balanceado o no. Esto depende del tamaño de las masas y de cómo estén distribuidas.



(a)



(b)

FIGURA 6.29 (a) El movimiento de esta llave de tuercas deslizándose sobre un bloque de hielo parece errático, hasta que notamos que sólo está girando alrededor de su centro de masa, mientras que el centro de masa se desliza en línea recta. (b) Los planetas, asteroides y cometas de nuestro sistema solar giran alrededor de su centro de masa colectivo. (Éste se encuentra dentro del Sol).

Cada masa m_k ejerce una fuerza hacia abajo $m_k g$ (el peso de m_k) igual a la magnitud de la masa por la aceleración debida a la gravedad. Cada una de estas fuerzas tiende a hacer girar el eje alrededor del origen, de la misma manera en que ocurre cuando se gira un tiovivo. Este efecto, denominado **torque**, se mide multiplicando la fuerza $m_k g$ por la distancia, con signo, x_k del punto de aplicación de la fuerza al origen. Las masas a la izquierda del origen ejercen un torque negativo (en contra del sentido de las manecillas del reloj). Las masas a la derecha del origen ejercen un torque positivo (en el sentido de las manecillas del reloj).

La suma de los torques determina la tendencia de un sistema a girar alrededor del origen. Esta suma se denomina **torque del sistema**.

$$\text{Torque del sistema} = m_1 g x_1 + m_2 g x_2 + m_3 g x_3 \tag{1}$$

El sistema quedará en equilibrio si y sólo si su torque es igual a cero.

Si factorizamos la g en la ecuación (1), veremos que el torque del sistema es

$$\underbrace{g}_{\substack{\text{una característica} \\ \text{del medio}}} \cdot \underbrace{(m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3)}_{\substack{\text{una característica} \\ \text{del sistema}}}$$

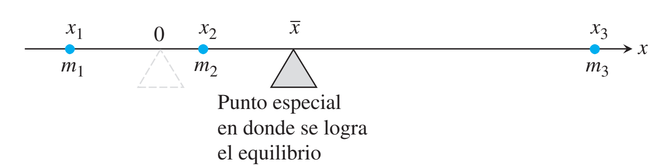
Así, el torque es el producto de la aceleración gravitacional g, que es una característica del medio en donde se encuentre el sistema y del número $(m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3)$, que es una característica del sistema mismo, una constante que permanece igual sin importar en donde se coloque el sistema.

El número $(m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3)$, se denomina **momento del sistema con respecto al origen** y es la suma de los **momentos** $m_1 x_1$, $m_2 x_2$, $m_3 x_3$ de las masas individuales.

$$M_0 = \text{Momento del sistema respecto al origen} = \sum m_k x_k.$$

(Escribimos lo anterior con la notación sigma para permitir sumas con más términos).

Usualmente queremos conocer en dónde colocar el fulcro para que el sistema esté equilibrado, esto es, nos interesa saber en qué punto colocar $\bar{x}$ para que la suma de los torques sea igual a cero:



En esta posición especial, el torque de cada masa respecto del punto de apoyo es

$$\begin{aligned} \text{Torque de } m_k \text{ respecto de } \bar{x} &= \begin{pmatrix} \text{distancia con signo} \\ \text{de } m_k \text{ a } \bar{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{fuerza hacia} \\ \text{abajo} \end{pmatrix} \\ &= (x_k - \bar{x}) m_k g. \end{aligned}$$

Cuando escribimos la ecuación que indica que la suma de estos torques es igual a cero, obtenemos una ecuación para despejar $\bar{x}$:

$$\sum (x_k - \bar{x}) m_k g = 0 \qquad \text{La suma de los torques es cero.}$$

$$g \sum (x_k - \bar{x}) m_k = 0 \qquad \text{Regla del múltiplo constante para las sumas}$$

$$\sum (m_k x_k - \bar{x} m_k) = 0 \qquad \text{Se divide entre } g \text{, y se distribuye } m_k$$

$$\sum m_k x_k - \sum \bar{x} m_k = 0 \qquad \text{Regla de la diferencia para sumas}$$

$$\sum m_k x_k = \bar{x} \sum m_k \qquad \text{Se reacomodan términos y se aplica nuevamente la regla del múltiplo constante}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k} \qquad \text{Se despeja } \bar{x}$$

Esta última ecuación nos permite determinar $\bar{x}$, dividiendo el momento del sistema respecto del origen entre la masa total del sistema:

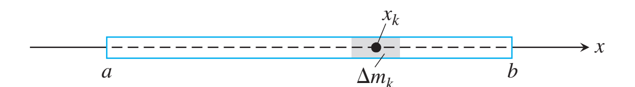
$$\bar{x} = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k} = \frac{\text{momento del sistema con respecto al origen}}{\text{masa del sistema}}.$$

El punto $\bar{x}$ se denomina **centro de masa** del sistema.

Alambres y varillas delgadas

En muchas aplicaciones, necesitamos conocer el centro de masa de una varilla o de una franja delgada de metal. En casos como éstos, en donde podemos modelar la distribución de masa con una función constante, los símbolos de suma de nuestras fórmulas se convierten en integrales, tal como se describe a continuación.

Imagine que tenemos una franja larga y delgada en el eje x desde $x = a$ hasta $x = b$ y que la cortamos en pequeñas partes de masa Δm_k por medio de una partición del intervalo $[a, b]$. Para ello, elegimos cualquier punto x_k en el k-ésimo subintervalo de la partición.



La *k-ésima* pieza tiene una longitud de Δx_k unidades, y se encuentra aproximadamente a x_k unidades del origen. Observe tres cosas:

En primer lugar, el centro de masa de la franja $\bar{x}$ es casi el mismo que el del sistema de puntos de masa que obtendríamos colocando cada masa Δm_k en el punto x_k:

$$\bar{x} \approx \frac{\text{momento del sistema}}{\text{masa del sistema}}.$$

Densidad
La densidad de la materia es su masa por unidad de volumen. Sin embargo, en la práctica tendemos a utilizar unidades que puedan medirse de manera más conveniente. En el caso de alambres, varillas y bandas angostas, utilizamos masa por unidad de longitud; en el de hojas planas y placas, utilizamos masa por unidad de área.

En segundo lugar, el momento de cada pieza de la franja respecto del origen es aproximadamente $x_k\,\Delta m_k$, por lo que el momento del sistema es aproximadamente igual a la suma de $x_k\,\Delta m_k$:

$$\text{momento del sistema} \approx \sum x_k\,\Delta m_k.$$

En tercera instancia, si la densidad de la franja en x_k es $\delta(x_k)$, expresada en términos de masa por unidad de longitud y si δ es continua, entonces Δm_k es aproximadamente igual a $\delta(x_k)\,\Delta x_k$ (masa por unidad de longitud por longitud):

$$\Delta m_k \approx \delta(x_k)\,\Delta x_k.$$

Combinando estas tres observaciones se obtiene

$$\bar{x} \approx \frac{\text{momento del sistema}}{\text{masa del sistema}} \approx \frac{\sum x_k\,\Delta m_k}{\sum \Delta m_k} \approx \frac{\sum x_k\,\delta(x_k)\,\Delta x_k}{\sum \delta(x_k)\,\Delta x_k}. \qquad (2)$$

La suma en el último numerador de la ecuación (2) es una suma de Riemann para la función continua $x\delta(x)$ en el intervalo cerrado $[a, b]$. La suma en el denominador es una suma de Riemann para la función $\delta(x)$ en ese intervalo. Esperaríamos que la aproximación obtenida con la ecuación (2) mejore conforme la franja sea dividida en partes cada vez más pequeñas, lo cual nos conduce a la ecuación

$$\bar{x} = \frac{\displaystyle\int_a^b x\delta(x)\,dx}{\displaystyle\int_a^b \delta(x)\,dx}.$$

Ésta es la fórmula que utilizamos para determinar $\bar{x}$.

Momento, masa y centro de masa de una varilla delgada o de una franja a lo largo del eje x con función de densidad $\delta(x)$

Momento con respecto al origen: $$M_0 = \int_a^b x\delta(x)\,dx \qquad (3a)$$

Masa: $$M = \int_a^b \delta(x)\,dx \qquad (3b)$$

Centro de masa: $$\bar{x} = \frac{M_0}{M} \qquad (3c)$$

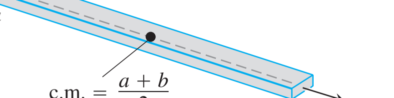


FIGURA 6.30 El centro de masa de una varilla o de una barra delgada recta de densidad constante, se encuentra a su punto medio (ejemplo 1).

EJEMPLO 1 Franjas y varillas de densidad constante

Demostrar que el centro de masa de una varilla o de una franja recta y delgada de densidad constante se encuentra en su punto medio.

Solución Modelamos la franja como una parte del eje x desde $x = a$ hasta $x = b$ (figura 6.30). Nuestra meta es demostrar que $\bar{x} = (a + b)/2$, el punto medio entre a y b.

La clave para lograrlo radica en que la densidad tenga un valor constante. Esto nos permite considerar la función $\delta(x)$ en las integrales de la ecuación (3) como una constante (llamémosle δ), con lo que resulta

$$M_0 = \int_a^b \delta x\, dx = \delta \int_a^b x\, dx = \delta\left[\frac{1}{2}x^2\right]_a^b = \frac{\delta}{2}(b^2 - a^2)$$

$$M = \int_a^b \delta\, dx = \delta \int_a^b dx = \delta\Big[x\Big]_a^b = \delta(b - a)$$

$$\bar{x} = \frac{M_0}{M} = \frac{\frac{\delta}{2}(b^2 - a^2)}{\delta(b - a)}$$

$$= \frac{a + b}{2}.$$

En la fórmula para las δ se eliminan $\bar{x}$.

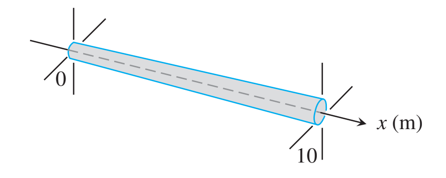


FIGURA 6.31 Podemos considerar una varilla de grosor variable como una varilla con densidad variable (ejemplo 2).

EJEMPLO 2 Varilla con densidad variable

La varilla de 10 m de longitud que se ilustra en la figura 6.31 aumenta su grosor de izquierda a derecha, por lo que su densidad, en lugar de ser constante, es $\delta(x) = 1 + (x/10)$ kg/m. Determinar el centro de masa de la varilla.

Solución El momento de la varilla con respecto al origen (ecuación 3a) es

$$M_0 = \int_0^{10} x\delta(x)\, dx = \int_0^{10} x\left(1 + \frac{x}{10}\right) dx = \int_0^{10}\left(x + \frac{x^2}{10}\right) dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{30}\right]_0^{10} = 50 + \frac{100}{3} = \frac{250}{3}\ \text{kg}\cdot\text{m}.$$

Las unidades momento son masa × longitud.

La masa de la varilla (ecuación 3b) es

$$M = \int_0^{10} \delta(x)\, dx = \int_0^{10}\left(1 + \frac{x}{10}\right) dx = \left[x + \frac{x^2}{20}\right]_0^{10} = 10 + 5 = 15\ \text{kg}.$$

El centro de masa de la varilla (ecuación 3c) se ubica en el punto

$$\bar{x} = \frac{M_0}{M} = \frac{250}{3}\cdot\frac{1}{15} = \frac{50}{9} \approx 5.56\ \text{m}.$$

Masas distribuidas sobre una región plana

Suponga que tenemos una colección finita de masas ubicadas en el plano, con masa m_k en el punto (x_k, y_k) (vea la figura 6.32). La masa del sistema es

$$\text{Masa del sistema: } M = \sum m_k.$$

Cada masa m_k tiene un momento con respecto al eje x. Éste es $m_k y_k$ y su momento con respecto al eje y es $m_k y_k$. Los momentos del sistema completo con respecto a los dos ejes son

$$\text{Momento con respecto al eje } x\text{:}\quad M_x = \sum m_k y_k,$$

$$\text{Momento con respecto al eje } y\text{:}\quad M_y = \sum m_k x_k.$$

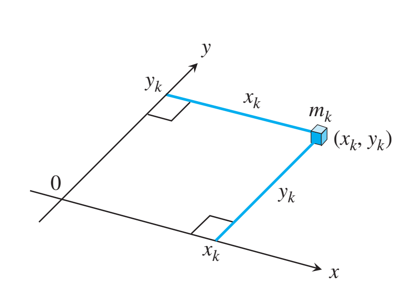


FIGURA 6.32 Cada masa m_k tiene un momento respecto de cada eje.

La coordenada x del centro de masa del sistema se define como

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k}. \tag{4}$$

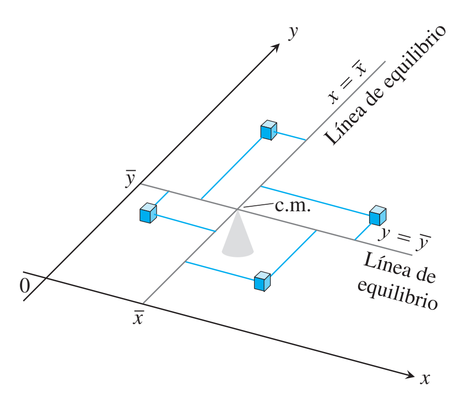


FIGURA 6.33 Un arreglo bidimensional de masas se equilibra en su centro de masa.

Como en el caso unidimensional, con esta elección de $\bar{x}$, el sistema se equilibra con respecto a la recta $x = \bar{x}$ (figura 6.33).

La coordenada y del centro de masa del sistema se define como

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\sum m_k y_k}{\sum m_k}. \tag{5}$$

Con esta elección de $\bar{y}$, el sistema se equilibra también con respecto a la recta $y = \bar{y}$. La torca ejercida por las masas con respecto a la recta $y = \bar{y}$ se elimina. Así, en lo que se refiere al equilibrio, el sistema se comporta como si todas las masas estuviesen en un solo punto $(\bar{x}, \bar{y})$, al cual se le denomina **centro de masa** del sistema.

Placas planas y delgadas

En muchas aplicaciones es necesario determinar el centro de masa de una placa plana y delgada, por ejemplo, un disco de aluminio, o una hoja triangular de acero. En tales casos, suponemos que la distribución de masa es continua y las fórmulas que utilizamos para calcular $\bar{x}$ y $\bar{y}$ contienen integrales en lugar de sumas finitas. Las integrales surgen de la manera siguiente.

Imagine que la placa, que ocupa una región del plano xy, se corta en franjas delgadas paralelas a uno de los ejes (en la figura 6.34, paralelas al eje y). El centro de masa de una franja representativa es $(\tilde{x}, \tilde{y})$. Tratamos la masa de la franja Δm como si estuviese en $(\tilde{x}, \tilde{y})$. Entonces, el momento de la franja con respecto al eje y es $\tilde{x}\,\Delta m$ y con respecto al eje x es $\tilde{y}\,\Delta m$. Así, las ecuaciones (4) y (5) se transforman en

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\sum \tilde{x}\,\Delta m}{\sum \Delta m}, \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\sum \tilde{y}\,\Delta m}{\sum \Delta m}.$$

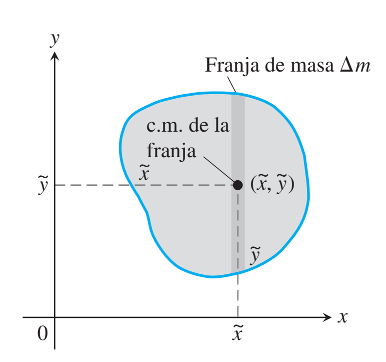


FIGURA 6.34 Una placa se corta en franjas delgadas paralelas al eje y. El momento ejercido por una franja representativa respecto de cada eje es el momento que su masa, Δm ejercería si estuviese concentrada en el centro de masa de la franja $(\tilde{x}, \tilde{y})$.

Como en el caso unidimensional, las sumas son sumas de Riemann para integrales y aproximan a éstas en el límite conforme el ancho de las franjas en que se corta la placa se hace cada vez más angosto. Escribimos estas integrales de manera simbólica como

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x}\,dm}{\int dm} \qquad \text{y} \qquad \bar{y} = \frac{\int \tilde{y}\,dm}{\int dm}.$$

Momentos, masa y centro de masa de una placa delgada que cubre una región en el plano *xy*

Momento con respecto al eje x: $M_x = \int \tilde{y}\,dm$

Momento con respecto al eje x: $M_y = \int \tilde{x}\,dm$ (6)

Masa: $M = \int dm$

Centro de masa: $\bar{x} = \frac{M_y}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M}$

Para evaluar estas integrales, dibujamos la placa en el plano coordenado y bosquejamos una franja de masa, paralela a uno de los ejes coordenados. Luego, expresamos la masa de la franja dm y las coordenadas $(\tilde{x}, \tilde{y})$ del centro de masa de la franja en términos de x o y. Por último, integramos $\tilde{y}\,dm$, $\tilde{x}\,dm$ y dm entre los límites de integración determinados por la ubicación de la placa en el plano.

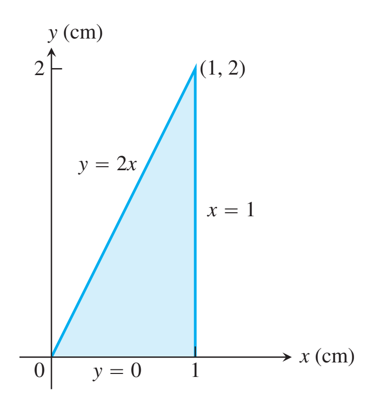


FIGURA 6.35 La placa del ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Placa con densidad constante

La placa triangular que se muestra en la figura 6.35 tiene una densidad constante de $\delta = 3 \text{ g/cm}^2$. Determinar

(a) el momento, M_y, de la placa respecto del eje y.

(b) la masa, M, de la placa.

(c) la coordenada x del centro de masa (c.m.) de la placa

Solución

Método 1: Franjas verticales (figura 6.36)

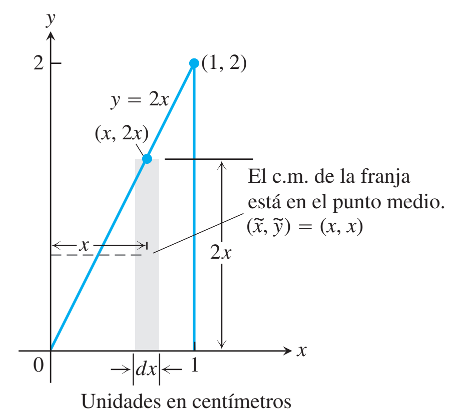


FIGURA 6.36 Modelando la placa del ejemplo 3 con franjas verticales.

(a) El momento M_y: La franja vertical representativa tiene

centro de masa (c.m.): $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x, x)$

largo: $2x$

ancho: dx

área $dA = 2x\, dx$

masa: $dm = \delta\, dA = 3 \cdot 2x\, dx = 6x\, dx$

distancia del c.m. al eje y: $\tilde{x} = x$.

El momento de la franja con respecto al eje y es

$$\tilde{x}\, dm = x \cdot 6x\, dx = 6x^2\, dx.$$

Por lo tanto, el momento de la placa con respecto al eje y es

$$M_y = \int \tilde{x}\, dm = \int_0^1 6x^2\, dx = 2x^3 \Big]_0^1 = 2 \text{ g} \cdot \text{cm}.$$

(b) La masa de la placa:

$$M = \int dm = \int_0^1 6x\, dx = 3x^2 \Big]_0^1 = 3 \text{ g}.$$

(c) La coordenada x del centro de masa de la placa:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{2 \text{ g} \cdot \text{cm}}{3 \text{ g}} = \frac{2}{3} \text{ cm}.$$

Por medio de un cálculo análogo, podríamos determinar M_x y $\bar{y} = M_x/M$.

Método 2: Franjas horizontales (figura 6.37)

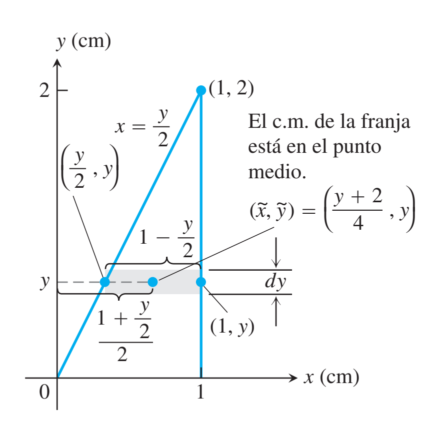


FIGURA 6.37 Modelando la placa del ejemplo 3 con franjas horizontales.

(a) El momento M_y: La coordenada y del centro de masa de una franja horizontal representativa es y (vea la figura), así que

$$\tilde{y} = y.$$

La coordenada x es la coordenada x del punto medio del segmento que cruza el triángulo. Esto produce un promedio de $y/2$ (el valor de x del lado izquierdo de la franja) y 1 (el valor de x del lado derecho de la franja):

$$\tilde{x} = \frac{(y/2) + 1}{2} = \frac{y}{4} + \frac{1}{2} = \frac{y+2}{4}.$$

También tenemos

largo: $1 - \frac{y}{2} = \frac{2-y}{2}$

ancho: dy

área: $dA = \frac{2-y}{2}\,dy$

masa: $dm = \delta\, dA = 3 \cdot \frac{2-y}{2}\,dy$

distancia del c.m. al eje y: $\tilde{x} = \frac{y+2}{4}$.

El momento de la franja con respecto al eje y es

$$\tilde{x}\,dm = \frac{y+2}{4} \cdot 3 \cdot \frac{2-y}{2}\,dy = \frac{3}{8}(4-y^2)\,dy.$$

El momento de la placa con respecto al eje y es

$$M_y = \int \tilde{x}\,dm = \int_0^2 \frac{3}{8}(4-y^2)\,dy = \frac{3}{8}\left[4y - \frac{y^3}{3}\right]_0^2 = \frac{3}{8}\left(\frac{16}{3}\right) = 2\ \text{g} \cdot \text{cm}.$$

(b) La masa de la placa:

$$M = \int dm = \int_0^2 \frac{3}{2}(2-y)\,dy = \frac{3}{2}\left[2y - \frac{y^2}{2}\right]_0^2 = \frac{3}{2}(4-2) = 3\ \text{g}.$$

(c) La coordenada x del centro de masa de la placa:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{2\ \text{g} \cdot \text{cm}}{3\ \text{g}} = \frac{2}{3}\ \text{cm}.$$

Por medio de un cálculo análogo, podemos determinar M_x y $\bar{y}$. ■

Cómo determinar el centro de masa de una placa

1. Dibuje la placa en el plano xy.
2. Haga un bosquejo de una franja de masa que sea paralela a uno de los ejes coordenados y determine sus dimensiones.
3. Determine la masa de la franja dm y el centro de masa $(\tilde{x}, \tilde{y})$.
4. Integre $\tilde{y}\,dm$, $\tilde{x}\,dm$ y dm para determinar M_x, M_y y M.
5. Divida los momentos entre la masa, para calcular $\bar{x}$ y $\bar{y}$.

Si la distribución de masa en una placa plana y delgada tiene un eje de simetría, el centro de masa estará en él. Si tiene dos ejes de simetría, el centro de masa estará en la intersección de ambos ejes. Con frecuencia esto nos ayuda a simplificar nuestro trabajo.

EJEMPLO 4 Placa con densidad constante

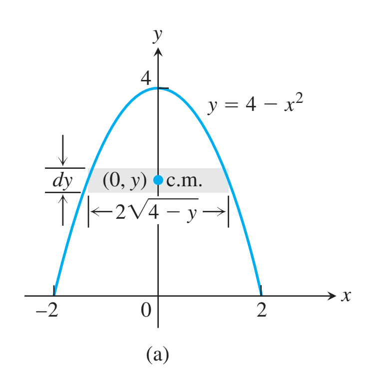
Determinar el centro de masa de una placa delgada con densidad constante δ que cubre la región acotada por arriba por la parábola $y = 4 - x^2$ y por abajo por el eje x (figura 6.38).

Solución Como la placa es simétrica respecto del eje y y su densidad es constante, la distribución de masa es simétrica respecto del eje y y el centro de masa estará en él. Así, $\bar{x} = 0$. Falta por determinar $\bar{y} = M_x/M$.

Un cálculo de prueba con franjas horizontales (figura 6.38a) conduce a una integración complicada

$$M_x = \int_0^4 2\delta y\sqrt{4-y}\,dy.$$

Por lo tanto, modelamos la distribución de masa con franjas verticales (figura 6.38b).



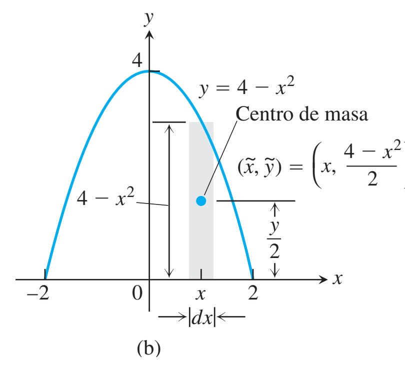


FIGURA 6.38 Modelando la placa del ejemplo 4 con (a) franjas horizontales resulta en una integración inconveniente, así que la modelamos con (b) franjas verticales.

Una franja vertical representativa tiene

centro de masa (c.m.): $(\tilde{x}, \tilde{y}) = \left(x, \dfrac{4 - x^2}{2}\right)$

largo: $4 - x^2$

ancho: dx

área: $dA = (4 - x^2)\, dx$

masa: $dm = \delta\, dA = \delta(4 - x^2)\, dx$

distancia del c.m. al eje x: $\tilde{y} = \dfrac{4 - x^2}{2}.$

El momento de la franja con respecto al eje x es

$$\tilde{y}\, dm = \frac{4 - x^2}{2} \cdot \delta(4 - x^2)\, dx = \frac{\delta}{2}(4 - x^2)^2\, dx.$$

El momento de la placa con respecto al eje x es

$$M_x = \int \tilde{y}\, dm = \int_{-2}^{2} \frac{\delta}{2}(4 - x^2)^2\, dx$$

$$= \frac{\delta}{2}\int_{-2}^{2}(16 - 8x^2 + x^4)\, dx = \frac{256}{15}\delta. \tag{7}$$

La masa de la placa es

$$M = \int dm = \int_{-2}^{2} \delta(4 - x^2)\, dx = \frac{32}{3}\delta. \tag{8}$$

Por lo tanto,

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{(256/15)\,\delta}{(32/3)\,\delta} = \frac{8}{5}.$$

El centro de masa de la placa es el punto

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(0, \frac{8}{5}\right).$$ ■

EJEMPLO 5 Placa con densidad variable

Determinar el centro de masa de la placa del ejemplo 4, si la densidad en el punto (x, y) es $\delta = 2x^2$, es decir, el doble del cuadrado de la distancia entre el punto y el eje y.

Solución La distribución de masa sigue siendo simétrica respecto del eje y, por lo que $\bar{x} = 0$. Con $\delta = 2x^2$, las ecuaciones (7) y (8) se transforman en

$$M_x = \int \tilde{y}\, dm = \int_{-2}^{2} \frac{\delta}{2}(4 - x^2)^2\, dx = \int_{-2}^{2} x^2(4 - x^2)^2\, dx$$

$$= \int_{-2}^{2} (16x^2 - 8x^4 + x^6)\, dx = \frac{2048}{105} \qquad (7')$$

$$M = \int dm = \int_{-2}^{2} \delta(4 - x^2)\, dx = \int_{-2}^{2} 2x^2(4 - x^2)\, dx$$

$$= \int_{-2}^{2} (8x^2 - 2x^4)\, dx = \frac{256}{15}. \qquad (8')$$

Por lo tanto,

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{2048}{105} \cdot \frac{15}{256} = \frac{8}{7}.$$

El nuevo centro de masa de la placa es

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(0, \frac{8}{7}\right).$$ ■

EJEMPLO 6 Alambre con densidad constante

Determinar el centro de masa de un alambre con densidad constante δ, que tiene forma de una semicircunferencia de radio a.

Solución Modelamos el alambre con la semicircunferencia $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ (figura 6.39). La distribución de masa es simétrica respecto del eje y, por lo que $\bar{x} = 0$. Para determinar $\bar{y}$, imaginamos que dividimos el alambre en pequeños segmentos. El segmento representativo (figura 6.39a) tiene

largo: $ds = a\, d\theta$

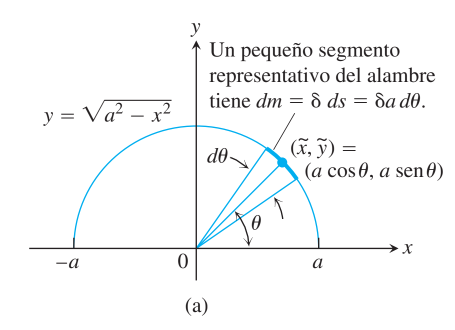
masa: $dm = \delta\, ds = \delta a\, d\theta$ — Masa por unidad de longitud por longitud

distancia del c.m. al eje x: $\tilde{y} = a \operatorname{sen} \theta$.

De donde,

$$\bar{y} = \frac{\int \tilde{y}\, dm}{\int dm} = \frac{\int_0^{\pi} a \operatorname{sen}\theta \cdot \delta a\, d\theta}{\int_0^{\pi} \delta a\, d\theta} = \frac{\delta a^2\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi}}{\delta a \pi} = \frac{2}{\pi} a.$$

El centro de masa está en el punto $(0, 2a/\pi)$, del eje de simetría, aproximadamente a dos tercios del origen (figura 6.39b).



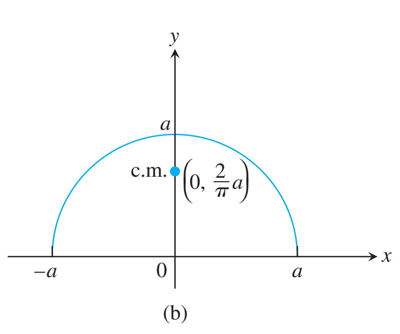


FIGURA 6.39 El alambre semicircular del ejemplo 6. (a) Las dimensiones y variables utilizadas para determinar el centro de masa. (b) El centro de masa no está en el alambre.

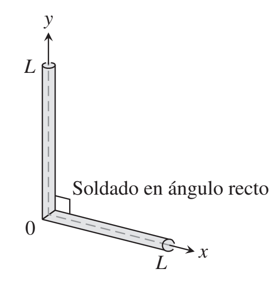
Centroides

Cuando la función de densidad es constante, se elimina del numerador y denominador en las fórmulas para $\bar{x}$ y $\bar{y}$. Esto ocurrió en casi todos los ejemplos de esta sección. En lo que concierne a $\bar{x}$ y $\bar{y}$, δ bien podría haber sido 1. Así, cuando la densidad es constante, la ubicación del centro de masa es una característica de la geometría del objeto y no del material del cual está fabricado. En tales casos, los ingenieros podrían llamar al centro de masa, el **centroide** de la forma. Por ejemplo, si se le diera la instrucción: "Determine el centroide de un triángulo o de un cono sólido", sólo tendría que establecer δ igual a 1 y proceder a la determinación de $\bar{x}$ y $\bar{y}$ como se hizo antes, dividiendo momentos entre masas.

EJERCICIOS 6.4

Varillas delgadas

1. Dos niños, uno con 80 lb de peso y el otro con 100 lb, se balancean en un sube y baja. El niño de 80 lb está a 5 pies del punto de apoyo. ¿A qué distancia del punto de apoyo se encuentra el niño de 100 lb?
2. Los extremos de un tronco están colocados en dos básculas. Una báscula marca 100 kg y la otra 200 kg. ¿En dónde se encuentra el centro de masa del tronco?
3. Los extremos de dos varillas de acero de igual longitud se sueldan para formar un marco en forma de ángulo recto. Localice el centro de masa del marco. (*Sugerencia:* ¿En dónde está el centro de masa de cada varilla?)



4. Usted suelda los extremos de dos varillas de acero para formar un marco en ángulo recto. El largo de una varilla mide el doble que el de la otra. ¿En dónde se encuentra el centro de masa del marco? (*Sugerencia:* ¿En dónde está el centro de masa de cada varilla?)

Los ejercicios 5 a 12 dan funciones de densidad de varillas delgadas que se encuentran en diferentes intervalos del eje x. Utilice las ecuaciones (3a) a (3c) para determinar el momento de cada varilla con respecto al origen, su masa y su centro de masa.

5. $\delta(x) = 4, \quad 0 \le x \le 2$
6. $\delta(x) = 4, \quad 1 \le x \le 3$
7. $\delta(x) = 1 + (x/3), \quad 0 \le x \le 3$
8. $\delta(x) = 2 - (x/4), \quad 0 \le x \le 4$
9. $\delta(x) = 1 + \left(1/\sqrt{x}\right), \quad 1 \le x \le 4$
10. $\delta(x) = 3(x^{-3/2} + x^{-5/2}), \quad 0.25 \le x \le 1$
11. $\delta(x) = \begin{cases} 2 - x, & 0 \le x < 1 \\ x, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$
12. $\delta(x) = \begin{cases} x + 1, & 0 \le x < 1 \\ 2, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$

Placas delgadas con densidad constante

En los ejercicios del 13 a 24, determine el centro de masa de una placa delgada con densidad constante δ que cubre la región dada.

13. La región acotada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 4$
14. La región acotada por la parábola $y = 25 - x^2$ y el eje x
15. La región acotada por la parábola $y = x - x^2$ y la recta $y = -x$
16. La región encerrada por las parábolas $y = x^2 - 3$ y $y = -2x^2$
17. La región acotada por el eje y y la curva $x = y - y^3$, $0 \le y \le 1$
18. La región acotada por la parábola $x = y^2 - y$ y la recta $y = x$
19. La región acotada por el eje x y la curva $y = \cos x$, $-\pi/2 \le x \le \pi/2$
20. La región entre el eje x y la curva $y = \sec^2 x$, $-\pi/4 \le x \le \pi/4$
21. La región acotada por las parábolas $y = 2x^2 - 4x$ y $y = 2x - x^2$
22. **a.** La región del primer cuadrante cortada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$

    b. La región acotada por el eje x y la semicircunferencia $y = \sqrt{9 - x^2}$

    Compare la respuesta del inciso (b) con la respuesta que dio al inciso (a).
23. La región "triangular" del primer cuadrante, comprendida entre la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ y las rectas $x = 3$ y $y = 3$. (*Sugerencia:* Utilice geometría para determinar el área).
24. La región acotada por arriba por la curva $y = 1/x^3$, por abajo por la curva $y = -1/x^3$, y a la izquierda y la derecha por las rectas $x = 1$ y $x = a > 1$. También determine $\lim_{a\to\infty} \bar{x}$.

Placas delgadas con densidad variable

25. Determine el centro de masa de una placa delgada que cubre la región entre el eje x y la curva $y = 2/x^2$, $1 \le x \le 2$, si la densidad de la placa en el punto (x, y) es $\delta(x) = x^2$.
26. Encuentre el centro de masa de una placa delgada que cubre la región acotada por abajo por la parábola $y = x^2$, y por arriba por la recta $y = x$, si la densidad de la placa en el punto (x, y) es $\delta(x) = 12x$.
27. La región acotada por las curvas $y = \pm 4/\sqrt{x}$ y las rectas $x = 1$ y $x = 4$ se hace girar alrededor del eje y para generar un sólido.

    a. Determine el volumen del sólido.

    b. Determine el centro de masa de una placa delgada que cubre la región, si la densidad de la placa en el punto (x, y) es $\delta(x) = 1/x$.

    c. Haga un bosquejo de la placa, ilustrando en él el centro de masa.
28. La región entre la curva $y = 2/x$ y el eje x desde $x = 1$ hasta $x = 4$ se hace girar alrededor del eje x para generar un sólido.

    a. Determine el volumen del sólido.

    b. Determine el centro de masa de una placa delgada que cubre la región, si la densidad de la placa en el punto (x, y) es $\delta(x) = \sqrt{x}$.

    c. Haga un bosquejo de la placa, ilustrando en él el centro de masa.

Centroides de triángulos

29. **El centroide de un triángulo está en la intersección de las medianas del triángulo** (*figura 6.40a*) Tal vez recuerde que el

punto que está a un tercio de la distancia entre el punto medio de cada lado del triángulo y el vértice opuesto, es el punto en donde se intersecan sus tres medianas. Demuestre que el centroide está en la intersección de las medianas, comprobando que también se encuentra a un tercio de la distancia entre cada lado y el vértice opuesto. Para ello, realice los pasos siguientes.

i. Coloque un lado del triángulo sobre el eje x, como en la figura 6.40b. Exprese dm en términos de L y dy.

ii. Utilice triángulos semejantes para demostrar que $L = (b/h)(h - y)$. Sustituya esta expresión para L en su fórmula para dm.

iii. Demuestre que $\bar{y} = h/3$.

iv. Aplique el mismo argumento a los otros lados.

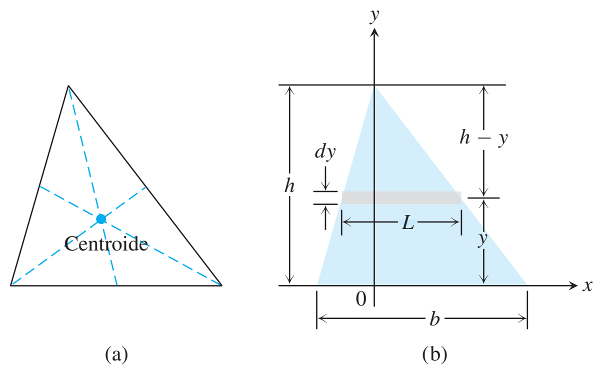


FIGURA 6.40 El triángulo del ejercicio 29. (a) El centroide. (b) Las dimensiones y variables que se emplean para localizar el centro de masa.

Utilice el resultado del ejemplo 29 para determinar los centroides de los triángulos cuyos vértices aparecen en los ejercicios 30 a 34. Suponga que $a, b > 0$.

30. $(-1, 0), (1, 0), (0, 3)$

31. $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$

32. $(0, 0), (a, 0), (0, a)$

33. $(0, 0), (a, 0), (0, b)$

34. $(0, 0), (a, 0), (a/2, b)$

Alambres delgados

35. Densidad constante Determine el momento, con respecto al eje x, de un alambre con densidad constante que está a lo largo de la curva $y = \sqrt{x}$, desde $x = 0$ hasta $x = 2$.

36. Densidad constante Determine el momento, con respecto al eje x, de un alambre con densidad constante que está a lo largo de la curva $y = x^3$, desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

37. Densidad variable Suponga que la densidad del alambre del ejemplo 6 es $\delta = k \operatorname{sen} \theta$ (k constante). Determine el centro de masa.

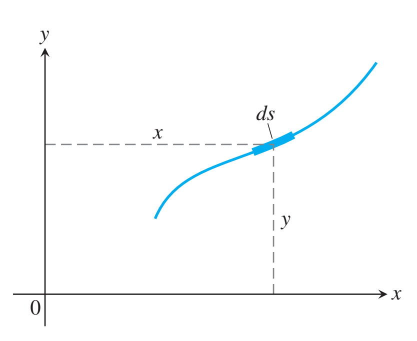
38. Densidad variable Suponga que la densidad del alambre del ejemplo $\delta = 1 + k|\cos \theta|$ (k constante). Determine el centro de masa.

Fórmulas de ingeniería

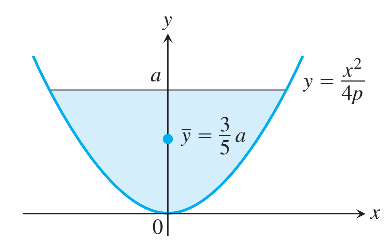
Verifique las afirmaciones y fórmulas de los ejercicios 39 a 42.

39. Las coordenadas del centroide de una curva plana diferenciable son

$$\bar{x} = \frac{\int x\, ds}{\text{longitud}}, \qquad \bar{y} = \frac{\int y\, ds}{\text{longitud}}.$$

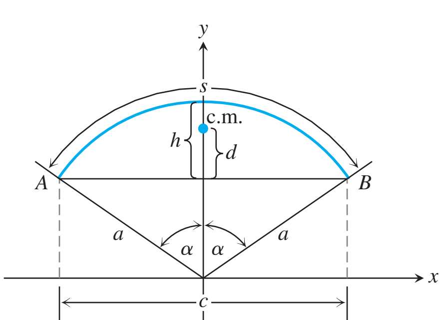


40. Sin importar el valor de $p > 0$ en la ecuación $y = x^2/(4p)$, la coordenada y del centroide del segmento parabólico que se muestra a continuación, es $\bar{y} = (3/5)a$.



41. En el caso de alambres y varillas delgadas de densidad constante con forma de arcos circulares centrados en el origen y simétricos respecto del eje y, la coordenada y del centro de masa es

$$\bar{y} = \frac{a \operatorname{sen} \alpha}{\alpha} = \frac{ac}{s}.$$



42. (*Continuación del ejercicio 41*)

a. Realice los pasos siguientes para demostrar que, cuando α es pequeña, la distancia d entre el centroide y la cuerda AB es aproximadamente $2h/3$ (según la notación de la figura).

i. Demuestre que

$$\frac{d}{h} = \frac{\operatorname{sen} \alpha - \alpha \cos \alpha}{\alpha - \alpha \cos \alpha}. \tag{9}$$

T **ii.** Grafique

$$f(\alpha) = \frac{\operatorname{sen} \alpha - \alpha \cos \alpha}{\alpha - \alpha \cos \alpha}$$

y utilice la función *Trace* de su calculadora gráfica para demostrar que $\lim_{\alpha \to 0^+} f(\alpha) \approx 2/3$.

b. El error (diferencia entre d y $2h/3$) es pequeño incluso para ángulos mayores de 45°. Compruébelo evaluando el lado derecho de la ecuación (9) para $\alpha = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ y 1.0 radianes.

6.5 Áreas de superficies de revolución y el teorema de Pappus

Cuando uno salta la cuerda, ésta "barre" una superficie espacial alrededor de la persona, misma que podemos denominar *superficie de revolución*. El "área" de esta superficie depende de la longitud de la cuerda de y la distancia que haya entre cada uno de sus segmentos y el eje de rotación. En esta sección definiremos las áreas de superficies de revolución, y en el capítulo 16 abordaremos superficies más complicadas.

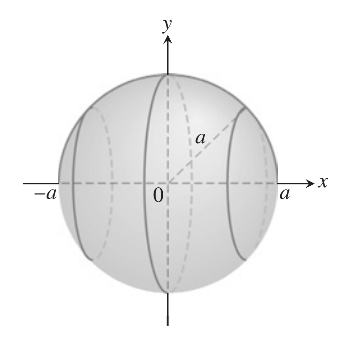


FIGURA 6.41 La rotación de la semicircunferencia $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ de radio a con centro en el origen, genera una superficie esférica con área $4\pi a^2$.

Definición del área de una superficie

Queremos que nuestra definición de área de una superficie de revolución sea consistente con los resultados que nos ofrece la geometría clásica al calcular las áreas de las superficies de esferas, cilindros circulares y conos. De esta manera, si la cuerda para saltar discutida en la introducción del capítulo toma la forma de una semicircunferencia de radio a y se hace girar alrededor del eje x (figura 6.41), ésta generará una esfera cuya superficie tiene área $4\pi a^2$.

Antes de considerar curvas generales, empezaremos nuestro análisis haciendo girar alrededor del eje x segmentos de recta horizontales e inclinados. Si hacemos girar el segmento de recta horizontal AB que tiene longitud Δx (figura 6.42a) alrededor del eje x, generamos un cilindro con área superficialde $2\pi y\Delta x$. Esta área es la misma que la del rectángulo cuyos lados miden Δx y $2\pi y$ (figura 6.42b). La longitud $2\pi y$ es el perímetro de la circunferencia de radio y generado al hacer girar, alrededor del eje x, el punto (x, y) en la línea AB.

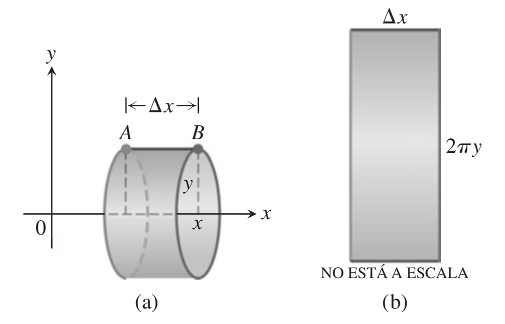


FIGURA 6.42 (a) Una superficie cilíndrica generada al hacer girar el segmento de recta horizontal AB, de longitud Δx, alrededor del eje x, tiene área $2\pi y\Delta x$. (b) Al cortar y desenrollar la superficie cilíndrica se obtiene un rectángulo.

Suponga que el segmento AB tiene longitud Δs y está inclinado en lugar de ser horizontal. Cuando se hace girar alrededor del eje x, genera el tronco de un cono (figura 6.43a). De acuerdo con la geometría clásica, el área de la superficie del tronco de un cono es $2\pi y^* \Delta s$, en donde $y^* = (y_1 + y_2)/2$ es la altura promedio, por encima del eje x, del segmento inclinado AB. Esta área superficial es la misma que la de un rectángulo con lados de longitud Δs y $2\pi y^*$ (figura 6.43b).

Trabajemos con estos principios geométricos para definir el área de la superficie que se barre al hacer girar, alrededor del eje x, curvas más generales. Suponga que queremos determinar el área de la superficie que se barre al hacer girar, alrededor del eje x, la gráfica de una función continua no negativa $y = f(x)$, $a \le x \le b$. Dividimos el intervalo cerrado $[a, b]$ de la manera usual y usamos los puntos de la partición para subdividir la gráfica en pequeños arcos. La figura 6.44 muestra un arco representativo PQ y la banda que barre como parte de la gráfica de f.

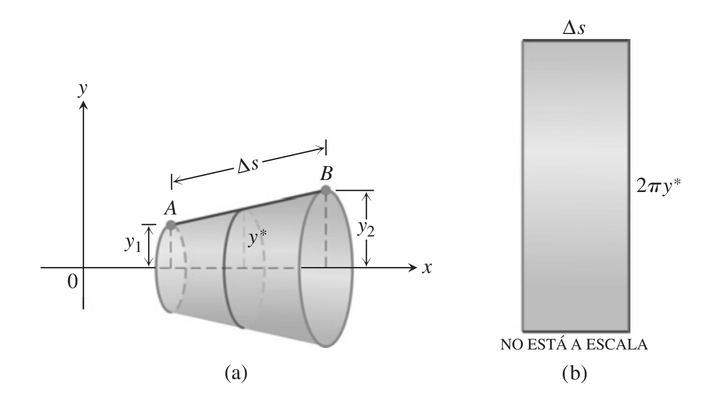


FIGURA 6.43 (a) El tronco de un cono generado por la rotación alrededor del eje x del segmento de recta inclinado AB, de longitud Δs, tiene área $2\pi y^* \Delta s$. (b) El área del rectángulo para $y^* = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$, la altura promedio de AB sobre el eje x.

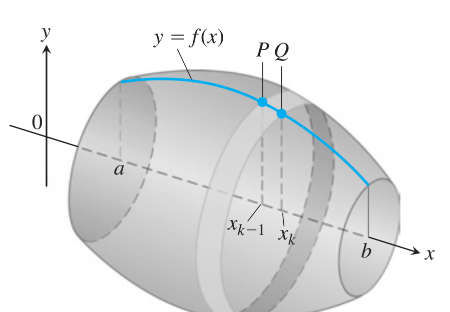


FIGURA 6.44 Superficie generada al hacer girar, alrededor del eje x, la gráfica de la función no negativa $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, La superficie es una unión de bandas, como la que barre el arco PQ.

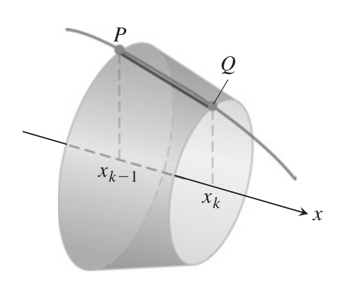


FIGURA 6.45 El segmento de recta que une P y Q barre un tronco de cono.

Conforme el arco PQ gira alrededor del eje x, el segmento que une P con Q barre el tronco de un cono cuyo eje está en el eje x (figura 6.45). El área de la superficie de este tronco aproxima el área de la superficie de la banda barrida por el arco PQ. El área de la superficie del tronco que se muestra en la figura 6.45 es $2\pi y^* L$, donde y^* es la altura promedio del segmento que une P con Q y L es su longitud (igual que antes). Como $f \geq 0$, de acuerdo con la figura 6.46 vemos que la altura promedio del segmento de recta es $y^* = (f(x_{k-1}) + f(x_k))/2$, y la longitud del segmento inclinado es $L = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$. Por lo tanto,

$$\text{Área de la superficie del tronco} = 2\pi \cdot \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \cdot \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$$

$$= \pi(f(x_{k-1}) + f(x_k))\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}.$$

Como el área de la superficie original es la suma de las áreas de las bandas barridas por arcos como el PQ, ésta se aproxima por medio de la suma de las áreas de los troncos

$$\sum_{k=1}^{n} \pi(f(x_{k-1}) + f(x_k))\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}. \tag{1}$$

Esperamos que la aproximación mejorará conforme la partición de $[a, b]$ sea más fina. Además, si la función f es diferenciable entonces, por el Teorema del Valor Medio, existe un punto $(c_k, f(c_k))$ en la curva entre P y Q donde la tangente es paralela al segmento PQ (figura 6.47). En este punto,

$$f'(c_k) = \frac{\Delta y_k}{\Delta x_k},$$

$$\Delta y_k = f'(c_k)\, \Delta x_k.$$

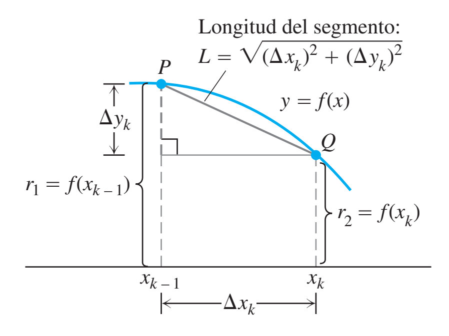


FIGURA 6.46 Dimensiones asociadas con el arco y el segmento PQ.

Con esta sustitución para Δy_k, las sumas en la ecuación (1) toman la forma

$$\sum_{k=1}^{n} \pi(f(x_{k-1}) + f(x_k))\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f'(c_k)\,\Delta x_k)^2}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \pi(f(x_{k-1}) + f(x_k))\sqrt{1 + (f'(c_k))^2}\,\Delta x_k. \qquad (2)$$

Estas sumas no son las sumas de Riemann de alguna función, ya que los puntos x_{k-1}, x_k y c_k no son iguales. Sin embargo, un teorema de cálculo avanzado nos asegura que cuando la norma de la partición de $[a, b]$ tiende a cero, las sumas de la ecuación (2) convergen a la integral

$$\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

Por lo tanto, definimos esta integral como el área de la superficie barrida por la gráfica de f, de a a b.

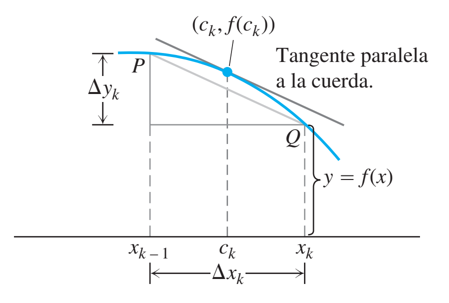


FIGURA 6.47 Si f es suave, el Teorema del Valor Medio asegura la existencia de un punto c_k en donde la tangente es paralela al segmento PQ.

DEFINICIÓN Área superficial para rotación alrededor del eje *x*
Si la función $f(x) \geq 0$ es continuamente diferenciable en $[a, b]$, el **área** de la superficie generada al hacer girar la curva $y = f(x)$ alrededor del eje x es

$$S = \int_a^b 2\pi y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx. \qquad (3)$$

La raíz cuadrada de la ecuación (3) es la misma que aparece en la fórmula para calcular longitud de arco en la ecuación (2) de la sección 6.3.

EJEMPLO 1 Aplicando la fórmula de área superficial

Determinar el área de la superficie generada al hacer girar la curva $y = 2\sqrt{x}$, $1 \leq x \leq 2$, alrededor del eje x (figura 6.48).

Solución Evaluamos la fórmula

$$S = \int_a^b 2\pi y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \qquad \text{Ecuación (3)}$$

con

$$a = 1, \qquad b = 2, \qquad y = 2\sqrt{x}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}},$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = \sqrt{\frac{x+1}{x}} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}.$$

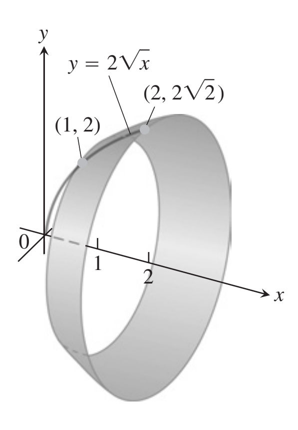


FIGURA 6.48 En el ejemplo 1 calculamos el área de esta superficie.

Con estas sustituciones,

$$S = \int_1^2 2\pi \cdot 2\sqrt{x}\,\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}\,dx = 4\pi\int_1^2 \sqrt{x+1}\,dx$$

$$= 4\pi \cdot \frac{2}{3}(x+1)^{3/2}\Big]_1^2 = \frac{8\pi}{3}\left(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}\right).$$

■

Rotación alrededor del eje *y*

Para rotaciones alrededor del eje y, intercambiamos x y y en la ecuación (3).

Área superficial para rotaciones alrededor del eje *y*

Si $x = g(y) \geq 0$ es continuamente diferenciable en $[c, d]$, el área de la superficie generada al hacer girar la curva $x = g(y)$ alrededor del eje y es

$$S = \int_c^d 2\pi x\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy = \int_c^d 2\pi g(y)\sqrt{1 + (g'(y))^2}\,dy. \qquad (4)$$

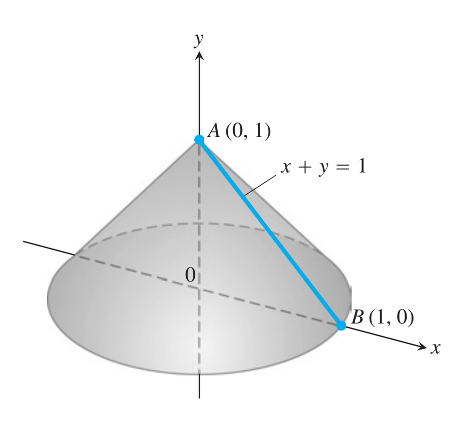


FIGURA 6.49 Al hacer girar el segmento de recta AB alrededor del eje y se genera un cono, cuya superficie lateral se puede calcular de dos formas distintas (ejemplo 2).

EJEMPLO 2 Determinación del área rotando alrededor del eje *y*

El segmento de recta $x = 1 - y$, $0 \leq y \leq 1$, se hacer girar alrededor del eje y para generar el cono de la figura 6.49. Determinar el área de su superficie lateral (la cual excluye el área de la base).

Solución En este caso tenemos un cálculo que podemos comprobar con una fórmula geométrica:

$$\text{Área de la superficie lateral} = \frac{\text{circunferencia de la base}}{2} \times \text{altura inclinada} = \pi\sqrt{2}.$$

Para ver si la ecuación (4) da el mismo resultado, tomamos

$$c = 0, \qquad d = 1, \qquad x = 1 - y, \qquad \frac{dx}{dy} = -1,$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \sqrt{1 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

y calculamos

$$S = \int_c^d 2\pi x\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy = \int_0^1 2\pi(1 - y)\sqrt{2}\,dy$$

$$= 2\pi\sqrt{2}\left[y - \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = 2\pi\sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \pi\sqrt{2}.$$

Los resultados coinciden, tal como esperábamos. ■

Curvas parametrizadas

Sin importar el eje coordenado de rotación, las raíces cuadradas que aparecen en las ecuaciones (3) y (4) son las mismas que aparecen en las fórmulas para calcular la longitud de arco (sección 6.3). Si la curva está parametrizada por las ecuaciones $x = f(t)$ y $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$, donde f y g son continuamente diferenciables en $[a, b]$, entonces la raíz cuadrada correspondiente que aparece en la fórmula para determinar la longitud de arco es

$$\sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}.$$

Esta observación nos conduce a las siguientes fórmulas para calcular el área de superficies de revolución para curvas suaves parametrizadas.

Área de una superficie de revolución para curvas parametrizadas

Si una curva suave $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$, se recorre una sola vez a medida que t aumenta de a a b, entonces las áreas de las superficies generadas al hacer girar la curva alrededor de los ejes coordenados son las siguientes.

1. Rotación alrededor del eje x $(y \geq 0)$:

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \qquad (5)$$

2. Rotación alrededor del eje y $(x \geq 0)$:

$$S = \int_a^b 2\pi x \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \qquad (6)$$

Al igual que con la longitud, podemos calcular el área de la superficie a partir de cualquier parametrización que cumpla con los criterios establecidos.

EJEMPLO 3 Aplicando la fórmula para el área superficial

La parametrización estándar de la circunferencia de radio 1 con centro en el punto (0, 1) en el plano xy es

$$x = \cos t, \qquad y = 1 + \operatorname{sen} t, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Usar esta parametrización para determinar el área de la superficie barrida al hacer girar la circunferencia alrededor del eje x (figura 6.50).

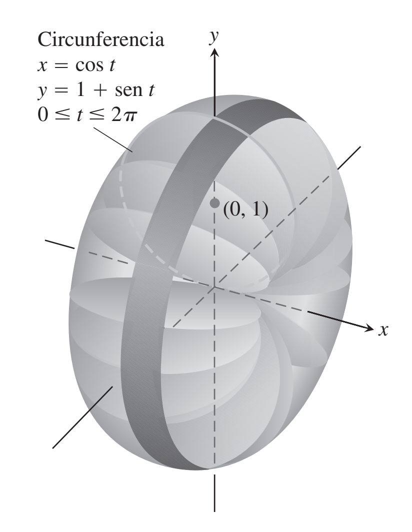


FIGURA 6.50 En el ejemplo 3 calculamos el área de la superficie de rotación barrida por esta curva parametrizada.

Solución Evaluamos la fórmula

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

La ecuación (5) para rotación alrededor del eje $y = 1 + \operatorname{sen} t > 0$

$$= \int_0^{2\pi} 2\pi(1 + \operatorname{sen} t)\underbrace{\sqrt{(-\operatorname{sen} t)^2 + (\cos t)^2}}_{1}\, dt$$

$$= 2\pi \int_0^{2\pi} (1 + \operatorname{sen} t)\, dt$$

$$= 2\pi\Big[t - \cos t\Big]_0^{2\pi} = 4\pi^2.$$

■

La forma diferencial

Las ecuaciones

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \qquad \text{y} \qquad S = \int_c^d 2\pi x \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

suelen escribirse en términos de la diferencial de la longitud de arco $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ como

$$S = \int_a^b 2\pi y\, ds \qquad \text{y} \qquad S = \int_c^d 2\pi x\, ds.$$

En la primera, y es la distancia entre el eje x y un elemento de longitud de arco ds. En la segunda, x es la distancia entre el eje y y un elemento de longitud de arco ds. Ambas integrales tienen la forma

$$S = \int 2\pi(\text{radio})(\text{ancho de la banda}) = \int 2\pi\rho\, ds \tag{7}$$

donde ρ es el radio entre el eje de rotación y un elemento de longitud de arco ds (figura 6.51).

Así pues, en cualquier problema particular, expresaríamos la función del radio ρ y la diferencial de la longitud de arco ds en términos de una variable común y proporcionaríamos los límites de integración para esa variable.

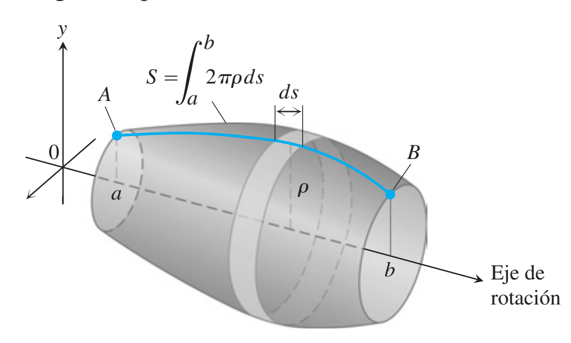


FIGURA 6.51 El área de la superficie barrida al hacer girar el arco AB alrededor del eje que se muestra aquí es $\int_a^b 2\pi\rho\, ds$. La expresión exacta depende de las fórmulas para ρ y ds.

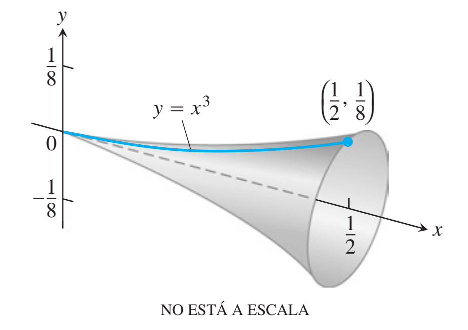


FIGURA 6.52 La superficie generada al hacer girar, alrededor del eje x, la curva $y = x^3$, $0 \le x \le 1/2$, podría ser el diseño para una copa para champaña (ejemplo 4).

EJEMPLO 4 Uso de la forma diferencial para calcular áreas de superficies

Determinar el área de la superficie generada al hacer girar la curva $y = x^3$, $0 \le x \le 1/2$, alrededor del eje x (figura 6.52).

Solución Empezamos con la forma diferencial abreviada:

$$\begin{aligned} S &= \int 2\pi\rho\, ds \\ &= \int 2\pi y\, ds && \text{Para rotación alrededor del eje } x\text{, la función del radio es } \rho = y > 0 \text{ en } 0 \le x \le 1/2. \\ &= \int 2\pi y \sqrt{dx^2 + dy^2}. && ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \end{aligned}$$

Después, decidimos si expresaremos dy en términos de dx o dx en términos de dy. La forma original de la ecuación, $y = x^3$ hace que sea más sencillo expresar dy en términos de dx, de modo que continuamos el cálculo con:

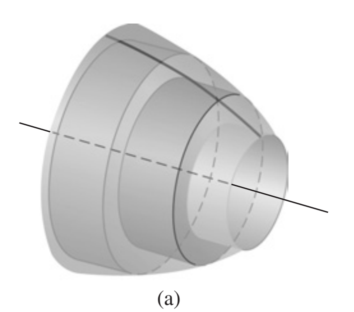
$$y = x^3, \qquad dy = 3x^2\,dx, \qquad \text{y} \qquad \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 + (3x^2\,dx)^2}$$
$$= \sqrt{1 + 9x^4}\,dx.$$

Con estas sustituciones, x se convierte en la variable de integración y

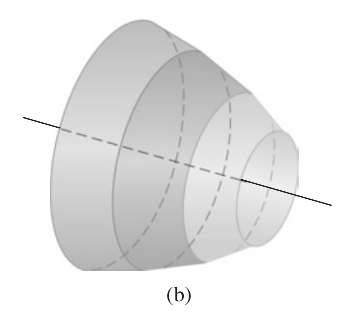
$$\begin{aligned} S &= \int_{x=0}^{x=1/2} 2\pi y\sqrt{dx^2 + dy^2} \\ &= \int_0^{1/2} 2\pi x^3\sqrt{1 + 9x^4}\,dx \\ &= 2\pi\left(\frac{1}{36}\right)\left(\frac{2}{3}\right)(1 + 9x^4)^{3/2}\Big]_0^{1/2} \\ &= \frac{\pi}{27}\left[\left(1 + \frac{9}{16}\right)^{3/2} - 1\right] \\ &= \frac{\pi}{27}\left[\left(\frac{25}{16}\right)^{3/2} - 1\right] = \frac{\pi}{27}\left(\frac{125}{64} - 1\right) \\ &= \frac{61\pi}{1728}. \end{aligned}$$

Se sustituye $u = 1 + 9x^4$, $du/36 = x^3\,dx$; se integra y se sustituye nuevamente.

■



(a)



(b)

FIGURA 6.53 ¿Por qué no utilizar (a) bandas cilíndricas en lugar de (b) bandas cónicas para aproximar el área de una superficie?

Bandas cilíndricas versus bandas cónicas

¿Por qué no calcular el área de la superficie con bandas cilíndricas en lugar de utilizar bandas cónicas, como se sugiere en la figura 6.53? Las sumas de Riemann que obtenemos de esta manera convergen tan bien como las que tienen como base las bandas cónicas y la integral resultante es además más sencilla. Para rotación alrededor del eje x el radio en la ecuación (7) es $\rho = y$ y el ancho de la banda es $ds = dx$. Esto lleva a la fórmula integral

$$S = \int_a^b 2\pi f(x)\,dx \tag{8}$$

en lugar de la que se definió en la ecuación (3). El problema con esta nueva fórmula es que no da resultados consistentes con las fórmulas que ofrece la geometría clásica para calcular áreas de superficies, lo cual era una de nuestras metas al principio. El hecho de obtener una integral aparentemente apropiada a partir de una deducción de sumas de Riemann, no significa que tal integral calculará lo que queremos. (Vea el ejercicio 40).

PRECAUCIÓN No utilice la ecuación (8) para calcular el área de superficies, *No* le proporcionará el resultado correcto.

Teorema de Pappus

En el siglo III, un griego de la ciudad de Alejandría, llamado Pappus, descubrió dos fórmulas que relacionan los centroides con las superficies y con los sólidos de revolución. Tales fórmulas simplifican cálculos que de otra manera serían muy largos.

TEOREMA 1 Teorema de Pappus para volúmenes
Si una región plana se hacer girar alrededor de una recta en el plano, de manera que esta última no corte el interior de la región, entonces el volumen del sólido generado es igual al área de la región por la distancia recorrida por su centroide durante la rotación. Si ρ es la distancia entre el eje de rotación y el centroide, entonces

$$V = 2\pi \rho A. \tag{9}$$

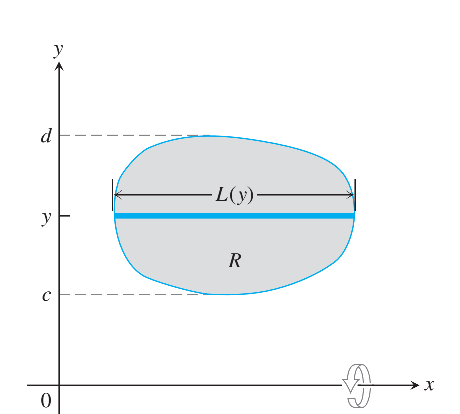


FIGURA 6.54 La región R se hará girar (una vez) alrededor del eje x para generar un sólido. Un teorema que data de hace 1700 años establece que el volumen del sólido puede calcularse multiplicando el área de la región por la distancia recorrida por el centroide durante la rotación.

Demostración Dibujamos el eje de rotación como el eje x, con la región R en el primer cuadrante (figura 6.54). Denotamos con $L(y)$ la longitud de la sección transversal de R perpendicular al eje y en y. Suponemos que $L(y)$ es continua.

Por el método de los casquillos cilíndricos, el volumen del sólido generado al hacer girar la región alrededor del eje x es

$$V = \int_c^d 2\pi(\text{radio del casquillo})(\text{altura del casquillo})\, dy = 2\pi \int_c^d y\, L(y)\, dy. \tag{10}$$

La coordenada y del centroide de R es

$$\bar{y} = \frac{\int_c^d \tilde{y}\, dA}{A} = \frac{\int_c^d y\, L(y)\, dy}{A}, \qquad \tilde{y} = y,\ dA = L(y)dy$$

por lo que

$$\int_c^d y\, L(y)\, dy = A\bar{y}.$$

Sustituyendo $A\bar{y}$ por la última integral de la ecuación (10), se obtiene $V = 2\pi\bar{y}A$. Con ρ igual a $\bar{y}$, tenemos $V = 2\pi\rho A$. ■

EJEMPLO 5 Volumen de un toro

El volumen de un toro (sólido con forma de dona) generado al hacer girar un disco circular de radio a alrededor de un eje en su plano, a una distancia $b \geq a$ de su centro (figura 6.55), es

$$V = 2\pi(b)(\pi a^2) = 2\pi^2 ba^2.$$

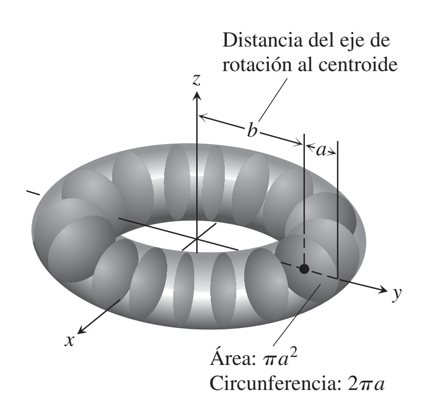


FIGURA 6.55 Con el primer teorema de Pappus podemos determinar el volumen de un toro sin tener que integrar (ejemplo 5).

EJEMPLO 6 Localización del centroide de una región semicircular



Solución Modelamos la región como la región entre la semicircunferencia $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ (figura 6.56) y el eje x; imagine que hacemos girar la región alrededor del eje x para generar una esfera sólida. Por simetría, la coordenada x del centroide es $\bar{x} = 0$. Con $\bar{y} = \rho$ en la ecuación (9), tenemos

$$\bar{y} = \frac{V}{2\pi A} = \frac{(4/3)\pi a^3}{2\pi(1/2)\pi a^2} = \frac{4}{3\pi}a.$$

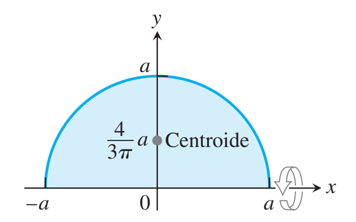


FIGURA 6.56 Con el primer teorema de Pappus podemos localizar el centroide de una región semicircular sin tener que integrar (ejemplo 6).

TEOREMA 2 Teorema de Pappus para áreas de superficies
Si un arco de una curva plana suave se hacer girar una vez alrededor de una recta en el plano, de manera que ésta no corte el interior del arco, entonces el área de la superficie generada por el arco es igual a la longitud del arco por la distancia recorrida por el centroide del arco durante la rotación. Si ρ es la distancia entre el eje de rotación y el centroide, entonces

$$S = 2\pi\rho L. \tag{11}$$

La demostración que damos supone que podemos modelar el eje de rotación como el eje x y el arco como la gráfica de una función continuamente diferenciable de x.

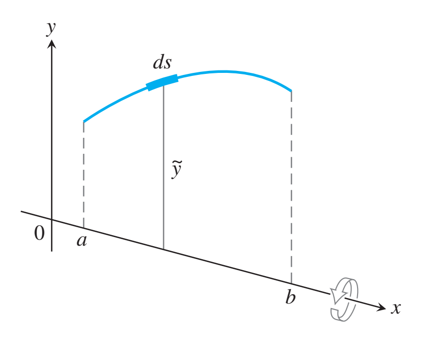


FIGURA 6.57 Figura para demostrar el teorema de Pappus para la determinación de áreas.

Demostración Dibujamos el eje de rotación como el eje x con el arco extendiéndose desde $x = a$ hasta $x = b$ en el primer cuadrante (figura 6.57). El área de la superficie generada por el arco es

$$S = \int_{x=a}^{x=b} 2\pi y\, ds = 2\pi \int_{x=a}^{x=b} y\, ds. \tag{12}$$

La coordenada y del centroide del arco es

$$\bar{y} = \frac{\int_{x=a}^{x=b} \tilde{y}\, ds}{\int_{x=a}^{x=b} ds} = \frac{\int_{x=a}^{x=b} y\, ds}{L}.$$

$L = \int ds$ es la longitud del arco y $\tilde{y} = y$.

Por lo que

$$\int_{x=a}^{x=b} y\, ds = \bar{y}L.$$

Al sustituir $\bar{y}L$ por la última integral de la ecuación 12 se obtiene $S = 2\pi\bar{y}L$. Con ρ igual a $\bar{y}$, tenemos $S = 2\pi\rho L$. ■

EJEMPLO 7 Área de la superficie de un toro

El área de la superficie del toro del ejemplo 5 es

$$S = 2\pi(b)(2\pi a) = 4\pi^2 ba.$$

EJERCICIOS 6.5

Determinación de integrales para calcular áreas de superficies

En los ejercicios 1 a 8:

a. Establezca una integral para calcular el área de la superficie generada al hacer girar la curva dada alrededor del eje indicado.

T b. Grafique la curva para observar su apariencia. Si puede, grafique también la superficie.

T c. Utilice el evaluador de integrales de su calculadora gráfica o de su computadora para determinar numéricamente el área de la superficie.

1. $y = \tan x, \quad 0 \le x \le \pi/4; \quad$ eje x

2. $y = x^2, \quad 0 \le x \le 2; \quad$ eje x

3. $xy = 1, \quad 1 \le y \le 2; \quad$ eje y

4. $x = \operatorname{sen} y, \quad 0 \le y \le \pi; \quad$ eje y

5. $x^{1/2} + y^{1/2} = 3$ de $(4, 1)$ a $(1, 4)$; eje x

6. $y + 2\sqrt{y} = x, \quad 1 \le y \le 2; \quad$ eje y

7. $x = \int_0^y \tan t\, dt, \quad 0 \le y \le \pi/3; \quad$ eje y

8. $y = \int_1^x \sqrt{t^2 - 1}\, dt, \quad 1 \le x \le \sqrt{5}; \quad$ eje x

Determinación de áreas de superficies

9. Determine el área de la superficie lateral del cono generado al hacer girar el segmento de recta $y = x/2$, $0 \leq x \leq 4$, alrededor del eje x. Compruebe su respuesta con la fórmula geométrica

$$\text{Área de la superficie lateral} = \frac{1}{2} \times \text{circunferencia}$$
de la base $\times$ altura inclinada.

10. Determine el área de la superficie lateral del cono generado al hacer girar el segmento de recta $y = x/2$, $0 \leq x \leq 4$, alrededor del eje y. Compruebe su respuesta con la fórmula geométrica

$$\text{Área de la superficie lateral} = \frac{1}{2} \times \text{circunferencia}$$
de la base $\times$ altura inclinada.

11. Determine el área de la superficie del tronco de un cono que se genera al hacer girar el segmento de recta $y = (x/2) + (1/2)$, $1 \leq x \leq 3$, alrededor del eje x. Compruebe su resultado con la fórmula geométrica

$$\text{Área de la superficie de un tronco} = \pi(r_1 + r_2) \times \text{altura inclinada.}$$

12. Determine el área de la superficie del tronco de un cono que se genera al hacer girar el segmento de recta $y = (x/2) + (1/2)$, $1 \leq x \leq 3$, alrededor del eje y. Compruebe su resultado con la fórmula geométrica

$$\text{Área de la superficie de un tronco} = \pi(r_1 + r_2) \times \text{altura inclinada.}$$

En los ejercicios 13 a 22, determine el área de cada superficie generada al hacer girar la curva dada alrededor del eje indicado. Si tiene una calculadora gráfica, grafique estas curvas para ver cómo lucen.

13. $y = x^3/9$, $0 \leq x \leq 2$; eje x

14. $y = \sqrt{x}$, $3/4 \leq x \leq 15/4$; eje x

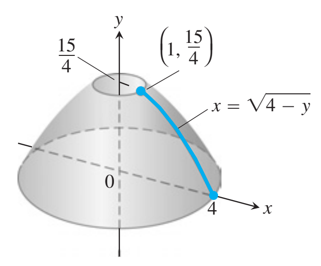
15. $y = \sqrt{2x - x^2}$, $0.5 \leq x \leq 1.5$; eje x

16. $y = \sqrt{x + 1}$, $1 \leq x \leq 5$; eje x

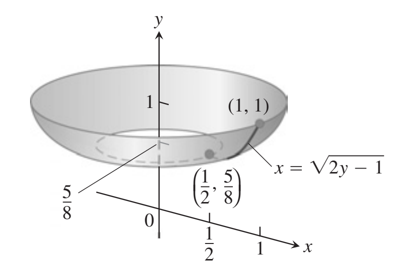
17. $x = y^3/3$, $0 \leq y \leq 1$; eje y

18. $x = (1/3)y^{3/2} - y^{1/2}$, $1 \leq y \leq 3$; eje y

19. $x = 2\sqrt{4 - y}$, $0 \leq y \leq 15/4$; eje y



20. $x = \sqrt{2y - 1}$, $5/8 \leq y \leq 1$; eje y



21. $x = (y^4/4) + 1/(8y^2)$, $1 \leq y \leq 2$; eje x. (*Sugerencia*: Exprese $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ en términos de dy y evalúe la integral $S = \int 2\pi y\, ds$ con límites apropiados).

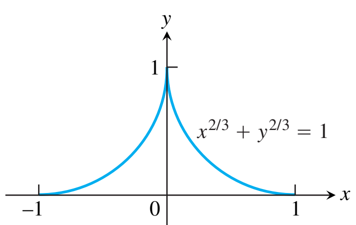
22. $y = (1/3)(x^2 + 2)^{3/2}$, $0 \leq x \leq \sqrt{2}$; (*Sugerencia*: Exprese $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ en términos de dx y evalúe la integral $S = \int 2\pi x\, ds$ con límites apropiados).

23. Prueba de la nueva definición Demuestre que el área de la superficie de una esfera de radio a sigue siendo $4\pi a^2$; utilice la ecuación (3) para determinar el área de la superficie generada al hacer girar la curva $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $-a \leq x \leq a$, alrededor del eje x.

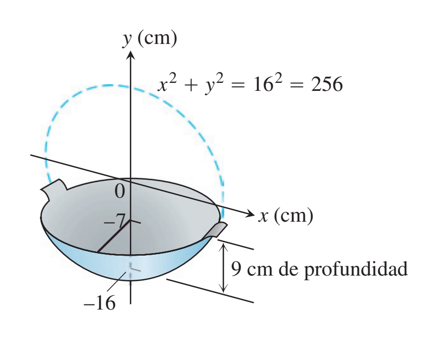
24. Prueba de la nueva definición El área de la superficie lateral de un cono de altura h y radio de la base r debe ser $\pi r\sqrt{r^2 + h^2}$, el semiperímetro de la base por la altura inclinada. Demuestre que éste es el caso determinando el área de la superficie generada al hacer girar, alrededor del eje x, el segmento de recta $y = (r/h)x$, $0 \leq x \leq h$.

25. Escriba una integral para calcular el área de las superficie generada al hacer girar, alrededor del eje x, la curva $y = \cos x$, $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$, En la sección 8.5 veremos cómo evaluar este tipo de integrales.

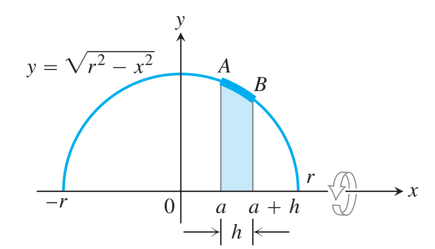
26. Superficie de una astroide Determine el área de la superficie generada al hacer girar alrededor del eje x la parte de la astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ que se muestra a continuación. (*Sugerencia*: Haga girar la parte del primer cuadrante, $y = (1 - x^{2/3})^{3/2}$, $0 \leq x \leq 1$, alrededor del eje x y multiplique su resultado por dos).



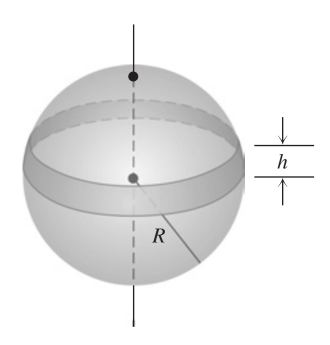
T **27. Esmaltado de sartenes** La compañía en donde trabaja decidió producir una versión de lujo de la exitosa sartén que usted diseñó en la sección 6.1, ejercicio 55. El plan es recubrir la parte interior con un esmalte blanco y la exterior con esmalte azul. Cada esmalte se aplicará en una capa de 0.5 mm de grosor antes de hornear la sartén. (Vea el diagrama). El departamento de manufactura necesita saber cuánto esmalte debe tener disponible para producir 5000 sartenes. ¿Qué les diría? (No tome en cuenta el material que se desperdicia ni el material no usado, y proporcione su respuesta en litros. Recuerde que $1\text{ cm}^3 = 1\text{ mL}$, por lo que $1\text{ L} = 1000\text{ cm}^3$).



28. Rebanadas de pan ¿Sabía que si corta una pieza esférica de pan en rebanadas del mismo ancho, cada una tendrá la misma cantidad de corteza? Para ver por qué, suponga que la semicircunferencia $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ que se muestra aquí se hace girar alrededor del eje x para generar una esfera. Sea AB un arco de la semicircunferencia que está sobre un intervalo de longitud h en el eje x. Demuestre que el área barrida por AB no depende de la ubicación del intervalo. (Sí depende de la longitud del intervalo).



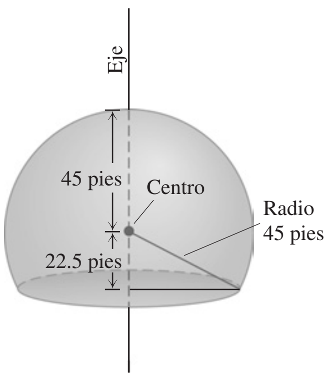
29. Por medio de planos paralelos separados una distancia h, se corta, de una esfera de radio R, la banda sombreada que se muestra a continuación. Demuestre que el área de la superficie de la banda es $2\pi Rh$.



30. A continuación se muestra un dibujo esquemático del domo de 90 pies que utilizó el Servicio Meteorológico Nacional de Estados Unidos para alojar un radar en Bozeman, Montana.

a. ¿A cuánto equivale la superficie exterior que se requiere pintar (sin tomar en cuenta la parte inferior)?

T **b.** Exprese la respuesta al pie cuadrado más cercano.



31. Superficies generadas por curvas que cruzan el eje de rotación La fórmula para calcular el área de una superficie en la ecuación (3), se desarrolló bajo la hipótesis de que la función f, cuya gráfica generaba la superficie, era no negativa en el intervalo $[a, b]$. Para el caso de curvas que cruzan el eje de rotación, reemplazamos la ecuación (3) con la fórmula con valor absoluto

$$S = \int 2\pi\rho\, ds = \int 2\pi |f(x)|\, ds. \qquad (13)$$

Utilice la ecuación (13) para determinar el área de la superficie del doble cono generado al hacer girar el segmento de recta $y = x, -1 \le x \le 2$, alrededor del eje x.

32. (*Continuación del ejercicio 31*). Determine el área de la superficie generada al hacer girar la curva $y = x^3/9, -\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3}$, alrededor del eje s. ¿Qué cree que sucedería si quitara las barras de valor absoluto en la ecuación (13) e intentara determinar el área de la superficie mediante la fórmula $S = \int 2\pi f(x)\, ds$? Inténtelo.

Parametrizaciones

En los ejercicios 33 a 35, determine el área de cada superficie generada al hacer girar las curvas alrededor del eje indicado.

33. $x = \cos t, \quad y = 2 + \operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le 2\pi;$ eje x.

34. $x = (2/3)t^{3/2}, \quad y = 2\sqrt{t}, \quad 0 \le t \le \sqrt{3};$ eje y.

35. $x = t + \sqrt{2}, \quad y = (t^2/2) + \sqrt{2}t, \quad -\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2};$ eje y.

36. Establezca, pero no evalúe, una integral que represente el área de la superficie obtenida al hacer girar la curva $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$, alrededor del eje x.

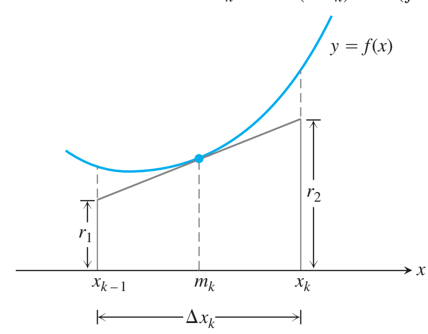
37. Tronco de un cono El segmento de recta que une los puntos (0, 1) y (2, 2) se hace girar alrededor del eje x para generar el tronco de un cono. Determine el área de la superficie del tronco por medio de la parametrización $x = 2t, y = t + 1, 0 \le t \le 1$. Compruebe su resultado con la fórmula geométrica: Área $= \pi(r_1 + r_2)$(altura inclinada).

38. Un cono El segmento de recta que va del origen al punto (h, r) se hace girar alrededor del eje x para generar un cono de altura h y radio de la base r. Determine el área de la superficie del cono con las ecuaciones paramétricas $x = ht, y = rt, 0 \le t \le 1$. Compruebe su resultado con la fórmula geométrica: Área $= \pi r$(altura inclinada).

39. Una deducción alternativa de la fórmula para calcular el área de una superficie Suponga que f es suave en $[a, b]$ y que $[a, b]$ se divide en la forma usual. En el k-ésimo subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ se construye la recta tangente a la curva en el punto medio $m_k = (x_{k-1} + x_k)/2$, como se muestra en la figura siguiente.

a. Demuestre que $r_1 = f(m_k) - f'(m_k)\dfrac{\Delta x_k}{2}$ y $r_2 = f(m_k) + f'(m_k)\dfrac{\Delta x_k}{2}$.

b. Demuestre que la longitud L_k del segmento de recta tangente en el k-ésimo subintervalo es $L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f'(m_k)\,\Delta x_k)^2}$.

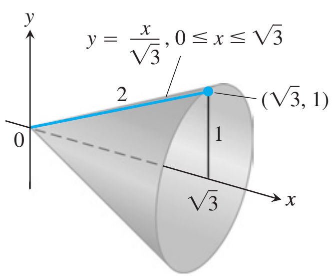


c. Demuestre que el área de la superficie lateral del tronco del cono barrido por el segmento de recta tangente cuando éste se hace girar alrededor del eje x es $2\pi f(m_k)\sqrt{1 + (f'(m_k))^2}\,\Delta x_k$.

d. Demuestre que el área de la superficie generada al hacer girar $y = f(x)$ alrededor del eje x en $[a, b]$ es

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\begin{pmatrix}\text{área de la superficie lateral}\\ \text{del } k\text{–ésimo tronco}\end{pmatrix} = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

40. Modelado del área de una superficie El área de la superficie lateral del cono barrido al hacer girar el segmento de recta $y = x/\sqrt{3},\ 0 \le x \le \sqrt{3}$, alrededor del eje x debe ser (1/2)(circunferencia de la base)(altura inclinada) $= (1/2)(2\pi)(2) = 2\pi$. ¿Qué obtiene si utiliza la ecuación (8) con $f(x) = x/\sqrt{3}$?



El teorema de Pappus

41. La región cuadrada con vértices (0, 2), (2, 0), (4, 2) y (2, 4) se hace girar alrededor del eje x para generar un sólido. Determine el volumen y el área de la superficie del sólido.

42. Utilice el teorema de Pappus para determinar el volumen generado al hacer girar la región triangular acotada por los ejes coordenados y la recta $2x + y = 6$ alrededor de la recta $x = 5$. (Como vio en el ejercicio 29 de la sección 6.4, el centroide de un triángulo se encuentra en la intersección de sus medianas, a un tercio de la distancia entre el punto medio de cada lado y el vértice opuesto).

43. Determine el volumen del toro generado al hacer girar la circunferencia $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ alrededor del eje y.

44. Utilice el teorema de Pappus para determinar el área de la superficie lateral y el volumen de un cono circular recto.

45. Utilice el segundo teorema de Pappus y el hecho de que el área de la superficie de una esfera de radio a es $4\pi a^2$ para determinar el centroide de la semicircunferencia $y = \sqrt{a^2 - x^2}$.

46. Como se determinó en el problema 45, el centroide de la semicircunferencia $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ se encuentra en el punto $(0, 2a/\pi)$. Determine el área de la superficie que se barre al hacer girar la semicircunferencia alrededor de la recta $y = a$.

47. El área de la región R acotada por la semielipse $y = (b/a)\sqrt{a^2 - x^2}$ y el eje x es $(1/2)\pi ab$, y el volumen del elipsoide generado al hacer girar R alrededor del eje x es $(4/3)\pi ab^2$. Determine el centroide de R. Observe que la ubicación es independiente de a.

48. Como se determinó en el ejemplo 6, el centroide de la región acotada por el eje x y la semicircunferencia $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ está en el punto $(0, 4a/3\pi)$. Determine el volumen del sólido generado al hacer girar esta región alrededor de la recta $y = -a$.

49. La región del ejercicio 48 se hace girar alrededor de la recta $y = x - a$ para generar un sólido. Determine el volumen del sólido.

50. Como se determinó en el ejercicio 45, el centroide de la semicircunferencia $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ está en el punto $(0, 2a/\pi)$. Determine el área de la superficie generada al hacer girar la semicircunferencia alrededor de la recta $y = x - a$.

51. Determine el momento, con respecto aleje x, de la región semicircular del ejemplo 6. Si utiliza los resultados conocidos, no será necesario integrar.

6.6 Trabajo

En la vida cotidiana, el término *trabajo* hace referencia a una actividad que requiere esfuerzo muscular o mental. En la ciencia, este concepto alude específicamente a una fuerza que actúa sobre un cuerpo y al consecuente desplazamiento del cuerpo. En esta sección mostraremos cómo se calcula el trabajo. Las aplicaciones van desde la compresión de resortes en vagones de ferrocarril y el drenado de tanques subterráneos, hasta forzar electrones a juntarse y la puesta en órbita de satélites.

Trabajo realizado por una fuerza constante

Cuando un cuerpo se mueve una distancia d a lo largo de una línea recta como resultado de la aplicación de una fuerza constante de magnitud F en la dirección del movimiento, definimos el **trabajo** T realizado por la fuerza sobre el cuerpo mediante la fórmula

$$T = Fd \qquad \text{(Fórmula para calcular el trabajo con fuerza constante).} \tag{1}$$

Joules
El joule debe su nombre al físico inglés James Prescott Joule (1818-1889). La ecuación que lo define es

$$1 \text{ joule} = (1 \text{ newton})(1 \text{ metro}).$$

En símbolos, $1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$.

De acuerdo con la ecuación (1), vemos que la unidad de trabajo en cualquier sistema es la unidad de fuerza multiplicada por la unidad de distancia. En las unidades del sistema internacional de medidas (SI), la unidad de fuerza es el newton, la unidad de distancia el metro, y la unidad de trabajo el newton-metro ($\text{N} \cdot \text{m}$). Esta combinación aparece con tanta frecuencia que tiene un nombre especial: **joule**. En el sistema inglés, la unidad de trabajo es la libra-pie, una unidad utilizada comúnmente por los ingenieros.

EJEMPLO 1 Levantamiento de un automóvil

Si usted levanta 1.25 pies uno de los lados de un automóvil de 2000 lb para cambiar un neumático (para lo cual tendría que aplicar una fuerza vertical constante de alrededor de 1000 lb), realizará $1000 \times 1.25 = 1250$ lb-pie de trabajo sobre el automóvil. En unidades del SI, diríamos que ha aplicado una fuerza de 4448 N a lo largo de una distancia de 0.381 m para hacer $4448 \times 0.381 \approx 1695$ J de trabajo. ■

Trabajo realizado por una fuerza variable a lo largo de una recta

Si la fuerza que se aplica varía durante el proceso, como ocurre al comprimir un resorte, la fórmula $T = Fd$ tiene que reemplazarse por una integral que tome en cuenta la variación de F.

Suponga que la fuerza que realiza el trabajo actúa a lo largo de una línea que consideraremos como el eje x, y que su magnitud F es una función continua de la posición. Queremos determinar el trabajo realizado en el intervalo de $x = a$ a $x = b$. Hacemos una partición de $[a, b]$ en la forma usual, y elegimos un punto arbitrario c_k en cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$. Si el intervalo es suficientemente pequeño, dado que F es continua no variará mucho de x_{k-1} a x_k. La cantidad de trabajo realizado a lo largo del intervalo será aproximadamente $F(c_k)$ veces la distancia Δx_k, la misma que obtendríamos si F fuese constante y aplicáramos la ecuación (1). Por lo tanto, el trabajo total realizado de a a b se aproxima mediante la suma de Riemann

$$\text{Trabajo} \approx \sum_{k=1}^{n} F(c_k)\, \Delta x_k.$$

Cabe esperar que la aproximación mejorará a medida que la norma de la partición tienda a cero, así que definimos el trabajo realizado por la fuerza de a a b como la integral de F de a a b.

DEFINICIÓN Trabajo

El **trabajo** realizado por una fuerza variable $F(x)$ dirigida a lo largo del eje x de $x = a$ a $x = b$ es

$$W = \int_a^b F(x)\, dx. \tag{2}$$

Las unidades de la integral son joules si F está en newtons y x en metros, y libras-pie si F está en libras y x en pies. Así, el trabajo realizado por la fuerza $F(x) = 1/x^2$ newtons a lo largo del eje x de $x = 1$ m a $x = 10$ m es

$$W = \int_1^{10} \frac{1}{x^2}\, dx = -\frac{1}{x}\bigg]_1^{10} = -\frac{1}{10} + 1 = 0.9 \text{ J}.$$

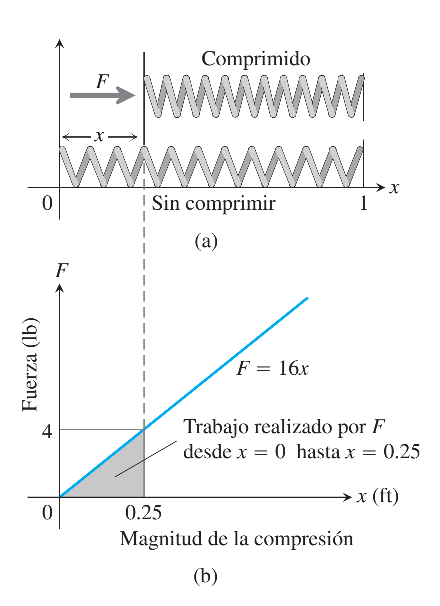


FIGURA 6.58 La fuerza F necesaria para mantener un resorte bajo compresión aumenta linealmente conforme se comprime el resorte (ejemplo 2).

Ley de Hooke para resortes: $F = kx$

La **ley de Hooke** establece que la fuerza que se requiere para estirar o comprimir un resorte x unidades de longitud a partir de su longitud natural (sin comprimir), es proporcional a x. En símbolos,

$$F = kx. \tag{3}$$

La constante k, medida en unidades de fuerza por unidad de longitud, es una característica del resorte, denominada **constante del resorte** (o **constante de fuerza del resorte**). La ley de Hooke, ecuación (3), proporciona buenos resultados, siempre y cuando la fuerza no distorsione el metal del que está hecho el resorte. En esta sección supondremos que las fuerzas son muy pequeñas para hacerlo.

EJEMPLO 2 Compresión de un resorte

Determinar el trabajo requerido para comprimir un resorte desde su longitud natural de 1 pie a una longitud de 0.75 pies, si la constante del resorte es $k = 16$ lb/pie.

Solución Dibujamos el resorte sin comprimir sobre el eje x, con su extremo móvil en el origen y el extremo fijo en $x = 1$ pie (figura 6.58). Esto nos permite describir la fuerza requerida para comprimir el resorte desde 0 hasta x con la fórmula $F = 16x$. Para comprimir el resorte desde 0 hasta 0.25 pies, la fuerza debe aumentar de

$$F(0) = 16 \cdot 0 = 0 \text{ lb} \qquad \text{a} \qquad F(0.25) = 16 \cdot 0.25 = 4 \text{ lb}.$$

El trabajo realizado por F en el intervalo es

$$T = \int_0^{0.25} 16x\,dx = 8x^2 \Big]_0^{0.25} = 0.5 \text{ lb-pies}.$$

La ecuación 2 con $a = 0, b = 0.25, F(x) = 16x$

■

EJEMPLO 3 Trabajo para estirar un resorte

Un resorte tiene una longitud natural de 1 m, Una fuerza de 24 N lo estira hasta una longitud de 1.8 m.

(a) Determinar la constante k del resorte.

(b) ¿Cuánto trabajo se requerirá para estirar el resorte hasta 2 m más que su longitud natural?

(c) ¿Hasta qué longitud se estirará el resorte si le aplicamos una fuerza de 45 N?

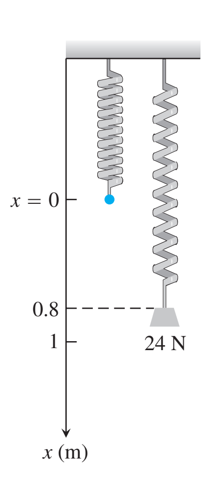


FIGURA 6.59 Un peso de 24 N alarga este resorte 0.8 m más que su longitud natural (ejemplo 3).

Solución

(a) *La constante k del resorte.* Determinamos la constante k del resorte a partir de la ecuación (3). Una fuerza de 24 N estira el resorte 0.8 m, de manera que

$$24 = k(0.8)$$
$$k = 24/0.8 = 30 \text{ N/m}.$$

La ecuación 3 con $F = 24, x = 0.8$

(b) *El trabajo para estirar el resorte 2 m.* Imaginemos que el resorte sin estirar cuelga a lo largo del eje x con su extremo libre en $x = 0$ (figura 6.59). La fuerza requerida para estirar el resorte x m más allá de su longitud natural, es la fuerza que se requiere para jalar el extremo libre del resorte x unidades desde el origen. La ley de Hooke con $k = 30$ establece que esta fuerza es

$$F(x) = 30x.$$

El trabajo realizado por F sobre el resorte desde $x = 0$ m hasta $x = 2$ m es

$$T = \int_0^2 30x\,dx = 15x^2\Big]_0^2 = 60\text{ J}.$$

(c) *¿Hasta qué longitud se estira el resorte con una fuerza de* 45 N? Sustituimos $F = 45$ en la ecuación $F = 30x$ para determinar

$$45 = 30x, \qquad \text{o} \qquad x = 1.5\text{ m}.$$

Una fuerza de 45 N estirará el resorte 1.5 m. Para determinar esto no se requiere cálculo. ■

La integral del trabajo es útil para calcular el trabajo realizado al elevar objetos cuyos pesos varían según la elevación.



EJEMPLO 4 Trabajo realizado al subir una cuerda y una cubeta

Una cubeta de 5 lb se eleva desde el piso, jalándola con una cuerda de 20 pies a una velocidad constante (figura 6.60). La cuerda pesa 0.08 lb/pie. ¿Cuánto trabajo se realiza al subir la cubeta y la cuerda?

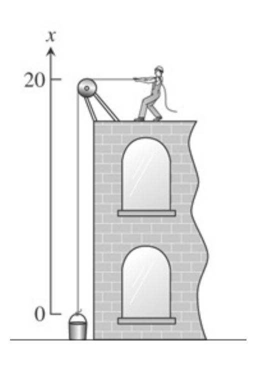


FIGURA 6.60 Elevación de la cubeta del ejemplo 4.

Solución La cubeta tiene un peso constante, por lo que el trabajo realizado al elevar sólo la cubeta es peso × distancia $= 5 \cdot 20 = 100$ lb-pie.

El peso de la cuerda varía conforme se sube la cubeta, ya que hay menos cuerda colgando. Cuando la cubeta se encuentra a x pies del piso, la parte de la cuerda que falta por subir pesa $(0.08) \cdot (20 - x)$ lb. Por lo tanto, el trabajo para subir la cuerda es

$$\text{Trabajo sobre la cuerda} = \int_0^{20} (0.08)(20 - x)\,dx = \int_0^{20} (1.6 - 0.08x)\,dx$$
$$= \left[1.6x - 0.04x^2\right]_0^{20} = 32 - 16 = 16\text{ lb-pies}.$$

El trabajo total para la combinación cubeta y cuerda es

$$100 + 16 = 116\text{ lb-pies}.$$ ■

Bombeo de líquidos desde contenedores

¿Cuánto trabajo se requiere para bombear todo o parte del líquido que hay en un contenedor? Para determinarlo, imaginamos que se eleva una delgada capa horizontal del líquido cada vez y aplicamos la ecuación $T = Fd$ a cada capa. Luego evaluamos la integral que se obtiene cuando las capas son cada vez más delgadas y numerosas. La integral que obtenemos cada vez depende del peso del líquido y de las dimensiones del contenedor, pero la forma de determinar la integral siempre es la misma. Los ejemplos siguientes muestran cómo hacerlo.



EJEMPLO 5 Bombeo de aceite desde un tanque cónico

El tanque cónico de la figura 6.61 se llena hasta 2 pies de la parte superior con aceite de oliva, que pesa 57 lb/pie^3. ¿Cuánto trabajo se requiere para bombear el aceite hasta el borde del tanque?

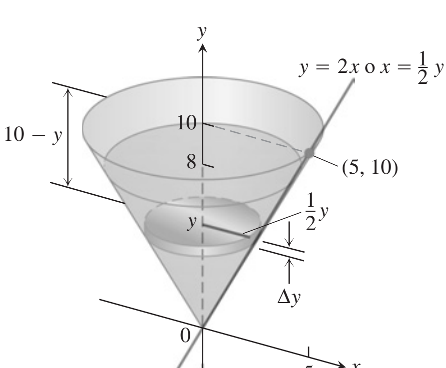


FIGURA 6.61 Tanque contenedor de aceite de oliva (ejemplo 5).

Solución Imaginemos que el aceite se divide en capas delgadas por medio de planos perpendiculares al eje y, en los puntos de una partición del intervalo $[0, 8]$.

Una capa representativa entre los planos en y y $y + \Delta y$ tiene un volumen aproximado de

$$\Delta V = \pi(\text{radio})^2(\text{grosor}) = \pi\left(\frac{1}{2}y\right)^2 \Delta y = \frac{\pi}{4}y^2\,\Delta y\text{ pies}^3.$$

La fuerza $F(y)$ requerida para elevar esta capa es igual a su peso,

$$F(y) = 57\,\Delta V = \frac{57\pi}{4} y^2 \Delta y \text{ lb.}$$

Peso = peso por unidad de volumen × volumen

La distancia a través de la cual $F(y)$ debe actuar para elevar esta capa al nivel del borde del cono es aproximadamente $(10 - y)$ pies, así que el trabajo realizado para elevar la capa es de más o menos

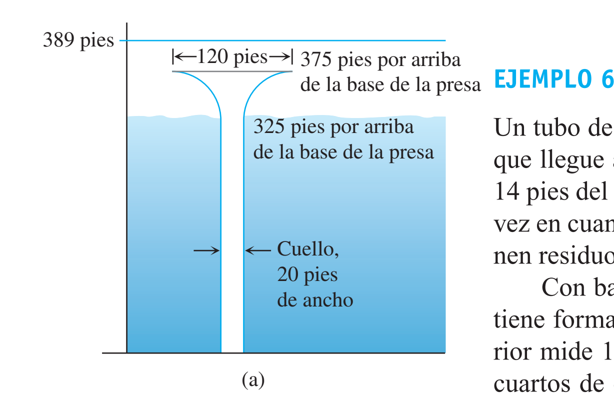
$$\Delta W = \frac{57\pi}{4}(10 - y)y^2 \Delta y \text{ lb-pies.}$$

Suponiendo que existen n capas asociadas con la partición de $[0, 8]$ y que $y = y_k$ denota el plano asociado con la *k-ésima* capa de grosor Δy_k, podemos aproximar el trabajo realizado al elevar todas las capas mediante la suma de Riemann

$$W \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{57\pi}{4}(10 - y_k){y_k}^2 \Delta y_k \text{ lb-pies.}$$

El trabajo de bombear el aceite hasta el borde es el límite de estas sumas conforme la norma de la partición tiende a cero.

$$\begin{aligned} T &= \int_0^8 \frac{57\pi}{4}(10 - y)y^2\, dy \\ &= \frac{57\pi}{4}\int_0^8 (10y^2 - y^3)\, dy \\ &= \frac{57\pi}{4}\left[\frac{10y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^8 \approx 30{,}561 \text{ lb-pies.} \end{aligned}$$



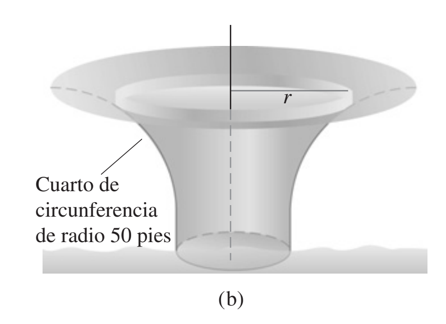


FIGURA 6.62 (a) Sección transversal del tubo de drenado de una presa, y (b) la parte superior del tubo de drenado (ejemplo 6).

EJEMPLO 6 Bombeo de agua desde un tubo de drenado

Un tubo de drenado es un cilindro vertical que mantiene el agua a cierto nivel para evitar que llegue a demasiada altura. La parte superior del tubo de drenado de una presa está a 14 pies del borde de la misma y a 375 pies por arriba de su parte inferior (figura 6.62). De vez en cuando se necesita bombear el agua del tubo de drenado para permitir que se eliminen residuos estacionales.

Con base en la sección transversal de la figura 6.62a, vemos que el tubo de drenado tiene forma de embudo. El cuello del embudo tiene un ancho de 20 pies y su parte superior mide 120 pies. La frontera exterior de la sección transversal de la parte superior son cuartos de circunferencias formadas con radio de 50 pies, como se muestra en la figura 6.62b. El tubo de drenado se forma haciendo girar una sección transversal alrededor de su centro. En consecuencia, las secciones transversales son discos circulares en todo el tubo. Calculamos el trabajo requerido para bombear agua desde

(a) el cuello del tubo de drenado.

(b) la parte del embudo

Solución

(a) *Bombeo desde el cuello*. Una capa representativa del cuello, entre los planos en y y $y + \Delta y$, tiene un volumen aproximado de

$$\Delta V = \pi(\text{radio})^2(\text{grosor}) = \pi(10)^2 \Delta y \text{ pies}^3.$$

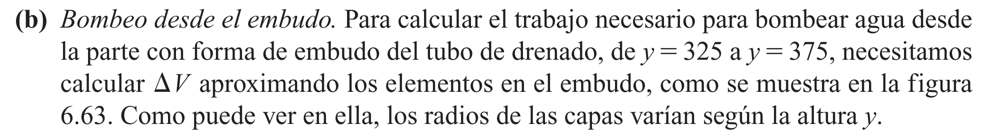
La fuerza $F(y)$ que se requiere para elevar esta capa es igual a su peso (alrededor de 62.4 lb//pie^3 para agua),

$$F(y) = 62.4\,\Delta V = 6240\pi\,\Delta y \text{ lb.}$$

La distancia en la que va actuar $F(y)$ para elevar esta capa hasta la parte superior del tubo de drenado es $(375 - y)$ pies, por lo que el trabajo realizado para elevar la capa es

$$\Delta T = 6240\pi(375 - y)\,\Delta y \text{ lb-pies}.$$

Podemos aproximar el trabajo realizado al bombear el agua desde el cuello del tubo, sumando el trabajo que se lleva a cabo al elevar una a una todas las capas, y tomando luego el límite de esta suma de Riemann a medida que la norma de la partición tiende a cero. Esto da lugar a la integral



$$T = \int_0^{325} 6240\pi(375 - y)\,dy$$

$$= 6240\pi\left[375y - \frac{y^2}{2}\right]_0^{325}$$

$$\approx 1{,}353{,}869{,}354 \text{ lb-pies}.$$

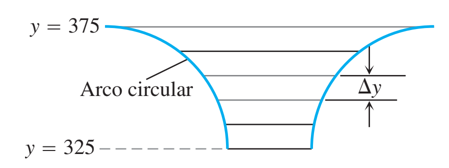


FIGURA 6.63 La parte de embudo del tubo de drenado.

(b) *Bombeo desde el embudo.* Para calcular el trabajo necesario para bombear agua desde la parte con forma de embudo del tubo de drenado, de $y = 325$ a $y = 375$, necesitamos calcular ΔV aproximando los elementos en el embudo, como se muestra en la figura 6.63. Como puede ver en ella, los radios de las capas varían según la altura y.

En los ejercicios 33 y 34 se le pide completar el análisis para determinar el trabajo total requerido para bombear el agua, además de determinar la potencia necesaria para que las bombas saquen el agua por el tubo de drenado. ■

EJERCICIOS 6.6

Resortes

1. **Constante del resorte** Se necesitaron 1800 J de trabajo para estirar un resorte de su longitud natural de 2 m a una longitud de 5 m. Determine la constante del resorte.

2. **Estiramiento de un resorte** Un resorte tiene una longitud natural de 10 pulgadas. Una fuerza de 800 libras lo estira hasta 14 pulgadas.
   a. Determine la constante del resorte.
   b. ¿Cuánto trabajo se requiere para alargar el resorte de 10 a 12 pulgadas?
   c. ¿Qué tanto se estirará el resorte respecto de su longitud natural si se le aplica una fuerza de 1600 lb?

3. **Estiramiento de una banda elástica** Una fuerza de 2 N estirará una banda elástica 2 cm (0.02 m). Suponiendo que en este caso se cumple la ley de Hooke, ¿cuánto se estirará la banda al aplicarle una fuerza de 4 N? ¿Cuánto trabajo se realizará para estirar la banda esa longitud?

4. **Estiramiento de un resorte** Si una fuerza de 2 N estira un resorte 1 m más que su longitud natural, ¿cuánto trabajo se requiere para estirarlo 5 m a partir de su longitud natural?

5. **Resortes en los carros de un tren subterráneo** Se requiere una fuerza de 21,714 lb para comprimir un montaje de resortes en espiral en el tren subterráneo de la ciudad de Nueva York, desde su altura original de 8 pulgadas hasta una altura completamente comprimida de 5 pulgadas.
   a. ¿Cuál es la constante del resorte del montaje?
   b. ¿Cuánto trabajo se requiere para comprimir el montaje la primera media pulgada? Redondee su respuesta a la lb-pulgada más cercana.

   (Datos cortesía de Bombardier, Inc,. Mass Transit Division, para montajes de resortes en carros del tren subterráneo, entregados a New York City Transit Authority de 1985 a 1987).

6. **Báscula de baño** Una báscula de baño se comprime 1/16 pulgada cuando se sube en ella una persona de 150 lb. Suponiendo que la báscula se comporta como un resorte que cumple la ley de Hooke, ¿cuánto pesa alguien que comprime la báscula 1/8 de pulgada? ¿Cuánto trabajo se realiza al comprimir la báscula 1/8 de pulgada?

Trabajo realizado por una fuerza variable

7. **Elevación de una cuerda** Un alpinista está a punto de recoger una cuerda de 50 m de longitud que cuelga. ¿Cuánto trabajo requiere si la cuerda pesa 0.624 N/m?

8. **Bolsa de arena** Una bolsa de arena que pesaba originalmente 144 lb se elevó a una velocidad constante; mientras se subía, la arena de su interior salía a un ritmo constante. Cuando la bolsa se hubo elevado 18 pies, la bolsa había perdido la mitad de la arena. ¿Cuánto trabajo se realizó al subir la arena hasta esta altura? (No tome en cuenta el peso de la bolsa ni del equipo que se utiliza para subirla).

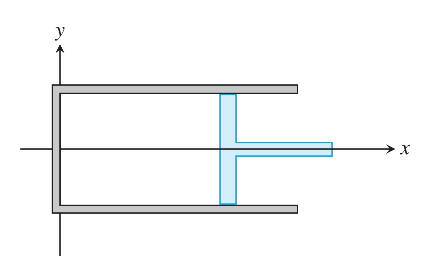
9. Ascensión del cable de un elevador Un elevador eléctrico con el motor en la parte superior, tiene un cable con varios cabos que pesa 4.5 lb/pie. Cuando el carro del elevador está en el primer piso, el cable se extiende 180 pies, y cuando está en el piso superior el cable se extiende 0 pies. ¿Cuánto trabajo realiza el motor para elevar sólo el cable, cuando sube el carro del primero al último piso?

10. Fuerza de atracción Cuando una partícula de masa m está en $(x, 0)$, es atraída hacia el origen con una fuerza de magnitud k/x^2. Si la partícula parte del reposo en $x = b$ y no actúa sobre ella ninguna otra fuerza, determine el trabajo realizado sobre ella cuando llega a $x = a,\ 0 < a < b$.

11. Compresión de gas Suponga que el gas contenido en un cilindro circular de área transversal A, se comprime mediante un pistón. Si p es la presión del gas en libras por pulgada cuadrada, y V es el volumen en pulgadas cúbicas, demuestre que el trabajo realizado al comprimir el gas del estado (p_1, V_1) al estado (p_2, V_2) está dado por la ecuación

$$\text{Trabajo} = \int_{(p_1, V_1)}^{(p_2, V_2)} p\, dV.$$

(*Sugerencia*: En las coordenadas sugeridas por la figura siguiente, $dV = A\, dx$. La fuerza contra el pistón es pA).



12. (*Continuación del ejercicio 11*). Utilice la integral del ejercicio 11 para determinar el trabajo realizado al comprimir el gas de $V_1 = 243$ pulgadas^3 a $V_2 = 32$ pulgadas^3, si $p_1 = 50$ lb/pulgada^3 y p y V cumplen la ley del estado gaseoso $pV^{1.4} =$ constante (para procesos adiabáticos).

13. Cubeta que gotea Suponga que la cubeta del ejemplo 4 está goteando. Al principio contiene 2 galones de agua (16 lb) y gotea a un ritmo constante. Justo cuando llega a la parte superior termina de vaciarse. ¿Cuánto trabajo se realizó para subir sólo el agua? (*Sugerencia*: No tome en cuenta la cuerda ni la cubeta, y determine la proporción de agua que sale a la altura de x pies).

14. (*Continuación del problema 13*). Los trabajadores de los ejemplos 4 y 13 utilizaron una cubeta más grande que contenía 5 galones (40 libras) de agua, pero ésta tenía un agujero más grande, así que también llegó vacía a la parte superior. Suponiendo que el agua sale a ritmo constante, ¿cuánto trabajo se realizó al subir sólo el agua? (No tome en cuenta la cuerda ni la cubeta).

Bombeo de líquidos desde contenedores

> **Peso del agua**
> Debido a la rotación de la Tierra y a variaciones en su campo gravitacional, el peso de un pie cúbico de agua al nivel del mar varía de aproximadamente 62.26 lb en el ecuador, hasta casi 62.59 lb cerca de los polos, esto es, una variación de 0.5%. Un pie cúbico que pesa casi 62.4 lb en Melbourne (Australia) y en la ciudad de Nueva York, pesará 62.5 lb en Juneau (Alaska) y en Estocolmo (Suecia). Aunque 62.4 es un valor común en los libros de texto, hay una variación considerable.

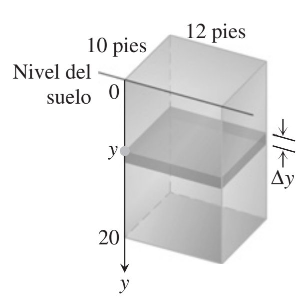
15. Bombeo de agua El tanque rectangular que se muestra a continuación, con su parte superior al nivel del suelo, se utiliza para recolectar escurrimientos de agua. Suponga que el agua pesa 62.4 lb/pie^3.

a. Una vez que el tanque está lleno, ¿cuánto trabajo se requiere para vaciarlo, bombeando el agua al nivel del suelo?

b. Si el agua se bombea al nivel del suelo con un motor de (5/11) caballos de fuerza (hp) (con un rendimiento de 250 lb-pie/seg), ¿cuánto tiempo le tomará vaciar el tanque? (Redondee al minuto más cercano).

c. Demuestre que la bomba de la parte (b) hará bajar el nivel a 10 pies (la mitad) durante los primeros 25 minutos de bombeo.

d. Peso del agua ¿Cuáles serían las respuestas a los incisos (a) y (b) en donde el agua pesa 62.26 lb/pie^3? ¿Cuáles serían en dónde pesa 62.59 lb/pie^3?



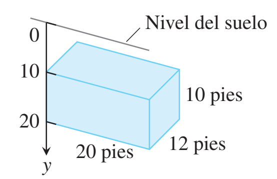
16. Vaciado de una cisterna La cisterna rectangular (tanque de almacenamiento para recolectar el agua de lluvia) que se muestra más adelante, tiene su parte superior 10 pies por debajo del nivel del suelo. La cisterna, actualmente llena, se vaciará para inspeccionarla, bombeando su contenido al nivel del suelo.

a. ¿Cuánto trabajo se realizará para vaciar la cisterna?

b. ¿Cuánto tardará en vaciar el tanque una bomba de 1/2 hp, con una eficiencia de 275 lb-pie/seg?

c. ¿Cuánto tardará la bomba de la parte (b) en vaciar la mitad del tanque? (Es menos de la mitad del tiempo que se requiere para vaciarlo por completo).

d. Peso del agua ¿Cuáles serían las respuestas a los incisos (a), (b) y (c) en dónde el agua pesa 62.26 lb/pie^3? ¿Cuáles serían en dónde pesa 62.59 lb/pie^3?

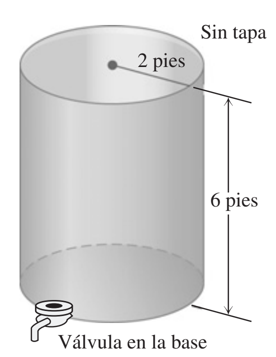


17. Bombeo de aceite ¿Cuánto trabajo se requeriría para bombear el aceite del ejemplo 5 al nivel de la parte superior del tanque, si éste estuviera completamente lleno?

18. Bombeo de un tanque medio lleno Suponga que, en lugar de estar lleno, el tanque del ejemplo 5 sólo contiene aceite hasta la mitad de su capacidad. ¿Cuánto trabajo se requiere para bombear el aceite que queda a un nivel de 4 pies por encima de la parte superior del tanque?

19. Vaciado de un tanque Un tanque en forma de cilindro circular recto mide 30 pies de altura y 20 pies de diámetro. Está lleno de keroseno que pesa 51.2 lb/pies^3. ¿Cuánto trabajo se requiere para bombear el keroseno al nivel de la parte superior del tanque?

20. El tanque cilíndrico que se muestra a continuación puede llenarse mediante el bombeo de agua desde un lago que está 15 pies por debajo de la parte inferior del tanque. Hay dos formas de hacerlo: una consiste en bombear el agua a través de una manguera conectada a una válvula en la parte inferior del tanque; la otra es sujetar la manguera en el borde superior del tanque y dejar que el agua fluya hacia adentro. ¿Cuál de las dos será más rápida? Justifique su respuesta.

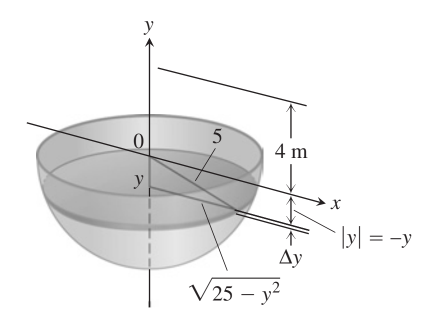


21. a. Bombeo de leche Suponga que el contenedor cónico del ejemplo 5 contiene leche (que pesa 64.5 lb/pies^3) en lugar de aceite de oliva. ¿Cuánto trabajo se requerirá para bombear el contenido al borde el contenedor?

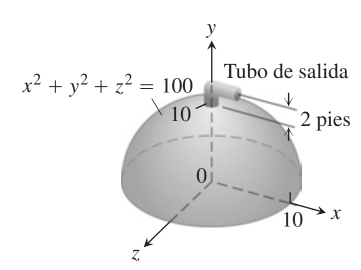
b. Bombeo de aceite ¿Cuánto trabajo se requerirá para bombear el aceite del ejemplo 5 a un nivel de 3 pies por encima del borde del cono?

22. Bombeo de agua de mar Para diseñar la superficie interior de un gran tanque de acero inoxidable, usted hacer girar la curva $y = x^2$, $0 \leq x \leq 4$, alrededor del eje y. El contenedor, con dimensiones en metros, será llenado con agua de mar, la cual pesa 10,000 N/m^3. ¿Cuánto trabajo se requerirá para vaciar el tanque bombeando el agua a la parte superior del tanque?

23. Vaciado de un depósito de agua Modelamos el bombeo de contenedores esféricos tal como lo hacemos para otros contenedores, con el eje de integración a lo largo del eje vertical de la esfera. Utilice la figura siguiente para determinar cuánto trabajo se requerirá para vaciar el depósito semiesférico de radio 5 m si está lleno y el agua se bombea a una altura de 4 m por encima de la parte superior del depósito. El agua pesa 9800 N/m^3.



24. Usted está a cargo del vaciado y reparación del tanque de almacenamiento que se muestra a continuación. El tanque es una semiesfera de radio 10 pies y está completamente lleno de benceno, que pesa 56 lb/pie^3. Una compañía le dice que puede vaciar el tanque por 1/2¢ por libra-pie de trabajo. Determine el trabajo requerido para vaciar el tanque bombeando el benceno hasta una salida, 2 pies por encima del nivel superior del tanque. Si tiene un presupuesto de $5000 para el trabajo, ¿puede contratar a la compañía para que lo realice?



Trabajo y energía cinética

25. Energía cinética Si una fuerza variable de magnitud $F(x)$ mueve un cuerpo de masa m a lo largo del eje x desde x_1 hasta x_2, la velocidad del cuerpo v puede escribirse como dx/dt (en donde t representa el tiempo). Utilice la segunda ley de movimiento de Newton $F = m(dv/dt)$ y la regla de la cadena

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$

para demostrar que el trabajo neto realizado por la fuerza al mover el cuerpo de x_1 a x_2 es

$$T = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\, dx = \frac{1}{2}mv_2{}^2 - \frac{1}{2}mv_1{}^2,$$

en donde v_1 y v_2 son las velocidades del cuerpo en x_1 y x_2. En física, la expresión $(1/2)mv^2$ se denomina *energía cinética* de un cuerpo de masa m que se mueve con velocidad v. Por lo tanto, *el trabajo realizado por la fuerza es igual al cambio en la energía cinética del cuerpo*, y podemos determinar el trabajo calculando este cambio.

En los ejercicios 26 a 32, utilice el resultado del ejercicio 25.

26. Tenis Una pelota de tenis de 2 onzas fue lanzada a 160 pies/segundo (casi 109 mph). ¿Cuánto trabajo se realizó sobre la pelota para lograr esa velocidad? (Para determinar la masa de la pelota a partir de su peso, exprese este último en libras y divida entre 32 pies/segundo^2, que es la aceleración debida a la gravedad).

27. Béisbol ¿Cuántas libras-pie de trabajo se requieren para lanzar una pelota de béisbol a 90 mph? Una pelota de béisbol pesa 5 onzas o 0.3125 lb.

28. Golf Una pelota de golf de 1.6 onzas se lanza a una velocidad de 280 pies/segundo (casi 191 mph). ¿Cuántas libras-pie de trabajo se realizaron sobre la pelota para lanzarla al aire?

29. Tenis Durante el partido en el que ganó el campeonato de tenis varonil del torneo abierto de Estados Unidos, Pete Sampras lanzó un servicio fenomenal, con una velocidad de 124 mph. ¿Cuánto trabajo realizó Sampras sobre la pelota de 2 onzas para obtener esa velocidad?

30. Fútbol americano Un jugador lanzó un balón de fútbol americano de 14.5 onzas a 88 pies/segundo (60 mph). ¿Cuántas libras-pies de trabajo se aplicaron al balón para obtener esa velocidad?

31. Sóftbol ¿Cuánto trabajo tiene que realizarse sobre una pelota de sóftbol para lanzarla a 132 pies/seg (90 mph)?

32. Lanzamiento de una bola Una bola de acero de 2 onzas se coloca en un resorte vertical cuya constante es $k = 18$ lb/pie. El resorte se comprime 2 pulgadas y luego se libera. ¿Qué altura alcanza la bola?

33. Bombeo desde el embudo de un tubo de drenado (*Continuación del ejemplo 6*).

a. Determine el radio de la sección transversal (parte del embudo) del tubo de drenado del ejemplo 6 como una función de la altura y por encima de la parte inferior de la presa (desde $y = 325$ hasta $y = 375$).

b. Determine ΔV para la sección del embudo del drenador (desde $y = 325$ hasta $y = 375$).

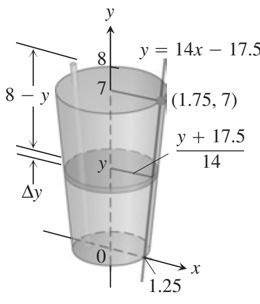
c. Determine el trabajo necesario para vaciar la sección del embudo formulando y evaluando la integral definida apropiada.

34. Bombeo de agua desde un tubo de drenado (*Continuación del ejercicio 33*).

a. Determine el trabajo total necesario para bombear el tubo de drenado, sumando el trabajo necesario para bombear la sección del cuello y la del embudo.

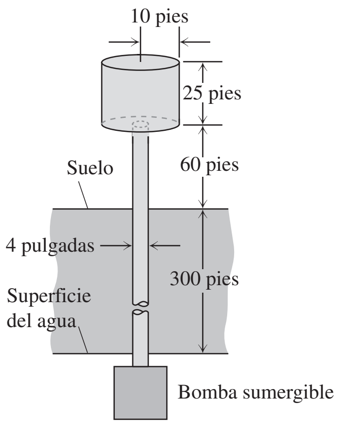
b. La respuesta que dio al inciso (a) está en libras-pie. Una forma más útil de señalar el resultado es en caballos de fuerza-hora, ya que los motores utilizan esta unidad de medida. Para convertir libras-pie a caballos de fuerza-hora, divida entre 1.98×10^6. ¿Cuántas horas tardaría un motor de 1000 hp para vaciar el tubo de drenado, suponiendo que es totalmente eficiente?

35. Succión de una malteada El contenedor en forma de cono truncado que se muestra a continuación está lleno de malteada de fresa, que pesa 4/9 onzas/pulgada^3. Como ve, el contenedor tiene una profundidad de 7 pulgadas, 2.5 de diámetro en la base y 3.5 pulgadas de diámetro en la parte superior (un tamaño estándar en una nevería de Boston). El popote sobresale una pulgada por encima de la parte superior. ¿Cuánto trabajo será necesario, aproximadamente, para succionar la malteada por el popote (no tome en cuenta la fricción)? Proporcione la respuesta en pulgadas-onzas.



Dimensiones en pulgadas

36. Torre de agua Se ha decidido excavar un pozo para incrementar el suministro de agua en su ciudad. Como ingeniero a cargo, usted ha determinado que será necesaria una torre de agua para proporcionar la presión que se requiere para su distribución, así que ha diseñado el sistema que se muestra a continuación. El agua se bombea desde un pozo que está a 300 pies de profundidad, utilizando un tubo vertical de 4 pulgadas en la base de un tanque cilíndrico de 20 pies de diámetro y 25 pies de altura. La base del tanque estará 60 pies por encima del suelo. La bomba es de 3 hp, con una eficiencia de 1650 lb pies/segundo. Redondeando el resultado a la hora más cercana, ¿cuánto tardará el tanque en llenarse la primera vez? (Incluya el tiempo necesario para que se llene el tubo). Suponga que el agua pesa 62.4 lb/pie^3.



NO ESTÁ A ESCALA

37. Colocación de un satélite en órbita La fuerza del campo gravitacional de la Tierra varía según la distancia al centro del planeta, y la magnitud de la fuerza gravitacional experimentada por un satélite de masa m durante y después del lanzamiento es

$$F(r) = \frac{mMG}{r^2}.$$

Aquí, $M = 5.975 \times 10^{24}$ kg es la masa de la Tierra, $G = 6.6720 \times 10^{-11}$ N $\cdot$ m^2 kg^{-2} es la constante de gravitación universal, y r se mide en metros. Por lo tanto, el trabajo que se requiere para elevar un satélite de 1000 kg desde la superficie de la Tierra hasta una órbita circular a 35,780 km de distancia del centro de la Tierra, está dado por la integral

$$\text{Trabajos} = \int_{6,370,000}^{35,780,000} \frac{1000MG}{r^2}\, dr \text{ joules}.$$

Evalúe la integral. El límite inferior de integración es el radio de la Tierra, en metros, respecto del sitio del lanzamiento. (Este cálculo no toma en cuenta la energía que se utiliza para lanzar el vehículo, ni la energía para que el satélite alcance su velocidad orbital).

38. Fuerza para unir electrones Dos electrones separados r metros se repelen mutuamente con una fuerza de

$$F = \frac{23 \times 10^{-29}}{r^2} \text{ newtons}.$$

a. Suponga que un electrón se mantiene fijo en el punto (1, 0) del eje x (unidades en metros). ¿Cuánto trabajo se requiere para mover un segundo electrón a lo largo del eje x, desde el punto (–1, 0) hasta el origen?

b. Suponga que dos electrones se mantienen fijos, uno en el punto (–1, 0) y el otro en el punto (1, 0). ¿Cuánto trabajo se requiere para mover un tercer electrón a lo largo del eje x, de (5, 0) a (3, 0)?

6.7 Presiones y fuerzas en fluidos

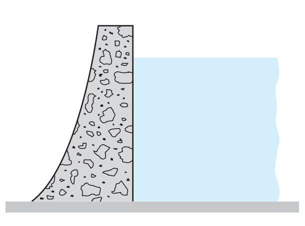


FIGURA 6.64 Para soportar la presión creciente, las cortinas de las presas se construyen más gruesas conforme se desciende a la base.

Las cortinas de las presas se construyen más gruesas en la base que en la parte superior (figura 6.64), ya que la presión del agua contra ellas aumenta con la profundidad. La presión sobre cualquier punto de la cortina depende de su profundidad y no en la inclinación que pueda tener la cortina en ese punto. En un punto ubicado h pies por debajo de la superficie, la presión —en libras por pie cuadrado— siempre es $62.4h$. El número 62.4 es la densidad específica del agua en libras por pie cúbico. La presión h pies por debajo de la superficie de cualquier fluido es la *densidad específica* por h.

Ecuación de presión-profundidad
En un fluido que está en reposo, la presión p a una profundidad h es la densidad del fluido w por h:

$$p = wh. \tag{1}$$

Densidad (específica)
La densidad de un fluido es su peso por unidad de volumen. Algunos valores de densidad comunes son (en lb/pie^3)

Gasolina	42
Mercurio	849
Leche	64.5
Melaza	100
Aceite de oliva	57
Agua de mar	64
Agua	62.4

En esta sección usaremos la ecuación $p = wh$ para deducir una fórmula que nos permita determinar la fuerza total ejercida por un fluido contra una pared horizontal o vertical, o parte de ella.

Fórmula para la fuerza de un fluido con profundidad constante

En un depósito de fluidos con base plana horizontal, la fuerza total ejercida por el fluido contra la base puede calcularse multiplicando el área de la base por la presión en la base. Esto es posible debido a que la fuerza total es igual a la fuerza por unidad de área (presión) por el área. (Vea la figura 6.65.) Si F, p y A son la fuerza total, la presión y el área, respectivamente, entonces

$$\begin{aligned} F &= \text{fuerza total} = \text{fuerza por unidad de área} \times \text{área} \\ &= \text{presión} \times \text{área} = pA \\ &= whA. \end{aligned}$$

$p = wh$ según la ecuación (1).

Fuerza de un fluido sobre una superficie de profundidad constante

$$F = pA = whA \tag{2}$$

Por ejemplo, la densidad del agua es 62.4 lb/pie^3, por lo que la fuerza del fluido en la parte inferior de una alberca rectangular de 10×20 pies y 3 pies de profundidad es

$$\begin{aligned} F &= whA = (62.4\ \text{lb/pie}^3)(3\ \text{pies})(10 \cdot 20\ \text{pies}^2) \\ &= 37{,}440\ \text{lb}. \end{aligned}$$

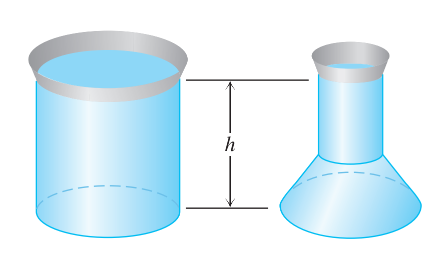


FIGURA 6.65 Estos contenedores están llenos con agua a la misma profundidad, y sus bases tienen la misma área. Por lo tanto, la fuerza total es la misma en la base de cada contenedor. Aquí no importa la forma de los contenedores.

En el caso de una placa plana sumergida *horizontalmente*, como el fondo de la alberca que se acaba de analizar, la fuerza hacia abajo que actúa sobre la cara superior de la placa, debida a la presión del líquido, está dada por la ecuación (2). Sin embargo, si la placa se sumerge *verticalmente,* la presión contra ella será distinta a diferentes profundidades, así que ya no es posible utilizar la ecuación (2) (ya que h varía). Si dividimos la placa en muchas bandas o franjas horizontales angostas, podemos crear una suma de Riemann cuyo límite es la fuerza del fluido contra el lado de la placa vertical sumergida. A continuación se explica el procedimiento.

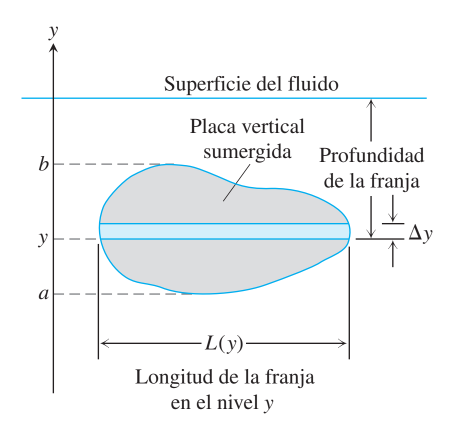


FIGURA 6.66 La fuerza ejercida por un fluido contra un lado de una franja delgada horizontal es aproximadamente $\Delta F =$ presión $\times$ área $= w \times$ (profundidad de la franja) $\times L(y)\,\Delta y$.

Fórmula para profundidad variable

Suponga que queremos conocer la fuerza que ejerce un fluido contra un lado de una placa vertical sumergida en un fluido con densidad w. Para determinarla, modelamos la placa como una región que se extiende desde $y = a$ hasta $y = b$ en el plano xy (figura 6.66). Hacemos una partición de $[a, b]$ de la manera usual, e imaginamos que la región se corta en delgadas franjas horizontales, por medio de planos perpendiculares al eje y, en los puntos de la partición. La franja representativa de y a $y + \Delta y$ es de Δy unidades de ancho por $L(y)$ unidades de largo. Suponemos que $L(y)$ es una función continua de y.

La presión varía de la parte superior a la inferior de la franja. Sin embargo, si la franja es suficientemente delgada, la presión permanecerá cercana al valor en su parte inferior e igual a $w \times$ (profundidad de la franja). La fuerza que ejerce el fluido contra un lado de la franja será aproximadamente de

$$\begin{aligned}\Delta F &= (\text{presión a lo largo de la parte inferior}) \times (\text{área}) \\ &= w \cdot (\text{profundidad de la franja}) \cdot L(y)\,\Delta y.\end{aligned}$$

Suponga que hay n franjas asociadas con la partición de $a \le y \le b$ y que y_k es el lado inferior de la *k-ésima* franja que tiene longitud $L(y_k)$ y ancho Δy_k. La fuerza contra toda la placa es aproximadamente la suma de las fuerzas contra cada franja, dando la suma de Riemann

$$F \approx \sum_{k=1}^{n} (w \cdot (\text{profundidad de la franja})_k \cdot L(y_k))\,\Delta y_k. \tag{3}$$

La suma de la ecuación (3) es una suma de Riemann para una función continua en $[a, b]$ y cabe esperar que las aproximaciones mejorarán conforme la norma de la partición tienda a cero. La fuerza contra la placa es el límite de estas sumas.

La integral para determinar la fuerza del fluido contra una placa vertical plana
Suponga que una placa sumergida verticalmente en un fluido de densidad w va desde $y = a$ hasta $y = b$ en el eje y. Sea $L(y)$ la longitud de la franja horizontal medida de izquierda a derecha a lo largo de la superficie de la placa en el nivel y. Entonces, la fuerza ejercida por el fluido contra un lado de la placa es

$$F = \int_a^b w \cdot (\text{profundidad de la franja}) \cdot L(y)\,dy. \tag{4}$$

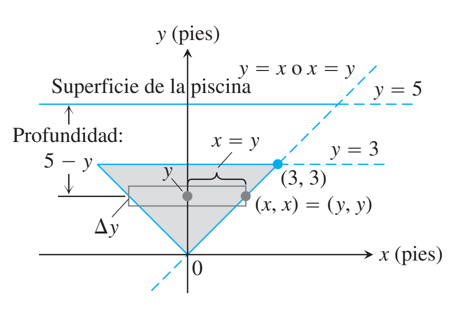


FIGURA 6.67 Para determinar la fuerza ejercida sobre un lado de la placa sumergida del ejemplo 1, podemos utilizar un sistema de coordenadas como el que se muestra aquí.

EJEMPLO 1 Aplicación de la integral para determinar la fuerza de un fluido

Una placa plana en forma de triángulo rectángulo isósceles, con base de 6 pies y altura de 3 pies, se sumerge verticalmente, con la base hacia arriba, 2 pies por debajo de la superficie de una alberca. Determinar la fuerza ejercida por el agua contra un lado de la placa.

Solución Establecemos un sistema de coordenadas para trabajar, colocando el origen en el vértice inferior de la placa y el eje y hacia arriba sobre el eje de simetría de la placa (figura 6.67). La superficie de la alberca está a lo largo de la recta $y = 5$ y el lado superior de la placa a lo largo de la recta $y = 3$. El cateto del lado derecho está a lo largo de la recta $y = x$, con el vértice superior derecho en (3, 3). La longitud de una franja delgada en el nivel y es

$$L(y) = 2x = 2y.$$

La profundidad de la franja por debajo de la superficie es $(5 - y)$. Por lo tanto, la fuerza ejercida por el agua contra un lado de la placa es

$$F = \int_a^b w \cdot \begin{pmatrix}\text{profundidad} \\ \text{de la franja}\end{pmatrix} \cdot L(y)\, dy \qquad \text{Ecuación (4)}$$

$$= \int_0^3 62.4(5 - y)2y\, dy$$

$$= 124.8 \int_0^3 (5y - y^2)\, dy$$

$$= 124.8\left[\frac{5}{2}y^2 - \frac{y^3}{3}\right]_0^3 = 1684.8 \text{ lb}.$$

Centroides y fuerzas de fluidos

Si conocemos la ubicación del centroide de una placa plana vertical sumergida (figura 6.68), podemos tomar un atajo para determinar la fuerza contra un lado de la placa. De acuerdo con la ecuación (4),

$$F = \int_a^b w \times (\text{profundidad de la franja}) \times L(y)\, dy$$

$$= w \int_a^b (\text{profundidad de la franja}) \times L(y)\, dy$$

$$= w \times (\text{momento respecto de la línea del nivel de superficie de la región ocupada por la placa})$$

$$= w \times (\text{profundidad del centroide de la placa}) \times (\text{área de la placa}).$$

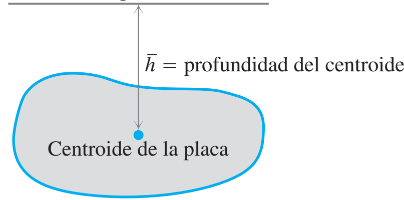


FIGURA 6.68 La fuerza ejercida contra un lado de la placa es $w \cdot \bar{h} \cdot$ área de la placa.

Fuerza de fluidos y centroides
La fuerza de un fluido de densidad w contra un lado de una placa plana vertical sumergida, es el producto de w, la distancia $\bar{h}$ entre el centroide de la placa y la superficie del fluido, y el área de la placa:

$$F = w\bar{h}A. \qquad (5)$$

EJEMPLO 2 Determinación de la fuerza de un fluido por medio de la ecuación (5)

Utilizar la ecuación (5) para determinar la fuerza del ejemplo 1.

Solución El centroide del triángulo (figura 6.67) está en el eje y, a un tercio de la distancia entre la base y el vértice, así que $\bar{h} = 3$. El área del triángulo es

$$A = \frac{1}{2}(\text{base})(\text{altura})$$

$$= \frac{1}{2}(6)(3) = 9.$$

En consecuencia,

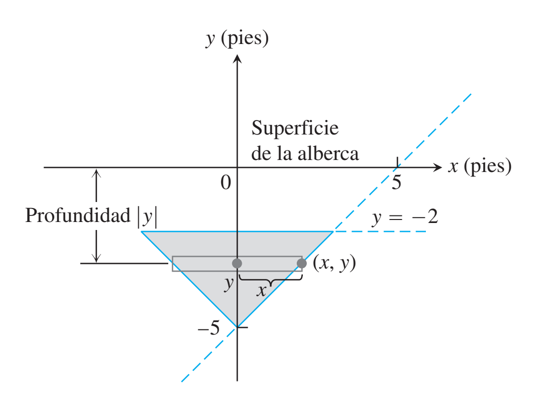
$$F = w\bar{h}A = (62.4)(3)(9)$$

$$= 1684.8 \text{ lb}.$$

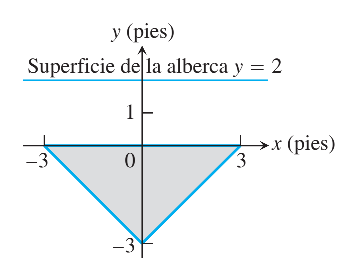
EJERCICIOS 6.7

En los ejercicios siguientes, las densidades de los fluidos pueden determinarse en la tabla de la página 456.

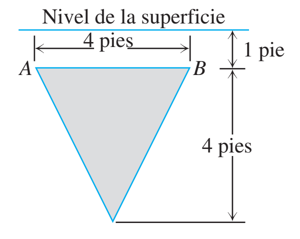
1. **Placa triangular** Calcule la fuerza del fluido sobre un lado de la placa del ejemplo 1, utilizando el sistema de coordenadas que se muestra aquí.



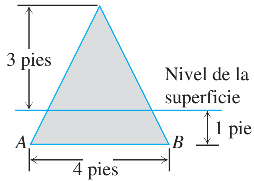
2. **Placa triangular** Calcule el fuerza del fluido sobre un lado de la placa del ejemplo 1, utilizando el siguiente sistema de coordenadas.



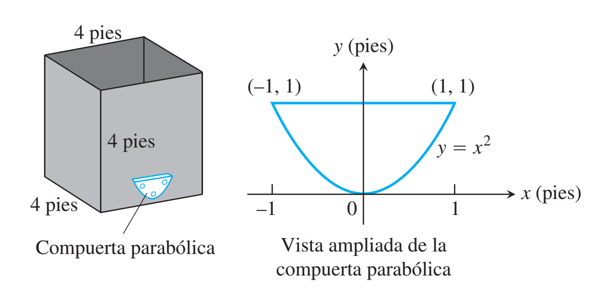
3. **Placa triangular sumergida** La placa del ejemplo 1 se sumerge otros 2 pies en el agua. ¿Cuál es ahora la fuerza del fluido sobre un lado de la placa?
4. **Placa triangular** La placa del ejemplo 1 se sube, colocando su parte superior en la superficie de la alberca. ¿Cuál es ahora la fuerza del fluido sobre un lado de la placa?
5. **Placa triangular** La placa con forma de triángulo isósceles que se muestra a continuación se sumerge verticalmente 1 pie por debajo de la superficie de un lago de agua dulce.
   a. Determine la fuerza del fluido contra una cara de la placa.
   b. ¿Cuál sería la fuerza del fluido sobre un lado de la placa, si el agua fuera de mar en lugar de ser agua dulce?



6. **Placa triangular girada** La placa del ejercicio 5 se gira 180° respecto de la recta AB, de modo que parte de la placa sobresale del lago, como se muestra a continuación. ¿Cuál es ahora la fuerza que ejerce el agua sobre una cara de la placa?



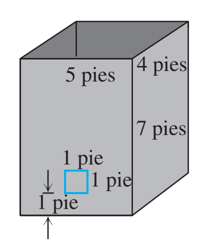
7. **Acuario de Nueva Inglaterra** El visor de una ventana rectangular de vidrio en una pecera típica del Acuario de Nueva Inglaterra en Boston mide 63 pulgadas de ancho y va de 0.5 a 33.5 pulgadas bajo la superficie. Determine la fuerza del fluido contra esta parte de la ventana. La densidad del agua de mar es de 64 lb/pie^3. (Por si le interesa, el vidrio tiene un espesor de 3/4 pulgada y las paredes del tanque se extienden 4 pulgadas por arriba del nivel del agua para evitar que los peces salten al exterior).
8. **Pecera** Una pecera horizontal con forma rectangular, cuya base mide 2×4 pies y tiene una altura de 2 pies (dimensiones interiores) se llena con agua dulce hasta 2 pulgadas antes de la parte superior.
   a. Determine la fuerza del fluido contra cada lado y contra el fondo del tanque.
   b. El tanque se sella y se coloca de modo que uno de los extremos cuadrados sea la base. ¿Cómo afecta esto las fuerzas del fluido contra los lados rectangulares?
9. **Placa semicircular** Una placa semicircular de 2 pies de diámetro se sumerge en agua fresca, colocando el diámetro a lo largo de la superficie. Determine la fuerza ejercida por el agua sobre un lado de la placa.
10. **Transporte de leche** Un camión transporta leche en un tanque con forma de cilindro circular recto horizontal. ¿Cuál es la fuerza que ejerce la leche sobre cada extremo del tanque cuando éste contiene leche hasta la mitad de su capacidad?
11. El tanque cúbico de metal que se muestra a continuación tiene una puerta parabólica, que se mantiene en su lugar por medio de tornillos y fue diseñado para soportar una fuerza del fluido de 160 lb sin romperse. El líquido que se planea almacenar en él tiene una densidad de 50 lb/pie^3.
    a. ¿Cuál es la fuerza del fluido sobre la puerta cuando el líquido tiene 2 pies de profundidad?
    b. ¿Cuál es la altura máxima a la que puede llenarse el depósito sin exceder sus limitaciones de diseño?



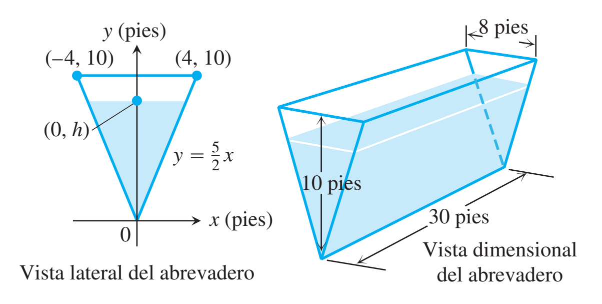
12. El tanque rectangular que se muestra a continuación tiene una ventana cuadrada de 1 pie × 1 pie, ubicada 1 pie arriba de la base. La ventana está diseñada para soportar una fuerza de 312 lb sin romperse.

a. Si el tanque se llena hasta una profundidad de 3 pies, ¿cuál es la fuerza del fluido que soportará?

b. ¿Hasta qué nivel puede llenarse el tanque sin exceder las limitaciones del diseño de la ventana?



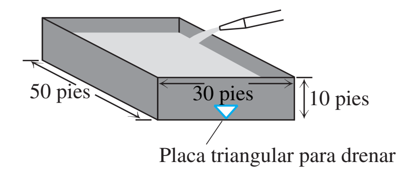
13. Las paredes de los extremos del abrevadero que se ilustra aquí fueron diseñadas para soportar una fuerza de 6667 lb. ¿Cuántos pies cúbicos de agua puede contener el tanque sin exceder esta limitación? Redondee su resultado al pie cúbico más cercano.

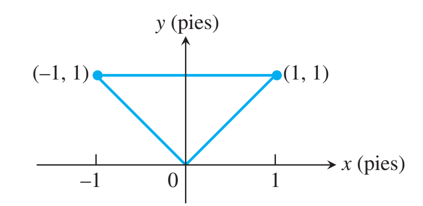


14. La piscina que se muestra a continuación se llena con agua a razón de 1000 pies^3/h.

a. Determine la fuerza del fluido contra la placa de drenado triangular después de 9 h de llenar la piscina.

b. La placa de drenado está diseñada para soportar una fuerza de 520 lb. ¿Hasta qué altura se puede llenar la piscina sin exceder esta limitación?

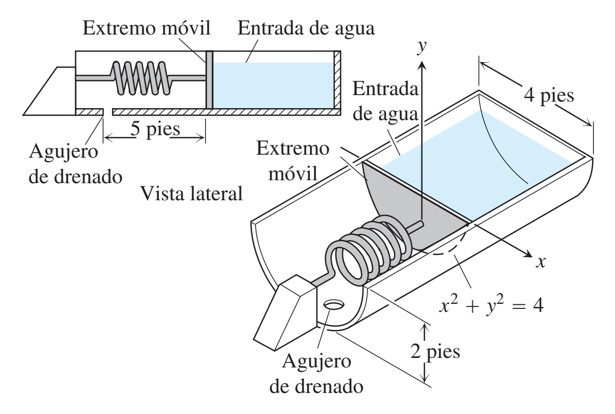




15. Una placa rectangular vertical de a unidades de largo por b unidades de ancho se sumerge en un fluido con densidad w, con sus aristas más largas paralelas a la superficie del fluido. Determine el valor promedio de la presión a lo largo de la dimensión vertical de la placa. Explique su respuesta.

16. (*Continuación del ejercicio 15*). Demuestre que la fuerza ejercida por el fluido sobre un lado de la placa es el valor promedio de la presión (determinada en el ejercicio 15) por el área de la placa.

17. Se vierte agua en el tanque que se muestra a continuación, a razón de 4 pies^3/min. Las secciones transversales del tanque son semicírculos de 4 pies de diámetro. Un extremo del tanque es móvil, pero moverlo para aumentar el volumen comprime un resorte. La constante del resorte es $k = 100$ lb/pie. Si el extremo del tanque se mueve 5 pies contra el resorte, el agua se drenará por un agujero de seguridad que está en el fondo, a razón de 5 pies^3/min. ¿Alcanzará el extremo móvil el agujero antes de que el agua se derrame del tanque?



18. Abrevadero Los extremos verticales de un abrevadero son cuadrados de 3 pies por lado.

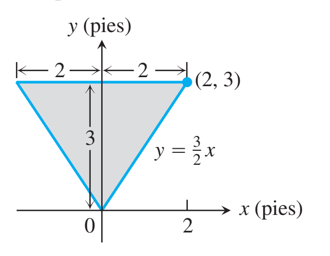
a. Determine la fuerza del fluido contra los extremos cuando el abrevadero está lleno.

b. ¿Cuántas pulgadas debe bajar el nivel del agua en el abrevadero para reducir en un 25% la fuerza del fluido?

19. Envase de leche Un envase rectangular para leche mide 3.75 × 3.75 pulgadas en la base y tiene una altura de 7.75 pulgadas. Determine la fuerza de la leche sobre un lado cuando el envase se encuentra lleno.

20. Lata de aceite de oliva Una lata común de aceite de oliva mide 5.75 × 3.5 pulgadas en la base y 10 pulgadas de altura. Determine la fuerza del fluido contra la base y contra cada lado cuando se encuentra llena.

21. Abrevadero Los extremos verticales de un abrevadero son triángulos isósceles como el que se muestra a continuación (las dimensiones están en pies).

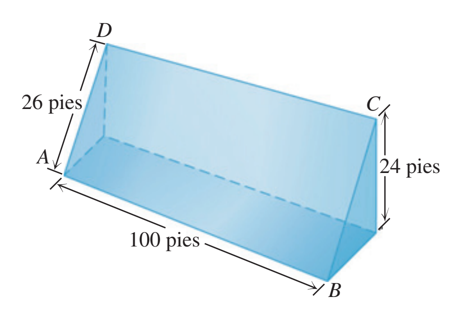


a. Determine la fuerza del fluido contra los extremos cuando el abrevadero está lleno.

b. ¿Cuántas pulgadas debe disminuir el nivel de agua del abrevadero para que la fuerza del fluido se reduzca a la mitad? (Redondee su respuesta a la media pulgada más cercana).

c. ¿Importa cuál sea la longitud del abrevadero? Justifique su respuesta.

22. La pared de una presa es un rectángulo, $ABCD$, de dimensiones $AB = CD = 100$ pies, $AD = BC = 26$ pies. En lugar de ser vertical, el plano $ABCD$ está inclinado, como se indica en la figura siguiente, de modo que la parte superior de la presa está 24 pies por encima de la parte inferior. Determine la fuerza debida a la presión del agua sobre la presa cuando la superficie del agua está al nivel de la parte superior de la presa.



Capítulo 6 Preguntas de repaso

1. ¿Cómo se definen y calculan los volúmenes de sólidos utilizando el método de las rebanadas? Proporcione un ejemplo.
2. ¿Cómo se deducen los métodos de los discos y de las arandelas para el cálculo de volúmenes a partir del método de las rebanadas? Proporcione ejemplos de cálculo de volúmenes con estos métodos.
3. Describa el método de los casquillos cilíndricos. Dé un ejemplo.
4. ¿Cómo se define la longitud de una curva suave parametrizada $x = f(t), y = g(t), a \leq t \leq b$? ¿Qué tiene que ver la suavidad con la longitud? ¿Qué otra cosa necesita saber respecto de la parametrización para determinar la longitud de una curva? Proporcione ejemplos.
5. ¿Cómo se determina la longitud de la gráfica de una función suave en un intervalo cerrado? Proporcione un ejemplo. ¿Qué puede decir acerca de las funciones que no tienen primeras derivadas continuas?
6. ¿Qué es el centro de masa?
7. ¿Cómo se localiza el centro de masa de una varilla o una franja delgada y recta de material? Proporcione un ejemplo. Si la densidad del material es constante, puede saber de inmediato en dónde se encuentra el centro de masa ¿En dónde está?
8. ¿Cómo se localiza el centro de masa de una placa delgada y plana de material? Proporcione un ejemplo.
9. ¿Cómo se define y calcula el área de una superficie barrida al hacer girar la gráfica de una función suave $y = f(x), a \leq x \leq b$, alrededor del eje x? Proporcione un ejemplo.
10. ¿En qué condiciones se puede determinar el área de la superficie generada al hacer girar una curva $x = f(t), y = g(t), a \leq t \leq b$, alrededor del eje x? ¿Alrededor del eje y? Proporcione ejemplos.
11. ¿Qué dicen los dos teoremas de Pappus? Proporcione ejemplos de cómo se utilizan para calcular áreas y volúmenes de superficies y para localizar centroides.
12. ¿Cómo se define y calcula el trabajo realizado por una fuerza variable dirigida a lo largo de un intervalo del eje x? ¿Cómo se calcula el trabajo necesario para bombear un líquido desde un tanque? Proporcione ejemplos.
13. ¿Cómo se calcula la fuerza ejercida por un líquido contra una parte de una pared vertical? Proporcione un ejemplo.

Capítulo 6 Ejercicios de práctica

Volúmenes

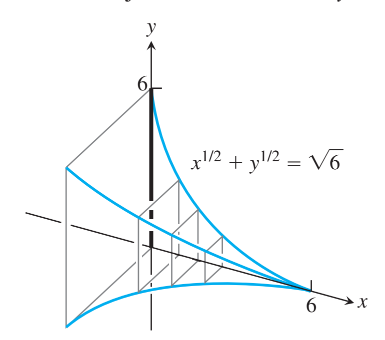
En los ejercicios 1 a 16, determine los volúmenes de los sólidos.

1. El sólido está entre los planos perpendiculares al eje x en $x = 0$ y $x = 1$. Las secciones transversales perpendiculares al eje x entre estos planos son discos circulares cuyos diámetros van de la parábola $y = x^2$ a la parábola $y = \sqrt{x}$.
2. La base del sólido es la región en el primer cuadrante entre la recta $y = x$ y la parábola $y = 2\sqrt{x}$. Las secciones transversales del

sólido, perpendiculares al eje x, son triángulos equiláteros cuyas bases se extienden de la recta a la curva.

3. El sólido está entre los planos perpendiculares al eje x en $x = \pi/4$ y $x = 5\pi/4$. Las secciones transversales entre estos planos son discos circulares cuyos diámetros van de la curva $y = 2 \cos x$ a la curva $y = 2$ sen x.

4. El sólido está entre los planos perpendiculares al eje x en $x = 0$ y $x = 6$. Las secciones transversales entre estos planos son cuadrados cuyas bases van del eje x a la curva $x^{1/2} + y^{1/2} = \sqrt{6}$.



5. El sólido está entre los planos perpendiculares al eje x en $x = 0$ y $x = 4$. Las secciones transversales del sólido entre estos planos, perpendiculares al eje x, son discos circulares cuyos diámetros van de la curva $x^2 = 4y$ a la curva $y^2 = 4x$.

6. La base del sólido es la región acotada por la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $x = 1$ en el plano xy. Cada sección transversal perpendicular al eje x es un triángulo equilátero con un lado en el plano. (Todos los triángulos están en el mismo lado del plano).

7. Determine el volumen del sólido generado al hacer girar la región acotada por el eje x, la curva $y = 3x^4$ y las rectas $x = 1$ y $x = -1$ alrededor **(a)** del eje x; **(b)** del eje y; **(c)** de la recta $x = 1$; **(d)** de la recta $y = 3$.

8. Determine el volumen del sólido generado al hacer girar la región "triangular" acotada por la curva $y = 4/x^3$ y las rectas $x = 1$ y $y = 1/2$ alrededor **(a)** del eje x; **(b)** del eje y; **(c)** de la recta $x = 2$; **(d)** de la recta $y = 4$.

9. Determine el volumen del sólido generado al hacer girar la región acotada a la izquierda por la parábola $x = y^2 + 1$, y a la derecha por la recta $x = 5$, alrededor **(a)** del eje x; **(b)** del eje y; **(c)** de la recta $x = 5$.

10. Determine el volumen del sólido generado al hacer girar la región acotada por la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $y = x$, alrededor **(a)** del eje x; **(b)** del eje y; **(c)** de la recta $x = 4$; **(d)** de la recta $y = 4$.

11. Determine el volumen del sólido generado al hacer girar alrededor del eje x la región "triangular" acotada por el eje x, la recta $x = \pi/3$ y la curva $y = \tan x$ en el primer cuadrante.

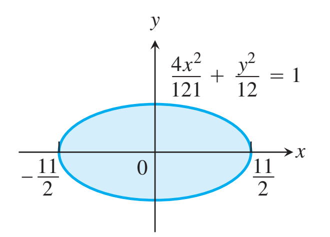
12. Determine el volumen del sólido generado al hacer girar la región acotada por la curva $y =$ sen x y las rectas $x = 0, x = \pi$ y $y = 2$ alrededor de la recta $y = 2$.

13. Determine el volumen del sólido generado al hacer girar la región entre el eje x y la curva $y = x^2 - 2x$ alrededor **(a)** del eje x; **(b)** de la recta $y = -1$; **(c)** de la recta $x = 2$; **(d)** de la recta $y = 2$.

14. Determine el volumen del sólido generado al hacer girar, alrededor del eje x, la región acotada por $y = 2 \tan x, y = 0, x = -\pi/4$, y $x = \pi/4$. (La región está en el primer y tercer cuadrantes y se asemeja a una corbata de moño).

15. Volumen de un sólido con un agujero redondo Se hace un agujero redondo de radio $\sqrt{3}$ pies a través del centro de una esfera sólida de 2 pies de radio. Determine el volumen del material removido de la esfera.

16. Volumen de un balón de fútbol americano El perfil de un balón de fútbol americano semeja la elipse que se muestra a continuación. Determine el volumen del balón, aproximando a la pulgada cúbica más cercana.



Longitud de curvas

En los ejercicios 17 a 23, determine las longitudes de las curvas.

17. $y = x^{1/2} - (1/3)x^{3/2}, \quad 1 \le x \le 4$

18. $x = y^{2/3}, \quad 1 \le y \le 8$

19. $y = (5/12)x^{6/5} - (5/8)x^{4/5}, \quad 1 \le x \le 32$

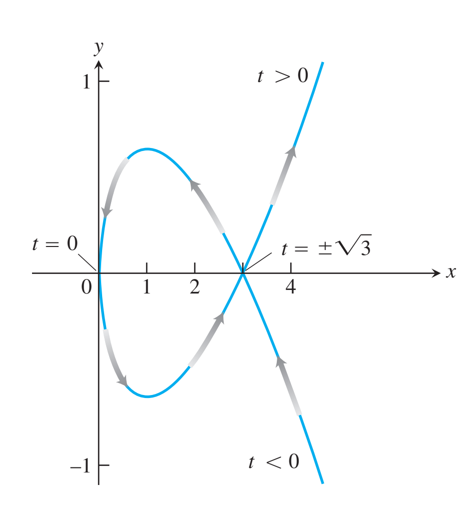
20. $x = (y^3/12) + (1/y), \quad 1 \le y \le 2$

21. $x = 5 \cos t - \cos 5t, \quad y = 5$ sen $t -$ sen $5t, \quad 0 \le t \le \pi/2$

22. $x = t^3 - 6t^2, \quad y = t^3 + 6t^2, \quad 0 \le t \le 1$

23. $x = 3 \cos \theta, \quad y = 3$ sen $\theta, \quad 0 \le \theta \le \dfrac{3\pi}{2}$

24. Determine la longitud del rizo formado por $x = t^2$, $y = (t^3/3) - t$ que se muestra a continuación. El rizo inicia en $t = -\sqrt{3}$ y termina en $t = \sqrt{3}$.



Centroides y centros de masa

25. Determine el centroide de una placa plana delgada que cubre la región acotada por las parábolas $y = 2x^2$ y $y = 3 - x^2$.

26. Determine el centroide de una placa plana delgada que cubre la región acotada por el eje x, las rectas $x = 2$, $x = -2$ y la parábola $y = x^2$.

27. Determine el centroide de una placa plana delgada que cubre la región "triangular" en el primer cuadrante, acotada por el eje y, la parábola $y = x^2/4$ y la recta $y = 4$.

28. Determine el centroide de una placa plana delgada que cubre la región acotada por la parábola $y^2 = x$ y la recta $x = 2y$.

29. Determine el centro de masa de una placa plana delgada que cubre la región acotada por la parábola $y^2 = x$ y la recta $x = 2y$, si la función de densidad es $\delta(y) = 1 + y$. (Utilice franjas horizontales).

30. **a.** Determine el centro de masa de una placa delgada de densidad constante que cubre la región entre la curva $y = 3/x^{3/2}$ y el eje x, de $x = 1$ a $x = 9$.

b. Determine el centro de masa de la placa si, en lugar de tener densidad constante, la densidad es $\delta(x) = x$. (Utilice franjas verticales).

Áreas de superficies de rotación

En los ejercicios 31 a 36, determine el área de cada superficie generada al hacer girar la curva alrededor del eje dado.

31. $y = \sqrt{2x + 1}, \quad 0 \leq x \leq 3; \quad$ eje x

32. $y = x^3/3, \quad 0 \leq x \leq 1; \quad$ eje x

33. $x = \sqrt{4y - y^2}, \quad 1 \leq y \leq 2; \quad$ eje y

34. $x = \sqrt{y}, \quad 2 \leq y \leq 6; \quad$ eje y

35. $x = t^2/2, \quad y = 2t, \quad 0 \leq t \leq \sqrt{5}; \quad$ eje x

36. $x = t^2 + 1/(2t), \quad y = 4\sqrt{t}, \quad 1/\sqrt{2} \leq t \leq 1; \quad$ eje y

Trabajo

37. Subir un equipo Una alpinista subirá su equipo, que está debajo de ella y pesa 100 N (aproximadamente 22.5 lb), utilizando una cuerda de 40 m que pesa 0.8 newtons por metro. ¿Cuánto trabajo realizará? (*Sugerencia*: Resuelva para la cuerda y para el equipo por separado, y luego sume los resultados).

38. Tanque con gotera Usted manejó un camión, desde la base hasta la cima del monte Washington, llevando un tanque de 800 galones de agua. Al llegar a su destino, descubre que el tanque sólo contiene agua hasta la mitad de su capacidad. Al iniciar su viaje tenía el tanque lleno, subió el monte a una velocidad constante y realizó el ascenso de 4750 pies en 50 minutos. Suponiendo que el agua se derramó a razón constante, ¿cuánto trabajo requirió para llevar el agua hasta la cima? No tome en cuenta el trabajo que se necesitó para que usted y su camión subieran el monte. El agua pesa 8 lb/galón.

39. Estiramiento de un resorte Si se requiere una fuerza de 20 lb para mantener estirado un resorte a un pie de su longitud natural, ¿cuánto trabajo se necesita para estirar el resorte a esta distancia? ¿Cuánto trabajo se requiere para estirarlo un pie más?

40. Resorte de una puerta de garaje Una fuerza de 200 N estirará el resorte de una puerta de garaje 0.8 m más que su longitud natural. ¿Cuánto estirará el resorte una fuerza de 300 N? ¿Cuánto trabajo se requerirá para estirar el resorte esta distancia respecto de su longitud natural?

41. Bombeo desde un depósito Un depósito con forma de cono circular recto con la punta hacia abajo mide 20 pies de diámetro en la parte superior y tiene una profundidad de 8 pies; el depósito está completamente lleno de agua. ¿Cuánto trabajo será necesario realizar para bombear el agua a un nivel de 6 pies por encima de la parte superior del depósito?

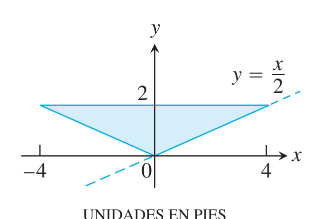
42. Bombeo desde un depósito (*Continuación del ejercicio 41*). El depósito está lleno a una profundidad de 5 pies, y el agua será bombeada al borde de la parte superior del depósito. ¿Cuánto trabajo será necesario?

43. Bombeo a un tanque cónico Un tanque en forma de cono circular recto con la punta hacia abajo tiene un radio superior de 5 pies y una altura de 10 pies; el tanque está lleno con un líquido cuya densidad es 60 lb/pie^3. ¿Cuánto trabajo se requiere para bombear el líquido a un punto situado 2 pies arriba del tanque? Si la bomba tiene un motor de 275 lb-pie/seg (1/2 hp), ¿cuánto tardará en vaciar el tanque?

44. Bombeo de un tanque cilíndrico Un tanque de almacenamiento tiene forma de cilindro circular recto de 20 pies de largo y 8 pies de diámetro con su eje en posición horizontal. Si el tanque está lleno hasta la mitad con aceite de oliva, que pesa 57 lb/pie^3, determine el trabajo realizado al vaciarlo a través de un tubo que va de la parte inferior del tanque a una salida que se encuentra 6 pies por encima de la parte superior.

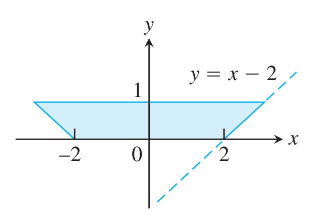
Fuerza en fluidos

45. Abrevadero La placa triangular vertical que se muestra a continuación es el extremo de un abrevadero completamente lleno de agua ($w = 62.4$). ¿Cuál es la fuerza del fluido sobre la placa?



UNIDADES EN PIES

46. Abrevadero de miel de maple La placa trapezoidal vertical que se muestra a continuación, es el extremo de un abrevadero lleno de miel de maple, que pesa 75 lb/pie^3. ¿Cuál es la fuerza ejercida por la miel contra la placa del abrevadero cuando la miel tiene una profundidad de 10 pulgadas?



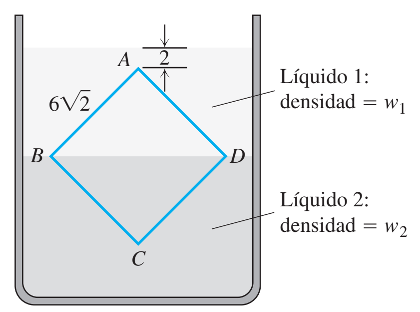
UNIDADES EN PIES

47. Fuerza sobre una compuerta parabólica Una compuerta plana vertical ubicada en la cortina de una presa, tiene la forma de una región parabólica comprendida entre la curva $y = 4x^2$ y la recta $y = 4$, con las medidas en pies. La parte superior de la compuerta está 5 pies por debajo de la superficie del agua. Determine la fuerza ejercida por el agua sobre la compuerta ($w = 62.4$).

T **48.** Usted planea almacenar mercurio ($w = 849$ lb/pie^3) en un tanque rectangular vertical con una base cuadrada de 1 pie por lado, cuya pared lateral interna puede soportar una fuerza total de 40,000 lb.

Aproximadamente, ¿cuántos pies cúbicos de mercurio puede almacenar en el tanque en cualquier momento?

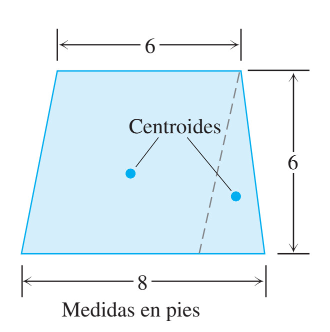
49. El contenedor que se bosqueja en la figura siguiente, se llena con dos líquidos que no se mezclan, de densidades w_1 y w_2. Determine la fuerza del fluido sobre un lado de la placa cuadrada vertical *ABCD*. Los puntos *B* y *D* se encuentran en la capa que divide los líquidos, y el cuadrado mide $6\sqrt{2}$ pies por lado.



50. La placa con forma de trapecio isósceles que se muestra a continuación, se sumerge verticalmente en agua ($w = 62.4$) con su lado superior a 4 pies por debajo de la superficie. Determine, de dos formas diferentes, la fuerza del fluido sobre uno de los lados de la placa:

a. Por medio de la evaluación de una integral.

b. Por medio de la división de la placa en un paralelogramo y un triángulo isósceles, localizando sus centroides y utilizando la ecuación $F = w\bar{h}A$ de la sección 6.7.



Capítulo 6 Ejercicios adicionales y avanzados

Volumen y longitud

1. Se genera un sólido haciendo girar, alrededor del eje x, la región acotada por la gráfica de la función continua positiva $y = f(x)$, el eje x y la recta fija $x = a$, y la recta variable $x = b$, $b > a$. Su volumen, para toda b, es $b^2 - ab$. Determine $f(x)$.

2. Se genera un sólido haciendo girar, alrededor del eje x, la región acotada por la gráfica de la función continua positiva $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = 0$ y $x = a$. Su volumen, para toda $a > 0$, es $a^2 + a$. Determine $f(x)$.

3. Suponga que la función creciente $f(x)$ es suave para $x \geq 0$ y que $f(0) = a$. Denote con $s(x)$ la longitud de la gráfica de f desde $(0, a)$ hasta $(x, f(x))$, $x > 0$. Determine $f(x)$, si $s(x) = Cx$, para alguna constante C. ¿Cuáles valores puede tomar C?

4. a. Demuestre que para $0 < \alpha \leq \pi/2$,

$$\int_0^{\alpha} \sqrt{1 + \cos^2\theta}\, d\theta > \sqrt{\alpha^2 + \operatorname{sen}^2\alpha}.$$

b. Generalice el resultado del inciso (a).

Momentos y centros de masa

5. Determine el centroide de la región acotada por abajo por el eje x y por arriba por la curva $y = 1 - x^n$; n es un entero positivo par. ¿Cuál es la posición límite del centroide, cuando $n \to \infty$?

6. Si transporta un poste telefónico en un remolque de dos ruedas unido a la parte trasera de un camión, quiere que las ruedas estén a 3 pies, aproximadamente, detrás del centro de masa del poste para tener una distribución adecuada del peso. Los postes de clase 1 de 40 pies de NYNEX tienen una circunferencia en la parte superior de 27 pulgadas, y una circunferencia de 43.5 pulgadas en la base. ¿Aproximadamente a qué distancia de la parte superior se encuentra el centro de masa?

7. Suponga que una placa delgada de metal de área A y densidad constante δ, ocupa una región R en el plano xy y sea M_y el momento de la placa respecto del eje y. Demuestre que el momento de la placa respecto de la recta $x = b$ es

a. $M_y - b\delta A$ si la placa está a la derecha de la recta, y

b. $b\delta A - M_y$ si la placa está a la izquierda de la recta.

8. Determine el centro de masa de una placa delgada que cubre la región acotada por la curva $y^2 = 4ax$ y la recta $x = a$, siendo a una constante positiva, si la densidad en (x, y) es directamente proporcional a **(a)** x, **(b)** $|y|$.

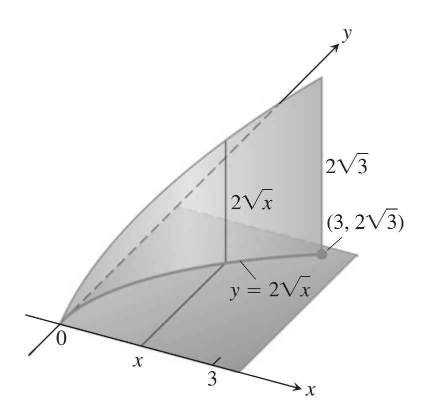
9. a. Determine el centroide de la región en el primer cuadrante, acotada por dos circunferencias concéntricas y los ejes coordenados, si las circunferencias tienen radios a y b, $0 < a < b$, y sus centros están en el origen.

b. Determine los límites de las coordenadas del centroide cuando a se aproxima a b, y analice el significado del resultado.

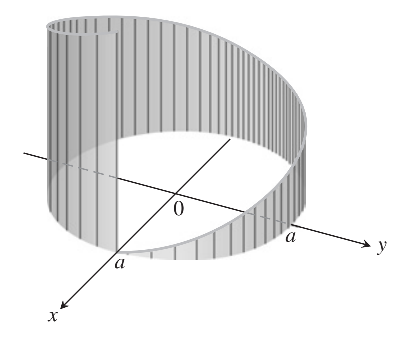
10. Una esquina triangular se corta a partir de un cuadrado de 1 pie por lado. El área del triángulo que se removió es de 36 pulgadas^2. Si el centroide de la región restante está a 7 pulgadas de un lado del cuadrado original, ¿a qué distancia está de los otros lados?

Área de superficie

11. En los puntos de la curva $y = 2\sqrt{x}$, se trazan segmentos de longitud $h = y$, que son perpendiculares al plano xy. (Vea la figura siguiente.) Determine el área de la superficie formada por estas perpendiculares desde $(0, 0)$ hasta $(3, 2\sqrt{3})$.



12. En los puntos de la circunferencia de radio a, se trazan segmentos perpendiculares al plano de la circunferencia; la perpendicular en cada punto P tiene una longitud ks, en donde s es la longitud del arco de la circunferencia medido en sentido contrario al de las manecillas del reloj, de $(a, 0)$ a P y k es una constante positiva, como se muestra a continuación. Determine el área de la superficie formada por las perpendiculares a lo largo del arco que empieza en $(a, 0)$ y se extiende una vez alrededor de la circunferencia.



Trabajo

13. Una partícula de masa m parte del reposo en el instante $t = 0$ y se mueve a lo largo del eje x con aceleración constante a, desde $x = 0$ hasta $x = h$ en contra de una fuerza variable de magnitud $F(t) = t^2$. Determine el trabajo realizado.

14. **Trabajo y energía cinética** Suponga que una pelota de golf de 1.6 onzas se coloca en un resorte vertical con constante $k = 2$ lb/pulgadas. El resorte se comprime 6 pulgadas y después se suelta. ¿Qué altura alcanza la pelota (medida desde la posición de reposo del resorte)?

Fuerza en fluidos

15. Una placa triangular ABC se sumerge en agua con su plano vertical. El lado AB, de longitud 4 pies, está 6 pies por debajo de la superficie del agua, mientras que el vértice C está 2 pies debajo de la superficie. Determine la fuerza ejercida por el agua sobre un lado de la placa.

16. Una placa rectangular vertical se sumerge en un fluido, con su lado superior paralelo a la superficie del fluido. Muestre que la fuerza ejercida por el fluido en un lado de la placa es igual al valor promedio de la presión arriba y abajo de la placa multiplicada por el área de ésta.

17. El *centro de presión* en un lado de una región plana sumergida en un fluido se define como el punto en donde la fuerza total ejercida por el fluido puede aplicarse sin cambiar el momento total respecto de cualquier eje del plano. Determine la profundidad del centro de presión **(a)** en un rectángulo vertical de altura h y ancho b, si su borde superior está en la superficie del fluido; **(b)** en un triángulo vertical de altura h y base b, si el vértice opuesto a b tiene a pies y la base b está $(a + h)$ pies por debajo de la superficie del fluido.

Capítulo 6 Proyectos de aplicación tecnológica

Módulo Mathematica/Maple

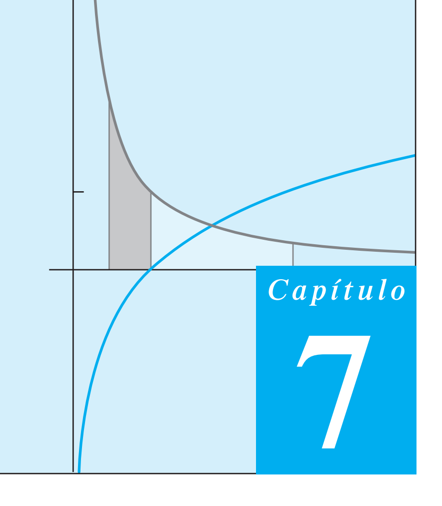
Uso de sumas de Riemann para estimar áreas, volúmenes y longitudes de curvas

Visualice y aproxime áreas y volúmenes en las **Partes I** y **II**: Volúmenes de revolución; y **Parte III**: Longitudes de curvas.

Módulo Mathematica/Maple

Modelado de la cuerda para salto bungee

Recopile datos (o utilice datos previamente recopilados) para construir y afinar un modelo para la fuerza ejercida por la cuerda utilizada en saltos *bungee*. Utilice el teorema de trabajo-energía para calcular la distancia que cae cierta persona que salta con una cuerda de bungee de longitud dada.



Capítulo 7

FUNCIONES TRASCENDENTES

INTRODUCCIÓN Las funciones pueden clasificarse en dos grandes grupos (vea la sección 1.4). Las funciones polinomiales se denominan *algebraicas*, por ser funciones que se obtienen a partir de suma, multiplicación, división o al tomar potencias o raíces. Por su parte, las funciones no algebraicas se denominan *trascendentes.* Las funciones trigonométricas, exponenciales, logarítmicas e hiperbólicas, así como sus inversas, son trascendentes.

Las funciones transcendentes suelen utilizarse en muchas aplicaciones, por ejemplo, en la determinación del crecimiento de poblaciones, el cálculo de vibraciones y ondas, la eficiencia de algoritmos de computadora y la estabilidad de estructuras de ingeniería. En este capítulo abordaremos varias funciones trascendentes importantes e investigaremos sus propiedades, sus gráficas y sus derivadas e integrales.

7.1 Funciones inversas y sus derivadas

La función que invierte, o deshace, el efecto de una función *f*, se denomina *inversa* de *f*. Muchas funciones comunes, aunque no todas, van aparejadas con su inversa. Es común que aparezcan funciones inversas importantes en las fórmulas para antiderivadas y en las soluciones de ecuaciones diferenciales. Como veremos en la sección 7.3. las funciones inversas también desempeñan un papel central en la definición y en las propiedades de las funciones logarítmica y exponencial.

Funciones inyectivas

Una función es una regla que asigna un valor, dentro de su rango, a cada uno de los puntos de su dominio. Algunas funciones asignan el mismo valor del rango a más de un elemento del dominio. La función $f(x) = x^2$ asigna el mismo valor, 1, a los números –1 y +1; tanto el seno de $\pi/3$ como el de $2\pi/3$ tienen el valor $\sqrt{3}/2$. Otras funciones asumen sólo una vez cada valor en su rango. La raíz cuadrada y el cubo de números diferentes son siempre diferentes. Una función que tiene valores distintos en elementos distintos de su dominio se denomina inyectiva (o función uno a uno). Estas funciones toman exactamente una vez cada valor de su rango.

DEFINICIÓN Función inyectiva (o uno a uno)
Una función $f(x)$ es **inyectiva** en el dominio D si $f(x_1) \neq f(x_2)$, siempre que $x_1 \neq x_2$ en D.

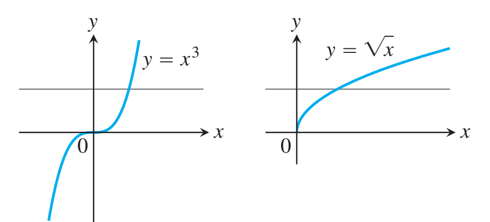
EJEMPLO 1 Dominio de funciones inyectivas

(a) $f(x) = \sqrt{x}$ es inyectiva en cualquier dominio de números no negativos, porque $\sqrt{x_1} \neq \sqrt{x_2}$ cuando $x_1 \neq x_2$.

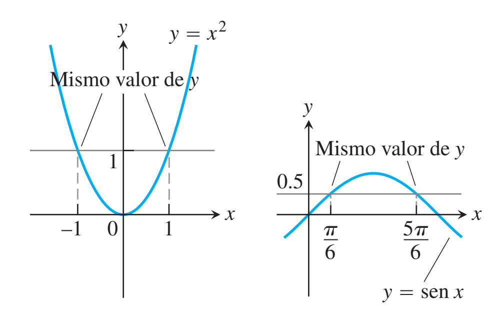
(b) $g(x) = \operatorname{sen} x$ *no es* inyectiva en el intervalo $[0, \pi]$, porque $\operatorname{sen}(\pi/6) = \operatorname{sen}(5\pi/6)$. Sin embargo, la función seno *es* inyectiva en $[0, \pi/2]$, ya que el seno es una función estrictamente creciente en $[0, \pi/2]$. ■

La gráfica de una función inyectiva $y = f(x)$ puede intersecar una recta horizontal dada a lo más una vez. Si la cruza más de una vez, toma el mismo valor de y en más de una ocasión y, por lo tanto, no es inyectiva (figura 7.1).

Prueba de la recta horizontal para funciones inyectivas
Una función $y = f(x)$ es inyectiva si y sólo si su gráfica interseca cada recta horizontal cuando mucho una vez.



Inyectiva: la gráfica corta cada recta horizontal a lo más en un punto.



No es inyectiva: la gráfica corta más de una vez a una o más rectas horizontales.

FIGURA 7.1 Por medio de la prueba de la recta horizontal, vemos que $y = x^3$ y $y = \sqrt{x}$ son inyectivas en sus dominios $(-\infty, \infty)$ y $[0, \infty)$, pero $y = x^2$ y $y = \operatorname{sen} x$ no son inyectivas en sus dominios $(-\infty, \infty)$.

Funciones inversas

Como cada valor (salida) de una función uno a uno proviene de una y sólo una entrada, el efecto de la función puede ser invertido, enviando la salida de regreso a la entrada de la que vino bajo la función.

DEFINICIÓN Función inversa

Suponga que f es una función inyectiva en un dominio D con rango R. La **función inversa** f^{-1} se define como

$$f^{-1}(a) = b \text{ si } f(b) = a.$$

El dominio de f^{-1} es R y su rango es D.

Los dominios y rangos de f y f^{-1} están intercambiados. El símbolo f^{-1} para la inversa de f se lee "inversa de f". El "–1" de f^{-1} *no* es un exponente: $f^{-1}(x)$ no significa $1/f(x)$.

Si aplicamos f para enviar un dato x al resultado $f(x)$ y enseguida aplicamos f^{-1} a $f(x)$, obtenemos nuevamente x, justo donde iniciamos. De manera análoga, si tomamos algún número y en el rango de f, le aplicamos f^{-1} y luego aplicamos f al valor resultante $f^{-1}(y)$, obtenemos una vez más el valor y con el que iniciamos. Componer una función y su inversa anula cualquier trabajo.

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x, \qquad \text{para toda } x \text{ en el dominio de } f$$

$$(f \circ f^{-1})(y) = y, \qquad \text{para toda } y \text{ en el dominio de } f^{-1} \text{ (o rango de } f)$$

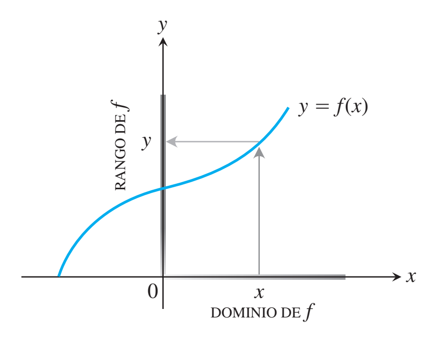
Sólo las funciones inyectivas pueden tener una inversa. La razón es que si $f(x_1) = y$ y $f(x_2) = y$ para dos datos distintos x_1 y x_2, no existe forma de asignar un valor a $f^{-1}(y)$ que satisfaga al mismo tiempo $f^{-1}(f(x_1)) = x_1$ y $f^{-1}(f(x_2)) = x_2$.

Una función que es creciente en un intervalo (aquella que satisface $f(x_2) > f(x_1)$ cuando $x_2 > x_1$) es inyectiva y tiene una inversa. Las funciones decrecientes también tienen una inversa (ejercicio 39). Las funciones que tienen derivada positiva en toda x son crecientes (vea el corolario 3 del Teorema del Valor Medio, en la sección 4.2) y, por lo tanto, tienen inversa. De manera similar, las funciones con derivada negativa en toda x son decrecientes y tienen inversa. Algunas funciones que no son crecientes ni decrecientes pueden ser, no obstante, inyectivas y tener una inversa, como la función $\sec^{-1} x$ de la sección 7.7.

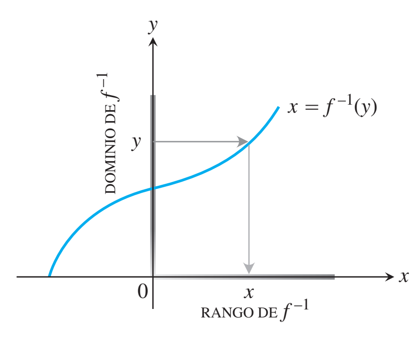
Determinación de la función inversa

Las gráficas de una función y su inversa están estrechamente relacionadas. Para conocer el valor de una función (por ejemplo, de y) a partir de su gráfica, iniciamos con un punto x en el eje x, vamos verticalmente a la gráfica y luego nos movemos horizontalmente hacia el eje y. La función inversa puede conocerse a partir de la gráfica con sólo revertir este proceso: iniciamos con un punto y en el eje y, vamos horizontalmente a la gráfica y luego nos movemos de forma vertical al eje x para leer el valor de $x = f^{-1}(y)$ (figura 7.2).

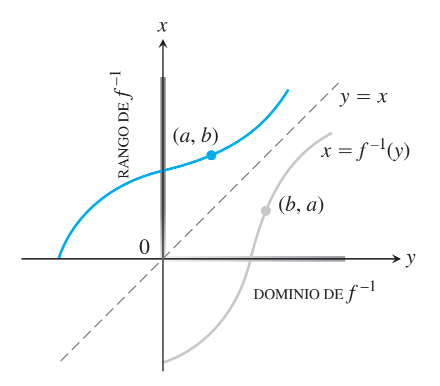
Queremos graficar f^{-1}, de modo que su dominio esté en el eje x, como se hace comúnmente en el caso de las funciones, en lugar de tenerlos en el eje y. Para realizar esto, intercambiamos los ejes x y y reflejando con respecto de la recta de 45° $y = x$. Después de esta reflexión tenemos una nueva gráfica que representa a f^{-1}. El valor de $f^{-1}(x)$ puede obtenerse ahora de la manera usual a partir de la gráfica, iniciando con un punto x en el eje x, avanzando hacia la gráfica en sentido vertical y luego moviéndonos de forma horizontal hacia el eje y para obtener el valor de $f^{-1}(x)$. La figura 7.2 indica la relación entre las gráficas de f y f^{-1}. Las gráficas se intercambian por medio de la reflexión con respecto a la recta $y = x$.



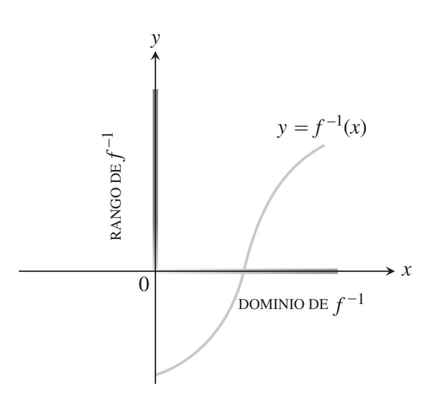
(a) Para determinar el valor de f en x, iniciamos en x, subimos hacia la curva y luego hacia al eje y.



(b) La gráfica de f ya es la gráfica de f^{-1}, pero con x y y intercambiados. Para determinar x dada y, iniciamos en y y vamos hacia la curva, para luego bajar al eje x. El dominio de f^{-1} es el rango de f. El rango de f^{-1} es el dominio de f.



(c) Para dibujar la gráfica de f^{-1} de la manera usual, reflejamos el sistema con respecto de la recta $y = x$.



(d) Después intercambiamos las letras x y y. Ahora tenemos la gráfica de f^{-1} en la forma usual, como una función de x.

FIGURA 7.2 Determinación de la gráfica de $y = f^{-1}(x)$ a partir de la gráfica de $y = f(x)$.

El proceso de pasar de f a f^{-1} puede resumirse en dos pasos.

1. Despejar x en la ecuación $y = f(x)$. Esto proporciona una fórmula $x = f^{-1}(y)$, en donde x se expresa como una función de y.
2. Intercambiar x y y para obtener una fórmula $y = f^{-1}(x)$, en donde f^{-1} se expresa en el formato convencional, con x como la variable independiente y y como la variable dependiente.

EJEMPLO 2 Determinación de una función inversa

Determinar la inversa de $y = \frac{1}{2}x + 1$, expresada como función de x.

Solución

1. *Despeje x en términos de y:*
$$y = \frac{1}{2}x + 1$$
$$2y = x + 2$$
$$x = 2y - 2.$$

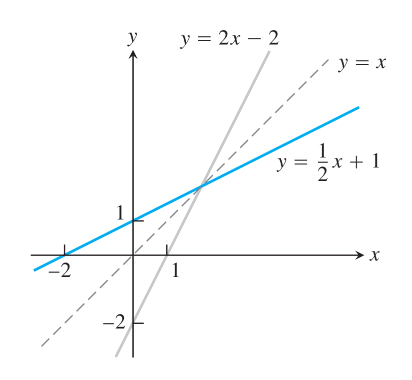


FIGURA 7.3 Al graficar juntas $f(x) = (1/2)x + 1$ y $f^{-1}(x) = 2x - 2$ se demuestra la simetría de las gráficas con respecto de la recta $y = x$. Las pendientes son recíprocas una de la otra (ejemplo 2).

2. *Intercambie x y y:* $y = 2x - 2$.

La inversa de la función $f(x) = (1/2)x + 1$ es la función $f^{-1}(x) = 2x - 2$. Para comprobarlo, hay que revisar si las dos funciones compuestas producen la función identidad:

$$f^{-1}(f(x)) = 2\left(\frac{1}{2}x + 1\right) - 2 = x + 2 - 2 = x$$

$$f(f^{-1}(x)) = \frac{1}{2}(2x - 2) + 1 = x - 1 + 1 = x.$$

Vea la figura 7.3. ■

EJEMPLO 3 Determinación de una función inversa

Determinar la inversa de la función $y = x^2, x \geq 0$, expresada como una función de x.

Solución Primero despejamos x en términos de y:

$$y = x^2$$

$$\sqrt{y} = \sqrt{x^2} = |x| = x \qquad |x| = x \text{ ya que } x \geq 0$$

Luego intercambiamos x y y, para obtener

$$y = \sqrt{x}.$$

La inversa de la función $y = x^2, x \geq 0$, es la función $y = \sqrt{x}$ (figura 7.4).

Observe que, a diferencia de la función restringida $y = x^2, x \geq 0$, la función no restringida $y = x^2$ no es inyectiva y, por lo tanto, no tiene inversa. ■

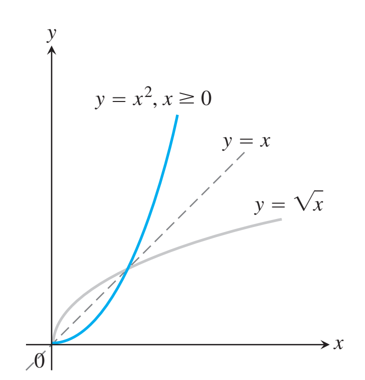


FIGURA 7.4 Las funciones $y = \sqrt{x}$ y $y = x^2, x \geq 0$, son inversas una de la otra (ejemplo 3).

Derivadas de inversas de funciones diferenciables

Si calculamos las derivadas de $f(x) = (1/2)x + 1$, y su inversa, $f^{-1}(x) = 2x - 2$ de acuerdo con el ejemplo 2, vemos que

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x + 1\right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{d}{dx}(2x - 2) = 2.$$

Las derivadas son recíprocas mutuamente. La gráfica de f es la recta $y = (1/2)x + 1$, y la gráfica de f^{-1} es la recta $y = 2x - 2$ (figura 7.3). Sus pendientes son recíprocas una de la otra.

Éste no es un caso especial. Siempre que cualquier recta no horizontal o no vertical se refleja con respecto de la recta $y = x$, su pendiente se invierte. Si la recta original tiene pendiente $m \neq 0$ (figura 7.5), la recta reflejada tendrá pendiente $1/m$ (ejercicio 36).

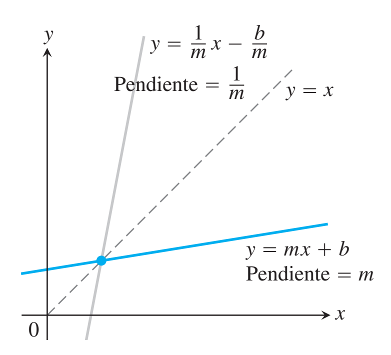
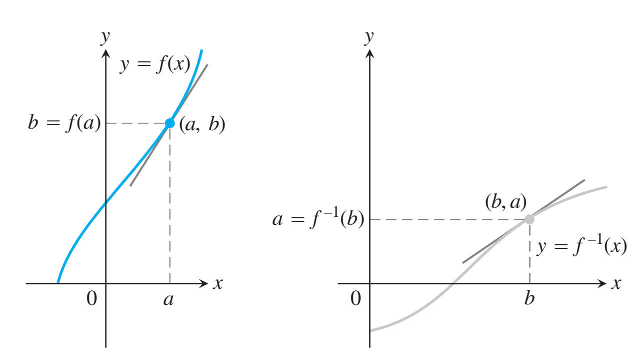


FIGURA 7.5 Las pendientes de rectas no verticales, reflejadas con respecto de la línea $y = x$, son recíprocas una de la otra.

La relación recíproca entre las pendientes de f y f^{-1} también es válida en el caso de otras funciones, pero debemos tener cuidado de comparar pendientes en puntos correspondientes. Si la pendiente de $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ es $f'(a)$ y $f'(a) \neq 0$, la pendiente de $y = f^{-1}(x)$ en el punto correspondiente $(f(a), a)$ es el recíproco $1/f'(a)$ (figura 7.6). Entonces, si hacemos $b = f(a)$,

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

Si $y = f(x)$ tiene una recta tangente horizontal en $(a, f(a))$, la función inversa f^{-1} tiene una recta tangente vertical en $(f(a), a)$, y esta pendiente infinita implica que f^{-1} no es diferen-



Las pendientes son recíprocas: $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$ o $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(b))}$

FIGURA 7.6 Las gráficas de funciones inversas tienen pendientes recíprocas en los puntos correspondientes.

ciable en $f(a)$. El teorema 1 proporciona las condiciones en las que f^{-1} es diferenciable en su dominio, que es el mismo que el rango de f.

TEOREMA 1 Regla de la derivada para inversas

Si f tiene un intervalo I como dominio y $f'(x)$ existe y nunca es cero en I, entonces f^{-1} es derivable en cada punto de su dominio. El valor de $(f^{-1})'$ en un punto b del dominio de f^{-1} es el recíproco del valor de f' en el punto $a = f^{-1}(b)$:

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

o

$$\left.\frac{df^{-1}}{dx}\right|_{x=b} = \frac{1}{\left.\dfrac{df}{dx}\right|_{x=f^{-1}(b)}} \qquad (1)$$

No hemos incluido la demostración del teorema, pero a continuación se presenta otra forma de verlo. Cuando $y = f(x)$ es diferenciable en $x = a$ y modificamos x en una pequeña cantidad dx, el cambio correspondiente en y es aproximadamente

$$dy = f'(a)\,dx.$$

Esto significa que y cambia más o menos $f'(a)$ veces tan rápido como x cuando $x = a$, y que x cambia alrededor de $1/f'(a)$ veces tan rápido como y cuando $y = b$. Como vemos, es razonable que la derivada de f^{-1} en b sea el recíproco de la derivada de f en a.

EJEMPLO 4 Aplicación del teorema 1

La función $f(x) = x^2, x \geq 0$ y su inversa $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ tienen derivadas $f'(x) = 2x$ y $(f^{-1})'(x) = 1/(2\sqrt{x})$.

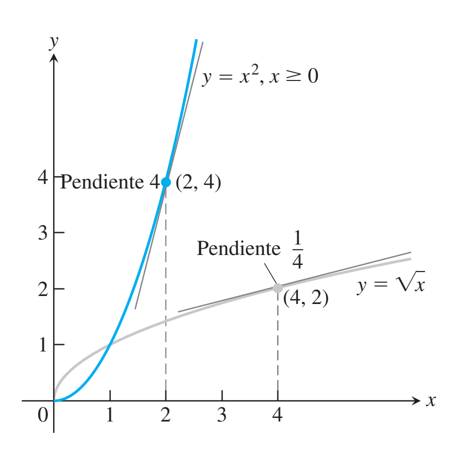


FIGURA 7.7 La derivada de $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ en el punto (4, 2) es el recíproco de la derivada $f(x) = x^2$ en (2, 4) (ejemplo 4).

El teorema 1 predice que la derivada de $f^{-1}(x)$ es

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(x) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}\\ &= \frac{1}{2(f^{-1}(x))}\\ &= \frac{1}{2(\sqrt{x})}.\end{aligned}$$

El teorema 1 proporciona una derivada que concuerda con los resultados que se obtienen al utilizar la regla para la derivada de una potencia aplicada a la función raíz cuadrada.

Examinemos el teorema 1 en un punto específico. Tomamos $x = 2$ (el número a) y $f(2) = 4$ (el valor b). El teorema 1 dice que la derivada de f en 2, $f'(2) = 4$, y la derivada de f^{-1} en $f(2)$, $(f^{-1})'(4)$, son recíprocos. Esto establece que

$$(f^{-1})'(4) = \frac{1}{f'(f^{-1}(4))} = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{2x}\bigg|_{x=2} = \frac{1}{4}.$$

Vea la figura 7.7. ■

En ocasiones, la ecuación (1) nos permite determinar valores específicos de df^{-1}/dx sin conocer la fórmula para f^{-1}.

EJEMPLO 5 Determinación de un valor para la derivada de la función inversa

Sea $f(x) = x^3 - 2$. Hallar el valor de df^{-1}/dx en $x = 6 = f(2)$ sin determinar la fórmula de $f^{-1}(x)$.

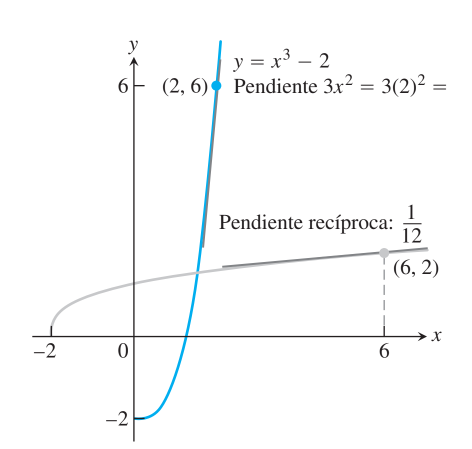


FIGURA 7.8 La derivada de $f(x) = x^3 - 2$ en $x = 2$, nos da la derivada de f^{-1} en $x = 6$ (ejemplo 5).

Solución

$$\frac{df}{dx}\bigg|_{x=2} = 3x^2\bigg|_{x=2} = 12$$

$$\frac{df^{-1}}{dx}\bigg|_{x=f(2)} = \frac{1}{\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=2}} = \frac{1}{12} \qquad \text{Ecuación (1)}$$

Vea la figura 7.8. ■

Parametrización de funciones inversas

Podemos graficar o representar cualquier función $y = f(x)$ de forma paramétrica como

$$x = t \quad \text{y} \quad y = f(t).$$

Intercambiando t y $f(t)$ se obtienen las ecuaciones paramétricas para la inversa:

$$x = f(t) \quad \text{y} \quad y = t$$

(vea la sección 3.5).

Por ejemplo, para graficar la función inyectiva $f(x) = x^2, x \geq 0$, junto con su inversa y la recta $y = x, x \geq 0$, en una calculadora graficadora, utilice la opción de graficación paramétrica con

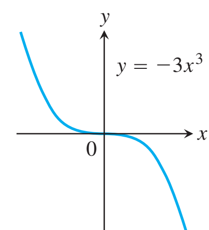
$$\begin{aligned}&\text{Gráfica de } f: && x_1 = t, && y_1 = t^2, && t \geq 0\\ &\text{Gráfica de } f^{-1}: && x_2 = t^2, && y_2 = t\\ &\text{Gráfica de } y = x: && x_3 = t, && y_3 = t\end{aligned}$$

EJERCICIOS 7.1

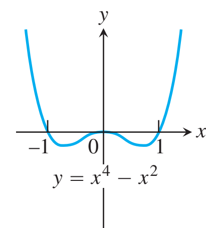
Identificación gráfica de funciones inyectivas

¿Cuáles de las funciones cuyas gráficas se muestran en los ejercicios 1 a 6 son inyectivas?

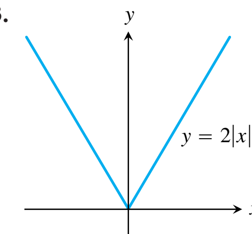
1.



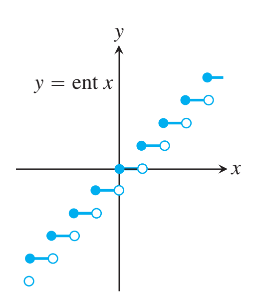
2.



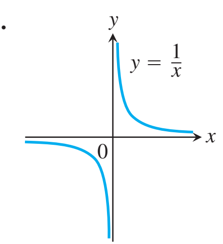
3.



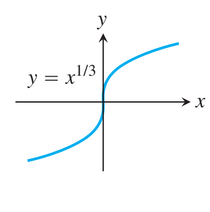
4.



5.



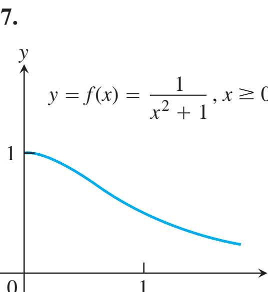
6.



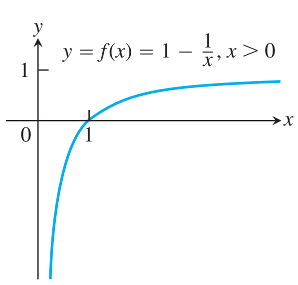
Graficación de funciones inversas

En cada uno de los ejercicios 7 a 10 se presenta la gráfica de una función $y = f(x)$. Copie la gráfica y trace la recta $y = x$. Luego, utilice la simetría respecto de la recta $y = x$ para agregar la gráfica de f^{-1}. (No es necesario determinar la fórmula de f^{-1}). Identifique el dominio y el rango de f^{-1}.

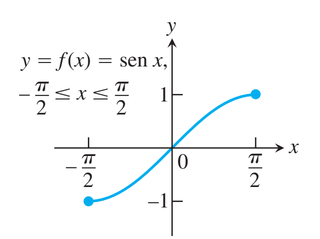
7.



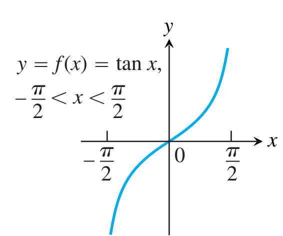
8.



9.



10.



11. **a.** Grafique la función $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $0 \leq x \leq 1$. ¿Qué simetría tiene la gráfica?

b. Demuestre que f es su propia inversa. (Recuerde que $\sqrt{x^2} = x$ si $x \geq 0$).

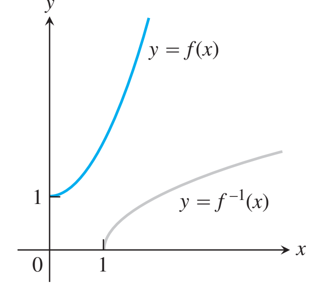
12. **a.** Grafique la función $f(x) = 1/x$. ¿Qué simetría tiene la gráfica?

b. Demuestre que f es su propia inversa.

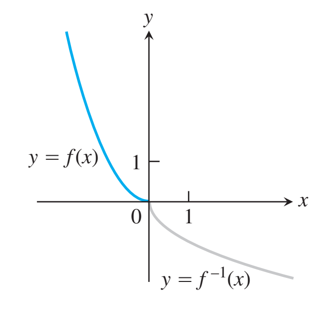
Fórmulas de funciones inversas

En cada uno de los ejercicios 13 a 18 se da una fórmula de una función $y = f(x)$ y se muestran las gráficas de f y f^{-1}. En cada caso, determine una fórmula para f^{-1}.

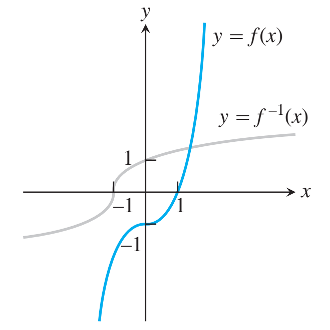
13. $f(x) = x^2 + 1, \quad x \geq 0$

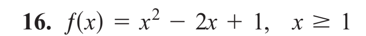


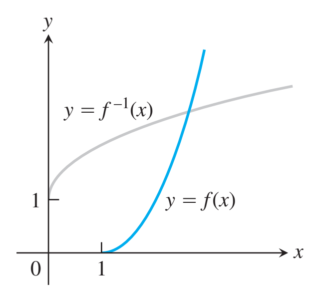
14. $f(x) = x^2, \quad x \leq 0$



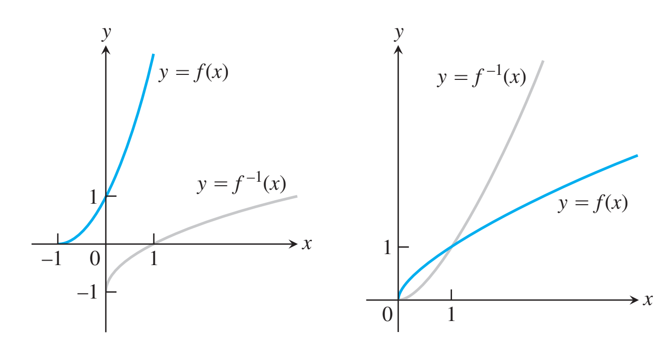
15. $f(x) = x^3 - 1$




16. $f(x) = x^2 - 2x + 1, \quad x \geq 1$



17. $f(x) = (x + 1)^2, \quad x \geq -1$ **18.** $f(x) = x^{2/3}, \quad x \geq 0$



En cada uno de los ejercicios 19 a 24 se presenta una fórmula de una función $y = f(x)$. En cada caso, determine $f^{-1}(x)$ e identifique el dominio y el rango de f^{-1}. Para comprobar su resultado, muestre que $f(f^{-1}(x)) = x$.

19. $f(x) = x^5$

20. $f(x) = x^4, \quad x \geq 0$

21. $f(x) = x^3 + 1$

22. $f(x) = (1/2)x - 7/2$

23. $f(x) = 1/x^2, \quad x > 0$

24. $f(x) = 1/x^3, \quad x \neq 0$

Derivadas de funciones inversas

En los ejercicios 25 a 28: 25–28:

a. Determine $f^{-1}(x)$.

b. Trace juntas las gráficas de f y f^{-1}.

c. Evalúe df/dx en $x = a$ y df^{-1}/dx en $x = f(a)$, para demostrar que en esos puntos $df^{-1}/dx = 1/(df/dx)$.

25. $f(x) = 2x + 3, \quad a = -1$

26. $f(x) = (1/5)x + 7, \quad a = -1$

27. $f(x) = 5 - 4x, \quad a = 1/2$

28. $f(x) = 2x^2, \quad x \geq 0, \quad a = 5$

29. **a.** Demuestre que $f(x) = x^3$ y $g(x) = \sqrt[3]{x}$ son inversas una de la otra.

b. Grafique f y g sobre un intervalo x lo suficientemente grande para demostrar que se intersecan en (1, 1) y (–1, –1). Asegúrese de que el dibujo muestre la simetría requerida respecto de la recta $y = x$.

c. Determine las pendientes de las tangentes a las gráficas de f y g en (1, 1) y (–1, –1) (cuatro tangentes en total).

d. ¿Qué rectas son tangentes a las curvas en el origen?

30. **a.** Demuestre que $h(x) = x^3/4$ y $k(x) = (4x)^{1/3}$ son inversas una de la otra.

b. Grafique h y k sobre un intervalo x lo suficientemente grande para mostrar que se intersecan en (2, 2) y (–2, –2). El dibujo debe mostrar la simetría requerida respecto de la recta $y = x$.

c. Determine las pendientes de las tangentes a las gráficas de h y k en (2, 2) y (–2, –2).

d. ¿Qué rectas son tangentes a las curvas en el origen?

31. Sea $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1, x \geq 2$. Determine el valor de df^{-1}/dx en el punto $x = -1 = f(3)$.

32. Sea $f(x) = x^2 - 4x - 5, x > 2$. Determine el valor de df^{-1}/dx en el punto $x = 0 = f(5)$.

33. Suponga que la función diferenciable $y = f(x)$ tiene inversa y que la gráfica de f pasa por el punto (2, 4), en donde tiene pendiente igual 1/3. Determine el valor de df^{-1}/dx en $x = 4$.

34. Suponga que la función diferenciable $y = g(x)$ tiene inversa, y que la gráfica de g pasa por el origen con pendiente 2. Determine la pendiente de la gráfica de g^{-1} en el origen.

Inversas de rectas

35. **a.** Determine la inversa de la función $f(x) = mx$, donde m es una constante diferente de cero.

b. ¿Qué puede concluir respecto de la inversa de $y = f(x)$ cuya gráfica es una recta que cruza el origen con pendiente m diferente de cero?

36. Demuestre que la gráfica de la inversa de $f(x) = mx + b$, con m y b constantes y $m \neq 0$, es una recta con pendiente $1/m$ y ordenada al origen $-b/m$.

37. **a.** Determine la inversa de $f(x) = x + 1$. Trace juntas las gráficas de f y su inversa. Agregue la recta $y = x$; trácela con guiones o puntos para que contraste.

b. Determine la inversa de $f(x) = x + b$ (b constante). ¿Cómo es la gráfica de f^{-1} en relación con la de f?

c. ¿Que conclusión saca respecto de las inversas de funciones cuyas gráficas son rectas paralelas a la recta $y = x$?

38. **a.** Determine la inversa de $f(x) = -x + 1$. Trace juntas las gráficas de las rectas $y = -x + 1$ y $y = x$. ¿En qué ángulo se intersecan?

b. Determine la inversa de $f(x) = -x + b$ (b constante). ¿Qué ángulo forman las rectas $y = -x + b$ y $y = x$?

c. ¿Qué conclusión saca respecto de las inversas de funciones cuyas gráficas son rectas perpendiculares a la recta $y = x$?

Funciones crecientes y funciones decrecientes

39. Como se vio en la sección 4.3, una función $f(x)$ crece en un intervalo I, si para dos puntos cualesquiera x_1 y x_2 de I,

$$x_2 > x_1 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) > f(x_1).$$

De manera similar, una función decrece en I si para cualesquiera dos puntos x_1 y x_2 de I,

$$x_2 > x_1 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) < f(x_1).$$

Muestre que tanto las funciones crecientes como las decrecientes son inyectivas. Es decir, para cualesquiera x_1 y x_2 de I, $x_2 \neq x_1$ implica que $f(x_2) \neq f(x_1)$.

Utilice los resultados del ejercicio 39 para demostrar que las funciones de los ejercicios 40 a 44 tienen inversas en sus dominios. Determine una fórmula para df^{-1}/dx usando el teorema 1.

40. $f(x) = (1/3)x + (5/6)$

41. $f(x) = 27x^3$

42. $f(x) = 1 - 8x^3$

43. $f(x) = (1 - x)^3$

44. $f(x) = x^{5/3}$

Teoría y aplicaciones

45. Si $f(x)$ es inyectiva, ¿qué puede decir acerca de $g(x) = -f(x)$? Justifique su respuesta.

46. Si $f(x)$ es inyectiva y $f(x)$ nunca es 0, ¿qué puede decir acerca de $h(x) = 1/f(x)$? ¿Es también inyectiva? Justifique su respuesta.

47. Suponga que el rango de g está en el dominio de f, por lo cual la composición $f \circ g$ está definida. Si f y g son inyectivas, ¿qué puede decir respecto de $f \circ g$? Justifique su respuesta.

48. Si una composición $f \circ g$ es inyectiva, ¿también g debe serlo? Justifique su respuesta.

49. Suponga que $f(x)$ es positiva, continua y creciente en el intervalo $[a, b]$. Con base en la interpretación de la gráfica de f, demuestre que

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)\,dy = bf(b) - af(a).$$

50. Determine condiciones sobre las constantes a, b, c y d para que la función racional

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

tenga inversa.

51. Si escribimos $g(x)$ en lugar de $f^{-1}(x)$, la ecuación (1) puede expresarse como

$$g'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}, \quad \text{o} \quad g'(f(a)) \cdot f'(a) = 1.$$

Si ahora sustituimos a por x, obtenemos

$$g'(f(x)) \cdot f'(x) = 1.$$

Tal vez esta última ecuación le recuerde la regla de la cadena, ya que en realidad hay una relación.

Suponga que f y g son funciones diferenciables e inversas entre sí, de manera que $(g \circ f)(x) = x$. Derive ambos lados de la ecuación respecto de x, usando la regla de la cadena para expresar $(g \circ f)'(x)$ como un producto de derivadas de g y f. ¿Qué encontró? (Ésta no es una demostración del teorema 1, porque hemos dado por sentada la conclusión del teorema, es decir que $g = f^{-1}$ es diferenciable).

52. Equivalencia de los métodos de las arandelas y los casquillos para calcular volúmenes Sea f diferenciable y creciente en el intervalo $a \le x \le b$, con $a > 0$, y suponga que f tiene inversa diferenciable, f^{-1}. Genere un sólido haciendo girar alrededor del eje y la región acotada por la gráfica de f y las rectas $x = a$ y $y = f(b)$. Los valores de las integrales obtenidas por los métodos de las arandelas y los casquillos para calcular el volumen son idénticos:

$$\int_{f(a)}^{f(b)} \pi((f^{-1}(y))^2 - a^2)\,dy = \int_a^b 2\pi x(f(b) - f(x))\,dx.$$

Para demostrar esta igualdad, defina

$$W(t) = \int_{f(a)}^{f(t)} \pi((f^{-1}(y))^2 - a^2)\,dy$$

$$S(t) = \int_a^t 2\pi x(f(t) - f(x))\,dx.$$

Ahora demuestre que las funciones W y S coinciden en un punto de $[a, b]$ y tienen derivadas idénticas en $[a, b]$. Como vio en el ejercicio 102 de la sección 4.8, esto garantiza que $W(t) = S(t)$ para toda t en $[a, b]$. En particular, $W(b) = S(b)$. (*Fuente*: "Disks and Shells Revisited", Walter Carlip, *American Mathematical Monthly*, vol. 98, núm. 2, febrero de 1991, pp. 154-156).

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

En los ejercicios 53 a 60 explorará algunas funciones y sus inversas junto con sus derivadas y funciones lineales de aproximación en puntos específicos. Realice los pasos siguientes utilizando su software matemático:

a. Trace la función $y = f(x)$ junto con su derivada en el intervalo dado. Explique cómo sabe que f es una función inyectiva en el intervalo.

b. Despeje x de la ecuación $y = f(x)$ como una función de y y llame g a la función inversa obtenida.

c. Determine la ecuación para la recta tangente a f en el punto $(x_0, f(x_0))$ dado.

d. Determine la ecuación para la recta tangente a g en el punto $(f(x_0), x_0)$, que está ubicado simétricamente respecto de la recta de 45° $y = x$ (la gráfica de la función identidad). Utilice el teorema 1 para hallar la pendiente de esta recta tangente.

e. Trace las funciones f y g, la identidad, las dos rectas tangentes y el segmento de recta que une los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(f(x_0), x_0)$. Analice las simetrías que encuentre respecto de la diagonal principal.

53. $y = \sqrt{3x - 2}, \quad \frac{2}{3} \le x \le 4, \quad x_0 = 3$

54. $y = \dfrac{3x + 2}{2x - 11}, \quad -2 \le x \le 2, \quad x_0 = 1/2$

55. $y = \dfrac{4x}{x^2 + 1}, \quad -1 \le x \le 1, \quad x_0 = 1/2$

56. $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}, \quad -1 \le x \le 1, \quad x_0 = 1/2$

57. $y = x^3 - 3x^2 - 1, \quad 2 \le x \le 5, \quad x_0 = \dfrac{27}{10}$

58. $y = 2 - x - x^3, \quad -2 \le x \le 2, \quad x_0 = \dfrac{3}{2}$

59. $y = e^x, \quad -3 \le x \le 5, \quad x_0 = 1$

60. $y = \operatorname{sen} x, \quad -\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}, \quad x_0 = 1$

En los ejercicios 61 y 62, repita los pasos anteriores para las funciones $y = f(x)$ y $x = f^{-1}(y)$ definidas de manera implícita por medio de las ecuaciones dadas en el intervalo.

61. $y^{1/3} - 1 = (x + 2)^3, \quad -5 \le x \le 5, \quad x_0 = -3/2$

62. $\cos y = x^{1/5}, \quad 0 \le x \le 1, \quad x_0 = 1/2$

7.2 Logaritmos naturales

Para cualquier número positivo a, el valor de la función $f(x) = a^x$ es fácil de definir cuando x es un número entero o racional. Cuando x es irracional, el significado de a^x no es tan claro. De manera similar, la definición de $\log_a x$, la función inversa de $f(x) = a^x$, no resulta completamente obvia. En esta sección utilizaremos el cálculo integral para definir la *función logaritmo natural*, para la que el número a es un valor muy importante. Esta función nos permitirá definir y analizar funciones logarítmicas y exponenciales generales, $y = a^x$ y $y = \log_a x$.

Originalmente, los logaritmos desempeñaban un papel importante en los cálculos aritméticos. A lo largo de la historia se trabajó mucho en la creación de largas tablas de logaritmos, con valores con una precisiòn de cinco, ocho y aún más lugares decimales. Antes del surgimiento de las calculadoras electrónicas y las computadoras en la era moderna, todo ingeniero contaba con una regla de cálculo marcada con escala logarítmica. Los cálculos con logaritmos permitieron grandes avances en áreas como la navegación y la mecánica celeste en el siglo XVII. Como sabemos, en la actualidad tales cálculos se realizan con la ayuda de calculadoras o computadoras, pero las propiedades y las numerosas aplicaciones de los logaritmos siguen siendo tan importantes como antes.

Definición de la función logaritmo natural

El primer paso de un método sólido para definir y entender los logaritmos, es el análisis de la función logaritmo natural, definida como una integral, por medio del Teorema Fundamental del Cálculo. Aunque este enfoque podría parecer indirecto, nos permitirá deducir rápidamente las conocidas propiedades de las funciones logarítmica y exponencial. El análisis de funciones que hemos realizado hasta el momento ha sido mediante técnicas de cálculo, pero aquí haremos algo más fundamental: usaremos el cálculo para la definición de las funciones logarítmica y exponencial.

El logaritmo natural de un número positivo x, denotado por $\ln x$, es el valor de una integral.

DEFINICIÓN La función logaritmo natural

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt, \qquad x > 0$$

Si $x > 1$, $\ln x$ es el área que está debajo de la curva $y = 1/t$, de $t = 1$ a $t = x$ (figura 7.9). Para $0 < x < 1$, $\ln x$ proporciona el negativo del área bajo la curva, desde x hasta 1. La función no está definida para $x \leq 0$. Con base en la Regla del Intervalo de Ancho Cero para integrales definidas, también tenemos

$$\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t}\, dt = 0.$$

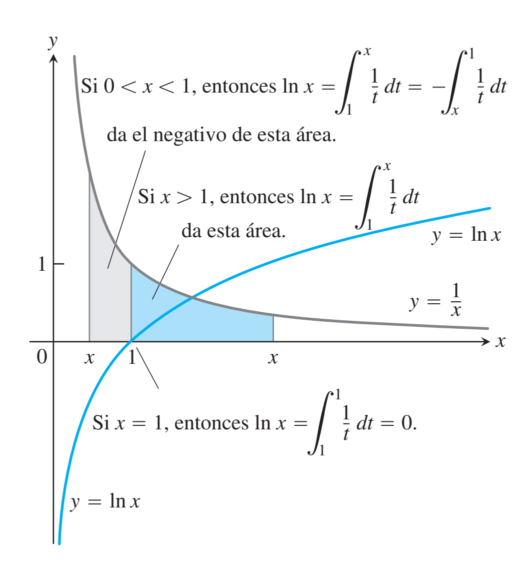


FIGURA 7.9 La gráfica de $y = \ln x$ y su relación con la función $y = 1/x, x > 0$. La gráfica del logaritmo se eleva por arriba del eje x cuando x se mueve de 1 hacia la derecha y desciende por debajo del eje x cuando x se mueve de 1 hacia la izquierda.

TABLA 7.1 Valores comunes de ln x, con dos decimales

x	$\ln x$
0	no definido
0.05	−3.00
0.5	−0.69
1	0
2	0.69
3	1.10
4	1.39
10	2.30

En la figura 7.9 se muestra la gráfica de $y = 1/x$; observe, sin embargo, que utilizamos $y = 1/t$ en la integral. De haber empleado x en todas las variables, habríamos escrito

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{x}\,dx,$$

donde x tendría dos significados diferentes. Por eso usamos a t como variable de integración.

Al utilizar rectángulos para obtener aproximaciones finitas del área que está debajo de la gráfica de $y = 1/t$ y sobre el intervalo entre $t = 1$ y $t = x$, como en la sección 5.1, podemos aproximar los valores de la función ln x. En la tabla 7.1 se dan varios valores especiales. Existe un número importante cuyo logaritmo natural es igual a 1.

DEFINICIÓN El número *e*
El número e es aquel que está en el dominio del logaritmo natural y que satisface

$$\ln(e) = 1$$

De manera geométrica, el número e corresponde al punto del eje x para el que el área debajo de la gráfica de $y = 1/t$ y sobre el intervalo $[1, e]$ tiene el área exacta de una unidad cuadrada. En la figura 7.9, el área de la región sombreada en azul es una unidad cuadrada cuando $x = e$.

La derivada de $y = \ln x$

Por la primera parte del Teorema Fundamental del Cálculo (sección 5.4),

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{d}{dx}\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{x}.$$

Así, para todos los valores positivos de x, tenemos

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}.$$

Por lo tanto, la función $y = \ln x$ es una solución para el problema de valor inicial $dy/dx = 1/x, x > 0$, con $y(1) = 0$. Observe que la derivada siempre es positiva, de modo que la función logaritmo natural es una función creciente, de aquí que sea inyectiva e invertible. Su inversa se estudia en la sección 7.3.

Si u es una función diferenciable de x con valores positivos, de manera que $\ln u$ está definida, al aplicar la regla de la cadena

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

a la función $y = \ln u$, obtenemos

$$\frac{d}{dx}\ln u = \frac{d}{du}\ln u \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}.$$

$$\frac{d}{dx}\ln u = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}, \qquad u > 0 \tag{1}$$

EJEMPLO 1 Derivadas de logaritmos naturales

(a) $\dfrac{d}{dx}\ln 2x = \dfrac{1}{2x}\dfrac{d}{dx}(2x) = \dfrac{1}{2x}(2) = \dfrac{1}{x}$

(b) Con $u = x^2 + 3$, la ecuación (1) da

$$\frac{d}{dx}\ln(x^2+3) = \frac{1}{x^2+3}\cdot\frac{d}{dx}(x^2+3) = \frac{1}{x^2+3}\cdot 2x = \frac{2x}{x^2+3}.$$

■

Observe el interesante hallazgo que nos ofrece el ejemplo 1a. La función $y = \ln 2x$ tiene la misma derivada que $y = \ln x$. Esto es válido para $y = \ln ax$, siendo a cualquier número positivo:

$$\frac{d}{dx}\ln ax = \frac{1}{ax}\cdot\frac{d}{dx}(ax) = \frac{1}{ax}(a) = \frac{1}{x}. \tag{2}$$

Ya que tenemos la misma derivada, las funciones $y = \ln ax$ y $y = \ln x$ difieren por una constante.

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

John Napier
(1550–1617)

Propiedades de los logaritmos

Los logaritmos fueron inventados por John Napier y constituyeron el avance individual más importante del cálculo aritmético hasta antes de la aparición de las modernas computadoras electrónicas. Su utilidad radica en que, gracias a sus propiedades, es posible multiplicar números positivos por medio de la suma de sus logaritmos, dividir números positivos mediante la resta de sus logaritmos, y elevar un número a un exponente multiplicando su logaritmo por el exponente. En el teorema 2 se resumen estas propiedades como una serie de reglas. Por el momento, la única restricción se da en la regla 4, según la cual el exponente r debe ser un número racional; cuando demostremos la regla veremos por qué.

TEOREMA 2 Propiedades de los logaritmos

Para cualquier número $a > 0$ y $x > 0$, el logaritmo natural satisface las reglas siguientes:

1. *Regla del producto:* $\ln ax = \ln a + \ln x$

2. *Regla del cociente:* $\ln \frac{a}{x} = \ln a - \ln x$

3. *Regla del recíproco:* $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$ Regla 2 con $a = 1$

4. *Regla de la potencia:* $\ln x^r = r \ln x$ r racional

A continuación se ilustra cómo se aplican estas reglas.

EJEMPLO 2 Interpretación de las propiedades de los logaritmos

(a) $\ln 6 = \ln(2\cdot 3) = \ln 2 + \ln 3$ Producto

(b) $\ln 4 - \ln 5 = \ln \frac{4}{5} = \ln 0.8$ Cociente

(c) $\ln \frac{1}{8} = -\ln 8$ Recíproco

$= -\ln 2^3 = -3\ln 2$ Potencia ■

EJEMPLO 3 Aplicación de las propiedades a fórmulas de funciones

(a) $\ln 4 + \ln \operatorname{sen} x = \ln(4 \operatorname{sen} x)$ Producto

(b) $\ln \frac{x+1}{2x-3} = \ln(x+1) - \ln(2x-3)$ Cociente

(c) $\ln \sec x = \ln \frac{1}{\cos x} = -\ln \cos x$ Recíproco

(d) $\ln \sqrt[3]{x+1} = \ln (x+1)^{1/3} = \frac{1}{3} \ln (x+1)$ Potencia ■

Ahora demostraremos el teorema 2. Los pasos de la demostración son similares a los utilizados en la solución de problemas que incluyen logaritmos.

Demostración de que $\ln ax = \ln a + \ln x$ El argumento no es común, pero sí elegante. Inicia con la observación de que $\ln ax$ y $\ln x$ tiene la misma derivada (ecuación 2). Entonces, de acuerdo con el corolario 2 del Teorema del Valor Medio, las funciones deben diferir por una constante, lo cual significa que

$$\ln ax = \ln x + C$$

para alguna C.

Como esta última ecuación se cumple para todos los valores positivos de x, debe satisfacerse para $x = 1$. De aquí que,

$$\begin{aligned} \ln (a \cdot 1) &= \ln 1 + C \\ \ln a &= 0 + C && \ln 1 = 0 \\ C &= \ln a. \end{aligned}$$

Al sustituir, concluimos que

$$\ln ax = \ln a + \ln x.$$

Demostración de que $\ln x^r = r \ln x$ (suponiendo que r es racional) Nuevamente utilizaremos el argumento de tener la misma derivada. Para todos los valores positivos de x,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \ln x^r &= \frac{1}{x^r} \frac{d}{dx}(x^r) && \text{Ecuación (1) con } u = x^r \\ &= \frac{1}{x^r} r x^{r-1} && \text{Aquí es en donde necesitamos que } r \text{ sea racional, al menos por ahora.} \\ &= r \cdot \frac{1}{x} = \frac{d}{dx}(r \ln x). && \text{Hemos demostrado la regla de la potencia sólo para exponentes racionales.} \end{aligned}$$

Como $\ln x^r$ y $r \ln x$ tienen la misma derivada,

$$\ln x^r = r \ln x + C$$

para alguna constante C. Tomando x igual a 1, se deduce que C es cero, con lo que concluye la demostración.

En el ejercicio 84 de esta sección se le pide que demuestre la regla 2. La regla 3 es un caso especial de la regla 2, que se obtiene haciendo $a = 1$ y observando que $\ln 1 = 0$. Con esto hemos establecido todos los casos del teorema 2. ■

Aún no hemos demostrado la regla 4 para r irracional; en la sección 7.3 volveremos a discutir este caso. Sin embargo, vale la pena señalar que la regla se cumple para toda r, sea racional o irracional.

La gráfica y el rango de ln *x*

La derivada $d(\ln x)/dx = 1/x$ es positiva para $x > 0$; por lo tanto, $\ln x$ es una función creciente de x. La segunda derivada, $-1/x^2$, es negativa, así que la gráfica de $\ln x$ es cóncava hacia abajo.

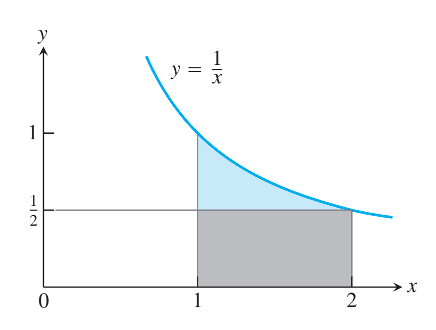


FIGURA 7.10 El rectángulo de altura $y = 1/2$ cabe exactamente debajo de la gráfica de $y = 1/x$ para el intervalo $1 \le x \le 2$.

Podemos estimar el valor de ln 2 considerando el área que está debajo de la gráfica de $1/x$ y sobre el intervalo [1, 2]. En la figura 7.10, un rectángulo de altura $1/2$ sobre el intervalo [1, 2] cabe bajo la gráfica. Por lo tanto el área bajo la gráfica, que es ln 2, es mayor que el área, $1/2$, del rectángulo. Así, $\ln 2 > 1/2$. Sabiendo esto, tenemos,

$$\ln 2^n = n \ln 2 > n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{n}{2}$$

y

$$\ln 2^{-n} = -n \ln 2 < -n\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{n}{2}.$$

De donde se sigue que

$$\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty.$$

Definimos $\ln x$ para $x > 0$, de modo que el dominio de $\ln x$ es el conjunto de los números reales positivos. El análisis anterior y el Teorema del Valor Intermedio demuestran que su rango es toda la recta real, con lo que se obtiene la gráfica de $y = \ln x$, que se muestra en la figura 7.9.

La integral $\int (1/u)\, du$

La ecuación (1) nos lleva a la fórmula integral

$$\int \frac{1}{u}\, du = \ln u + C \tag{3}$$

cuando u es una función diferenciable positiva, pero, ¿qué pasa si u es negativa? Si u es negativa, $-u$ es positiva y

$$\int \frac{1}{u}\, du = \int \frac{1}{(-u)}\, d(-u) \quad \text{La ecuación (3) con } u \text{ reemplazada por } -u$$

$$= \ln(-u) + C. \tag{4}$$

Podemos combinar las ecuaciones (3) y (4) en una sola fórmula, notando que en cada caso la expresión del lado derecho es $\ln|u| + C$. En la ecuación (3), $\ln u = \ln|u|$, ya que $u > 0$; en la ecuación (4), $\ln(-u) = \ln|u|$ ya que $u < 0$. Si u es positiva o negativa, la integral de $(1/u)\, du$ es $\ln|u| + C$.

> Si u es una función diferenciable que nunca es cero,
>
> $$\int \frac{1}{u}\, du = \ln|u| + C. \tag{5}$$

La ecuación (5) es válida en cualquier punto del dominio de $1/u$, (los puntos en donde $u \neq 0$).

Sabemos que

$$\int u^n\, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \qquad n \neq -1 \text{ y racional}$$

La ecuación (5) explica qué hacer cuando n es igual a –1; esta ecuación indica que las integrales de cierta *forma* dan logaritmos por resultado. Si $u = f(x)$, entonces $du = f'(x)\,dx$ y

$$\int \frac{1}{u}\,du = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx.$$

De modo que la ecuación (5) da

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

siempre que $f(x)$ sea una función diferenciable que mantiene un signo constante en su dominio.

EJEMPLO 4 Aplicación de la ecuación (5)

(a) $$\int_0^2 \frac{2x}{x^2-5}\,dx = \int_{-5}^{-1} \frac{du}{u} = \ln|u|\Big]_{-5}^{-1}$$

$u = x^2 - 5,\quad du = 2x\,dx,$
$u(0) = -5,\quad u(2) = -1$

$$= \ln|-1| - \ln|-5| = \ln 1 - \ln 5 = -\ln 5$$

(b) $$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{4\cos\theta}{3 + 2\operatorname{sen}\theta}\,d\theta = \int_1^5 \frac{2}{u}\,du$$

$u = 3 + 2\operatorname{sen}\theta,\quad du = 2\cos\theta\,d\theta,$
$u(-\pi/2) = 1,\quad u(\pi/2) = 5$

$$= 2\ln|u|\Big]_1^5$$

$$= 2\ln|5| - 2\ln|1| = 2\ln 5$$

Observe que $u = 3 + 2\operatorname{sen}\theta$ siempre es positiva en $[-\pi/2, \pi/2]$, por lo que se puede aplicar la ecuación (5). ■

Las integrales de tan *x* y cot *x*

La ecuación (5) nos indica, finalmente, cómo integrar la función tangente y la función cotangente. Para la función tangente,

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = \int \frac{-du}{u}$$

$u = \cos x > 0$ en $(-\pi/2, \pi/2)$,
$du = -\operatorname{sen} x\,dx$

$$= -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + C$$

$$= -\ln|\cos x| + C = \ln\frac{1}{|\cos x|} + C$$ Regla del recíproco

$$= \ln|\sec x| + C.$$

Para la cotangente,

$$\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x\,dx}{\operatorname{sen} x} = \int \frac{du}{u}$$

$u = \operatorname{sen} x,$
$du = \cos x\,dx$

$$= \ln|u| + C = \ln|\operatorname{sen} x| + C = -\ln|\csc x| + C.$$

$$\int \tan u \, du = -\ln |\cos u| + C = \ln |\sec u| + C$$

$$\int \cot u \, du = \ln |\operatorname{sen} u| + C = -\ln |\csc x| + C$$

EJEMPLO 5

$$\int_0^{\pi/6} \tan 2x \, dx = \int_0^{\pi/3} \tan u \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} \tan u \, du$$

$$= \frac{1}{2} \ln |\sec u| \Big]_0^{\pi/3} = \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2} \ln 2$$

Sustituya $u = 2x$, $dx = du/2$, $u(0) = 0$, $u(\pi/6) = \pi/3$

Diferenciación logarítmica

Las derivadas de funciones positivas cuyas fórmulas incluyen productos, cocientes y potencias, suelen obtenerse más rápidamente calculando los logaritmos naturales de ambos lados antes de hacer la diferenciación. Esto nos permite usar las leyes de los logaritmos para simplificar las ecuaciones antes de obtener sus derivadas; a este proceso se le denomina **diferenciación logarítmica** y se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6 Aplicación de la diferenciación logarítmica

Determinar dy/dx si

$$y = \frac{(x^2 + 1)(x + 3)^{1/2}}{x - 1}, \qquad x > 1.$$

Solución Aplicamos el logaritmo natural en ambos lados y simplificamos el resultado de acuerdo con las propiedades de los logaritmos:

$$\begin{aligned}
\ln y &= \ln \frac{(x^2 + 1)(x + 3)^{1/2}}{x - 1} \\
&= \ln ((x^2 + 1)(x + 3)^{1/2}) - \ln (x - 1) && \text{Regla 2} \\
&= \ln (x^2 + 1) + \ln (x + 3)^{1/2} - \ln (x - 1) && \text{Regla 1} \\
&= \ln (x^2 + 1) + \frac{1}{2} \ln (x + 3) - \ln (x - 1). && \text{Regla 3}
\end{aligned}$$

Luego derivamos ambos lados con respecto a x, utilizando la ecuación (1) en el lado izquierdo:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x + 3} - \frac{1}{x - 1}.$$

Ahora despejamos dy/dx:

$$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{1}{2x + 6} - \frac{1}{x - 1}\right).$$

Por último, sustituimos y:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2 + 1)(x + 3)^{1/2}}{x - 1}\left(\frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{1}{2x + 6} - \frac{1}{x - 1}\right).$$

Un cálculo directo mediante las reglas del cociente y el producto para resolver el ejemplo 6, sería bastante más largo.

EJERCICIOS 7.2

Uso de las propiedades de los logaritmos

1. Exprese los siguientes logaritmos en términos de ln 2 y ln 3.

a. $\ln 0.75$ **b.** $\ln(4/9)$ **c.** $\ln(1/2)$

d. $\ln\sqrt[3]{9}$ **e.** $\ln 3\sqrt{2}$ **f.** $\ln\sqrt{13.5}$

2. Exprese los siguientes logaritmos en términos de ln 5 y ln 7.

a. $\ln(1/125)$ **b.** $\ln 9.8$ **c.** $\ln 7\sqrt{7}$

d. $\ln 1225$ **e.** $\ln 0.056$

f. $(\ln 35 + \ln(1/7))/(\ln 25)$

Utilice las propiedades de los logaritmos para simplificar las expresiones en los ejercicios 3 y 4.

3. a. $\ln \operatorname{sen}\theta - \ln\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{5}\right)$ **b.** $\ln(3x^2 - 9x) + \ln\left(\frac{1}{3x}\right)$

c. $\frac{1}{2}\ln(4t^4) - \ln 2$

4. a. $\ln\sec\theta + \ln\cos\theta$ **b.** $\ln(8x + 4) - 2\ln 2$

c. $3\ln\sqrt[3]{t^2 - 1} - \ln(t + 1)$

Derivadas de logaritmos

En los ejercicios 5 a 36, determine la derivada de y respecto de x, t o θ, según corresponda.

5. $y = \ln 3x$

6. $y = \ln kx$, k constante

7. $y = \ln(t^2)$

8. $y = \ln(t^{3/2})$

9. $y = \ln\frac{3}{x}$

10. $y = \ln\frac{10}{x}$

11. $y = \ln(\theta + 1)$

12. $y = \ln(2\theta + 2)$

13. $y = \ln x^3$

14. $y = (\ln x)^3$

15. $y = t(\ln t)^2$

16. $y = t\sqrt{\ln t}$

17. $y = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16}$

18. $y = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}$

19. $y = \frac{\ln t}{t}$

20. $y = \frac{1 + \ln t}{t}$

21. $y = \frac{\ln x}{1 + \ln x}$

22. $y = \frac{x\ln x}{1 + \ln x}$

23. $y = \ln(\ln x)$

24. $y = \ln(\ln(\ln x))$

25. $y = \theta(\operatorname{sen}(\ln\theta) + \cos(\ln\theta))$

26. $y = \ln(\sec\theta + \tan\theta)$

27. $y = \ln\frac{1}{x\sqrt{x + 1}}$

28. $y = \frac{1}{2}\ln\frac{1 + x}{1 - x}$

29. $y = \frac{1 + \ln t}{1 - \ln t}$

30. $y = \sqrt{\ln\sqrt{t}}$

31. $y = \ln(\sec(\ln\theta))$

32. $y = \ln\left(\frac{\sqrt{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}}{1 + 2\ln\theta}\right)$

33. $y = \ln\left(\frac{(x^2 + 1)^5}{\sqrt{1 - x}}\right)$

34. $y = \ln\sqrt{\frac{(x + 1)^5}{(x + 2)^{20}}}$

35. $y = \int_{x^2/2}^{x^2} \ln\sqrt{t}\,dt$

36. $y = \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt[3]{x}} \ln t\,dt$

Integración

Evalúe las integrales en los ejercicios 37 a 54.

37. $\int_{-3}^{-2}\frac{dx}{x}$

38. $\int_{-1}^{0}\frac{3\,dx}{3x - 2}$

39. $\int\frac{2y\,dy}{y^2 - 25}$

40. $\int\frac{8r\,dr}{4r^2 - 5}$

41. $\int_0^{\pi}\frac{\operatorname{sen} t}{2 - \cos t}\,dt$

42. $\int_0^{\pi/3}\frac{4\operatorname{sen}\theta}{1 - 4\cos\theta}\,d\theta$

43. $\int_1^2\frac{2\ln x}{x}\,dx$

44. $\int_2^4\frac{dx}{x\ln x}$

45. $\int_2^4\frac{dx}{x(\ln x)^2}$

46. $\int_2^{16}\frac{dx}{2x\sqrt{\ln x}}$

47. $\int\frac{3\sec^2 t}{6 + 3\tan t}\,dt$

48. $\int\frac{\sec y\tan y}{2 + \sec y}\,dy$

49. $\int_0^{\pi/2}\tan\frac{x}{2}\,dx$

50. $\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cot t\,dt$

51. $\int_{\pi/2}^{\pi}2\cot\frac{\theta}{3}\,d\theta$

52. $\int_0^{\pi/12}6\tan 3x\,dx$

53. $\int\frac{dx}{2\sqrt{x} + 2x}$

54. $\int\frac{\sec x\,dx}{\sqrt{\ln(\sec x + \tan x)}}$

Diferenciación logarítmica

En los ejercicios 55 a 68, utilice la diferenciación logarítmica para determinar la derivada de y respecto de la variable independiente dada.

55. $y = \sqrt{x(x + 1)}$

56. $y = \sqrt{(x^2 + 1)(x - 1)^2}$

57. $y = \sqrt{\dfrac{t}{t + 1}}$

58. $y = \sqrt{\dfrac{1}{t(t + 1)}}$

59. $y = \sqrt{\theta + 3}\, \operatorname{sen} \theta$

60. $y = (\tan \theta)\sqrt{2\theta + 1}$

61. $y = t(t + 1)(t + 2)$

62. $y = \dfrac{1}{t(t + 1)(t + 2)}$

63. $y = \dfrac{\theta + 5}{\theta \cos \theta}$

64. $y = \dfrac{\theta \operatorname{sen} \theta}{\sqrt{\sec \theta}}$

65. $y = \dfrac{x\sqrt{x^2 + 1}}{(x + 1)^{2/3}}$

66. $y = \sqrt{\dfrac{(x + 1)^{10}}{(2x + 1)^5}}$

67. $y = \sqrt[3]{\dfrac{x(x - 2)}{x^2 + 1}}$

68. $y = \sqrt[3]{\dfrac{x(x + 1)(x - 2)}{(x^2 + 1)(2x + 3)}}$

Teoría y aplicaciones

69. Localice e identifique los valores extremos absolutos de

a. $\ln(\cos x)$ en $[-\pi/4, \pi/3]$,

b. $\cos(\ln x)$ en $[1/2, 2]$.

70. **a.** Demuestre que $f(x) = x - \ln x$ es creciente para $x > 1$.

b. Utilice el inciso (a) para demostrar que $\ln x < x$ si $x > 1$.

71. Determine el área entre las curvas $y = \ln x$ y $y = \ln 2x$, de $x = 1$ a $x = 5$.

72. Determine el área entre la curva $y = \tan x$ y el eje x, de $x = -\pi/4$ a $x = \pi/3$.

73. La región en el primer cuadrante, acotada por los ejes coordenados, la recta $y = 3$ y la curva $x = 2/\sqrt{y + 1}$ se hace girar alrededor del eje y para generar un sólido. Determine el volumen del sólido.

74. La región entre la curva $y = \sqrt{\cot x}$ y el eje x, de $x = \pi/6$ a $x = \pi/2$, se hace girar alrededor del eje x para generar un sólido. Determine el volumen del sólido.

75. La región entre la curva $y = 1/x^2$ y el eje x, de $x = 1/2$ a $x = 2$, se hace girar alrededor del eje y para generar un sólido. Determine el volumen del sólido.

76. En el ejercicio 6 de la sección 6.2, hicimos girar alrededor del eje y la región entre la curva $y = 9x/\sqrt{x^3 + 9}$ y el eje x, de $x = 0$ a $x = 3$, para generar un sólido de volumen 36π. ¿Qué volumen obtendría si hiciéramos girar la región alrededor del eje x? (Consulte la gráfica en el ejercicio 6 de la sección 6.2).

77. Determine las longitudes de las curvas siguientes.

a. $y = (x^2/8) - \ln x, \quad 4 \le x \le 8$

b. $x = (y/4)^2 - 2\ln(y/4), \quad 4 \le y \le 12$

78. Determine una curva que pase por el punto $(1, 0)$, y cuya longitud entre $x = 1$ y $x = 2$ sea

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\, dx.$$

T **79.** **a.** Determine el centroide de la región entre la curva $y = 1/x$ y el eje x, de $x = 1$ a $x = 2$. Proporcione las coordenadas redondeando a dos decimales.

b. Haga un bosquejo de la región y señale en él el centroide.

80. **a.** Determine el centro de masa de una placa delgada de densidad constante que cubre la región entre la curva $y = 1/\sqrt{x}$ y el eje x, de $x = 1$ a $x = 16$.

b. Determine el centro de masa si, en lugar de ser constante, la densidad de la placa fuera $\delta(x) = 4/\sqrt{x}$.

En los ejercicios 81 y 82, resuelva los problemas con valor inicial.

81. $\dfrac{dy}{dx} = 1 + \dfrac{1}{x}, \quad y(1) = 3$

82. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \sec^2 x, \quad y(0) = 0 \quad$ y $\quad y'(0) = 1$

T **83.** **Linealización de ln $(1 + x)$ en $x = 0$** En lugar de aproximar $\ln x$ alrededor de $x = 1$, aproximamos $\ln(1 + x)$ alrededor de $x = 0$. De esta manera obtenemos una fórmula más sencilla.

a. Deduzca la linealización de $\ln(1 + x) \approx x$ en $x = 0$.

b. Estime, a cinco decimales, el error en que se incurre al reemplazar $\ln(1 + x)$ por x en el intervalo $[0, 0.1]$.

c. Trace juntas la gráfica de $\ln(1 + x)$ y x para $0 \le x \le 0.5$. Si es posible, utilice un color diferente para cada gráfica. ¿En qué puntos es mejor la aproximación de $\ln(1 + x)$? ¿En cuáles es menos buena? Por medio de la lectura directa de las coordenadas en las gráficas determine, con tanta precisión como le permita su calculadora graficadora, una cota superior para el error.

84. Utilice el argumento de tener la misma derivada, como se hizo para demostrar las reglas 1 y 4 del teorema 2, para probar la Regla del Cociente de los logaritmos.

Exploraciones gráficas

85. Grafique juntas $\ln x$, $\ln 2x$, $\ln 4x$, $\ln 8x$ y $\ln 16x$ (o tantas de ellas como pueda) para $0 < x \le 10$. ¿Qué sucede? Explique.

86. Grafique $y = \ln|\operatorname{sen} x|$ en la ventana $0 \le x \le 22$, $-2 \le y \le 0$. Explique lo que ve. ¿Cómo podría cambiar la fórmula para que los arcos queden invertidos?

87. **a.** Grafique juntas $y = \operatorname{sen} x$ y las curvas $y = \ln(a + \operatorname{sen} x)$ para $a = 2, 4, 8, 20$ y 50 para $0 \le x \le 23$.

b. ¿Por qué las curvas se aplanan cuando a aumenta? (*Sugerencia:* Determine una cota superior para $|y'|$ que dependa de a).

88. ¿Tiene la gráfica de $y = \sqrt{x} - \ln x$, $x > 0$, un punto de inflexión? Trate de responder la pregunta **(a)** por medio de graficación, y **(b)** por medio de cálculo.

7.3 La función exponencial

Tras desarrollar la teoría de la función $\ln x$, introduciremos ahora a la función exponencial, $\exp x = e^x$, como la inversa de $\ln x$. Estudiaremos sus propiedades y calcularemos su derivada e integral. Conociendo su derivada, demostraremos la regla de la potencia para diferenciar x^n cuando n es *cualquier* número real (racional o irracional).

La inversa de ln *x* y el número *e*

Siendo una función creciente de x con dominio $(0, \infty)$ y rango $(-\infty, \infty)$, la función $\ln x$ tiene una inversa: $\ln^{-1} x$ con dominio $(-\infty, \infty)$ y rango $(0, \infty)$. La gráfica de $\ln^{-1} x$ es la gráfica de $\ln x$ reflejada con respecto a la recta $y = x$, Como puede ver en la figura 7.11,

$$\lim_{x\to\infty} \ln^{-1} x = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to-\infty} \ln^{-1} x = 0.$$

FIGURA 7.11 Las gráficas de $y = \ln x$ y $y = \ln^{-1} x = \exp x$. El número e es $\ln^{-1} 1 = \exp(1)$.

La función $\ln^{-1} x$ también se denota por $\exp x$.

En la sección 7.2 definimos el número e por medio de la ecuación $\ln(e) = 1$, de manera que $e = \ln^{-1}(1) = \exp(1)$. Aunque e no es un número racional, más adelante en esta sección se explicará una forma de expresarlo como un límite. En el capítulo 10 calcularemos su valor con una fórmula diferente y la ayuda de una computadora, lo que nos permitirá lograr tantos decimales de precisión como necesitemos (vea el ejemplo 6 de la sección 10.9). Con 15 decimales,

$$e = 2.718281828459045.$$

La función $y = e^x$

Para elevar el número e a una potencia racional, podemos seguir el procedimiento usual:

$$e^2 = e \cdot e, \qquad e^{-2} = \frac{1}{e^2}, \qquad e^{1/2} = \sqrt{e},$$

y así sucesivamente. Como e es positivo, e^r también lo es. En consecuencia, e^r tiene un logaritmo. Cuando tomamos el logaritmo, determinamos que

$$\ln e^r = r \ln e = r \cdot 1 = r.$$

Como $\ln x$ es inyectiva y $\ln(\ln^{-1} r) = r$, esta ecuación nos indica que

$$e^r = \ln^{-1} r = \exp r \qquad \text{para } r \text{ racional.} \tag{1}$$

Aún no hemos encontrado un método que nos permita dar un significado obvio a e^x para x irracional. Pero $\ln^{-1} x$ tiene sentido para cualquier x racional o irracional. Así, la ecuación (1) nos permite ampliar la definición de e^x a valores irracionales de x. La función $\ln^{-1} x$ está definida para toda x, de manera que la utilizaremos para asignar un valor a e^x en todo punto en donde e^x no haya sido definida.

Valores comunes de e^x

x	e^x (redondeado)
-1	0.37
0	1
1	2.72
2	7.39
10	22026
100	2.6881×10^{43}

DEFINICIÓN La función exponencial natural
Para todo número real x, $e^x = \ln^{-1} x = \exp x$.

Por primera vez hemos dado una definición precisa para un exponente irracional. Comunmente la función exponencial se denota mediante e^x en lugar de $\exp x$. Ya que $\ln x$ y e^x son inversas una de la otra, tenemos

Ecuaciones inversas para e^x y $\ln x$

$$e^{\ln x} = x \qquad (\text{para toda } x > 0) \tag{2}$$

$$\ln(e^x) = x \qquad (\text{para toda } x) \tag{3}$$

Números trascendentes y funciones trascendentes

Los números que son soluciones de ecuaciones polinomiales con coeficientes racionales se denominan **algebraicos:** -2 es algebraico, ya que satisface la ecuación $x + 2 = 0$ y $\sqrt{3}$ es algebraico porque satisface la ecuación $x^2 - 3 = 0$. Los números que no son algebraicos, como e y π, se denominan **trascendentes**. En 1873, Charles Hermite demostró que e es trascendente, en el sentido que se acabamos de describir. En 1882, C.L.F. Lindemann demostró la trascendencia de π.

Hoy en día, llamamos algebraica a una función $y = f(x)$ si satisface una ecuación de la forma

$$P_n y^n + \cdots + P_1 y + P_0 = 0$$

en donde las P son polinomios en x con coeficientes racionales. La función $y = 1/\sqrt{x+1}$ es algebraica, ya que satisface la ecuación $(x + 1)y^2 - 1 = 0$. Aquí los polinomios son $P_2 = x + 1$, $P_1 = 0$ y $P_0 = -1$. Las funciones que no son algebraicas se denominan trascendentes.

El dominio de $\ln x$ es $(0, \infty)$ y su rango es $(-\infty, \infty)$. Por lo tanto, el dominio de e^x es $(-\infty, \infty)$, y su rango es $(0, \infty)$.

EJEMPLO 1 Uso de las ecuaciones inversas

(a) $\ln e^2 = 2$

(b) $\ln e^{-1} = -1$

(c) $\ln \sqrt{e} = \dfrac{1}{2}$

(d) $\ln e^{\operatorname{sen} x} = \operatorname{sen} x$

(e) $e^{\ln 2} = 2$

(f) $e^{\ln(x^2+1)} = x^2 + 1$

(g) $e^{3\ln 2} = e^{\ln 2^3} = e^{\ln 8} = 8$ Una forma

(h) $e^{3\ln 2} = (e^{\ln 2})^3 = 2^3 = 8$ Otra forma ■

EJEMPLO 2 Despejar un exponente

Determinar k si $e^{2k} = 10$.

Solución Tome el logaritmo natural de ambos lados:

$$e^{2k} = 10$$

$$\ln e^{2k} = \ln 10$$

$$2k = \ln 10 \qquad \text{Ecuación (3)}$$

$$k = \frac{1}{2}\ln 10.$$

■

La función exponencial general a^x

Como $a = e^{\ln a}$ para cualquier número positivo a, podemos pensar a a^x como $(e^{\ln a})^x = e^{x\ln a}$. Tenemos, por lo tanto, la siguiente definición:

DEFINICIÓN Funciones exponenciales generales

Para cualesquiera números $a > 0$ y x, la función exponencial con base a es

$$a^x = e^{x\ln a}.$$

Cuando $a = e$, la definición da $a^x = e^{x\ln a} = e^{x\ln e} = e^{x\cdot 1} = e^x$.

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

Siméon Denis Poisson
(1781-1840)

EJEMPLO 3 Evaluación de funciones exponenciales

(a) $2^{\sqrt{3}} = e^{\sqrt{3}\ln 2} \approx e^{1.20} \approx 3.32$

(b) $2^{\pi} = e^{\pi \ln 2} \approx e^{2.18} \approx 8.8$ ■

En la siguiente sección estudiaremos el cálculo de funciones exponenciales generales y de sus inversas. Aquí necesitamos solamente la definición para establecer las leyes de los exponentes para e^x.

Leyes de los exponentes

Aun cuando e^x está definida de manera indirecta como $\ln^{-1} x$, obedece las leyes conocidas del álgebra para exponentes. El teorema 3 nos muestra que estas leyes son consecuencia de las definiciones de $\ln x$ y e^x.

TEOREMA 3 Leyes de los exponentes para e^x

Para todos los números x, x_1 y x_2, la exponencial natural e^x cumple las leyes siguientes:

1. $e^{x_1} \cdot e^{x_2} = e^{x_1+x_2}$

2. $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$

3. $\dfrac{e^{x_1}}{e^{x_2}} = e^{x_1-x_2}$

4. $(e^{x_1})^{x_2} = e^{x_1 x_2} = (e^{x_2})^{x_1}$

Demostración de la ley 1 Sean

$$y_1 = e^{x_1} \qquad \text{y} \qquad y_2 = e^{x_2}. \tag{4}$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \ln y_1 \quad \text{y} \quad x_2 = \ln y_2 && \text{Tomar logaritmos de ambos lados de las ecuaciones (4)}\\
x_1 + x_2 &= \ln y_1 + \ln y_2 \\
&= \ln y_1 y_2 && \text{Regla del producto para logaritmos}\\
e^{x_1+x_2} &= e^{\ln y_1 y_2} && \text{Exponenciando}\\
&= y_1 y_2 && e^{\ln u} = u\\
&= e^{x_1} e^{x_2}.
\end{aligned}
$$
■

La demostración de la ley 4 es similar. Las leyes 2 y 3 se obtienen a partir de la ley 1 (ejercicio 78).

EJEMPLO 4 Aplicación de las leyes de los exponentes

(a) $e^{x+\ln 2} = e^x \cdot e^{\ln 2} = 2e^x$ Ley 1

(b) $e^{-\ln x} = \dfrac{1}{e^{\ln x}} = \dfrac{1}{x}$ Ley 2

(c) $\dfrac{e^{2x}}{e} = e^{2x-1}$ Ley 3

(d) $(e^3)^x = e^{3x} = (e^x)^3$ Ley 4 ■

El teorema 3 también es válido para a^x, la función exponencial con base a. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} a^{x_1} \cdot a^{x_2} &= e^{x_1 \ln a} \cdot e^{x_2 \ln a} && \text{Definición de } a^x \\ &= e^{x_1 \ln a + x_2 \ln a} && \text{Ley 1} \\ &= e^{(x_1+x_2)\ln a} && \text{Factorizar } \ln a \\ &= a^{x_1+x_2}. && \text{Definición de } a^x \end{aligned}$$

La derivada y la integral de e^x

La función exponencial tiene derivada porque es la inversa de una función diferenciable cuya derivada nunca es cero (teorema 1). Para calcular su derivada utilizamos el teorema 1 y nuestro conocimiento de la derivada de ln x. Sea

$$f(x) = \ln x \quad \text{y} \quad y = e^x = \ln^{-1} x = f^{-1}(x).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^x) &= \frac{d}{dx} \ln^{-1} x \\ &= \frac{d}{dx} f^{-1}(x) \\ &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} && \text{Teorema 1} \\ &= \frac{1}{f'(e^x)} && f^{-1}(x) = e^x \\ &= \frac{1}{\left(\dfrac{1}{e^x}\right)} && f'(z) = \frac{1}{z} \text{ con } z = e^x \\ &= e^x. \end{aligned}$$

Esto es, para $y = e^x$, encontramos que $dy/dx = e^x$, así que la función exponencial natural es su propia derivada. En la sección 7.5 veremos que las únicas funciones que tienen esta propiedad son los múltiplos constantes de e^x. En resumen,

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x \qquad (5)$$

EJEMPLO 5 Diferenciación de una exponencial

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(5e^x) &= 5 \frac{d}{dx} e^x \\ &= 5e^x \end{aligned}$$
■

La regla de la cadena amplía la ecuación (5) en la manera usual, dándole una forma más general.

Si u es cualquier función diferenciable de x, entonces

$$\frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{du}{dx}. \tag{6}$$

EJEMPLO 6 Aplicación de la regla de la cadena con exponenciales

(a) $\frac{d}{dx}e^{-x} = e^{-x}\frac{d}{dx}(-x) = e^{-x}(-1) = -e^{-x}$ Ecuación (6) con $u = -x$

(b) $\frac{d}{dx}e^{\operatorname{sen} x} = e^{\operatorname{sen} x}\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = e^{\operatorname{sen} x}\cdot\cos x$ Ecuación (6) con $u = \operatorname{sen} x$ ■

La integral equivalente a la ecuación (6) es

$$\int e^u\,du = e^u + C.$$

EJEMPLO 7 Integración de exponenciales

(a) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} e^{3x}\,dx = \int_0^{\ln 8} e^u\cdot\frac{1}{3}\,du$ $u = 3x,\ \frac{1}{3}du = dx,\ u(0) = 0,$ $u(\ln 2) = 3\ln 2 = \ln 2^3 = \ln 8$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\ln 8} e^u\,du$$

$$= \frac{1}{3}e^u\Big]_0^{\ln 8}$$

$$= \frac{1}{3}(8 - 1) = \frac{7}{3}$$

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{\operatorname{sen} x}\cos x\,dx = e^{\operatorname{sen} x}\Big]_0^{\pi/2}$ Antiderivada del ejemplo 6.

$$= e^1 - e^0 = e - 1$$ ■

EJEMPLO 8 Resolución de un problema con valor inicial

Resolver el problema con valor inicial

$$e^y\frac{dy}{dx} = 2x, \qquad x > \sqrt{3}; \qquad y(2) = 0.$$

Solución Integramos ambos lados de la ecuación diferencial con respecto de x para obtener

$$e^y = x^2 + C.$$

Utilizamos la condición inicial $y(2) = 0$ para determinar C:

$$C = e^0 - (2)^2$$
$$= 1 - 4 = -3.$$

Esto completa la fórmula para e^y:

$$e^y = x^2 - 3.$$

Para determinar y, tomamos logaritmos de ambos lados:

$$\ln e^y = \ln (x^2 - 3)$$
$$y = \ln (x^2 - 3).$$

Observe que la solución es válida para $x > \sqrt{3}$.

Comprobemos la solución en la ecuación original.

$$e^y \frac{dy}{dx} = e^y \frac{d}{dx} \ln (x^2 - 3)$$
$$= e^y \frac{2x}{x^2 - 3} \qquad \text{Derivada de } \ln (x^2 - 3)$$
$$= e^{\ln (x^2-3)} \frac{2x}{x^2 - 3} \qquad y = \ln (x^2 - 3)$$
$$= (x^2 - 3)\frac{2x}{x^2 - 3} \qquad e^{\ln y} = y$$
$$= 2x.$$

La solución satisface la ecuación. ■

El número *e* expresado como un límite

Hemos definido el número e como el número para el que $\ln e = 1$, o el valor de exp (1). Como puede ver, e es una constante importante para las funciones logarítmica y exponencial, pero, ¿cuál es su valor numérico? El teorema siguiente muestra una manera de calcular e como un límite.

TEOREMA 4 El número *e* como un límite

El número e puede calcularse como el límite

$$e = \lim_{x\to 0} (1 + x)^{1/x}.$$

Demostración Si $f(x) = \ln x$, entonces $f'(x) = 1/x$, por lo que $f'(1) = 1$. Pero, por la definición de derivada,

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{x\to 0} \frac{f(1 + x) - f(1)}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln (1 + x) - \ln 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln (1 + x) \qquad \ln 1 = 0$$
$$= \lim_{x\to 0} \ln (1 + x)^{1/x} = \ln \left[\lim_{x\to 0} (1 + x)^{1/x}\right] \qquad \text{ln es continuo}$$

Ya que $f'(1) = 1$, tenemos

$$\ln\left[\lim_{x\to 0}(1 + x)^{1/x}\right] = 1$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 0}(1 + x)^{1/x} = e \qquad \ln e = 1 \text{ y ln es inyectiva}$$ ■

Sustituyendo $y = 1/x$, también podemos expresar el límite del teorema 4 como

$$e = \lim_{y\to\infty}\left(1 + \frac{1}{y}\right)^{y}. \tag{7}$$

Al inicio de la sección observamos que $e = 2.718281828459045$ con 15 decimales de precisión.

La regla de la potencia (forma general)

Ahora podemos definir x^n para cualquier $x > 0$ y cualquier número real n como $x^n = e^{n\ln x}$. Por consiguiente, la n en la ecuación $\ln x^n = n\ln x$ ya no tiene que ser racional: puede ser cualquier número, siempre y cuando $x > 0$:

$$\ln x^n = \ln(e^{n\ln x}) = n\ln x \qquad \ln e^u = u, \text{ para cualquier } u$$

Juntas, la ley $a^x/a^y = a^{x-y}$ y la definición $x^n = e^{n\ln x}$ nos permiten establecer la regla de la potencia para diferenciación en su forma general. Al diferenciar x^n respecto de x se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}x^n &= \frac{d}{dx}e^{n\ln x} && \text{Definición de } x^n,\ x > 0\\ &= e^{n\ln x}\cdot\frac{d}{dx}(n\ln x) && \text{Regla de la cadena para } e^u\\ &= x^n\cdot\frac{n}{x} && \text{Nuevamente la definición}\\ &= nx^{n-1}.\end{aligned}$$

En resumen, siempre y cuando $x > 0$,

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}.$$

La regla de la cadena amplía esta ecuación a la forma general de la regla de la potencia.

Regla de la potencia (forma general)

Si u es una función diferenciable positiva de x, y n es cualquier número real, entonces u^n es una función diferenciable de x y

$$\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\frac{du}{dx}.$$

EJEMPLO 9 Uso de la regla de la potencia con potencias irracionales

(a) $\frac{d}{dx}x^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1} \qquad (x > 0)$

(b) $\frac{d}{dx}(2 + \operatorname{sen} 3x)^{\pi} = \pi(2 + \operatorname{sen} 3x)^{\pi-1}(\cos 3x)\cdot 3$

$= 3\pi(2 + \operatorname{sen} 3x)^{\pi-1}(\cos 3x).$ ■

EJERCICIOS 7.3

Cálculos algebraicos con la exponencial y el logaritmo

Determine las expresiones más sencillas para las cantidades en los ejercicios 1 a 4.

1. a. $e^{\ln 7.2}$ **b.** $e^{-\ln x^2}$ **c.** $e^{\ln x - \ln y}$

2. a. $e^{\ln(x^2+y^2)}$ **b.** $e^{-\ln 0.3}$ **c.** $e^{\ln \pi x - \ln 2}$

3. a. $2\ln\sqrt{e}$ **b.** $\ln(\ln e^e)$ **c.** $\ln(e^{-x^2-y^2})$

4. a. $\ln(e^{\sec\theta})$ **b.** $\ln(e^{(e^x)})$ **c.** $\ln(e^{2\ln x})$

Resolución de ecuaciones con términos logarítmicos y exponenciales

En los ejercicios 5 a 10, despeje y en términos de t o x, según considere apropiado.

5. $\ln y = 2t + 4$ **6.** $\ln y = -t + 5$

7. $\ln(y - 40) = 5t$ **8.** $\ln(1 - 2y) = t$

9. $\ln(y - 1) - \ln 2 = x + \ln x$

10. $\ln(y^2 - 1) - \ln(y + 1) = \ln(\operatorname{sen} x)$

En los ejercicios 11 y 12, despeje k.

11. a. $e^{2k} = 4$ **b.** $100e^{10k} = 200$ **c.** $e^{k/1000} = a$

12. a. $e^{5k} = \frac{1}{4}$ **b.** $80e^{k} = 1$ **c.** $e^{(\ln 0.8)k} = 0.8$

En los ejercicios 13 a 16, despeje t.

13. a. $e^{-0.3t} = 27$ **b.** $e^{kt} = \frac{1}{2}$ **c.** $e^{(\ln 0.2)t} = 0.4$

14. a. $e^{-0.01t} = 1000$ **b.** $e^{kt} = \frac{1}{10}$ **c.** $e^{(\ln 2)t} = \frac{1}{2}$

15. $e^{\sqrt{t}} = x^2$ **16.** $e^{(x^2)}e^{(2x+1)} = e^t$

Derivadas

En los ejercicios 17 a 36, determine la derivada de y respecto de x, t o θ, según sea apropiado.

17. $y = e^{-5x}$ **18.** $y = e^{2x/3}$

19. $y = e^{5-7x}$ **20.** $y = e^{(4\sqrt{x}+x^2)}$

21. $y = xe^x - e^x$ **22.** $y = (1 + 2x)e^{-2x}$

23. $y = (x^2 - 2x + 2)e^x$ **24.** $y = (9x^2 - 6x + 2)e^{3x}$

25. $y = e^{\theta}(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)$ **26.** $y = \ln(3\theta e^{-\theta})$

27. $y = \cos(e^{-\theta^2})$ **28.** $y = \theta^3 e^{-2\theta}\cos 5\theta$

29. $y = \ln(3te^{-t})$ **30.** $y = \ln(2e^{-t}\operatorname{sen} t)$

31. $y = \ln\left(\frac{e^{\theta}}{1 + e^{\theta}}\right)$ **32.** $y = \ln\left(\frac{\sqrt{\theta}}{1 + \sqrt{\theta}}\right)$

33. $y = e^{(\cos t + \ln t)}$ **34.** $y = e^{\operatorname{sen} t}(\ln t^2 + 1)$

35. $y = \int_0^{\ln x} \operatorname{sen} e^t\, dt$ **36.** $y = \int_{e^{4\sqrt{x}}}^{e^{2x}} \ln t\, dt$

En los ejercicios 37 a 40, determine dy/dx.

37. $\ln y = e^y \operatorname{sen} x$ **38.** $\ln xy = e^{x+y}$

39. $e^{2x} = \operatorname{sen}(x + 3y)$ **40.** $\tan y = e^x + \ln x$

Integrales

Evalúe las integrales de los ejercicios 41 a 62.

41. $\int (e^{3x} + 5e^{-x})\, dx$ **42.** $\int (2e^x - 3e^{-2x})\, dx$

43. $\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^x\, dx$ **44.** $\int_{-\ln 2}^{0} e^{-x}\, dx$

45. $\int 8e^{(x+1)}\, dx$ **46.** $\int 2e^{(2x-1)}\, dx$

47. $\int_{\ln 4}^{\ln 9} e^{x/2}\, dx$ **48.** $\int_0^{\ln 16} e^{x/4}\, dx$

49. $\int \frac{e^{\sqrt{r}}}{\sqrt{r}}\, dr$ **50.** $\int \frac{e^{-\sqrt{r}}}{\sqrt{r}}\, dr$

51. $\int 2t\, e^{-t^2}\, dt$ **52.** $\int t^3 e^{(t^4)}\, dt$

53. $\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\, dx$ **54.** $\int \frac{e^{-1/x^2}}{x^3}\, dx$

55. $\int_0^{\pi/4} (1 + e^{\tan\theta})\sec^2\theta\, d\theta$ **56.** $\int_{\pi/4}^{\pi/2} (1 + e^{\cot\theta})\csc^2\theta\, d\theta$

57. $\int e^{\sec \pi t}\sec \pi t \tan \pi t\, dt$

58. $\int e^{\csc(\pi + t)}\csc(\pi + t)\cot(\pi + t)\, dt$

59. $\displaystyle\int_{\ln(\pi/6)}^{\ln(\pi/2)} 2e^{v}\cos e^{v}\,dv$

60. $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{\ln \pi}} 2x\,e^{x^2}\cos\left(e^{x^2}\right)dx$

61. $\displaystyle\int \frac{e^r}{1+e^r}\,dr$

62. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+e^x}$

Problemas con valor inicial

En los ejercicios 63 a 66, resuelva los problemas con valor inicial.

63. $\dfrac{dy}{dt} = e^t \operatorname{sen}(e^t - 2), \quad y(\ln 2) = 0$

64. $\dfrac{dy}{dt} = e^{-t}\sec^2(\pi e^{-t}), \quad y(\ln 4) = 2/\pi$

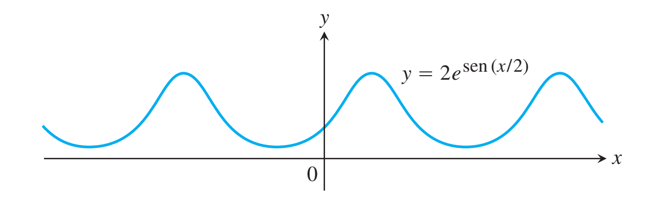
65. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 2e^{-x}, \quad y(0) = 1 \quad \text{y} \quad y'(0) = 0$

66. $\dfrac{d^2y}{dt^2} = 1 - e^{2t}, \quad y(1) = -1 \quad \text{y} \quad y'(1) = 0$

Teoría y aplicaciones

67. Determine los valores máximo y mínimo absolutos de $f(x) = e^x - 2x$ en $[0, 1]$.

68. ¿En qué punto alcanza la función periódica $f(x) = 2e^{\operatorname{sen}(x/2)}$ sus valores extremos? ¿Cuáles son esos valores?



69. Determine el valor máximo absoluto de $f(x) = x^2 \ln(1/x)$ y diga en qué punto se alcanza.

T **70.** Grafique juntas $f(x) = (x-3)^2 e^x$ y su derivada. Comente el comportamiento de f en relación con los signos y valores de f'. Por medio de cálculo, identifique los puntos significativos de las gráficas, según se requiera.

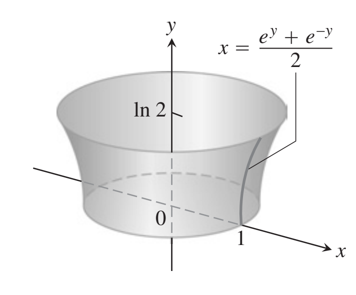
71. Determine el área de la región "triangular" en el primer cuadrante que está acotada por arriba por la curva $y = e^{2x}$, por abajo por la curva $y = e^x$, y a la derecha por la recta $x = \ln 3$.

72. Determine el área de la región "triangular" en el primer cuadrante que está acotada por arriba por la curva $y = e^{x/2}$, por abajo por la curva $y = e^{-x/2}$, y a la derecha por la recta $x = 2\ln 2$.

73. Determine una curva que pase por el origen en el plano xy y cuya longitud desde $x = 0$ hasta $x = 1$ sea

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{1}{4}e^x}\,dx.$$

74. Determine el área de la superficie generada al hacer girar la curva $x = (e^y + e^{-y})/2,\ 0 \le y \le \ln 2$, alrededor del eje y.



75. a. Demuestre que $\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C$.

b. Determine el valor promedio de $\ln x$ en $[1, e]$.

76. Determine el valor promedio de $f(x) = 1/x$ en $[1, 2]$.

77. Linealización de e^x en $x = 0$

a. Deduzca la aproximación lineal $e^x \approx 1 + x$ en $x = 0$.

T **b.** Calcule a cinco decimales la magnitud del error al sustituir e^x por $1 + x$ en el intervalo $[0, 0.2]$.

T **c.** Grafique juntas e^x y $1 + x$ para $-2 \le x \le 2$. De ser posible, utilice un color distinto para cada gráfica. ¿En qué intervalo parece que la aproximación sobreestima el valor de e^x? ¿En qué punto parece subestimarlo?

78. Leyes de los exponentes

a. Con base en la ecuación $e^{x_1}e^{x_2} = e^{x_1+x_2}$, que se dedujo en el texto, demuestre que $e^{-x} = 1/e^x$ para cualquier número real. Luego demuestre que $e^{x_1}/e^{x_2} = e^{x_1-x_2}$ para cualesquiera números x_1 y x_2.

b. Demuestre que $(e^{x_1})^{x_2} = e^{x_1x_2} = (e^{x_2})^{x_1}$, para cualesquiera números x_1 y x_2.

T **79. Una representación decimal de e** Por medio de la resolución de la ecuación $\ln x = 1$, determine e con tantos decimales como permita su calculadora.

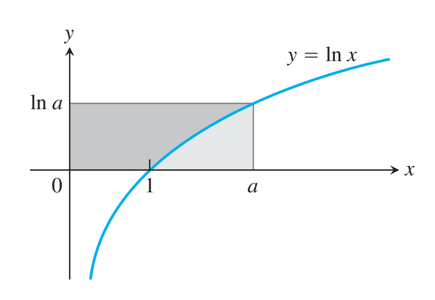
T **80. Relación inversa entre e^x y $\ln x$** Averigüe qué tan buena es su calculadora para evaluar las composiciones

$$e^{\ln x} \quad \text{y} \quad \ln(e^x).$$

81. Demuestre que para cualquier número $a > 1$

$$\int_1^a \ln x\,dx + \int_0^{\ln a} e^y\,dy = a\ln a.$$

(Vea la figura siguiente).



82. Desigualdades de la medias aritmética, geométrica y logarítmica

a. Demuestre que la gráfica de e^x es cóncava hacia arriba en todo intervalo.

b. Demuestre, haciendo referencia a la figura siguiente, que si $0 < a < b$ entonces then

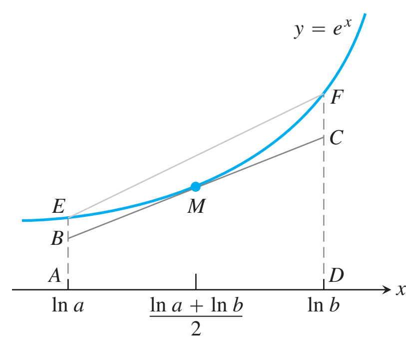
$$e^{(\ln a+\ln b)/2} \cdot (\ln b - \ln a) < \int_{\ln a}^{\ln b} e^x\, dx < \frac{e^{\ln a} + e^{\ln b}}{2} \cdot (\ln b - \ln a).$$

c. Utilice la desigualdad del inciso (b) para concluir que

$$\sqrt{ab} < \frac{b - a}{\ln b - \ln a} < \frac{a + b}{2}.$$

Esta desigualdad dice que la media geométrica de dos números positivos es menor que su media logarítmica, la cual, a su vez, es menor que su media aritmética.

(Para más información acerca de esta desigualdad, consulte “The Geometric, Logarithmic, and Arithmetic Mean Inequality”, de Frank Burk, en *American Mathematical Monthly*, volumen 94, número 6, junio-julio de 1987, páginas 527-528).



7.4 a^x y $\log_a x$

Hemos definido funciones exponenciales generales tales como 2^x, 10^x y π^x. En esta sección calcularemos sus derivadas e integrales. También definiremos las funciones logarítmicas generales tales como $\log_2 x$, $\log_{10} x$ y $\log_\pi x$, y determinaremos sus derivadas e integrales.

Derivada de a^u

Comencemos con la definición $a^x = e^{x \ln a}$:

$$\frac{d}{dx} a^x = \frac{d}{dx} e^{x \ln a} = e^{x \ln a} \cdot \frac{d}{dx}(x \ln a) \qquad \frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}$$

$$= a^x \ln a.$$

Si $a > 0$, entonces

$$\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a.$$

Con la regla de la cadena obtenemos una forma general.

> Si $a > 0$ y u es una función diferenciable de x, entonces a^u es una función diferenciable de x y
>
> $$\frac{d}{dx} a^u = a^u \ln a \, \frac{du}{dx}. \qquad (1)$$

Estas ecuaciones muestran por qué la función preferida, desde el punto del vista del cálculo, es e^x. Si $a = e$, entonces $\ln a = 1$ y la derivada de a^x se reduce a

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x \ln e = e^x.$$

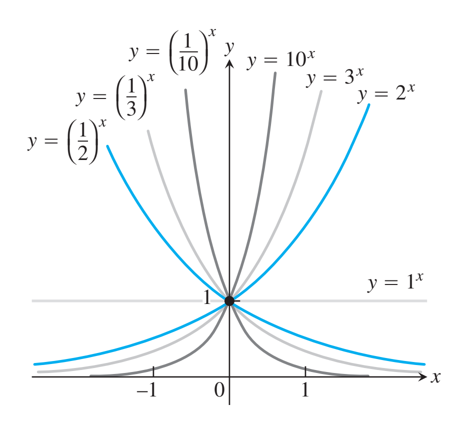


FIGURA 7.12 Las funciones exponenciales decrecen si $0 < a < 1$ y crecen si $a > 1$. Cuando $x \to \infty$, tenemos $a^x \to 0$, si $0 < a < 1$ y $a^x \to \infty$, si $a > 1$. Cuando $x \to -\infty$, tenemos que $a^x \to \infty$ si $0 < a < 1$ y $a^x \to 0$ si $a > 1$.

EJEMPLO 1 Diferenciación de funciones exponenciales generales

(a) $\dfrac{d}{dx} 3^x = 3^x \ln 3$

(b) $\dfrac{d}{dx} 3^{-x} = 3^{-x}(\ln 3)\dfrac{d}{dx}(-x) = -3^{-x} \ln 3$

(c) $\dfrac{d}{dx} 3^{\operatorname{sen} x} = 3^{\operatorname{sen} x}(\ln 3)\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = 3^{\operatorname{sen} x}(\ln 3)\cos x$ ■

De la ecuación (1), podemos ver que la derivada de a^x es positiva si $\ln a > 0$ o $a > 1$, y negativa si $\ln a < 0$ o $0 < a < 1$. En consecuencia, a^x es una función creciente de x si $a > 1$ y es una función decreciente de x, si $0 < a < 1$. En cada caso, a^x es inyectiva. La segunda derivada

$$\frac{d^2}{dx^2}(a^x) = \frac{d}{dx}(a^x \ln a) = (\ln a)^2 a^x$$

es positiva para toda x, por lo que la gráfica de a^x es cóncava hacia arriba para todo intervalo de la recta real (figura 7.12).

Otras funciones potencia

La capacidad de elevar números positivos a potencias reales arbitrarias permite definir funciones como x^x y $x^{\ln x}$ para $x > 0$. Determinamos las derivadas de tales funciones reescribiendo las funciones como potencias de e.

EJEMPLO 2 Diferenciación de una función potencia general

Determinar dy/dx si $y = x^x, \quad x > 0$.

Solución Escribimos x^x como una potencia de e:

$$y = x^x = e^{x \ln x}. \qquad a^x \text{ con } a = x.$$

Luego, diferenciamos como de costumbre:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} e^{x \ln x} \\
&= e^{x \ln x}\frac{d}{dx}(x \ln x) \\
&= x^x\left(x \cdot \frac{1}{x} + \ln x\right) \\
&= x^x(1 + \ln x).
\end{aligned}$$ ■

La integral de a^u

Si $a \neq 1$, de modo que $\ln a \neq 0$, podemos dividir ambos lados de la ecuación (1) entre $\ln a$ para obtener

$$a^u \frac{du}{dx} = \frac{1}{\ln a}\frac{d}{dx}(a^u).$$

Al integrar con respecto de x, resulta

$$\int a^u \frac{du}{dx}\,dx = \int \frac{1}{\ln a}\frac{d}{dx}(a^u)\,dx = \frac{1}{\ln a}\int \frac{d}{dx}(a^u)\,dx = \frac{1}{\ln a}a^u + C.$$

Escribiendo la primera integral en forma diferencial, se obtiene

$$\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + C. \tag{2}$$

EJEMPLO 3 Integración de funciones exponenciales generales

(a) $\displaystyle\int 2^x\,dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$ — Ecuación (2) con $a = 2$, $u = x$

(b) $\displaystyle\int 2^{\operatorname{sen} x}\cos x\,dx$

$\displaystyle = \int 2^u\,du = \frac{2^u}{\ln 2} + C$ — $u = \operatorname{sen} x$, $du = \cos x\,dx$, y ecuación (2)

$\displaystyle = \frac{2^{\operatorname{sen} x}}{\ln 2} + C$ — u reemplazada por sen x ■

Logaritmos con base a

Como vimos anteriormente, si a es cualquier número positivo diferente de 1, la función a^x es inyectiva y tiene una derivada diferente de cero en todo punto. Por lo tanto, tiene una inversa diferenciable. A esta inversa la llamamos **logaritmo de x en base a** y la denotamos mediante $\mathbf{\log_a x}$.

DEFINICIÓN $\log_a x$

Para cualquier número positivo $a \neq 1$,

$\log_a x$ es la función inversa de a^x.

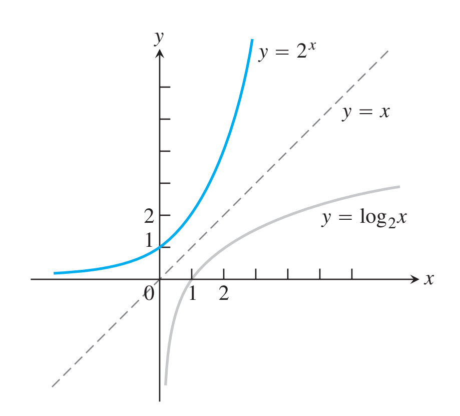


FIGURA 7.13 La gráfica de 2^x y su inversa, $\log_2 x$.

La gráfica de $y = \log_a x$ se puede obtener reflejando la gráfica de $y = a^x$ con respecto de la recta de 45°, $y = x$ (figura 7.13). Cuando $a = e$, tenemos $\log_e x =$ inversa de $e^x = \ln x$. Como $\log_a x$ y a^x son inversas entre sí, su composición, en cualquier orden, produce la función identidad.

Ecuaciones inversas para a^x y $\log_a x$

$$a^{\log_a x} = x \qquad (x > 0) \tag{3}$$

$$\log_a (a^x) = x \qquad (\text{toda } x) \tag{4}$$

EJEMPLO 4 Aplicación de las ecuaciones inversas

(a) $\log_2(2^5) = 5$ **(b)** $\log_{10}(10^{-7}) = -7$

(c) $2^{\log_2(3)} = 3$ **(d)** $10^{\log_{10}(4)} = 4$ ■

Evaluación de $\log_a x$

La evaluación de $\log_a x$ se simplifica si observamos que $\log_a x$ es un múltiplo de $\ln x$.

$$\log_a x = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x = \frac{\ln x}{\ln a} \tag{5}$$

Podemos deducir esta ecuación a partir de la ecuación (3):

$$a^{\log_a(x)} = x \qquad \text{Ecuación (3)}$$

$$\ln a^{\log_a(x)} = \ln x \qquad \text{Tomar el logaritmo natural de ambos lados}$$

$$\log_a(x) \cdot \ln a = \ln x \qquad \text{Regla de la potencia del teorema 2}$$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \qquad \text{Despejar } \log_a x.$$

Por ejemplo,

$$\log_{10} 2 = \frac{\ln 2}{\ln 10} \approx \frac{0.69315}{2.30259} \approx 0.30103$$

Las reglas aritméticas que satisface $\log_a x$ son las mismas que las de $\ln x$ (teorema 2). Estas reglas, dadas en la tabla 7.2, pueden demostrarse dividiendo las reglas correspondientes para la función logaritmo natural entre $\ln a$. Por ejemplo,

$$\ln xy = \ln x + \ln y \qquad \text{Regla 1 para logaritmos naturales } \ldots$$

$$\frac{\ln xy}{\ln a} = \frac{\ln x}{\ln a} + \frac{\ln y}{\ln a} \qquad \ldots \text{ dividiendo entre } \ln a \ \ldots$$

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y. \qquad \ldots \text{ se obtiene la regla 1 para logaritmos con base } a.$$

TABLA 7.2 Reglas para logaritmos con base a

Para cualesquiera números $x > 0$ y $y > 0$,

1. *Regla del producto:*
   $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
2. *Regla del cociente:*
   $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
3. *Regla del recíproco:*
   $\log_a \frac{1}{y} = -\log_a y$
4. *Regla de la potencia:*
   $\log_a x^y = y \log_a x$

Derivadas e integrales que incluyen $\log_a x$

Para determinar derivadas o integrales que incluyen logaritmos en base a, los convertimos a logaritmos naturales.

Si u es una función positiva diferenciable de x, entonces

$$\frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln u}{\ln a}\right) = \frac{1}{\ln a}\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{u}\frac{du}{dx}.$$

$$\frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

EJEMPLO 5

(a) $$\frac{d}{dx}\log_{10}(3x+1) = \frac{1}{\ln 10}\cdot\frac{1}{3x+1}\frac{d}{dx}(3x+1) = \frac{3}{(\ln 10)(3x+1)}$$

(b) $$\int \frac{\log_2 x}{x}\,dx = \frac{1}{\ln 2}\int \frac{\ln x}{x}\,dx \qquad \log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2}$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\int u\,du \qquad u = \ln x, \quad du = \frac{1}{x}dx$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\frac{u^2}{2} + C = \frac{1}{\ln 2}\frac{(\ln x)^2}{2} + C = \frac{(\ln x)^2}{2\ln 2} + C$$

■

Logaritmos en base 10

Los logaritmos en base 10, con frecuencia denominados **logaritmos comunes**, aparecen en muchas fórmulas científicas. Por ejemplo, la intensidad de los terremotos suele medirse en la **escala Richter**, que es logarítmica. La fórmula es

$$\text{Magnitud } R = \log_{10}\left(\frac{a}{T}\right) + B,$$

en donde a es la amplitud del movimiento telúrico en micras, registrada en la estación receptora, T es el periodo de la onda sísmica en segundos y B es un factor empírico que considera el debilitamiento de la onda sísmica al aumentar la distancia desde el epicentro del terremoto.

EJEMPLO 6 Intensidad de un terremoto

En el caso de un terremoto que ocurre a 10,000 km de distancia de la estación receptora, $B = 6.8$. Si el movimiento vertical del suelo registrado es de $a = 10$ micras y el periodo es $T = 1$ segundo, la magnitud del terremoto es

$$R = \log_{10}\left(\frac{10}{1}\right) + 6.8 = 1 + 6.8 = 7.8.$$

Un terremoto de esta magnitud puede causar grandes daños en el área cercana a su epicentro. ■

La **escala del pH**, para medir la acidez de una solución, es una escala logarítmica en base 10. El valor del pH (potencial de hidrógeno) de la solución es el logaritmo común del recíproco de la concentración de iones de hidronio de la solución $[H_3O^+]$:

$$\text{pH} = \log_{10}\frac{1}{[H_3O^+]} = -\log_{10}[H_3O^+].$$

La concentración del ión hidronio se mide en moles por litro. El vinagre tiene un pH de tres, el agua destilada un pH de 7, el agua de mar un pH de 8.15 y el amoníaco de uso doméstico un pH de 12. Los rangos completos de la escala van desde alrededor de 0.1 para el ácido clorhídrico normal, hasta 14 para una solución normal de hidróxido de sodio.

Otro ejemplo del uso de logaritmos comunes es la **escala de decibeles** (dB) para medir la intensidad del sonido. Si I es la **intensidad** del sonido en watts por metro cuadrado, el nivel del sonido, en decibeles, es

$$\textbf{Nivel del sonido} = 10\log_{10}(I \times 10^{12})\text{ dB}. \qquad (6)$$

Casi todos los alimentos son ácidos (pH < 7).

Alimento	Valor de pH
Plátano	4.5-4.7
Toronja	3.0-3.3
Naranja	3.0-4.0
Limón	1.8-2.0
Leche	6.3-6.6
Bebidas gaseosas	2.0–4.0
Espinacas	5.1-5.7

Niveles comunes de sonido

Umbral de audición	0 dB
Movimiento de las hojas	10 dB
Susurro promedio	20 dB
Automóvil poco ruidoso	50 dB
Conversación normal	65 dB
Taladro neumático a 10 pies de distancia	90 dB
Umbral de dolor	120 dB

Si usted se ha preguntado alguna vez por qué al duplicar la potencia de su amplificador de audio el nivel del sonido sólo aumenta unos cuantos decibeles, la ecuación (6) le dará la respuesta. Como muestra el ejemplo siguiente, duplicar I sólo provoca un aumento de alrededor de 3 dB.

EJEMPLO 7 Intensidad del sonido

Al duplicar I en la ecuación (6), la intensidad del sonido aumenta cerca de 3 dB. Escribiendo log en lugar de $\log_{10}$ (como se acostumbra), tenemos

$$\begin{aligned}
\text{Nivel del sonido al duplicar } I &= 10 \log (2I \times 10^{12}) && \text{Ecuación (6) con } 2I \text{ en lugar de } I\\
&= 10 \log (2 \cdot I \times 10^{12})\\
&= 10 \log 2 + 10 \log (I \times 10^{12})\\
&= \text{nivel original del sonido} + 10 \log 2\\
&\approx \text{nivel original del sonido} + 3. && \log_{10} 2 \approx 0.30
\end{aligned}$$

■

EJERCICIOS 7.4

Cálculos algebraicos con a^x y $\log_a x$

Simplifique las expresiones de los ejercicios 1 a 4.

1. a. $5^{\log_5 7}$ **b.** $8^{\log_8 \sqrt{2}}$ **c.** $1.3^{\log_{1.3} 75}$

d. $\log_4 16$ **e.** $\log_3 \sqrt{3}$ **f.** $\log_4 \left(\frac{1}{4}\right)$

2. a. $2^{\log_2 3}$ **b.** $10^{\log_{10}(1/2)}$ **c.** $\pi^{\log_\pi 7}$

d. $\log_{11} 121$ **e.** $\log_{121} 11$ **f.** $\log_3 \left(\frac{1}{9}\right)$

3. a. $2^{\log_4 x}$ **b.** $9^{\log_3 x}$ **c.** $\log_2 (e^{(\ln 2)(\operatorname{sen} x)})$

4. a. $25^{\log_5 (3x^2)}$ **b.** $\log_e (e^x)$ **c.** $\log_4 (2^{e^x \operatorname{sen} x})$

Exprese los cocientes de los ejercicios 5 y 6 como cocientes de logaritmos naturales y simplifique.

5. a. $\dfrac{\log_2 x}{\log_3 x}$ **b.** $\dfrac{\log_2 x}{\log_8 x}$ **c.** $\dfrac{\log_x a}{\log_{x^2} a}$

6. a. $\dfrac{\log_9 x}{\log_3 x}$ **b.** $\dfrac{\log_{\sqrt{10}} x}{\log_{\sqrt{2}} x}$ **c.** $\dfrac{\log_a b}{\log_b a}$

En las ecuaciones de los ejercicios 7 a 10 despeje x.

7. $3^{\log_3 (7)} + 2^{\log_2 (5)} = 5^{\log_5 (x)}$

8. $8^{\log_8 (3)} - e^{\ln 5} = x^2 - 7^{\log_7 (3x)}$

9. $3^{\log_3 (x^2)} = 5e^{\ln x} - 3 \cdot 10^{\log_{10} (2)}$

10. $\ln e + 4^{-2 \log_4 (x)} = \dfrac{1}{x} \log_{10} (100)$

Derivadas

En los ejercicios 11 a 38, determine la derivada de y con respecto de la variable independiente dada.

11. $y = 2^x$ **12.** $y = 3^{-x}$

13. $y = 5^{\sqrt{s}}$ **14.** $y = 2^{(s^2)}$

15. $y = x^\pi$ **16.** $y = t^{1-e}$

17. $y = (\cos \theta)^{\sqrt{2}}$ **18.** $y = (\ln \theta)^\pi$

19. $y = 7^{\sec \theta} \ln 7$ **20.** $y = 3^{\tan \theta} \ln 3$

21. $y = 2^{\operatorname{sen} 3t}$ **22.** $y = 5^{-\cos 2t}$

23. $y = \log_2 5\theta$ **24.** $y = \log_3(1 + \theta \ln 3)$

25. $y = \log_4 x + \log_4 x^2$ **26.** $y = \log_{25} e^x - \log_5 \sqrt{x}$

27. $y = \log_2 r \cdot \log_4 r$ **28.** $y = \log_3 r \cdot \log_9 r$

29. $y = \log_3 \left(\left(\dfrac{x+1}{x-1} \right)^{\ln 3} \right)$ **30.** $y = \log_5 \sqrt{\left(\dfrac{7x}{3x+2} \right)^{\ln 5}}$

31. $y = \theta \operatorname{sen} (\log_7 \theta)$ **32.** $y = \log_7 \left(\dfrac{\operatorname{sen} \theta \cos \theta}{e^\theta 2^\theta} \right)$

33. $y = \log_5 e^x$ **34.** $y = \log_2 \left(\dfrac{x^2 e^2}{2\sqrt{x+1}} \right)$

35. $y = 3^{\log_2 t}$ **36.** $y = 3 \log_8 (\log_2 t)$

37. $y = \log_2 (8t^{\ln 2})$ **38.** $y = t \log_3 \left(e^{(\operatorname{sen} t)(\ln 3)} \right)$

Diferenciación logarítmica

En los ejercicios 39 a 46 utilice la diferenciación logarítmica para determinar la derivada de y con respecto de la variable independiente.

39. $y = (x + 1)^x$ **40.** $y = x^{(x+1)}$

41. $y = (\sqrt{t})^t$ **42.** $y = t^{\sqrt{t}}$

43. $y = (\operatorname{sen} x)^x$ **44.** $y = x^{\operatorname{sen} x}$

45. $y = x^{\ln x}$ **46.** $y = (\ln x)^{\ln x}$

Integración

Evalúe las integrales de los ejercicios 47 a 56.

47. $\displaystyle\int 5^x \, dx$ **48.** $\displaystyle\int (1.3)^x \, dx$

49. $\int_0^1 2^{-\theta}\, d\theta$

50. $\int_{-2}^0 5^{-\theta}\, d\theta$

51. $\int_1^{\sqrt{2}} x2^{(x^2)}\, dx$

52. $\int_1^4 \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$

53. $\int_0^{\pi/2} 7^{\cos t} \operatorname{sen} t\, dt$

54. $\int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{3}\right)^{\tan t} \sec^2 t\, dt$

55. $\int_2^4 x^{2x}(1 + \ln x)\, dx$

56. $\int_1^2 \frac{2^{\ln x}}{x}\, dx$

En los ejercicios 57 a 60 evalúe las integrales.

57. $\int 3x^{\sqrt{3}}\, dx$

58. $\int x^{\sqrt{2}-1}\, dx$

59. $\int_0^3 (\sqrt{2} + 1)x^{\sqrt{2}}\, dx$

60. $\int_1^e x^{(\ln 2)-1}\, dx$

Evalúe las integrales en los ejercicios 61 a 70.

61. $\int \frac{\log_{10} x}{x}\, dx$

62. $\int_1^4 \frac{\log_2 x}{x}\, dx$

63. $\int_1^4 \frac{\ln 2 \log_2 x}{x}\, dx$

64. $\int_1^e \frac{2 \ln 10 \log_{10} x}{x}\, dx$

65. $\int_0^2 \frac{\log_2 (x + 2)}{x + 2}\, dx$

66. $\int_{1/10}^{10} \frac{\log_{10} (10x)}{x}\, dx$

67. $\int_0^9 \frac{2 \log_{10} (x + 1)}{x + 1}\, dx$

68. $\int_2^3 \frac{2 \log_2 (x - 1)}{x - 1}\, dx$

69. $\int \frac{dx}{x \log_{10} x}$

70. $\int \frac{dx}{x(\log_8 x)^2}$

Evalúe las integrales en los ejercicios 71 a 74.

71. $\int_1^{\ln x} \frac{1}{t}\, dt, \quad x > 1$

72. $\int_1^{e^x} \frac{1}{t}\, dt$

73. $\int_1^{1/x} \frac{1}{t}\, dt, \quad x > 0$

74. $\frac{1}{\ln a} \int_1^x \frac{1}{t}\, dt, \quad x > 0$

Teoría y aplicaciones

75. Determine el área de la región entre la curva $y = 2x/(1 + x^2)$ y el intervalo $-2 \leq x \leq 2$ del eje x.

76. Determine el área de la región entre la curva $y = 2^{1-x}$ y el intervalo $-1 \leq x \leq 1$ del eje x.

77. pH de la sangre El pH de la sangre humana usualmente oscila entre 7.37 y 7.44. Determine las cotas correspondientes para $[H_3O^+]$.

78. pH del fluido cerebral El fluido cerebroespinal tiene una concentración de ion hidronio de casi $[H_3O^+] = 4.8 \times 10^{-8}$ moles por litro. ¿Cuál es su pH?

79. Amplificadores de audio ¿Por qué factor k debe multiplicarse la intensidad I del sonido de su amplificador de audio para que el nivel del sonido aumente 10 dB?

80. Amplificadores de audio Usted multiplicó la intensidad del sonido de su sistema de audio por un factor de 10. ¿Cuántos decibeles aumentó el nivel del sonido?

81. En cualquier solución, el producto de la concentración de ion hidronio $[H_3O^+]$ (moles/L) y la concentración del ion hidroxilo $[OH^-]$ (moles/L) es casi 10^{-14}.

a. ¿Cuál es el valor de $[H^3O^+]$ que minimiza la suma de las concentraciones, $S = [H^3O^+] + [OH^-]$? (*Sugerencia:* Cambie la notación. Haga $x = [H^3O^+]$).

b. ¿Cuál es el pH de una solución en la que S tiene su valor mínimo?

c. ¿Cuál es la razón de $[H^3O^+]$ a $[OH^-]$ que minimiza S?

82. ¿Es posible que $\log_a b$ sea igual a $1/\log_b a$? Justifique su respuesta.

T **83.** La ecuación $x^2 = 2^x$ tiene tres soluciones: $x = 2$, $x = 4$ y otra. Por medio de una gráfica, calcule la tercera solución con la mayor precisión posible.

T **84.** ¿Es posible que $x^{\ln 2}$ sea igual a $2^{\ln x}$ para $x > 0$? Grafique las dos funciones y explique lo que vea.

85. Linealización de 2^x

a. Determine la linealización de $f(x) = 2^x$ en $x = 0$. Luego redondee los coeficientes a dos decimales.

T **b.** Grafique juntas la linealización y la función para $-3 \leq x \leq 3$ y $-1 \leq x \leq 1$.

86. Linealización de $\log_3 x$

a. Determine la linealización de $f(x) = \log_3 x$ en $x = 3$. Luego redondee los coeficientes a dos decimales.

T **b.** Grafique juntas la linealización y la función en una ventana con los parámetros $0 \leq x \leq 8$ y $2 \leq x \leq 4$.

Cálculos con otras bases

T **87.** Casi todas las calculadoras científicas tienen teclas para $\log_{10} x$ y $\ln x$. Para determinar logaritmos en otras bases, se utiliza la ecuación (5), $\log_a x = (\ln x)/(\ln a)$.

Determine los siguientes logaritmos con cinco decimales de precisión.

a. $\log_3 8$ **b.** $\log_7 0.5$

c. $\log_{20} 17$ **d.** $\log_{0.5} 7$

e. $\ln x$, dado que $\log_{10} x = 2.3$

f. $\ln x$, dado que $\log_2 x = 1.4$

g. $\ln x$, dado que $\log_2 x = -1.5$

h. $\ln x$, dado que $\log_{10} x = -0.7$

88. Factores de conversión

a. Demuestre que la ecuación para convertir logaritmos de base 10 en logaritmos de base 2 es

$$\log_2 x = \frac{\ln 10}{\ln 2} \log_{10} x.$$

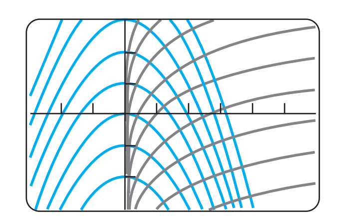
b. Demuestre que la ecuación para convertir logaritmos en base a a logaritmos en base b es

$$\log_b x = \frac{\ln a}{\ln b} \log_a x.$$

89. Familias de curvas ortogonales Demuestre que todas las curvas en la familia

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + k$$

(k cualquier constante) son perpendiculares a todas las curvas en la familia $y = \ln x + c$ (c cualquier constante) en sus puntos de intersección. (Vea la figura siguiente).



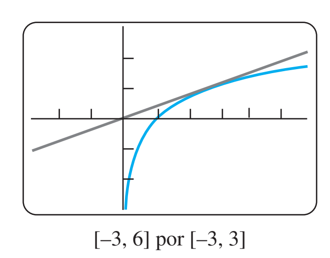
T **90. Relación inversa entre e^x y $\ln x$** Averigüe qué tan buena es su calculadora para evaluar las composiciones

$$e^{\ln x} \quad \text{y} \quad \ln(e^x).$$

T **91. Una representación decimal de e** Por medio de la resolución de la ecuación $\ln x = 1$, determine e con tantos decimales como permita su calculadora.

T **92. ¿Cuál es más grande, π^e o e^π?** Las calculadoras han develado parte del misterio de ésta, alguna vez, difícil pregunta. (Realice los cálculos y compruébelos; verá que el resultado es sorprendentemente parecido en cada caso). También puede responder esta pregunta sin ayuda de una calculadora.

a. Determine una ecuación para la línea que pasa por el origen y es tangente a la gráfica de $y = \ln x$.



[–3, 6] por [–3, 3]

b. Con base en las gráficas de $y = \ln x$ y la recta tangente, proporcione un argumento para explicar por qué $\ln x < x/e$ para toda x positiva, $x \neq e$.

c. Demuestre que $\ln(x^e) < x$ para toda x positiva, $x \neq e$.

d. Concluya que $x^e < e^x$ para toda x positiva, $x \neq e$.

e. Por lo tanto, ¿cuál es más grande, π^e o e^π?

7.5 Crecimiento y decaimiento exponenciales

Las funciones exponenciales aumentan o disminuyen muy rápidamente con cambios en la variable independiente, tal como puede observarse en una amplia variedad de situaciones naturales e industriales. La diversidad de modelos que tienen como base estas funciones explica, en parte, su importancia.

Ley de cambio exponencial

Al modelar muchas situaciones reales, una cantidad y aumenta o disminuye a una velocidad proporcional a su magnitud en un instante dado, t. Ejemplos de tales magnitudes incluyen la cantidad de un material radiactivo que decae, fondos que generan interés en una cuenta bancaria, el tamaño de una población y la diferencia de temperaturas entre una taza de café caliente y la de la habitación. Tales cantidades cambian de acuerdo con la *ley de cambio exponencial*, que deduciremos en esta sección.

Si denominamos por y_0 a la cantidad presente en el instante $t = 0$, podemos determinar y como una función de t, resolviendo el problema de valor inicial siguiente:

$$\text{Ecuación diferencial:} \quad \frac{dy}{dt} = ky$$
$$\text{Condición inicial:} \quad y = y_0 \quad \text{cuando} \quad t = 0. \tag{1}$$

Si y es positiva y creciente, entonces k es positiva y decimos, de acuerdo con la ecuación (1), que la tasa de crecimiento es proporcional a lo que se tiene acumulado. Si y es positiva y decreciente, entonces k es negativa y decimos, de acuerdo con la ecuación (1), que la tasa de decaimiento es proporcional a la cantidad que aún queda.

Resulta claro que, si $y_0 = 0$, la función constante $y = 0$ es una solución de la ecuación (1). Para determinar las soluciones distintas de cero, dividimos la ecuación (1) entre y:

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dt} = k$$

$$\int \frac{1}{y} \frac{dy}{dt}\, dt = \int k\, dt \qquad \text{Integrar respecto de } t;$$

$$\ln |y| = kt + C \qquad \int (1/u)\, du = \ln |u| + C.$$

$$|y| = e^{kt+C} \qquad \text{Exponenciar.}$$

$$|y| = e^{C} \cdot e^{kt} \qquad e^{a+b} = e^{a} \cdot e^{b}$$

$$y = \pm e^{C} e^{kt} \qquad \text{Si } |y| = r, \text{ entonces } y = \pm r.$$

$$y = Ae^{kt}. \qquad A \text{ es una forma abreviada de } \pm e^{C}.$$

Permitiendo que A tome el valor cero, además de todos los valores posibles $\pm e^{C}$, podemos incluir la solución $y = 0$ en la fórmula.

Para determinar el valor de A del problema con valor inicial, despejamos A cuando $y = y_0$ y $t = 0$:

$$y_0 = Ae^{k \cdot 0} = A.$$

Por lo tanto, la solución del problema con valor inicial es $y = y_0 e^{kt}$.

Se dice que las cantidades que cambian de esta manera experimentan un **crecimiento exponencial**, si $k > 0$, y un **decaimiento exponencial** si $k < 0$.

Ley de cambio exponencial

$$y = y_0 e^{kt} \tag{2}$$

Crecimiento: $k > 0$ Decaimiento: $k < 0$

El número k es la **tasa (razón) constante** de la ecuación.

La deducción de la ecuación (2) muestra que las únicas funciones que son su propia derivada son múltiplos constantes de la función exponencial.

Crecimiento ilimitado de población

Estrictamente hablando, el número de individuos en una población (por ejemplo de personas, plantas, zorros o bacterias) es una función no continua del tiempo, ya que toma valores discretos. Sin embargo, cuando el número de individuos se vuelve bastante grande, la población puede aproximarse por medio de una función continua. En muchos contextos, otra hipótesis razonable es la diferenciabilidad de la función que se usa para aproximar, ya que permite el uso de cálculo para modelar y predecir el tamaño de la población.

Si suponemos que la proporción de individuos que se reproducen permanece constante y damos por sentada una fertilidad constante, la tasa (razón) de nacimientos es proporcional al número $y(t)$ de individuos presentes en cualquier instante t. También supondremos que la tasa de mortalidad de la población es estable y proporcional a $y(t)$. Si además no tomamos en cuenta la migración (emigración e inmigración), la tasa de crecimiento dy/dt es la tasa de nacimiento menos la tasa de mortalidad, que es igual, bajo nuestras hipótesis, a

la diferencia entre las dos proporciones. En otras palabras, $dy/dt = ky$, por lo que $y = y_0 e^{kt}$, donde y_0 es el tamaño de la población en el instante $t = 0$. Como con todo crecimiento, éste podría tener limitaciones debido al entorno, aquí ignoraremos ese hecho (para analizarlo en la sección 9.5).

En el ejemplo siguiente partiremos de este modelo poblacional para ver cómo el número de individuos infectados por una enfermedad en una población, disminuye cuando la enfermedad se trata de manera apropiada.

EJEMPLO 1 Reducción del número de individuos afectados por una enfermedad infecciosa

Un modelo para analizar cómo erradicar una enfermedad tratándola de manera apropiada, supone que la tasa dy/dt a la que el número de individuos infectados cambia es proporcional al número y. El número de personas sanadas es proporcional al número de individuos infectados. Suponga que, en el curso de cualquier año dado, el número de casos de individuos afectados por una enfermedad se reduce 20%. Si actualmente hay 10,000 casos, ¿cuántos años serán necesarios para reducir el número a 1000?

Solución Utilizamos la ecuación $y = y_0 e^{kt}$. Hay tres valores por determinar: el de y_0, el de k y el tiempo t cuando $y = 1000$.

Valor de y_0. Tenemos libertad de iniciar la cuenta del tiempo en cualquier instante. Si contamos a partir de hoy, entonces $y = 10{,}000$ cuando $t = 0$, de manera que $y_0 = 10{,}000$. Ahora, nuestra ecuación es

$$y = 10{,}000 e^{kt}. \tag{3}$$

Valor de k. Cuando $t = 1$ año, el número de casos será 80% de su valor actual, es decir, 8000. De aquí que,

$$\begin{aligned} 8000 &= 10{,}000 e^{k(1)} && \text{Ecuación (3) cuando } t = 1 \text{ y } y = 8000 \\ e^k &= 0.8 \\ \ln(e^k) &= \ln 0.8 && \text{Tomar logaritmos de ambos lados.} \\ k &= \ln 0.8 < 0. \end{aligned}$$

En cualquier instante dado t,

$$y = 10{,}000 e^{(\ln 0.8)t}. \tag{4}$$

Valor de t que hace $y = 1000$. En la ecuación (4) hacemos y igual a 1000 y despejamos t:

$$\begin{aligned} 1000 &= 10{,}000 e^{(\ln 0.8)t} \\ e^{(\ln 0.8)t} &= 0.1 \\ (\ln 0.8)t &= \ln 0.1 && \text{Tomar logaritmos de ambos lados.} \\ t &= \frac{\ln 0.1}{\ln 0.8} \approx 10.32 \text{ años}. \end{aligned}$$

Se requerirá un poco más de 10 años para reducir a 1000 el número de casos. ■

Interés compuesto de forma continua

Si usted invirtiera una cantidad de dinero A_0 a una tasa de interés anual fija (expresada como un decimal), y si el interés se agregara a su cuenta k veces al año, la fórmula calcular para la cantidad de dinero que tendría al final de t años es

$$A_t = A_0 \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt}. \tag{5}$$

El interés podría añadirse (los banqueros dicen "componerse" o "capitalizarse") cada mes ($k = 12$), cada semana ($k = 52$), cada día ($k = 365$) o incluso de manera más frecuente, digamos cada hora o cada minuto. Tomando el límite cuando el interés se compone cada vez con mayor frecuencia, llegamos a la fórmula siguiente para determinar la cantidad de dinero acumulado al cabo de t años:

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} A_t &= \lim_{k\to\infty} A_0\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt} \\
&= A_0 \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{r}{k}\right)^{\frac{k}{r}\cdot rt} \\
&= A_0\left[\lim_{\frac{r}{k}\to 0}\left(1+\frac{r}{k}\right)^{\frac{k}{r}}\right]^{rt} && \text{Cuando } k\to\infty,\ \frac{r}{k}\to 0 \\
&= A_0\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right]^{rt} && \text{Sustituir } x=\frac{r}{k} \\
&= A_0 e^{rt} && \text{Teorema 4}
\end{aligned}$$

La fórmula resultante para determinar la cantidad de dinero que habrá en su cuenta al cabo de t años es

$$A(t) = A_0 e^{rt}. \tag{6}$$

De acuerdo con esta fórmula, decimos que el interés que se paga se **compone de manera continua**. El número r se denomina **tasa de interés continua**. El monto que habrá al cabo de t años se calcula a partir de la ley de cambio exponencial que se da en la ecuación (6).

EJEMPLO 2 Cuenta de ahorros

Suponga que se depositan \$621 en una cuenta bancaria que paga 6% de interés compuesto de manera continua. ¿Cuánto dinero habrá en la cuenta 8 años después?

Solución Utilizamos la ecuación con $A_0 = 621$, $r = 0.06$ y $t = 8$:

$$A(8) = 621e^{(0.06)(8)} = 621e^{0.48} = 1003.58 \qquad \text{Redondeado a centavos}$$

Si el banco pagase el interés trimestralmente ($k = 4$ en la ecuación 5), la cantidad que habría en la cuenta al final del periodo sería de \$1000.01. En consecuencia, el efecto del interés compuesto de manera continua ha dado lugar a una suma adicional de \$3.57. Un banco podría decidir que vale la pena pagar esa suma adicional para poder anunciar, "Sus intereses se capitalizan cada segundo, día y noche", o mejor aún, "Sus intereses se capitalizan de manera continua". ■

Radiactividad

Algunos átomos son inestables y pueden emitir masa o radiación espontáneamente. Este proceso se denomina **decaimiento radiactivo**, y al elemento cuyos átomos lo sufren de manera espontánea se le llama **elemento radiactivo**. Cuando un átomo emite parte de su masa en este proceso de radiactividad, suele ocurrir que el resto de los átomos se reestructuren para formar algún nuevo elemento. Por ejemplo, el carbono 14 radiactivo decae en nitrógeno, y el radio, a lo largo de varios pasos radiactivos intermedios, se transforma en plomo.

Para el gas radón 222, t se mide en días y $k = 0.18$. Para el radio 226, que se utilizaba en las carátulas de los relojes para que brillarán en la oscuridad (una práctica peligrosa), t se mide en años y $k = 4.3 \times 10^{-4}$.

Los experimentos han demostrado que, en cualquier instante, la tasa a la que decae un elemento radiactivo (medida como el número de núcleos que cambian por unidad de tiempo), es aproximadamente proporcional al número de núcleos radiactivos presentes. Por lo tanto el decaimiento de un elemento radiactivo se describe por medio de la ecuación $dy/dt = -ky$, $k > 0$. Por convención aquí se utiliza $-k$ ($k > 0$) en lugar de k ($k < 0$) para ha-

cen hincapié en el hecho de que y decrece. Si y_0 es el número de núcleos radiactivos presentes en el instante cero, su número en cualquier instante posterior t será

$$y = y_0 e^{-kt}, \qquad k > 0.$$

EJEMPLO 3 Vida media de un elemento radiactivo

La **vida media** de un elemento radiactivo es el tiempo que se requiere para que la mitad de los núcleos de una muestra del mismo se desintegren. Resulta interesante mencionar que la vida media es una constante que no depende del número de núcleos radiactivos que había al principio en la muestra, sino de la sustancia radiactiva de que se trate.

Para comprender por qué, sea y_0 el número de núcleos radiactivos al principio en la muestra. Entonces, el número y de núcleos en cualquier instante t será $y = y_0 e^{-kt}$. Buscamos el valor de t en el que el número de núcleos radiactivos presentes sea igual a la mitad del número original:

$$\begin{aligned} y_0 e^{-kt} &= \frac{1}{2} y_0 \\ e^{-kt} &= \frac{1}{2} \\ -kt &= \ln \frac{1}{2} = -\ln 2 \qquad \text{Regla del recíproco para logaritmos} \\ t &= \frac{\ln 2}{k} \end{aligned}$$

Este valor de t es la vida media del elemento. Depende únicamente del valor de k; el número y_0 no ejerce ninguna influencia.

$$\text{Vida media} = \frac{\ln 2}{k} \tag{7}$$

■

EJEMPLO 4 Vida media del polonio 210

La vida efectiva de radiactividad del polonio 210 es tan breve que se mide en días en lugar de hacerlo en años. En una muestra que inicialmente tenía y_0 átomos radiactivos, el número de átomos radiactivos restantes, al cabo de t días, es

$$y = y_0 e^{-5 \times 10^{-3} t}.$$

Determine la vida media del elemento.

Solución

$$\begin{aligned} \text{Vida media} &= \frac{\ln 2}{k} \qquad \text{Ecuación (7)} \\ &= \frac{\ln 2}{5 \times 10^{-3}} \qquad \text{La } k \text{ de la ecuación de decaimiento del polonio} \\ &\approx 139 \text{ días} \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 5 Fechado con carbono 14

En ocasiones, el decaimiento de elementos radiactivos puede utilizarse para fechar hechos ocurridos en el pasado de la Tierra. En un organismo vivo, la razón de carbono radiactivo, carbono 14, a carbono ordinario permanece constante durante su vida, siendo aproximada-

mente igual a la razón del entorno del organismo en su época. Sin embargo, al morir el organismo ya no ingiere carbono 14, y la proporción de dicho elemento en sus restos disminuye conforme decae.

Para el fechado con carbono 14, los científicos emplean la cifra de 5700 años como vida media (en los ejercicios veremos más acerca del fechado con carbono 14). Determinar la edad de una muestra en la que 10% del núcleo radiactivo original se ha desintegrado.

Solución Utilizamos la ecuación de decaimiento $y = y_0 e^{-kt}$. Debemos determinar dos cosas: el valor de k y el valor de t cuando y es $0.9y_0$ (aún se conserva 90% de los núcleos radiactivos). Esto es, determinamos t cuando $y_0 e^{-kt} = 0.9y_0$, o $e^{-kt} = 0.9$.

Valor de k: Utilizamos la ecuación (7) para determinar la vida media:

$$k = \frac{\ln 2}{\text{vida media}} = \frac{\ln 2}{5700} \qquad (\text{alrededor de } 1.2 \times 10^{-4})$$

Valor de t que hace $e^{-kt} = 0.9$:

$$\begin{aligned} e^{-kt} &= 0.9 \\ e^{-(\ln 2/5700)t} &= 0.9 \\ -\frac{\ln 2}{5700}t &= \ln 0.9 && \text{Tomamos logaritmos en ambos lados} \\ t &= -\frac{5700 \ln 0.9}{\ln 2} \approx 866 \text{ años}. \end{aligned}$$

La muestra tiene una antigüedad de aproximadamente 866 años. ■

Transferencia de calor: ley de enfriamiento de Newton

Cuando se deja sopa en un tazón metálico, ésta se enfría hasta llegar a la temperatura ambiente. Un lingote de plata caliente sumergido en agua se enfría hasta alcanzar la temperatura del líquido. En situaciones como éstas, la velocidad a la que la temperatura de un objeto cambia en cualquier instante es casi proporcional a la diferencia entre su temperatura y la temperatura del medio que lo rodea. Aunque también se aplica al fenómeno de calentamiento, esta observación se denomina *ley de enfriamiento de Newton* y hay una ecuación para ella.

Si H es la temperatura del objeto en el instante t y H_{MA} es la temperatura constante del medio ambiente, la ecuación diferencial es

$$\frac{dH}{dt} = -k(H - H_{MA}). \tag{8}$$

Si sustituimos y por $(H - H_{MA})$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{d}{dt}(H - H_{MA}) = \frac{dH}{dt} - \frac{d}{dt}(H_{MA}) \\ &= \frac{dH}{dt} - 0 && H_{MA} \text{ es constante} \\ &= \frac{dH}{dt} \\ &= -k(H - H_S) && \text{Ecuación (8)} \\ &= -ky. && H - H_{MA} = y. \end{aligned}$$

Ahora, sabemos que $y = y_0 e^{-kt}$ es la solución de $dy/dt = -ky$ es donde $y(0) = y_0$. La sustitución de $(H - H_{MA})$ por y, nos indica que

$$H - H_{MA} = (H_0 - H_{MA})e^{-kt}, \tag{9}$$

donde H_0 es la temperatura en $t = 0$. Ésta es la ecuación de la ley de enfriamiento de Newton.

EJEMPLO 6 Tiempo para enfriar un huevo cocido

Un huevo cocido a 98°C se sumerge en agua cuya temperatura es de 18°C. Después de 5 minutos, la temperatura del huevo es de 38°C. Suponiendo que el agua no se calienta de forma apreciable, ¿cuánto tardará la temperatura del huevo en llegar a 20°C?

Solución Determinamos cuánto tarda el huevo en enfriarse de 98°C a 20°C, y sustituimos los 5 minutos que ya han transcurrido. Por medio de la ecuación (9) con $H_{MA} = 18$ y $H_0 = 98$, la temperatura del huevo al cabo de t min después de sumergirlo en el agua es

$$H = 18 + (98 - 18)e^{-kt} = 18 + 80e^{-kt}.$$

Para hallar k, utilizamos la información de que $H = 38$ cuando $t = 5$:

$$\begin{aligned} 38 &= 18 + 80e^{-5k} \\ e^{-5k} &= \frac{1}{4} \\ -5k &= \ln\frac{1}{4} = -\ln 4 \\ k &= \frac{1}{5}\ln 4 = 0.2\ln 4 \qquad (\text{aproximadamente } 0.28). \end{aligned}$$

La temperatura del huevo en el instante t es $H = 18 + 80e^{-(0.2 \ln 4)t}$. Ahora determinamos el instante t en el que $H = 20$:

$$\begin{aligned} 20 &= 18 + 80e^{-(0.2\ln 4)t} \\ 80e^{-(0.2\ln 4)t} &= 2 \\ e^{-(0.2\ln 4)t} &= \frac{1}{40} \\ -(0.2\ln 4)t &= \ln\frac{1}{40} = -\ln 40 \\ t &= \frac{\ln 40}{0.2\ln 4} \approx 13 \text{ min}. \end{aligned}$$

La temperatura del huevo será de 20°C, 13 minutos después de sumergirlo en el agua para enfriarlo. Puesto que requirió 5 minutos para llegar a 38°C, tardará casi 8 minutos más para alcanzar los 20°C. ■

EJERCICIOS 7.5

Las respuestas a casi todos los los ejercicios siguientes se dan en términos de logaritmos y exponenciales. Utilizar una calculadora podría serle útil para expresar las respuestas en forma decimal.

1. **La evolución humana continúa** El análisis sobre decrecimiento de los dientes realizado por C. Loring Brace y sus colegas del Museo de Antropología de la Universidad de Michigan, indica que el tamaño de los dientes humanos decrece de manera continua y que el proceso de evolución no se detuvo hace aproximadamente 30,000 años como muchos científicos aseguran. Por ejemplo, el tamaño de los dientes de los europeos septentrionales hoy en día disminuye a razón de 1% por cada 1000 años.

a. Si t representa el tiempo, en años, y y representa el tamaño de los dientes, use la condición $y = 0.99y_0$ cuando $t = 1000$ para determinar el valor de k en la ecuación $y = y_0e^{kt}$. Luego use este valor de k para responder las siguientes preguntas.

b. ¿Cuántos años pasarán para que los dientes humanos tengan 90% de su tamaño actual?

c. ¿Cuál será el tamaño de los dientes de nuestros descendientes dentro de 20,000 años (como porcentaje del tamaño actual)?

(*Fuente: LSA Magazine*, primavera 1989, vol. 12, núm. 2, pág. 19, Ann Arbor, Michigan).

2. Presión atmosférica La presión atmosférica de la Tierra, p, suele modelarse suponiendo que la tasa dp/dh a la que cambia p de acuerdo con la altura sobre el nivel del mar, h, es proporcional a p. Suponga que la presión al nivel del mar es de 1013 milibares (aproximadamente 14.7 libras por pulgada cuadrada), y que a una altura de 20 km es de 90 milibares.

a. Resuelva el problema con valor inicial

Ecuación diferencial: $dp/dh = kp$ (k una constante)

Condición inicial: $p = p_0$ cuando $h = 0$

para expresar a p en términos de h. Determine los valores de p_0 y k a partir de la información de altura y presión dada.

b. ¿Cuál es la presión atmosférica a $h = 50$ km?

c. ¿A qué altura la presión es igual a 900 milibares?

3. Reacciones químicas de primer orden En algunas reacciones químicas, la tasa a la que la cantidad de una sustancia cambia de acuerdo con el tiempo es proporcional a la cantidad presente. Por ejemplo, para la transformación de δ-glucono lactona en ácido glucónico tenemos

$$\frac{dy}{dt} = -0.6y$$

cuando t se mide en horas. Si hay 100 gramos de δ-glucono lactona cuando $t = 0$, ¿cuántos gramos quedarán después de la primera hora?

4. Inversión del azúcar El procesamiento de azúcar sin refinar incluye un paso denominado "inversión", que cambia su estructura molecular. Una vez que este proceso inicia, la tasa de cambio de la cantidad de azúcar sin refinar es proporcional a la cantidad de azúcar que queda sin refinar. Si durante las primeras 10 horas, 1000 kg de azúcar sin refinar se reducen a 800 kg, ¿qué cantidad de azúcar sin refinar quedará después de otras 14 horas?

5. Trabajo submarino La intensidad de la luz, $L(x)$, a x pies bajo la superficie del océano satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dL}{dx} = -kL.$$

Un buzo sabe, por experiencia, que la intensidad de la luz se reduce a la mitad cuando se está a 18 pies de profundidad en el mar Caribe. Cuando la intensidad de la luz se reduce a menos de una décima parte de su valor en la superficie, es imposible trabajar sin luz artificial. ¿Hasta qué profundidad se puede trabajar sin luz artificial?

6. Voltaje en un condensador que se descarga Suponga que la electricidad fluye de un condensador a una velocidad que es proporcional al voltaje V que cruza sus terminales y que, si t se mide en segundos,

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{40}V.$$

Resuelva esta ecuación para V, usando V_0 para denotar el valor de V cuando $t = 0$. ¿Cuánto tardará el voltaje en reducirse a 10% de su valor original?

7. Bacteria del cólera Suponga que las bacterias de una colonia crecen sin freno, de acuerdo con la ley de cambio exponencial. La colonia inicia con 1 bacteria y su población se duplica cada media hora. ¿Cuántas bacterias tendrá la colonia al término de 24 horas? (En condiciones de laboratorio favorables, el número de bacterias de cólera puede duplicarse cada 30 minutos. En una persona infectada, muchas bacterias se destruyen, pero este ejemplo explica por qué una persona afectada de cólera que se siente bien en la mañana, por la noche puede estar muy grave).

8. Crecimiento de bacterias Una colonia de bacterias crece bajo condiciones ideales en un laboratorio, de modo que la población aumenta de forma exponencial con el paso del tiempo. Después de 3 horas hay 10,000 bacterias. Después de 5, hay 40,000. ¿Cuántas bacterias había al principio?

9. Incidencia de una enfermedad (*Continuación del ejemplo 1*). Suponga que en cualquier año dado el número de casos puede reducirse 25% en lugar de 20%.

a. ¿Cuánto tardará en reducirse a 1000 el número de casos?

b. ¿Cuánto tardará en erradicarse la enfermedad, esto es, en reducirse a menos de 1 el número de casos?

10. Población de Estados Unidos El Museo de Ciencias en Boston lleva un registro permanente de la población total de Estados Unidos. El 11 de mayo de 1993, el total crecía a razón de 1 persona cada 14 segundos. A las 3:45 p.m. de ese día, el total era de 257,313,431 personas.

a. Suponiendo que hay un crecimiento exponencial a razón constante, determine la constante para la tasa de crecimiento de la población (personas por año de 365 días).

b. A esta tasa, ¿cuál será la población de Estados Unidos a las 3:45 p.m. del 11 de mayo de 2008?

11. Agotamiento del petróleo Suponga que la cantidad de petróleo bombeado desde un pozo en Whittier, California, disminuye a una razón continua de 10% al año. ¿Cuándo llegará la producción a un quinto de su valor actual?

12. Descuento continuo en precio Para alentar a los clientes a hacer compras de 100 unidades, el departamento de ventas de su compañía aplica un descuento continuo, lo que hace del precio unitario una función $p(x)$ del número x de unidades compradas. El descuento reduce el precio a razón de \$0.01 por unidad comprada. El precio por unidad para una orden de 100 unidades es $p(100) = \$20.09$.

a. Determine $p(x)$ resolviendo el siguiente problema con valor inicial:

Ecuación diferencial: $\dfrac{dp}{dx} = -\dfrac{1}{100}p$

Condición inicial: $p(100) = 20.09.$

b. Determine el precio unitario $p(10)$ para un pedido de 10 unidades y el precio unitario $p(90)$ para un pedido de 90 unidades.

c. El departamento de ventas se pregunta si este descuento es tan grande como para que el ingreso de la compañía, $r(x) = x \cdot p(x)$, llegue a ser menor en un pedido de 100 unidades que, digamos, en uno de 90. Asegúrese de mostrar que r tiene un valor máximo en $x = 100$.

T **d.** Grafique la función ingreso $r(x) = xp(x)$, para $0 \leq x \leq 200$.

13. Interés compuesto de manera continua Usted acaba de depositar A_0 dólares en una cuenta de banco que paga 4% de interés compuesto de manera continua.

a. ¿Cuánto dinero tendrá en la cuenta dentro de 5 años?

b. ¿Cuánto tardará en duplicarse la cantidad original? ¿Y en triplicarse?

14. La pregunta de John Napier John Napier (1550-1617), el hacendado escocés que inventó los logaritmos, fue la primera persona en responder esta pregunta: ¿qué pasa si se invierte una cantidad de dinero a 100% de interés compuesto continuo?

a. ¿Qué pasa?

b. ¿Cuánto tarda en triplicarse el dinero?

c. ¿Cuánto se puede ganar en un año?

Justifique sus respuestas.

15. El testamento de Benjamín Franklin El Franklin Technical Institute de Boston debe su existencia a una cláusula del testamento de Benjamín Franklin. Parte de esa cláusula dice:

> De ser posible, me gustaría seguir siendo útil, aún después de muerto, para la formación y el progreso de otros jóvenes que puedan ser útiles a su país, tanto en Boston como en Filadelfia. Para tal fin lego 2000 libras esterlinas, de las cuales 1000 se destinarán en fideicomiso a los habitantes de Boston, Massachusetts, y el resto a los habitantes de la ciudad de Filadelfia, para los usos, intereses y propósitos aquí citados y declarados.

El plan de Franklin consistía en que se prestara dinero a jóvenes aprendices, con una tasa de 5% de interés y con la condición de que el acreedor pagara cada año, junto

> . . . con el interés anual, una décima parte del capital, de manera que el total se utilice en empréstitos para nuevos beneficiarios . . . Si este plan se aplica con éxito y sin interrupción durante 100 años, los fondos llegarán a 131,000 libras, de las cuales los administradores del fideicomiso deberán destinar 100,000 a la realización de obras públicas elegidas a su discreción . . . Las 31,000 libras restantes seguirán generando intereses durante 100 años más en la forma descrita . . . De no interrumpirse esta operación por algún desafortunado accidente, al final de este segundo periodo la suma acumulada será de 4,061,000 libras.

No siempre fue posible encontrar tantos prestatarios como Franklin esperaba, pero los administradores del fideicomiso se esforzaron al máximo. En enero de 1894, cien años después de haberse constituido a partir del donativo de Franklin, el fondo había crecido de 1000 libras a casi 90,000. En cien años, el capital se multiplicó casi 90 veces, en lugar de las 131 que Franklin imaginó.

¿Qué tasa de interés compuesto continuo habría multiplicado 90 veces el capital original de Franklin en un plazo de cien años?

16. (*Continuación del ejercicio 15*). Cuando Benjamín Franklin calculó que las 1000 libras originales aumentarían a 131,000 en cien años, usó una tasa de interés compuesto anual de 5%, acumulable una vez al año. ¿Qué tasa de interés anual acumulable de manera continua multiplicaría la suma original por 131 en cien años?

17. Radón 222 La ecuación de decaimiento del gas radón 222 es $y = y_0 e^{-0.18t}$, con t en días. ¿Cuánto tardará una muestra de radón sellada al vacío en reducirse a 90% de su valor original?

18. Polonio 210 La vida media del polonio es de 139 días, pero la muestra ya no será útil cuando se haya desintegrado 95% de los núcleos radiactivos presentes en ella al principio. ¿Hasta cuántos días después de su llegada podrá usarse esa muestra de polonio.

19. La vida media de un núcleo radiactivo Los físicos que usan la ecuación de la radiactividad $y = y_0 e^{-kt}$ llaman *vida media* de un núcleo radiactivo al número $1/k$. Para el radón es $1/0.18 = 5.6$ días. La vida media de un núcleo de carbono 14 es de más de 8000 años. Demuestre que 95% de los núcleos radiactivos presentes en la muestra se desintegrarán antes de tres vidas medias, es decir, en el instante $t = 3/k$. Así, la vida media del núcleo representa un método sencillo para estimar cuánto dura la radiactividad de una muestra.

20. Californio 252 ¿Qué elemento cuesta 27 millones de dólares por gramo y sirve para combatir el cáncer cerebral, analizar el contenido de azufre del carbón y detectar explosivos ocultos? Se trata del californio 252, un isótopo radiactivo tan raro, que en el mundo occidental sólo se han obtenido 8 g desde que Glenn Seaborg lo descubrió en 1950. La vida media del isótopo es de 2.645 años: lo suficientemente larga para ser útil y lo bastante corta para tener alta radiactividad por masa unitaria. Un microgramo del isótopo libera 170 millones de neutrones por segundo.

a. ¿Cuál es el valor de k en la ecuación de decaimiento de este isótopo?

b. ¿Cuál es la vida media del isótopo? (Vea el ejercicio 19).

c. ¿Cuánto tardará en desintegrarse 95% de los núcleos radiactivos de una muestra?

21. Enfriamiento de la sopa Suponga que un tazón de sopa se enfría, pasando de 90 a 60°C en 10 minutos, en una habitación con temperatura de 20°C. Responda las siguientes preguntas usando la ley del enfriamiento de Newton.

a. ¿Cuánto tiempo tardará la sopa en enfriarse a 35°C?

b. En lugar de dejarla en la habitación, la sopa, con temperatura de 90°C, se guarda en un congelador a –15°C. ¿Cuánto tardará en enfriarse hasta alcanzar los 35°C?

22. **Una viga a temperatura desconocida** Una viga de aluminio expuesta al frío exterior entra en un taller de troquelado donde la temperatura se mantiene a 65°F. A los 10 minutos, la temperatura de la viga llega a 35°F, y después de otros 10 alcanza los 50°F. Estime la temperatura inicial de la viga, utilizando la ley del enfriamiento de Newton.

23. **Un entorno de temperatura desconocida** Una olla con agua tibia (a 46°C) se guarda en un refrigerador. A los 10 minutos, la temperatura del agua es de 39°C; 10 minutos después, su temperatura es de 33°C. Utilizando la ley del enfriamiento de Newton, estime a qué temperatura está el refrigerador.

24. **Enfriamiento de plata en el aire** La temperatura de un lingote de plata es ahora 60°C más alta que la temperatura ambiente. Hace 20 minutos era 70°C más alta que ésta. ¿Cuánto más alta que la temperatura ambiente estará la de la plata. . .
    a. dentro de 15 minutos?
    b. dentro de 2 horas?
    c. ¿Cuándo estará a 10°C por encima de la temperatura ambiente?

25. **La edad del Lago Cráter** El carbón vegetal de un árbol tirado por la erupción volcánica que formó el Lago Cráter, ubicado en Oregon, contenía 44.5% del carbono 14 que se encuentra de ordinario en la materia viva. ¿Qué edad tiene el Lago Cráter?

26. **Sensibilidad del fechado con carbono 14 a la medición** Veamos este caso hipotético para apreciar el efecto de un error relativamente pequeño en la estimación del contenido de carbono 14 de una muestra cuya antigüedad desea determinarse:
    a. Un hueso fósil descubierto en el centro de Illinois en el año 2000 d.C., conserva 17% de su carbono 14 original. Estime en qué año murió el animal al que perteneció dicho hueso.
    b. Repita el inciso (a) suponiendo que el contenido de carbono 14 es de 18% en lugar de 17%.
    c. Repita el inciso (a) suponiendo que el contenido de carbono 14 es de 16% en lugar de 17%.

27. **Falsificaciones de arte** Un cuadro atribuido a Vermeer (1632-1675), que hoy no podría contener más de 96.2% de su carbono 14 original, contiene 99.5%. ¿Cuál es la antigüedad de la falsificación?

7.6 Razones de crecimiento relativas

En matemáticas, ciencias de la computación e ingeniería, suele ser importante comparar las razones a las que las funciones de x crecen a medida que x se incrementa. Debido a su muy rápido crecimiento, las funciones exponenciales son de interés en estas comparaciones, mientras que las funciones logarítmicas lo son debido a su muy lento crecimiento. En esta sección hablaremos de las notaciones *o pequeña* y *O grande* para describir los resultados de estas comparaciones. Nuestra atención se restringirá a las funciones cuyos valores son eventualmente positivos y permanecen así cuando $x \to \infty$.

Razones de crecimiento de las funciones

Quizá haya notado que las funciones exponenciales como 2^x y e^x parecen crecer más rápido que las funciones polinomiales y racionales, cuando x toma valores grandes. En realidad, estas exponenciales crecen más rápidamente que x misma y, como puede ver en la figura 7.14, 2^x sobrepasa por mucho a x^2 a medida que x aumenta. De hecho, cuando $x \to \infty$, las funciones 2^x y e^x crecen más rápido que cualquier potencia de x, incluso que $x^{1{,}000{,}000}$ (ejercicio 19).

Para ver qué tan rápido crecen los valores de $y = e^x$ a medida que x aumenta, imagine que graficamos la función en un pizarrón enorme, dividiendo los ejes en centímetros. En $x = 1$ cm, la gráfica está $e^1 \approx 3$ cm por arriba del eje x. En $x = 6$ cm, la gráfica se encuentra a $e^6 \approx 403$ cm ≈ 4 m de altura (casi está saliendo por el techo, si no es que ya lo hizo). En $x = 10$ cm, la gráfica está $e^{10} \approx 22{,}026$ cm ≈ 220 m de altura, es decir, a una altura superior a la de casi todos los edificios. En $x = 24$ cm, la gráfica está a más de la mitad de la distancia entre nuestro planeta y la Luna, y en $x = 43$ cm del origen, la gráfica tiene una altura suficiente para llegar a la estrella vecina más cercana al Sol, una estrella enana roja llamada *Proxima Centauri*:

$$\begin{aligned} e^{43} &\approx 4.73 \times 10^{18} \text{ cm} \\ &= 4.73 \times 10^{13} \text{ km} \\ &\approx 1.58 \times 10^{8} \text{ segundos luz} \\ &\approx 5.0 \text{ años luz} \end{aligned}$$

En el vacío, la luz viaja a 300,000 km/seg.

FIGURA 7.14 Las gráficas de e^x, 2^x y x^2.

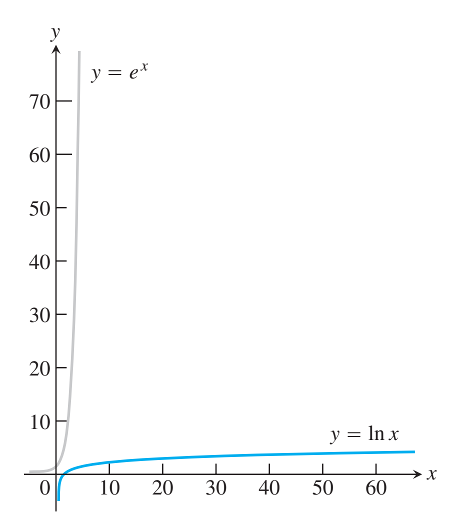


FIGURA 7.15 Gráficas a escala de e^x y $\ln x$.

Entre la Tierra y Proxima Centauri hay una distancia aproximada de 4.22 años luz. Con $x = 43$ cm del origen, la gráfica está a menos de 2 pies a la derecha del eje y.

En contraste, las funciones logarítmicas como $y = \log_2 x$ y $y = \ln x$ crecen más lentamente que cualquier potencia positiva de x cuando $x \to \infty$ (ejercicio 21). Al dividir los ejes en centímetros, usted tendría que alejarse casi 5 años luz a lo largo del eje x para encontrar un punto en donde la gráfica de $y = \ln x$ tenga una altura de $y = 43$ cm. Vea la figura 7.15.

Estas importantes comparaciones entre las funciones exponencial, polinomial y logarítmica pueden hacerse con precisión definiendo qué significa que una función $f(x)$ crezca más rápido que otra función $g(x)$ cuando $x \to \infty$.

DEFINICIÓN Razones de crecimiento cuando $x \to \infty$

Sean $f(x)$ y $g(x)$ positivas para x suficientemente grande.

1. f **crece más rápido que** g cuando $x \to \infty$ si

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

o, de forma equivalente, si

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0.$$

También decimos que g **crece más lento que** f cuando $x \to \infty$.

2. f y g **crecen a la misma razón** cuando $x \to \infty$ si

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

donde L es finita y positiva.

De acuerdo con estas definiciones, $y = 2x$ no crece más rápido que $y = x$. Las dos funciones crecen a la misma razón, ya que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x} = \lim_{x\to\infty} 2 = 2,$$

que es un límite finito y distinto de cero. Esta aparente contradicción con el sentido común se debe a que necesitamos que, al comparar con f, el significado de "f crece más rápido que g" implique que, para valores grandes de x, g sea despreciable.

EJEMPLO 1 Comparaciones útiles de razones de crecimiento

(a) e^x crece más rápido que x^2 a medida que $x \to \infty$, ya que

$$\underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2}}_{\infty/\infty} = \underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x}}_{\infty/\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2} = \infty.$$

Aplicando dos veces la regla de L'Hôpital

(b) 3^x crece más rápido que 2^x cuando $x \to \infty$ ya que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3^x}{2^x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^x = \infty.$$

(c) x^2 crece más rápido que $\ln x$ cuando $x \to \infty$, ya que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\ln x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{1/x} = \lim_{x\to\infty} 2x^2 = \infty. \qquad \text{Regla de L'Hôpital}$$

(d) $\ln x$ crece más lentamente que x cuando $x \to \infty$ ya que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} \qquad \text{Regla de L'Hôpital}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

■

EJEMPLO 2 Funciones exponencial y logarítmica con bases diferentes

(a) Como sugiere el ejemplo 1b, las funciones exponenciales con bases diferentes nunca crecen a la misma razón cuando $x \to \infty$. Si $a > b > 0$, a^x crece más rápido que b^x. Ya que $(a/b) > 1$,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{b^x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^x = \infty.$$

(b) A diferencia de las funciones exponenciales, las funciones logarítmicas con bases diferentes a y b siempre crecen a la misma razón cuando $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log_a x}{\log_b x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x/\ln a}{\ln x/\ln b} = \frac{\ln b}{\ln a}.$$

Esta razón límite siempre es finita y nunca es cero. ■

Si f crece a la misma razón que g a medida que $x \to \infty$ y g crece a la misma tasa que h cuando $x \to \infty$, entonces f crece a la misma razón que h cuando $x \to \infty$. Esto se debe a que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f}{g} = L_1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{g}{h} = L_2$$

implican que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f}{h} = \lim_{x\to\infty} \frac{f}{g} \cdot \frac{g}{h} = L_1 L_2.$$

Si L_1 y L_2 son finitos y distintos de cero, entonces también lo es $L_1 L_2$.

EJEMPLO 3 Funciones que crecen a la misma razón

Demostrar que $\sqrt{x^2 + 5}$ y $(2\sqrt{x} - 1)^2$ crecen a la misma razón cuando $x \to \infty$.

Solución Demostramos que las funciones crecen a la misma razón, demostrando que ambas crecen a la misma razón que la función $f(x) = x$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+5}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{1 + \frac{5}{x^2}} = 1,$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(2\sqrt{x} - 1)^2}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}\right)^2 = \lim_{x\to\infty} \left(2 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = 4.$$

■

Orden y notación *O*

A continuación hablaremos de la notación "*o* pequeña" y "*O* grande", inventada por varios teóricos hace un siglo, y que ahora es de uso común en el análisis matemático y en las ciencias de la computación.

DEFINICIÓN ***o* pequeña**

Una función f es **de orden más pequeño que** g cuando $x \to \infty$, si $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Esto lo indicamos escribiendo $\boldsymbol{f = o(g)}$ ("f es o pequeña de g").

Observe que $f = o(g)$ cuando $x \to \infty$, es otra forma de decir que f crece más lentamente que g a medida que $x \to \infty$.

EJEMPLO 4 Uso de la notación o pequeña

(a) $\ln x = o(x)$ cuando $x \to \infty$ ya que $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

(b) $x^2 = o(x^3 + 1)$ cuando $x \to \infty$ ya que $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^3 + 1} = 0$ ■

DEFINICIÓN ***O* grande**

Sean $f(x)$ y $g(x)$ positivas para x suficientemente grande. Entonces f es **a lo más del mismo orden que** g cuando $x \to \infty$, si existe un entero positivo M para el que

$$\frac{f(x)}{g(x)} \le M,$$

para x suficientemente grande. Esto se indica escribiendo $\boldsymbol{f = O(g)}$ ("f es O grande de g").

EJEMPLO 5 Uso de *O* grande

(a) $x + \operatorname{sen} x = O(x)$ cuando $x \to \infty$, ya que $\frac{x + \operatorname{sen} x}{x} \le 2$ para x suficientemente grande.

(b) $e^x + x^2 = O(e^x)$ cuando $x \to \infty$ ya que $\frac{e^x + x^2}{e^x} \to 1$ cuando $x \to \infty$.

(c) $x = O(e^x)$ cuando $x \to \infty$ ya que $\frac{x}{e^x} \to 0$ a medida que $x \to \infty$. ■

Si analiza nuevamente la definición, verá que $f = o(g)$ implica $f = O(g)$ para funciones que son positivas para x suficientemente grande. Además, si f y g crecen a la misma razón, $f = O(g)$ y $g = O(f)$ (ejercicio 11).

Búsqueda secuencial en comparación con búsqueda binaria

En ciencias de la computación, es frecuente que la eficiencia de un algoritmo se mida contando el número de pasos que requiere una computadora para ejecutar el algoritmo. Puede

haber diferencias significativas en la manera en que los algoritmos diseñados eficientemente realizan la misma tarea. Estas diferencias suelen describirse en notación O grande. A continuación se da un ejemplo.

El *Third New International Dictionary* de *Webster* lista alrededor de 26,000 palabras que empiezan con la letra a. Una manera de saber si una palabra se encuentra en el diccionario consiste en recorrer la lista leyendo una palabra a la vez hasta que se localiza el término buscado o se determine que no está. Este método, denominado búsqueda secuencial, no aprovecha el que las palabras estén ordenadas alfabéticamente.

Otro método para determinar si la palabra está en el diccionario consiste en dividir la lista en dos (palabras más, palabras menos) y buscar el término en la mitad de la parte en donde es más probable que esté (gracias a que la lista está ordenada alfabéticamente, sabemos cuál de las mitades hay que examinar primero). Este método elimina aproximadamente 13,000 palabras en un solo paso. Si la palabra no se encuentra en el segundo intento, se divide otra vez en dos la mitad que la contiene. Se continua con este procedimiento hasta encontrar la palabra, dividiendo la lista en tantas mitades como sea necesario hasta que no queden palabras por revisar. ¿Cuántas veces se tiene que dividir la lista para encontrar la palabra o saber que no se encuentra en ella? Cuando mucho 15 veces, ya que

$$(26{,}000/2^{15}) < 1.$$

Este método es, indudablemente, mejor que la búsqueda secuencial, en la quizá se tengan que realizar 26,000 pasos.

Para una lista de longitud n, un algoritmo de búsqueda secuencial requiere del orden de n pasos para encontrar una palabra o determinar que no se encuentra en ella. Una búsqueda binaria, como se conoce al segundo método, requiere del orden de $\log_2 n$ pasos. La razón es que si $2^{m-1} < n \leq 2^m$, entonces $m - 1 < \log_2 n \leq m$, y el número de particiones necesarias para reducir la lista a una palabra será, cuando mucho, de $m = \lceil \log_2 n \rceil$, que es la función entera techo para $\log_2 n$.

La notación O grande proporciona una manera compacta de decir esto. El número de pasos en una búsqueda secuencial en una lista ordenada es $O(n)$; en el caso de una búsqueda binaria, el número de pasos es $O(\log_2 n)$. En nuestro ejemplo hay una gran diferencia entre ambas posibilidades (26,000 contra 15), y ésta sólo puede aumentar de acuerdo con n, ya que n crece más rápido que $\log_2 n$ cuando $n \to \infty$ (como en el ejemplo 1d).

EJERCICIOS 7.6

Comparaciones con la exponencial e^x

1. ¿Cuáles de las siguientes funciones crecen más rápidamente que e^x cuando $x \to \infty$? ¿Cuáles crecen a la misma razón que e^x? ¿Cuáles crecen más lentamente?

a. $x + 3$ **b.** $x^3 + \operatorname{sen}^2 x$
c. $\sqrt{x}$ **d.** 4^x
e. $(3/2)^x$ **f.** $e^{x/2}$
g. $e^x/2$ **h.** $\log_{10} x$

2. ¿Cuáles de las siguientes funciones crecen más rápidamente que e^x a medida que $x \to \infty$? ¿Cuáles crecen a la misma razón que e^x? ¿Cuáles crecen más lentamente?

a. $10x^4 + 30x + 1$ **b.** $x \ln x - x$
c. $\sqrt{1 + x^4}$ **d.** $(5/2)^x$
e. e^{-x} **f.** xe^x
g. $e^{\cos x}$ **h.** e^{x-1}

Comparaciones con la potencia x^2

3. ¿Cuáles de las siguientes funciones crecen más rápidamente que x^2 cuando $x \to \infty$? ¿Cuáles crecen a la misma razón que x^2? ¿Cuáles crecen más lentamente?

a. $x^2 + 4x$ **b.** $x^5 - x^2$
c. $\sqrt{x^4 + x^3}$ **d.** $(x + 3)^2$
e. $x \ln x$ **f.** 2^x
g. $x^3 e^{-x}$ **h.** $8x^2$

4. ¿Cuáles de las siguientes funciones crecen más rápidamente que x^2 a medida que $x \to \infty$? ¿Cuáles crecen a la misma razón que x^2? ¿Cuáles crecen más lentamente?

a. $x^2 + \sqrt{x}$ **b.** $10x^2$
c. $x^2 e^{-x}$ **d.** $\log_{10}(x^2)$
e. $x^3 - x^2$ **f.** $(1/10)^x$
g. $(1.1)^x$ **h.** $x^2 + 100x$

Comparaciones con el logaritmo ln x

5. ¿Cuáles de las siguientes funciones crecen más rápidamente que ln x cuando $x \to \infty$? ¿Cuáles crecen a la misma razón que ln x? ¿Cuáles crecen más lentamente?

a. $\log_3 x$ **b.** $\ln 2x$
c. $\ln \sqrt{x}$ **d.** $\sqrt{x}$
e. x **f.** $5 \ln x$
g. $1/x$ **h.** e^x

6. ¿Cuáles de las siguientes funciones crecen más rápidamente que ln x cuando $x \to \infty$? ¿Cuáles crecen a la misma razón que ln x? ¿Cuáles crecen más lentamente?

a. $\log_2 (x^2)$ **b.** $\log_{10} 10x$
c. $1/\sqrt{x}$ **d.** $1/x^2$
e. $x - 2 \ln x$ **f.** e^{-x}
g. $\ln (\ln x)$ **h.** $\ln (2x + 5)$

Ordenamiento de funciones según la razón de crecimiento

7. Ordene las siguientes funciones con respecto a su crecimiento (de la más lenta a la más rápida) cuando $x \to \infty$.

a. e^x **b.** x^x
c. $(\ln x)^x$ **d.** $e^{x/2}$

8. Ordene las siguientes funciones con respecto a su crecimiento (de la más lenta a la más rápida) cuando $x \to \infty$.

a. 2^x **b.** x^2
c. $(\ln 2)^x$ **d.** e^x

O grande y o pequeña; orden

9. ¿Cierto o falso? Cuando $x \to \infty$,

a. $x = o(x)$ **b.** $x = o(x + 5)$
c. $x = O(x + 5)$ **d.** $x = O(2x)$
e. $e^x = o(e^{2x})$ **f.** $x + \ln x = O(x)$
g. $\ln x = o(\ln 2x)$ **h.** $\sqrt{x^2 + 5} = O(x)$

10. ¿Cierto o falso? Cuando $x \to \infty$,

a. $\frac{1}{x + 3} = O\left(\frac{1}{x}\right)$ **b.** $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = O\left(\frac{1}{x}\right)$
c. $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = o\left(\frac{1}{x}\right)$ **d.** $2 + \cos x = O(2)$
e. $e^x + x = O(e^x)$ **f.** $x \ln x = o(x^2)$
g. $\ln (\ln x) = O(\ln x)$ **h.** $\ln (x) = o(\ln (x^2 + 1))$

11. Demuestre que si las funciones positivas $f(x)$ y $g(x)$ crecen a la misma razón a medida que $x \to \infty$ entonces $f = O(g)$ y $g = O(f)$.

12. ¿En qué caso el polinomio $f(x)$ es de orden menor que el polinomio $g(x)$ a medida que $x \to \infty$? Justifique su respuesta.

13. ¿En qué caso el polinomio f(x) es, a lo más, del mismo orden que el polinomio $g(x)$ a medida que $x \to \infty$. Justifique su respuesta.

14. ¿Qué revelan nuestras conclusiones de la sección 2.4 respecto de los límites de funciones racionales, acerca del crecimiento relativo de polinomios cuando $x \to \infty$?

Otras comparaciones

T **15.** Investigue

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln (x + 1)}{\ln x} \quad \text{y} \quad \lim_{x \to \infty} \frac{\ln (x + 999)}{\ln x}.$$

Después utilice la regla de l´Hôpital para explicar sus hallazgos.

16. (*Continuación del ejercicio 15*). Demuestre que el valor de

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln (x + a)}{\ln x}$$

es el mismo, sin importar el valor que se asigne a la constante a. ¿Qué dice esto acerca de las razones relativas a las que crecen las funciones $f(x) = \ln(x + a)$ y $g(x) = \ln x$?

17. Demuestre que $\sqrt{10x + 1}$ y $\sqrt{x + 1}$ crecen a la misma razón conforme $x \to \infty$, comprobando que ambas crecen a la misma razón que $\sqrt{x}$ cuando $x \to \infty$.

18. Demuestre que $\sqrt{x^4 + x}$ y $\sqrt{x^4 - x^3}$ crecen a la misma razón a medida que $x \to \infty$, comprobando que ambas crecen a la misma razón que x^2 cuando $x \to \infty$.

19. Demuestre que e^x crece más rápidamente, cuando $x \to \infty$, que x^n para cualquier entero positivo n, incluso $x^{1,000,000}$. (*Sugerencia:* ¿Cuál es la n–ésima derivada de x^n?)

20. La función e^x sobrepasa a cualquier polinomio Muestre que e^x crece más rápidamente, cuando $x \to \infty$, que cualquier polinomio

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

21. a. Demuestre que ln x crece más lentamente, cuando $x \to \infty$, que $x^{1/n}$ para cualquier entero positivo n, incluso $x^{1/1,000,000}$.

T **b.** Aun cuando los valores de $x^{1/1,000,000}$ sobrepasan finalmente a los de ln x, hay que avanzar mucho en el eje x antes de que eso ocurra. Determine un valor de x, mayor que 1, para el que $x^{1/1\,000\,000} > \ln x$. Observe que cuando $x > 1$, la ecuación $\ln x = x^{1/1,000,000}$ es equivalente a $\ln (\ln x) = (\ln x)/1,000,000$.

T **c.** Incluso $x^{1/10}$ tarda mucho en sobrepasar ln x. Experimente con la calculadora para hallar el valor de x donde las gráficas de $x^{1/10}$ y ln x se cruzan, es decir, donde $\ln x = 10 \ln (\ln x)$. Localice el punto de intersección entre potencias de 10 y aproxime el punto mediante particiones sucesivas en mitades.

T **d.** (*Continuación del inciso* (c)). El valor de x donde $\ln x = 10 \ln(\ln x)$ es demasiado lejano para que lo identifiquen algunas calculadoras graficadoras y programas de cómputo para calcular raíces. Inténtelo con el equipo disponible y observe los resultados.

22. La función ln x crece más lentamente que cualquier polinomio. Demuestre que ln x crece más lentamente, cuando $x \to \infty$, que cualquier polinomio no constante.

Algoritmos y búsquedas

23. a. Suponga que tiene tres algoritmos diferentes para resolver un mismo problema, y que el número de pasos que requiere cada uno es del orden de alguna de estas funciones:

$$n \log_2 n, \quad n^{3/2}, \quad n(\log_2 n)^2.$$

¿Cuál de los algoritmos es más eficiente a la larga? Justifique su respuesta.

T **b.** Grafique juntas las funciones de la parte (a) para apreciar la rapidez con que crece cada una.

24. Repita el ejercicio 23 con estas funciones:

$$n, \quad \sqrt{n}\log_2 n, \quad (\log_2 n)^2.$$

T **25.** Suponga que busca un elemento en una lista ordenada de un millón de elementos. ¿Cuántos pasos requeriría para localizarlo con una búsqueda secuencial? ¿Y con una binaria?

T **26.** Si busca un elemento en una lista ordenada de 450,000 elementos (que es el número de términos incluidos en el *Webster´s Third New International Dictionary*), ¿cuántos pasos requeriría para localizarlo con una búsqueda secuencial? ¿Y con una binaria?

7.7 Funciones trigonométricas inversas

Las funciones trigonométricas inversas surgen cuando queremos calcular ángulos con base en las medidas de los lados de un triángulo. También proporcionan antiderivadas útiles y aparecen con frecuencia en las soluciones de las ecuaciones diferenciales. En esta sección se muestra de qué manera se definen, grafican y evalúan estas funciones, como se calculan sus derivadas y por qué aparecen como antiderivadas importantes.

Definición de las inversas

Las seis funciones trigonométricas básicas no son inyectivas (sus valores se repiten de manera periódica). Sin embargo, podemos restringir sus dominios a intervalos en los que sean inyectivas. La función seno aumenta desde –1 en $x = -\pi/2$ hasta 1 en $x = \pi/2$. Al restringir su dominio al intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ la hacemos inyectiva, de modo que tiene una inversa, $\operatorname{sen}^{-1} x$ (figura 7.16). Restricciones similares pueden aplicarse a los dominios de las seis funciones trigonométricas.

Restricción de los dominios para que las funciones trigonométricas sean inyectivas

Función	Dominio	Rango
$\operatorname{sen} x$	$[-\pi/2, \pi/2]$	$[-1, 1]$
$\cos x$	$[0, \pi]$	$[-1, 1]$

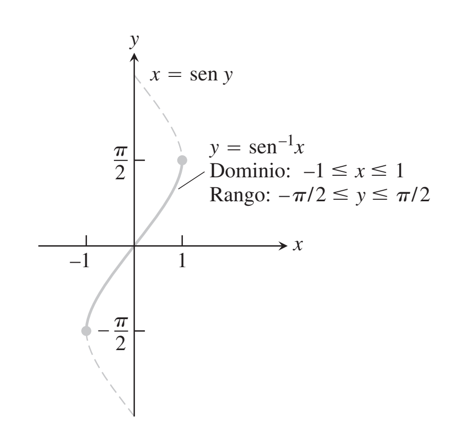
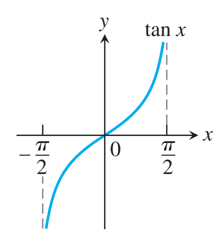
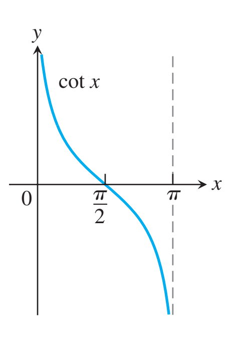
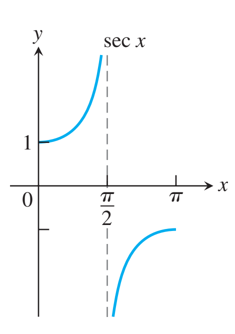
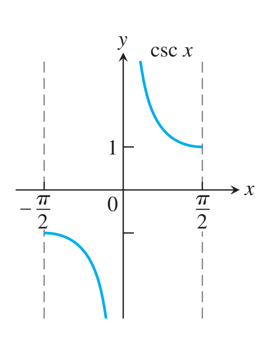


FIGURA 7.16 La gráfica de $y = \operatorname{sen}^{-1} x$.

$\tan x$	$(-\pi/2, \pi/2)$	$(-\infty, \infty)$	
$\cot x$	$(0, \pi)$	$(-\infty, \infty)$	
$\sec x$	$[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$	
$\csc x$	$[-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2]$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$	

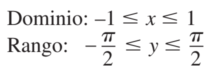
Como ahora estas funciones restringidas son inyectivas, tienen inversas, que denotamos de la siguiente manera:

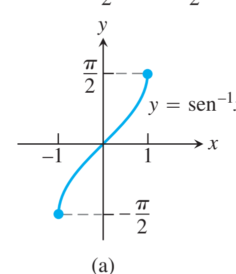
$$y = \operatorname{sen}^{-1} x \quad \text{o} \quad y = \operatorname{arcsen} x$$
$$y = \cos^{-1} x \quad \text{o} \quad y = \arccos x$$
$$y = \tan^{-1} x \quad \text{o} \quad y = \arctan x$$
$$y = \cot^{-1} x \quad \text{o} \quad y = \operatorname{arccot} x$$
$$y = \sec^{-1} x \quad \text{o} \quad y = \operatorname{arcsec} x$$
$$y = \csc^{-1} x \quad \text{o} \quad y = \operatorname{arccsc} x$$

Estas ecuaciones se leen “y igual al arco seno de x” o “y igual al arcsen x” y así sucesivamente.

PRECAUCIÓN El –1 en las expresiones de la inversa significa “inversa”. *No* significa recíproco. Por ejemplo, el *recíproco* de sen x es $(\text{sen}\, x)^{-1} = 1/\text{sen}\, x = \csc x$.

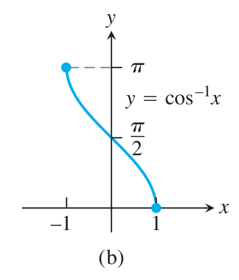
Las gráficas de las seis funciones trigonométricas inversas se muestran en la figura 7.17. Podemos obtenerlas reflejando las gráficas de las funciones trigonométricas restringidas con respecto de la recta $y = x$, como en la sección 7.1. A continuación analizaremos con más detalle estas funciones y sus derivadas.





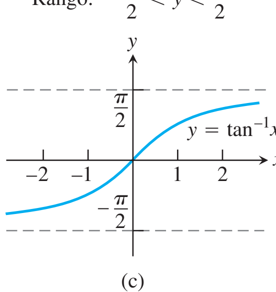
(a)

Dominio: $-1 \le x \le 1$
Rango: $0 \le y \le \pi$



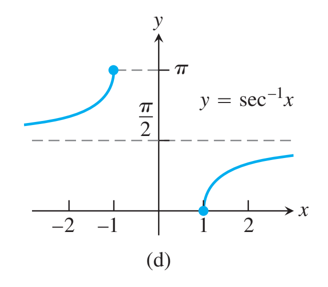
(b)

Dominio: $-\infty < x < \infty$
Rango: $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$



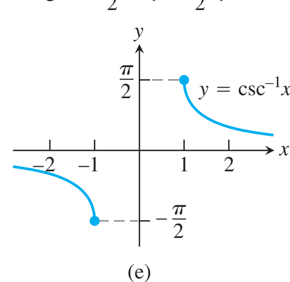
(c)

Dominio: $x \le -1$ o $x \ge 1$
Rango: $0 \le y \le \pi, y \ne \frac{\pi}{2}$



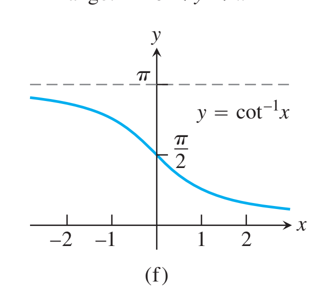
(d)

Dominio: $x \le -1$ o $x \ge 1$
Rango: $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}, y \ne 0$



(e)

Dominio: $-\infty < x < \infty$
Rango: $0 < y < \pi$



(f)

FIGURA 7.17 Gráficas de las seis funciones trigonométricas inversas básicas.

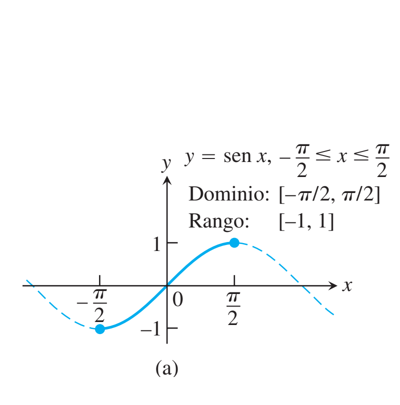
Las funciones arco seno y arco coseno

El arco seno de x es el ángulo en $[-\pi/2, \pi/2]$ cuyo seno es x. El arco coseno es un ángulo en $[0, \pi]$ cuyo coseno es x.

DEFINICIÓN Funciones arco seno y arco coseno

$\boldsymbol{y = \operatorname{sen}^{-1} x}$ es el número en $[-\pi/2, \pi/2]$ para el que $\operatorname{sen} y = x$.

$\boldsymbol{y = \cos^{-1} x}$ es el número en $[0, \pi]$ para el que $\cos y = x$.



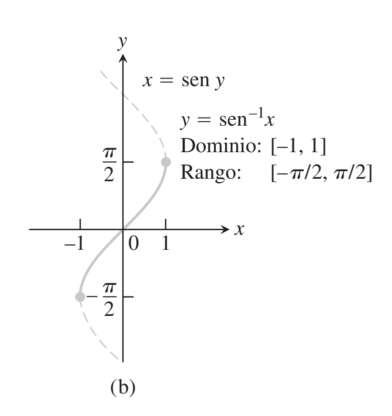
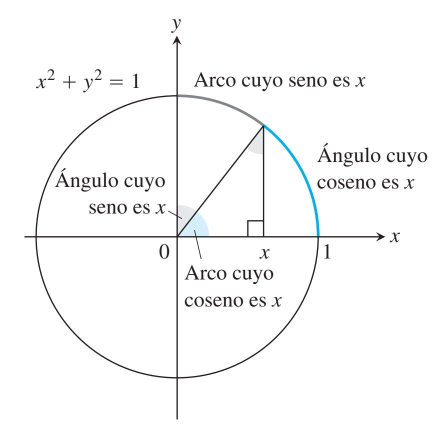


FIGURA 7.18 Las gráficas de (a) $y = \operatorname{sen} x$, $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$, y (b) su inversa, $y = \operatorname{sen}^{-1} x$. La gráfica de $\operatorname{sen}^{-1} x$, que se obtuvo por medio de una reflexión con respecto de la recta $y = x$, es una parte de la curva $x = \operatorname{sen} y$.

El "arco" en arco seno y arco coseno

La figura siguiente da una interpretación geométrica de $y = \operatorname{sen}^{-1} x$ y $y = \cos^{-1} x$ para ángulos medidos en radianes, que están en el primer cuadrante. Para un círculo unitario, la ecuación $s = r\theta$ se convierte en $s = \theta$, por lo que los ángulos centrales y los arcos que subtienden tienen la misma medida. Si $x = \operatorname{sen} y$, entonces, además de ser el ángulo cuyo seno es x, y también es la longitud del arco sobre el círculo unitario que subtiende un ángulo cuyo seno es x. Así, llamamos a y "el arco cuyo seno es x".



La gráfica de $y = \operatorname{sen}^{-1} x$ (figura 7.18) es simétrica con respecto del origen (coincide con la gráfica de $x = \operatorname{sen} y$). Por lo tanto, el arco seno es una función impar:

$$\operatorname{sen}^{-1}(-x) = -\operatorname{sen}^{-1} x. \tag{1}$$

La gráfica de $y = \cos^{-1} x$ (figura 7.19) no tiene tal simetría.

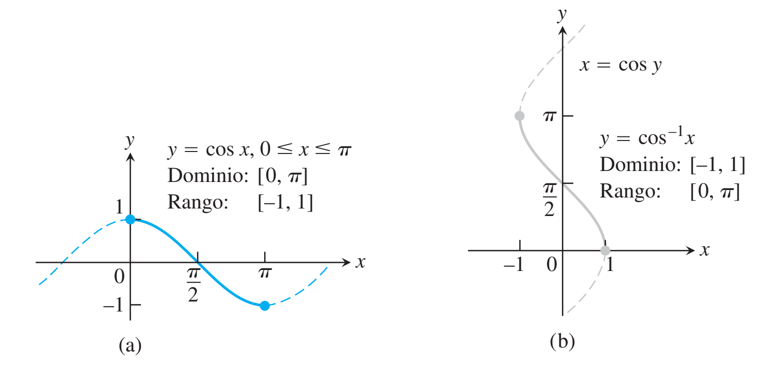


FIGURA 7.19 Las gráficas de (a) $y = \cos x$, $0 \leq x \leq \pi$, y (b) su inversa, $y = \cos^{-1} x$. La gráfica de $\cos^{-1} x$, que se obtuvo por medio de la reflexión con respecto de la recta $y = x$, es una parte de la curva $x = \cos y$.

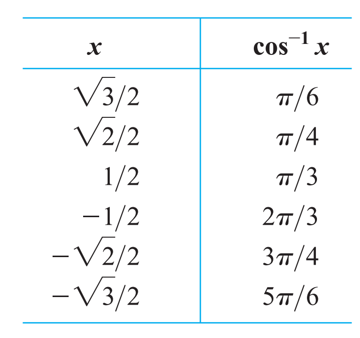
Los valores conocidos de sen x y cos x pueden invertirse para determinar los valores de $\operatorname{sen}^{-1} x$ y $\cos^{-1} x$.

EJEMPLO 1 Valores comunes de $\operatorname{sen}^{-1} x$

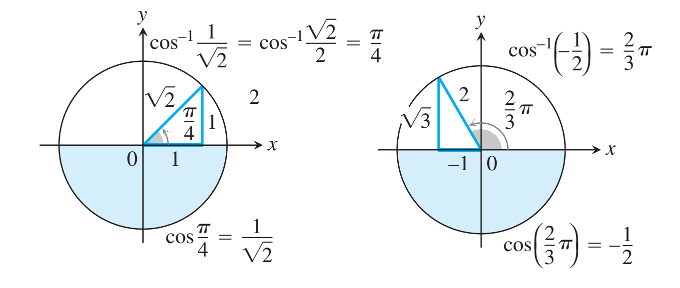
x	$\operatorname{sen}^{-1} x$
$\sqrt{3}/2$	$\pi/3$
$\sqrt{2}/2$	$\pi/4$
$1/2$	$\pi/6$
$-1/2$	$-\pi/6$
$-\sqrt{2}/2$	$-\pi/4$
$-\sqrt{3}/2$	$-\pi/3$

Los ángulos pertenecen al primero y cuarto cuadrantes, ya que el rango de $\operatorname{sen}^{-1} x$ es $[-\pi/2, \pi/2]$. ■

EJEMPLO 2 Valores comunes de $\cos^{-1} x$



x	$\cos^{-1} x$
$\sqrt{3}/2$	$\pi/6$
$\sqrt{2}/2$	$\pi/4$
$1/2$	$\pi/3$
$-1/2$	$2\pi/3$
$-\sqrt{2}/2$	$3\pi/4$
$-\sqrt{3}/2$	$5\pi/6$



Los ángulos pertenecen al primero y segundo cuadrantes, ya que el rango de $\cos^{-1} x$ es $[0, \pi]$. ■

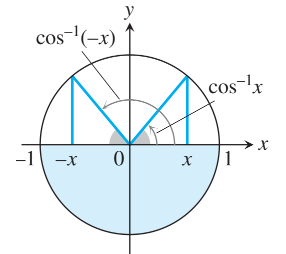


FIGURA 7.20 $\cos^{-1} x$ y $\cos^{-1}(-x)$ son ángulos suplementarios (así que su suma es π).

FIGURA 7.21 $\operatorname{sen}^{-1} x$ y $\cos^{-1} x$ son ángulos complementarios (así que su suma es $\pi/2$).

Identidades que incluyen arco seno y arco coseno

Como podemos ver en la figura 7.20, el arco coseno de x satisface la identidad

$$\cos^{-1} x + \cos^{-1}(-x) = \pi, \tag{2}$$

o

$$\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x. \tag{3}$$

Además, con base en el triángulo de la figura 7.21, podemos ver que para $x > 0$,

$$\operatorname{sen}^{-1} x + \cos^{-1} x = \pi/2. \tag{4}$$

La ecuación (4) también se cumple para los demás valores de x en $[-1, 1]$, pero no es posible llegar a esta conclusión a partir del triángulo de la figura 7.21. Sin embargo, es una consecuencia de las ecuaciones (1) y (3) (ejercicio 131).

Inversas de tan x, cot x, sec x y csc x

El arco tangente de x es un ángulo cuya tangente es x. El arco cotangente de x es un ángulo cuya cotangente es x.

DEFINICIÓN Funciones arco tangente y arco cotangente

$\mathbf{y = tan^{-1}\,x}$ es el número $(-\pi/2, \pi/2)$ para el que $\tan y = x$.

$\mathbf{y = cot^{-1}\,x}$ es el número $(0, \pi)$ para el que $\cot y = x$.

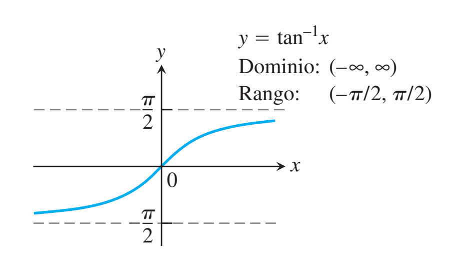


FIGURA 7.22 Gráfica de $y = \tan^{-1} x$.

Utilizamos intervalos abiertos para evitar aquellos valores en donde la tangente o la cotangente estén indefinidas.

La gráfica de $y = \tan^{-1} x$ es simétrica con respecto del origen, ya que es una rama de la gráfica $x = \tan y$, que es simétrica con respecto del origen (figura 7.22). Desde el punto de vista algebraico, esto significa que

$$\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x;$$

el arco tangente es una función impar. La gráfica de $y = \cot^{-1} x$ no tiene tal simetría (figura 7.23).

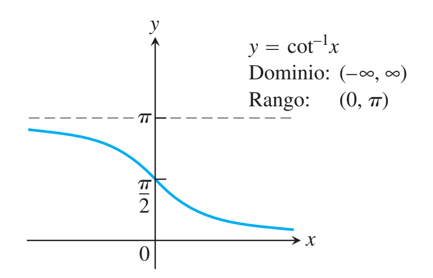


FIGURA 7.23 Gráfica de $y = \cot^{-1} x$.

Las inversas de las restricciones de $\sec x$ y $\csc x$ se eligen para que resulten en las funciones graficadas en las figuras 7.24 y 7.25.

$y = \sec^{-1}x$
Dominio: $|x| \ge 1$
Rango: $[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$

FIGURA 7.24 Gráfica de $y = \sec^{-1} x$.

PRECAUCIÓN No hay consenso acerca de cómo se debe definir $\sec^{-1} x$ para valores negativos de x. Aquí se eligieron ángulos en el segundo cuadrante, entre $\pi/2$ y π. Con esta elección $\sec^{-1} x = \cos^{-1}(1/x)$ y también se logra que $\sec^{-1} x$ sea una función creciente en cada intervalo de su dominio. Para $x < 0$, en algunas tablas se elige que $\sec^{-1} x$ tome valores en $[-\pi, -\pi/2)$ y en algunos textos que los valores se tomen en $[\pi, 3\pi/2)$ (figura 7.26). Estas elecciones simplifican la fórmula para determinar la derivada (nuestra fórmula necesita signos de valor absoluto), pero no se cumple la ecuación $\sec^{-1} x = \cos^{-1}(1/x)$. Con base en ello, podemos deducir la identidad

$$\sec^{-1} x = \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \tag{5}$$

aplicando la ecuación (4).

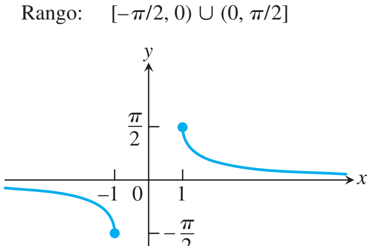


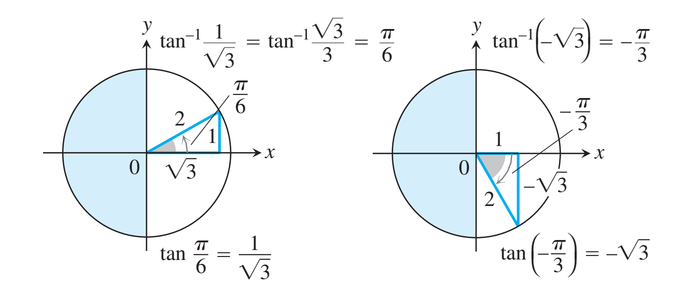
FIGURA 7.25 Gráfica de $y = \csc^{-1} x$.

Dominio: $|x| \ge 1$
Rango: $0 \le y \le \pi,\ y \ne \frac{\pi}{2}$

FIGURA 7.26 Hay varias elecciones lógicas para la rama izquierda de $y = \sec^{-1} x$. Con la opción **A**, $\sec^{-1} x = \cos^{-1}(1/x)$, una identidad útil que se emplea en muchas calculadoras.

x	$\tan^{-1} x$
$\sqrt{3}$	$\pi/3$
1	$\pi/4$
$\sqrt{3}/3$	$\pi/6$
$-\sqrt{3}/3$	$-\pi/6$
-1	$-\pi/4$
$-\sqrt{3}$	$-\pi/3$

EJEMPLO 3 Valores comunes de $\tan^{-1} x$



Los ángulos se encuentran en el primero y cuarto cuadrantes, ya que el rango de $\tan^{-1} x$ es $(-\pi/2, \pi/2)$. ■

EJEMPLO 4 Determine $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\sec\alpha$, $\csc\alpha$ y $\cot\alpha$ si

$$\alpha = \operatorname{sen}^{-1}\frac{2}{3}.$$

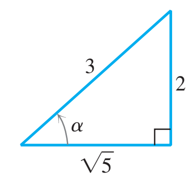


FIGURA 7.27 Si $\alpha = \operatorname{sen}^{-1}(2/3)$, entonces los valores de las otras funciones trigonométricas de α pueden leerse de este triángulo (ejemplo 4).

Solución Esta ecuación dice que $\operatorname{sen}\alpha = 2/3$. Dibujamos α como un ángulo en un triángulo rectángulo con cateto opuesto 2 e hipotenusa 3 (figura 7.27). La longitud del otro cateto es

$$\sqrt{(3)^2 - (2)^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}. \qquad \text{Teorema de Pitágoras}$$

Agregamos esta información a la figura y luego, con base en el triángulo completo, leemos los valores que necesitamos:

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}, \quad \tan\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \sec\alpha = \frac{3}{\sqrt{5}}, \quad \csc\alpha = \frac{3}{2}, \quad \cot\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$ ■

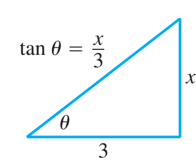
EJEMPLO 5 Determinar $\sec\left(\tan^{-1}\frac{x}{3}\right)$.

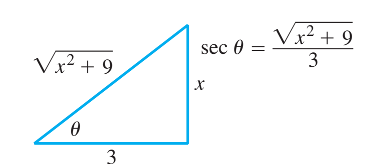
Solución Hacemos $\theta = \tan^{-1}(x/3)$ (para darle un nombre al ángulo), y dibujamos θ en un triángulo rectángulo con

$$\tan\theta = \text{cateto opuesto}/\text{cateto adyacente} = x/3.$$

La longitud de la hipotenusa del triángulo es

$$\sqrt{x^2 + 3^2} = \sqrt{x^2 + 9}.$$





Por lo tanto,

$$\sec\left(\tan^{-1}\frac{x}{3}\right) = \sec\theta$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+9}}{3}. \qquad \sec\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{adyacente}}$$ ■

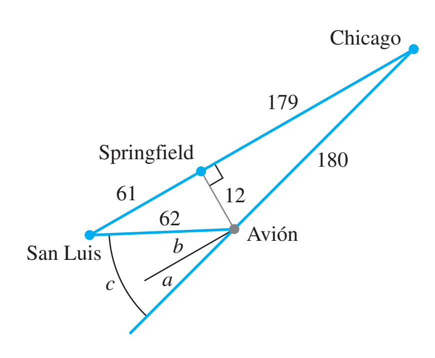


FIGURA 7.28 Diagrama para la corrección del curso (ejemplo 6), con distancias redondeadas a la milla más próxima (el dibujo no está a escala).

EJEMPLO 6 Corrección del curso

Durante un vuelo de Chicago a San Luis, el piloto determina que el avión se ha desviado 12 millas de su curso, como se muestra en la figura 7.28. Determine el ángulo a para un curso paralelo al original, el curso correcto, el ángulo b y el ángulo de corrección $c = a + b$.

Solución

$$a = \operatorname{sen}^{-1} \frac{12}{180} \approx 0.067 \text{ radianes} \approx 3.8°$$

$$b = \operatorname{sen}^{-1} \frac{12}{62} \approx 0.195 \text{ radianes} \approx 11.2°$$

$$c = a + b \approx 15°.$$

■

Derivada de $y = \operatorname{sen}^{-1} u$

Sabemos que la función $x = \operatorname{sen} y$ es diferenciable en el intervalo $-\pi/2 < y < \pi/2$ y que su derivada, el coseno, es positivo en dicho intervalo. Por lo tanto, el teorema 1 de la sección 7.1 nos asegura que la función inversa $y = \operatorname{sen}^{-1} x$ es diferenciable en todo el intervalo $-1 < x < 1$. No podemos esperar que sea diferenciable en $x = 1$ o $x = -1$, ya que en esos puntos las tangentes a la gráfica son verticales (vea la figura 7.29).

Determinamos la derivada de $y = \operatorname{sen}^{-1} x$ aplicando el teorema 1 con $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $f^{-1}(x) = \operatorname{sen}^{-1} x$.

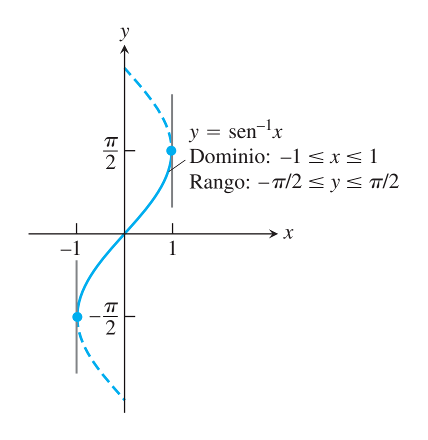


FIGURA 7.29 Gráfica de $y = \operatorname{sen}^{-1} x$.

$$\begin{aligned}
(f^{-1})'(x) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} && \text{Teorema 1} \\
&= \frac{1}{\cos(\operatorname{sen}^{-1} x)} && f'(u) = \cos u \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\operatorname{sen}^{-1} x)}} && \cos u = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 u} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} && \operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} x) = x
\end{aligned}$$

Otra deducción: En lugar de aplicar directamente el teorema 1, podemos determinar la derivada de $y = \operatorname{sen}^{-1} x$ por medio de diferenciación implícita como sigue:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} y &= x && y = \operatorname{sen}^{-1} x \Leftrightarrow \operatorname{sen} y = x \\
\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} y) &= 1 && \text{Derivar ambos lados respecto de } x \\
\cos y \frac{dy}{dx} &= 1 && \text{Regla de la cadena} \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\cos y} && \text{Podemos dividir, ya que } \cos y > 0 \text{ para } -\pi/2 < y < \pi/2. \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} && \cos y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y}
\end{aligned}$$

Sin importar cuál deducción utilicemos, es necesario que la derivada de $y = \operatorname{sen}^{-1} x$ con respecto de x es

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Si u es una función diferenciable de x con $|u| < 1$, aplicamos la regla de la cadena para obtener

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}\frac{du}{dx}, \qquad |u| < 1.$$

EJEMPLO 7 Aplicación de la fórmula de la derivada

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1} x^2) = \frac{1}{\sqrt{1 - (x^2)^2}} \cdot \frac{d}{dx}(x^2) = \frac{2x}{\sqrt{1 - x^4}}$$ ■

Derivada de $y = \tan^{-1} u$

Determinamos la derivada de $y = \tan^{-1} x$ aplicando el teorema 1 con $f(x) = \tan x$ y $f^{-1}(x) = \tan^{-1} x$. El teorema 1 puede aplicarse, ya que la derivada de $\tan x$ es positiva para $-\pi/2 < x < \pi/2$.

$$\begin{aligned}
(f^{-1})'(x) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} && \text{Teorema 1} \\
&= \frac{1}{\sec^2(\tan^{-1} x)} && f'(u) = \sec^2 u \\
&= \frac{1}{1 + \tan^2(\tan^{-1} x)} && \sec^2 u = 1 + \tan^2 u \\
&= \frac{1}{1 + x^2} && \tan(\tan^{-1} x) = x
\end{aligned}$$

La derivada está definida para todos los números reales. Si u es una función diferenciable de x, obtenemos la forma de la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} u) = \frac{1}{1 + u^2}\frac{du}{dx}.$$

EJEMPLO 8 Una partícula en movimiento

Una partícula se mueve a lo largo del eje x, de modo que su posición en cualquier instante $t \geq 0$ es $x(t) = \tan^{-1}\sqrt{t}$. ¿Cuál es la velocidad de la partícula cuando $t = 16$?

Solución

$$v(t) = \frac{d}{dt}\tan^{-1}\sqrt{t} = \frac{1}{1 + (\sqrt{t})^2} \cdot \frac{d}{dt}\sqrt{t} = \frac{1}{1 + t} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

Cuando $t = 16$, la velocidad es

$$v(16) = \frac{1}{1+16} \cdot \frac{1}{2\sqrt{16}} = \frac{1}{136}.$$

Derivada de $y = \sec^{-1} u$

Como la derivada de la sec x es positiva para $0 < x < \pi/2$ y $\pi/2 < x < \pi$, el teorema 1 nos dice que la función inversa $y = \sec^{-1} x$, es diferenciable. En lugar de aplicar la fórmula del teorema 1 de manera directa, determinamos la derivada de $y = \sec^{-1} x$, $|x| > 1$, por medio de diferenciación implícita y la regla de la cadena como sigue:

$$y = \sec^{-1} x$$

$$\sec y = x \qquad \text{Relación de la función inversa}$$

$$\frac{d}{dx}(\sec y) = \frac{d}{dx} x \qquad \text{Derivando en ambos lados.}$$

$$\sec y \tan y \frac{dy}{dx} = 1 \qquad \text{Regla de la cadena}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec y \tan y} \qquad \text{Ya que } |x| > 1, y \text{ está en } (0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi) \text{ y } \sec y \tan y \neq 0.$$

Para expresar el resultado en términos de x, utilizamos las relaciones

$$\sec y = x \qquad \text{y} \qquad \tan y = \pm\sqrt{\sec^2 y - 1} = \pm\sqrt{x^2 - 1}$$

para obtener

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$$

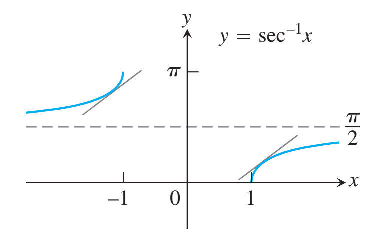


FIGURA 7.30 La pendiente de la curva $y = \sec^{-1} x$ es positiva, tanto para $x < -1$ como para $x > 1$.

¿Podemos hacer algo respecto del signo $\pm$? En la figura 7.30 vemos que la pendiente de la gráfica $y = \sec^{-1} x$ siempre es positiva. En consecuencia,

$$\frac{d}{dx} \sec^{-1} x = \begin{cases} +\dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} & \text{si } x > 1 \\[2ex] -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} & \text{si } x < -1. \end{cases}$$

Con el símbolo de valor absoluto podemos escribir una sola expresión que elimina la ambigüedad del signo "$\pm$":

$$\frac{d}{dx} \sec^{-1} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Si u es una función diferenciable de x con $|u| > 1$, tenemos la fórmula

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1} u) = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2 - 1}} \frac{du}{dx}, \qquad |u| > 1.$$

EJEMPLO 9 Uso de la fórmula

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\sec^{-1}(5x^4) &= \frac{1}{|5x^4|\sqrt{(5x^4)^2-1}}\frac{d}{dx}(5x^4)\\ &= \frac{1}{5x^4\sqrt{25x^8-1}}(20x^3) \qquad 5x^4>0\\ &= \frac{4}{x\sqrt{25x^8-1}}\end{aligned}$$

■

Derivadas de las otras tres

Podríamos utilizar las mismas técnicas para determinar las derivadas de las otras tres funciones trigonométricas inversas, arco coseno, arco cotangente y arco cosecante, pero hay una forma mucho más sencilla de lograrlo gracias a las identidades siguientes.

Identidades de cofunción inversa – función inversa

$$\cos^{-1}x = \pi/2 - \operatorname{sen}^{-1}x$$
$$\cot^{-1}x = \pi/2 - \tan^{-1}x$$
$$\csc^{-1}x = \pi/2 - \sec^{-1}x$$

En la ecuación (4) vimos la primera de estas identidades. Las otras se deducen de manera análoga. Es fácil deducir que las derivadas de las cofunciones inversas son las negativas de las derivadas de las correspondientes funciones inversas. Por ejemplo, la derivada del $\cos^{-1}x$ se calcula como sigue:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{sen}^{-1}x\right) \qquad \text{Identidad}\\ &= -\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1}x)\\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{Derivada de arco seno}\end{aligned}$$

EJEMPLO 10 Una recta tangente a la curva del arco cotangente

Determinar una ecuación para la recta tangente a la gráfica de $y = \cot^{-1}x$ en $x = -1$.

Solución Primero observamos que

$$\cot^{-1}(-1) = \pi/2 - \tan^{-1}(-1) = \pi/2 - (-\pi/4) = 3\pi/4.$$

La pendiente de la recta tangente es

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-1} = -\left.\frac{1}{1+x^2}\right|_{x=-1} = -\frac{1}{1+(-1)^2} = -\frac{1}{2},$$

de modo que la recta tangente tiene la ecuación $y - 3\pi/4 = (-1/2)(x+1)$. ■

Las derivadas de las funciones trigonométricas inversas se resumen en la tabla 7.3

TABLA 7.3 Derivadas de las funciones trigonométricas inversas

1. $\dfrac{d(\operatorname{sen}^{-1} u)}{dx} = \dfrac{du/dx}{\sqrt{1-u^2}}, \quad |u| < 1$

2. $\dfrac{d(\cos^{-1} u)}{dx} = -\dfrac{du/dx}{\sqrt{1-u^2}}, \quad |u| < 1$

3. $\dfrac{d(\tan^{-1} u)}{dx} = \dfrac{du/dx}{1+u^2}$

4. $\dfrac{d(\cot^{-1} u)}{dx} = -\dfrac{du/dx}{1+u^2}$

5. $\dfrac{d(\sec^{-1} u)}{dx} = \dfrac{du/dx}{|u|\sqrt{u^2-1}}, \quad |u| > 1$

6. $\dfrac{d(\csc^{-1} u)}{dx} = \dfrac{-du/dx}{|u|\sqrt{u^2-1}}, \quad |u| > 1$

Fórmulas de integración

Las fórmulas de derivadas de la tabla 7.3 dan lugar a tres útiles fórmulas de integración que se incluyen en la tabla 7.4. Las fórmulas se verifican con facilidad derivando las funciones del lado derecho.

TABLA 7.4 Integrales evaluadas con funciones trigonométricas inversas

Las siguientes fórmulas se cumplen para cualquier constante $a \neq 0$.

1. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$ (Válida para $u^2 < a^2$)

2. $\displaystyle\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$ (Válida para toda u)

3. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{u}{a}\right| + C$ (Válida para $|u| > a > 0$)

Las fórmulas de derivadas de la tabla 7.3 tienen $a = 1$, pero en casi todas las integraciones $a \neq 1$ y las fórmulas de la tabla 7.4 son más útiles.

EJEMPLO 11 Uso de las fórmulas de integrales

(a) $$\int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{sen}^{-1} x\Big]_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2}$$

$$= \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$$

(b) $$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x \Big]_0^1 = \tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

(c) $$\int_{2/\sqrt{3}}^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1} x \Big]_{2/\sqrt{3}}^{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$$ ■

EJEMPLO 12 Uso de la sustitución y de la tabla 7.4

(a) $$\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(3)^2-x^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C$$ Fórmula 1 de la tabla 7.4 con $a = 3$, $u = x$

(b) $$\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}$$ $a = \sqrt{3}$, $u = 2x$ y $du/2 = dx$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$ Fórmula 1

$$= \frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right) + C$$ ■

EJEMPLO 13 Completando el cuadrado

Evaluar

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}.$$

Solución La expresión $\sqrt{4x-x^2}$ no coincide con ninguna de las fórmulas de la tabla 7.4, por lo que primero reescribimos $4x - x^2$ completando el cuadrado:

$$4x - x^2 = -(x^2-4x) = -(x^2-4x+4) + 4 = 4 - (x-2)^2.$$

Luego sustituimos $a = 2$, $u = x - 2$ y $du = dx$ para obtener

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x-2)^2}}$$

$$= \int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}$$ $a = 2$, $u = x - 2$ y $du = dx$

$$= \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$ Fórmula 1 de la tabla 7.4

$$= \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right) + C$$ ■

EJEMPLO 14 Completando el cuadrado

Evaluar

$$\int \frac{dx}{4x^2+4x+2}.$$

Solución Completamos el cuadrado en el binomio $4x^2 + 4x$:

$$4x^2 + 4x + 2 = 4(x^2 + x) + 2 = 4\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) + 2 - \frac{4}{4}$$

$$= 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 1 = (2x + 1)^2 + 1.$$

Evaluar

$$\int \frac{dx}{4x^2 + 4x + 2} = \int \frac{dx}{(2x + 1)^2 + 1} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2 + a^2}$$ $a = 1, u = 2x + 1,$ y $du/2 = dx$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$ Fórmula 2 de la tabla 7.4

$$= \frac{1}{2} \tan^{-1}(2x + 1) + C$$ $a = 1, u = 2x + 1$ ■

EJEMPLO 15 Uso de la sustitución

Evaluar

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x} - 6}}.$$

Solución

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x} - 6}} = \int \frac{du/u}{\sqrt{u^2 - a^2}}$$ $u = e^x, du = e^x\,dx,$ $dx = du/e^x = du/u,$ $a = \sqrt{6}$

$$= \int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}}$$

$$= \frac{1}{a} \sec^{-1}\left|\frac{u}{a}\right| + C$$ Fórmula 3 de la tabla 7.4

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \sec^{-1}\left(\frac{e^x}{\sqrt{6}}\right) + C$$ ■

EJERCICIOS 7.7

Valores comunes de las funciones trigonométricas inversas

Utilice triángulos de referencia como los de los ejemplos 1 a 3 para determinar los ángulos en los ejercicios 1 a 12.

1. a. $\tan^{-1} 1$ **b.** $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$ **c.** $\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

2. a. $\tan^{-1}(-1)$ **b.** $\tan^{-1}\sqrt{3}$ **c.** $\tan^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$

3. a. $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right)$ **b.** $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ **c.** $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$

4. a. $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ **b.** $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ **c.** $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

5. a. $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ **b.** $\cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ **c.** $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

6. a. $\cos^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right)$ **b.** $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ **c.** $\cos^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$

7. **a.** $\sec^{-1}(-\sqrt{2})$ **b.** $\sec^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ **c.** $\sec^{-1}(-2)$

8. **a.** $\sec^{-1}\sqrt{2}$ **b.** $\sec^{-1}\left(\frac{-2}{\sqrt{3}}\right)$ **c.** $\sec^{-1} 2$

9. **a.** $\csc^{-1}\sqrt{2}$ **b.** $\csc^{-1}\left(\frac{-2}{\sqrt{3}}\right)$ **c.** $\csc^{-1} 2$

10. **a.** $\csc^{-1}(-\sqrt{2})$ **b.** $\csc^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ **c.** $\csc^{-1}(-2)$

11. **a.** $\cot^{-1}(-1)$ **b.** $\cot^{-1}(\sqrt{3})$ **c.** $\cot^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$

12. **a.** $\cot^{-1}(1)$ **b.** $\cot^{-1}(-\sqrt{3})$ **c.** $\cot^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Valores de funciones trigonométricas

13. Dado que $\alpha = \operatorname{sen}^{-1}(5/13)$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\sec\alpha$, $\csc\alpha$ y $\cot\alpha$.

14. Dado que $\alpha = \tan^{-1}(4/3)$, determine $\operatorname{sen}\alpha$, $\cos\alpha$, $\sec\alpha$, $\csc\alpha$ y $\cot\alpha$.

15. Dado que $\alpha = \sec^{-1}(-\sqrt{5})$, determine $\operatorname{sen}\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\csc\alpha$ y $\cot\alpha$.

16. Dado que $\alpha = \sec^{-1}(-\sqrt{13}/2)$, determine $\operatorname{sen}\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\csc\alpha$ y $\cot\alpha$.

Evaluación de términos trigonométricos y trigonométricos inversos

Determine los valores en los ejercicios 17 a 28.

17. $\operatorname{sen}\left(\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$

18. $\sec\left(\cos^{-1}\frac{1}{2}\right)$

19. $\tan\left(\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$

20. $\cot\left(\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$

21. $\csc(\sec^{-1} 2) + \cos(\tan^{-1}(-\sqrt{3}))$

22. $\tan(\sec^{-1} 1) + \operatorname{sen}(\csc^{-1}(-2))$

23. $\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$

24. $\cot\left(\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) - \sec^{-1} 2\right)$

25. $\sec(\tan^{-1} 1 + \csc^{-1} 1)$

26. $\sec(\cot^{-1}\sqrt{3} + \csc^{-1}(-1))$

27. $\sec^{-1}\left(\sec\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$ (La respuesta *no* es $-\pi/6$.)

28. $\cot^{-1}\left(\cot\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ (La respuesta *no* es $-\pi/4$.)

Determinación de expresiones trigonométricas

Evalúe las expresiones en los ejercicios 29 a 40.

29. $\sec\left(\tan^{-1}\frac{x}{2}\right)$

30. $\sec(\tan^{-1} 2x)$

31. $\tan(\sec^{-1} 3y)$

32. $\tan\left(\sec^{-1}\frac{y}{5}\right)$

33. $\cos(\operatorname{sen}^{-1} x)$

34. $\tan(\cos^{-1} x)$

35. $\operatorname{sen}(\tan^{-1}\sqrt{x^2 - 2x})$, $x \geq 2$

36. $\operatorname{sen}\left(\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right)$

37. $\cos\left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{2y}{3}\right)$

38. $\cos\left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{y}{5}\right)$

39. $\operatorname{sen}\left(\sec^{-1}\frac{x}{4}\right)$

40. $\operatorname{sen}\sec^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x}\right)$

Límites

Determine los límites en los ejercicios 41 a 48. (Si tiene duda, vea la gráfica de la función).

41. $\lim_{x\to 1^-} \operatorname{sen}^{-1} x$

42. $\lim_{x\to -1^+} \cos^{-1} x$

43. $\lim_{x\to\infty} \tan^{-1} x$

44. $\lim_{x\to-\infty} \tan^{-1} x$

45. $\lim_{x\to\infty} \sec^{-1} x$

46. $\lim_{x\to-\infty} \sec^{-1} x$

47. $\lim_{x\to\infty} \csc^{-1} x$

48. $\lim_{x\to-\infty} \csc^{-1} x$

Determinación de derivadas

En los ejercicios 49 a 70, determine la derivada de y con respecto de la variable apropiada.

49. $y = \cos^{-1}(x^2)$

50. $y = \cos^{-1}(1/x)$

51. $y = \operatorname{sen}^{-1}\sqrt{2}\,t$

52. $y = \operatorname{sen}^{-1}(1 - t)$

53. $y = \sec^{-1}(2s + 1)$

54. $y = \sec^{-1} 5s$

55. $y = \csc^{-1}(x^2 + 1)$, $x > 0$

56. $y = \csc^{-1}\frac{x}{2}$

57. $y = \sec^{-1}\frac{1}{t}$, $0 < t < 1$

58. $y = \operatorname{sen}^{-1}\frac{3}{t^2}$

59. $y = \cot^{-1}\sqrt{t}$

60. $y = \cot^{-1}\sqrt{t - 1}$

61. $y = \ln(\tan^{-1} x)$

62. $y = \tan^{-1}(\ln x)$

63. $y = \csc^{-1}(e^t)$

64. $y = \cos^{-1}(e^{-t})$

65. $y = s\sqrt{1 - s^2} + \cos^{-1} s$

66. $y = \sqrt{s^2 - 1} - \sec^{-1} s$

67. $y = \tan^{-1}\sqrt{x^2 - 1} + \csc^{-1} x$, $x > 1$

68. $y = \cot^{-1}\frac{1}{x} - \tan^{-1} x$

69. $y = x\operatorname{sen}^{-1} x + \sqrt{1 - x^2}$

70. $y = \ln(x^2 + 4) - x\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$

Evaluación de integrales

Evalúe las integrales en los ejercicios 71 a 94.

71. $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}$

72. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 4x^2}}$

73. $\int \frac{dx}{17 + x^2}$

74. $\int \frac{dx}{9 + 3x^2}$

75. $\int \frac{dx}{x\sqrt{25x^2 - 2}}$

76. $\int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2 - 4}}$

77. $\int_0^1 \frac{4\,ds}{\sqrt{4 - s^2}}$

78. $\int_0^{3\sqrt{2}/4} \frac{ds}{\sqrt{9 - 4s^2}}$

79. $\int_0^2 \frac{dt}{8 + 2t^2}$

80. $\int_{-2}^2 \frac{dt}{4 + 3t^2}$

81. $\int_{-1}^{-\sqrt{2}/2} \frac{dy}{y\sqrt{4y^2 - 1}}$

82. $\int_{-2/3}^{-\sqrt{2}/3} \frac{dy}{y\sqrt{9y^2 - 1}}$

83. $\int \frac{3\,dr}{\sqrt{1 - 4(r - 1)^2}}$

84. $\int \frac{6\,dr}{\sqrt{4 - (r + 1)^2}}$

85. $\int \frac{dx}{2 + (x - 1)^2}$

86. $\int \frac{dx}{1 + (3x + 1)^2}$

87. $\int \frac{dx}{(2x - 1)\sqrt{(2x - 1)^2 - 4}}$

88. $\int \frac{dx}{(x + 3)\sqrt{(x + 3)^2 - 25}}$

89. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2\cos\theta\,d\theta}{1 + (\operatorname{sen}\theta)^2}$

90. $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\csc^2 x\,dx}{1 + (\cot x)^2}$

91. $\int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{e^x\,dx}{1 + e^{2x}}$

92. $\int_1^{e^{\pi/4}} \frac{4\,dt}{t(1 + \ln^2 t)}$

93. $\int \frac{y\,dy}{\sqrt{1 - y^4}}$

94. $\int \frac{\sec^2 y\,dy}{\sqrt{1 - \tan^2 y}}$

Evalúe las integrales en los ejercicios 95 a 104.

95. $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + 4x - 3}}$

96. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$

97. $\int_{-1}^0 \frac{6\,dt}{\sqrt{3 - 2t - t^2}}$

98. $\int_{1/2}^1 \frac{6\,dt}{\sqrt{3 + 4t - 4t^2}}$

99. $\int \frac{dy}{y^2 - 2y + 5}$

100. $\int \frac{dy}{y^2 + 6y + 10}$

101. $\int_1^2 \frac{8\,dx}{x^2 - 2x + 2}$

102. $\int_2^4 \frac{2\,dx}{x^2 - 6x + 10}$

103. $\int \frac{dx}{(x + 1)\sqrt{x^2 + 2x}}$

104. $\int \frac{dx}{(x - 2)\sqrt{x^2 - 4x + 3}}$

Evalúe las integrales en los ejercicios 105 a 112.

105. $\int \frac{e^{\operatorname{sen}^{-1} x}\,dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

106. $\int \frac{e^{\cos^{-1} x}\,dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

107. $\int \frac{(\operatorname{sen}^{-1} x)^2\,dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

108. $\int \frac{\sqrt{\tan^{-1} x}\,dx}{1 + x^2}$

109. $\int \frac{dy}{(\tan^{-1} y)(1 + y^2)}$

110. $\int \frac{dy}{(\operatorname{sen}^{-1} y)\sqrt{1 - y^2}}$

111. $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{\sec^2(\sec^{-1} x)\,dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

112. $\int_{2/\sqrt{3}}^2 \frac{\cos(\sec^{-1} x)\,dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

Límites

Determine los límites en los ejercicios 113 a 116.

113. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^{-1} 5x}{x}$

114. $\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\sec^{-1} x}$

115. $\lim_{x\to\infty} x\tan^{-1}\frac{2}{x}$

116. $\lim_{x\to 0} \frac{2\tan^{-1} 3x^2}{7x^2}$

Fórmulas de integración

En los ejercicios 117 a 120, verifique las fórmulas de integración.

117. $\int \frac{\tan^{-1} x}{x^2}\,dx = \ln x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) - \frac{\tan^{-1} x}{x} + C$

118. $\int x^3\cos^{-1} 5x\,dx = \frac{x^4}{4}\cos^{-1} 5x + \frac{5}{4}\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{1 - 25x^2}}$

119. $\int (\operatorname{sen}^{-1} x)^2\,dx = x(\operatorname{sen}^{-1} x)^2 - 2x + 2\sqrt{1 - x^2}\operatorname{sen}^{-1} x + C$

120. $\int \ln(a^2 + x^2)\,dx = x\ln(a^2 + x^2) - 2x + 2a\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$

Problemas con valor inicial

En los ejercicios 121 a 124, resuelva los problemas con valor inicial.

121. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad y(0) = 0$

122. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2 + 1} - 1, \quad y(0) = 1$

123. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}, \quad x > 1; \quad y(2) = \pi$

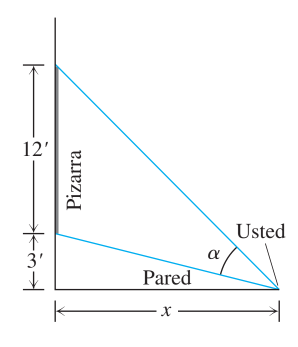
124. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + x^2} - \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad y(0) = 2$

Aplicaciones y teoría

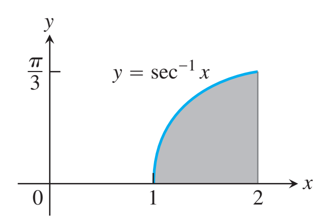
125. Usted se encuentra en un salón de clases, sentado junto a una pared, mirando la pizarra que se encuentra al frente. Ésta mide 12 pies de largo y empieza a 3 pies de la pared que está junto a usted. Demuestre que su ángulo de visión es

$$\alpha = \cot^{-1}\frac{x}{15} - \cot^{-1}\frac{x}{3}$$

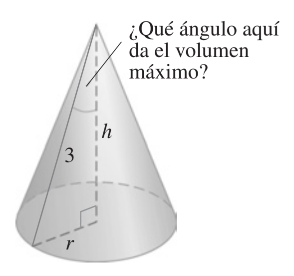
si usted está a x pies de la pared de enfrente.



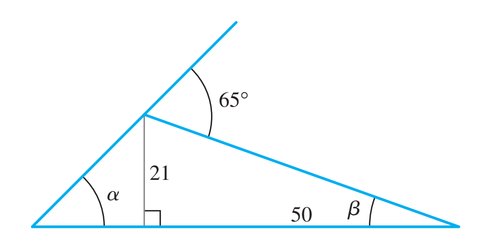
126. La región que está entre la curva $y = \sec^{-1} x$ y el eje x, desde $x = 1$ hasta $x = 2$ (como se ilustra aquí), se hace girar alrededor del eje y para generar un sólido. ¿Cuál es el volumen del sólido?



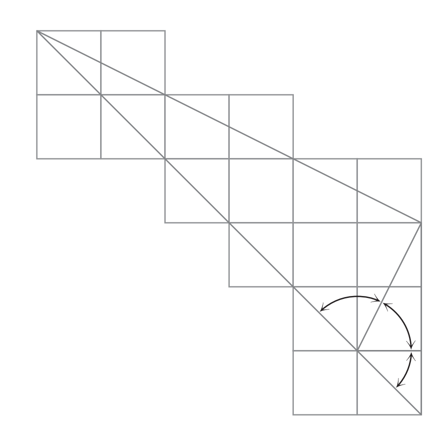
127. La altura inclinada del cono que aparece aquí mide 3 m. ¿Qué tan grande debe ser el ángulo señalado para maximizar el volumen del cono?



128. Determine el ángulo α.

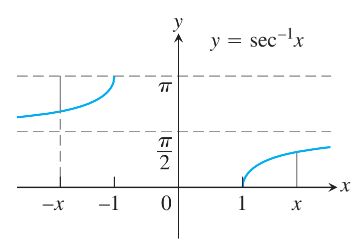


129. Ésta es una demostración informal de que $\tan^{-1} 1 + \tan^{-1} 2 + \tan^{-1} 3 = \pi$. Explique por qué.



130. Dos deducciones de la identidad $\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1} x$

a. (*Geométrica*) Esta ilustración prueba que $\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1} x$. Trate de averiguar por qué.



b. (*Algebraica*) Deduzca la identidad $\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1} x$ combinando las dos ecuaciones siguientes, tomadas del texto:

$$\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x \qquad \text{Ecuación (3)}$$

$$\sec^{-1} x = \cos^{-1}(1/x) \qquad \text{Ecuación (5)}$$

131. La identidad $\text{sen}^{-1} x + \cos^{-1} x = \pi/2$ La figura 7.21 establece la identidad para $0 < x < 1$. Con el propósito de establecerla para el resto del intervalo $[-1, 1]$, verifique por medio de cálculo directo que se cumple para $x = 1$, 0 y -1. Luego, para los valores de x en $(-1, 0)$, haga $x = -a$, $a > 0$ y aplique las ecuaciones (1) y (3) a la suma $\text{sen}^{-1}(-a) + \cos^{-1}(-a)$.

132. Demuestre que la suma $\tan^{-1} x + \tan^{-1}(1/x)$ es constante.

¿Cuáles de las expresiones de los ejercicios 133 a 136 están definidas y cuáles no? Justifique sus respuestas.

133. a. $\tan^{-1} 2$ **b.** $\cos^{-1} 2$

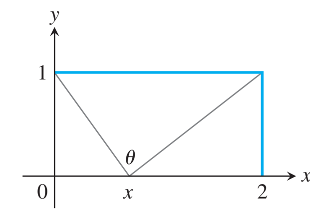
134. a. $\csc^{-1}(1/2)$ **b.** $\csc^{-1} 2$

135. a. $\sec^{-1} 0$ **b.** $\text{sen}^{-1}\sqrt{2}$

136. a. $\cot^{-1}(-1/2)$ **b.** $\cos^{-1}(-5)$

137. (*Continuación del ejercicio 125*). Usted quiere colocar su silla en algún punto junto a la pared para maximizar su ángulo de visión α. ¿A qué distancia respecto del frente del salón debe sentarse?

138. ¿Cuál es el valor de x que maximiza el ángulo θ que se muestra enseguida? ¿Qué tan grande es θ en ese punto? Empiece demostrando que $\theta = \pi - \cot^{-1} x - \cot^{-1}(2 - x)$.



139. ¿Pueden ser correctas las integraciones en (a) y (b)? Explique.

a. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \text{sen}^{-1} x + C$

b. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = -\int -\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = -\cos^{-1} x + C$

140. ¿ Pueden ser correctas las integraciones en (a) y (b)? Explique.

a. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = -\int -\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = -\cos^{-1} x + C$

b. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{-du}{\sqrt{1-(-u)^2}}$ $\quad x = -u,\ dx = -du$

$\displaystyle= \int \frac{-du}{\sqrt{1-u^2}}$

$= \cos^{-1} u + C$

$= \cos^{-1}(-x) + C \quad u = -x$

141. Utilice la identidad

$$\csc^{-1} u = \frac{\pi}{2} - \sec^{-1} u$$

para deducir la fórmula de la tabla 7.3 para la derivada de $\csc^{-1} u$ con base en la derivada de $\sec^{-1} u$.

142. Deduzca la fórmula

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

para la derivada de $y = \tan^{-1} x$ derivando ambos lados de la ecuación equivalente $\tan y = x$.

143. Utilice la regla de derivadas del teorema 1, sección 7.1, para deducir

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, \quad |x| > 1.$$

144. Utilice la identidad

$$\cot^{-1} u = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} u$$

para deducir la fórmula para la derivada de $\cot^{-1} y$ de la tabla 7.3 con base en la fórmula para la derivada de $\tan^{-1} u$.

145. ¿Qué tienen de especial las funciones

$$f(x) = \operatorname{sen}^{-1}\frac{x-1}{x+1}, \quad x \geq 0 \quad \text{y} \quad g(x) = 2\tan^{-1}\sqrt{x}?$$

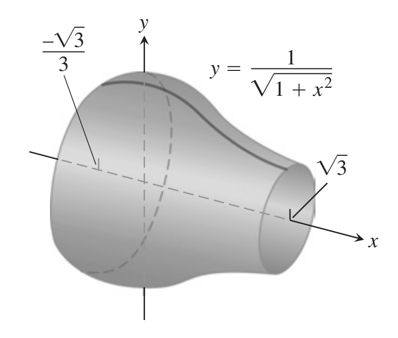
Explique.

146. ¿Qué tienen de especial las funciones

$$f(x) = \operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad \text{y} \quad g(x) = \tan^{-1}\frac{1}{x}?$$

Explique.

147. Determine el volumen del sólido de revolución que se muestra a continuación.



148. Longitud de arco Determine la longitud de la curva $y = \sqrt{1-x^2}$, $-1/2 \leq x \leq 1/2$.

Volúmenes por rebanadas

En los ejercicios 149 y 150, determine los volúmenes de los sólidos.

149. El sólido se encuentra entre los planos perpendiculares al eje x, en $x = -1$ y $x = 1$. Las secciones transversales perpendiculares al eje x son

a. círculos cuyos diámetros se extienden de la curva $y = -1/\sqrt{1+x^2}$ a la curva $y = 1/\sqrt{1+x^2}$.

b. cuadrados verticales, cuya base va de la curva $y = -1/\sqrt{1+x^2}$ a la curva $y = 1/\sqrt{1+x^2}$.

150. El sólido se encuentra entre los planos perpendiculares al eje x, en $x = -\sqrt{2}/2$ y $x = \sqrt{2}/2$. Las secciones transversales perpendiculares al eje x son

a. círculos cuyos diámetros se extienden del eje x a la curva $y = 2/\sqrt[4]{1-x^2}$.

b. cuadrados cuyas diagonales van del eje x a la curva $y = 2/\sqrt[4]{1-x^2}$.

T Exploraciones con calculadora graficadora y software matemático

151. Determine los valores de

a. $\sec^{-1} 1.5$ **b.** $\csc^{-1}(-1.5)$ **c.** $\cot^{-1} 2$

152. Determine los valores de

a. $\sec^{-1}(-3)$ **b.** $\csc^{-1} 1.7$ **c.** $\cot^{-1}(-2)$

En los ejercicios 153 a 155, determine el dominio y el rango de cada función compuesta. Luego grafique las composiciones en ventanas distintas. ¿Tienen sentido las gráficas resultantes en cada caso? Explique. Comente cualquier diferencia que vea.

153. **a.** $y = \tan^{-1}(\tan x)$ **b.** $y = \tan(\tan^{-1} x)$

154. **a.** $y = \operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} x)$ **b.** $y = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} x)$

155. **a.** $y = \cos^{-1}(\cos x)$ **b.** $y = \cos(\cos^{-1} x)$

156. Grafique $y = \sec(\sec^{-1} x) = \sec(\cos^{-1}(1/x))$. Explique lo que vea.

157. La serpentina de Newton Grafique la serpentina de Newton, $y = 4x/(x^2+1)$. Luego haga la gráfica de $y = 2\operatorname{sen}(2\tan^{-1} x)$ en la misma ventana de de su calculadora graficadora. ¿Qué observa?

158. Grafique la función racional $y = (2-x^2)/x^2$. Luego trace la gráfica $y = \cos(2\sec^{-1} x)$ en la misma ventana. ¿Qué observa?

159. Grafique $f(x) = \operatorname{sen}^{-1} x$ junto con sus primeras dos derivadas. Comente el comportamiento de f y la forma de su gráfica en relación con los signos y valores de f' y f''.

160. Grafique $f(x) = \tan^{-1} x$ junto con sus primeras dos derivadas. Comente el comportamiento de f y la forma de su gráfica en relación con los signos y valores de f' y f''.

7.8 Funciones hiperbólicas

Las funciones hiperbólicas se forman por medio de combinaciones de dos funciones exponenciales, e^x y e^{-x}. Las funciones hiperbólicas simplifican muchas expresiones matemáticas y son importantes en muchas aplicaciones. Por ejemplo, se utilizan en problemas tales como la determinación de la tensión de un cable suspendido por sus dos extremos, como en el caso de los cables de energía eléctrica. También desempeñan un papel importante en la determinación de soluciones de ecuaciones diferenciales. En esta sección haremos una breve introducción a las funciones hiperbólicas, sus gráficas y el cálculo de sus derivadas, además de explicar por qué aparecen como antiderivadas importantes.

Partes par e impar de la función exponencial

Recuerde las definiciones de funciones par e impar que se dieron en la sección 1.4, así como las simetrías de sus gráficas. Una función par satisface $f(-x) = f(x)$, mientras que una función impar satisface $f(-x) = -f(x)$. Toda función f definida en un intervalo centrado en el origen, puede escribirse de manera única como la suma de una función par y una función impar. La descomposición es

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{\text{parte par}} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{\text{parte impar}}.$$

Si escribimos e^x de esta manera, obtenemos

$$e^x = \underbrace{\frac{e^x + e^{-x}}{2}}_{\text{parte par}} + \underbrace{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}_{\text{parte impar}}.$$

Las partes par e impar de e^x, llamadas coseno hiperbólico y seno hiperbólico, respectivamente, son útiles por sí mismas. Describen los movimientos de ondas en sólidos elásticos y la distribución de temperatura en aletas metálicas de enfriamiento. La línea central del Gateway Arch to the West en San Luis Missouri, Estados Unidos, es una curva ponderada de coseno hiperbólico.

Definiciones e identidades

Las funciones coseno hiperbólico y seno hiperbólico se definen mediante las primeras dos ecuaciones de la tabla 7.5. Esta tabla también lista las definiciones de tangente, cotangente, secante y cosecante hiperbólicos. Como veremos, las funciones hiperbólicas poseen varias similitudes con las funciones trigonométricas cuyo nombre comparten. (Vea también el ejercicio 84).

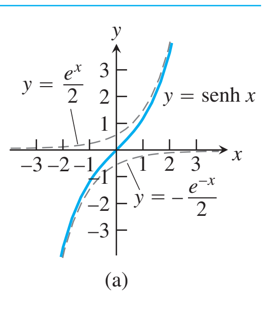
Las funciones hiperbólicas satisfacen las identidades de la tabla 7.6. Salvo por diferencias de signo, son similares a las que conocemos para funciones trigonométricas.

La segunda ecuación se obtiene como sigue:

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{senh} x \cosh x &= 2\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) \\ &= \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} \\ &= \operatorname{senh} 2x. \end{aligned}$$

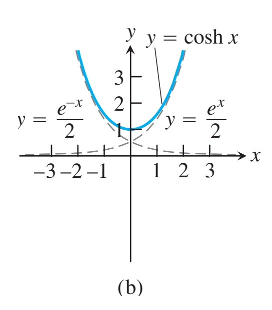
TABLA 7.5 Las seis funciones hiperbólicas básicas — **FIGURA 7.31**

Seno hiperbólico de x: $\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

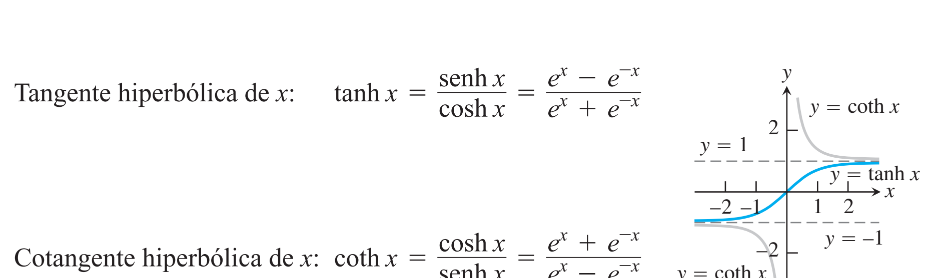


(a)

Coseno hiperbólico de x: $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$



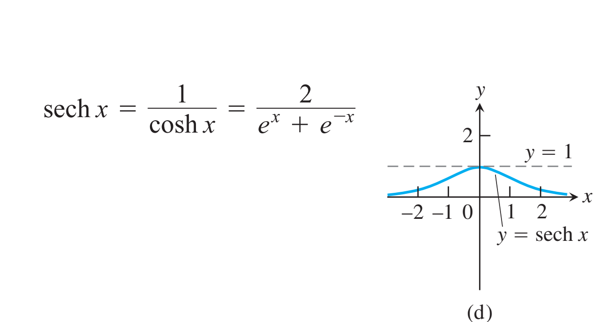
(b)



Tangente hiperbólica de x: $\tanh x = \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Cotangente hiperbólica de x: $\coth x = \dfrac{\cosh x}{\operatorname{senh} x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

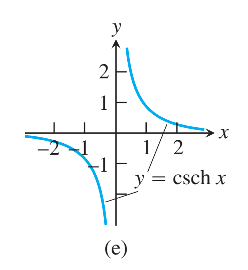
(c)



Secante hiperbólica de x: $\operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x} = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$

(d)

Cosecante hiperbólica de x: $\operatorname{csch} x = \dfrac{1}{\operatorname{senh} x} = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$



(e)

TABLA 7.6 Identidades para funciones hiperbólicas

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$$

$$\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$$

$$\cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}$$

$$\operatorname{senh}^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}$$

$$\tanh^2 x = 1 - \operatorname{sech}^2 x$$

$$\coth^2 x = 1 + \operatorname{csch}^2 x$$

Las otras identidades se obtienen de manera similar, sustituyendo las definiciones de las funciones hiperbólicas y por medio de álgebra. Al igual que muchas funciones estándar, las funciones hiperbólicas y sus inversas se evalúan con facilidad con la ayuda de calculadoras que tienen teclas especiales o secuencias de teclas para ese propósito.

Derivadas e integrales

Toda vez que son combinaciones racionales de las funciones diferenciables e^x y e^{-x}, las seis funciones hiperbólicas tienen derivadas en todos los puntos en donde estén definidas (tablas 7.7). Ésta es una semejanza más con las funciones trigonométricas. Las fórmulas de las derivadas listadas en la tabla 7.7 conducen a las fórmulas de las integrales de la tabla 7.8.

TABLA 7.7 Derivadas de funciones hiperbólicas

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{senh} u) = \cosh u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh u) = \operatorname{senh} u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\tanh u) = \operatorname{sech}^2 u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\coth u) = -\operatorname{csch}^2 u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sech} u) = -\operatorname{sech} u \tanh u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{csch} u) = -\operatorname{csch} u \coth u \frac{du}{dx}$$

TABLA 7.8 Fórmulas de integrales para funciones hiperbólicas

$$\int \operatorname{senh} u \, du = \cosh u + C$$

$$\int \cosh u \, du = \operatorname{senh} u + C$$

$$\int \operatorname{sech}^2 u \, du = \tanh u + C$$

$$\int \operatorname{csch}^2 u \, du = -\coth u + C$$

$$\int \operatorname{sech} u \tanh u \, du = -\operatorname{sech} u + C$$

$$\int \operatorname{csch} u \coth u \, du = -\operatorname{csch} u + C$$

Las fórmulas de derivadas se deducen a partir de la derivada de e^u:

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{senh} u) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^u - e^{-u}}{2}\right) \qquad \text{Definición de senh } u$$

$$= \frac{e^u \, du/dx + e^{-u} \, du/dx}{2} \qquad \text{Derivada de } e^u$$

$$= \cosh u \frac{du}{dx} \qquad \text{Definición de cosh } u$$

Con esto se obtiene la primera fórmula de derivada. El cálculo

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{csch} u) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\operatorname{senh} u}\right) \qquad \text{Definición de csch } u$$

$$= -\frac{\cosh u}{\operatorname{senh}^2 u} \frac{du}{dx} \qquad \text{Regla del cociente}$$

$$= -\frac{1}{\operatorname{senh} u} \frac{\cosh u}{\operatorname{senh} u} \frac{du}{dx} \qquad \text{Reacomodando términos}$$

$$= -\operatorname{csch} u \coth u \frac{du}{dx} \qquad \text{Definición de csch } u \text{ y coth } u$$

produce la última fórmula. Las otras se obtienen de manera similar.

EJEMPLO 1 Determinación de derivadas e integrales

(a) $$\frac{d}{dt}\left(\tanh\sqrt{1+t^2}\right) = \operatorname{sech}^2\sqrt{1=t^2}\cdot\frac{d}{dt}\left(\sqrt{1+t^2}\right)$$
$$= \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\operatorname{sech}^2\sqrt{1+t^2}$$

(b) $$\int \coth 5x\,dx = \int \frac{\cosh 5x}{\operatorname{senh} 5x}\,dx = \frac{1}{5}\int\frac{du}{u}$$ $u = \operatorname{senh} 5x$, $du = 5\cosh 5x\,dx$
$$= \frac{1}{5}\ln|u| + C = \frac{1}{5}\ln|\operatorname{senh} 5x| + C$$

(c) $$\int_0^1 \operatorname{senh}^2 x\,dx = \int_0^1 \frac{\cosh 2x - 1}{2}\,dx$$ Tabla 7.6
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (\cosh 2x - 1)\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{senh} 2x}{2} - x\right]_0^1$$
$$= \frac{\operatorname{senh} 2}{4} - \frac{1}{2} \approx 0.40672$$ Evalúe con una calculadora

(d) $$\int_0^{\ln 2} 4e^x \operatorname{senh} x\,dx = \int_0^{\ln 2} 4e^x\,\frac{e^x - e^{-x}}{2}\,dx = \int_0^{\ln 2}(2e^{2x} - 2)\,dx$$
$$= \left[e^{2x} - 2x\right]_0^{\ln 2} = (e^{2\ln 2} - 2\ln 2) - (1 - 0)$$
$$= 4 - 2\ln 2 - 1$$
$$\approx 1.6137$$

Funciones hiperbólicas inversas

Las inversas de las seis funciones hiperbólicas básicas son muy útiles en integración. Como $d(\operatorname{senh} x)/dx = \cosh x > 0$, el seno hiperbólico es una función creciente de x. Denotamos su inversa por

$$y = \operatorname{senh}^{-1} x.$$

Para todo valor de x en el intervalo $-\infty < x < \infty$, el valor de $y = \operatorname{senh}^{-1} x$ es el número cuyo seno hiperbólico es x. Las gráficas de $y = \operatorname{senh} x$ y $y = \operatorname{senh}^{-1} x$ se muestran en la figura 7.32a.

La función $y = \cosh x$ no es inyectiva, como podemos ver al analizar la gráfica en la figura 7.31b. Sin embargo, la función restringida $y = \cosh x$, $x \geq 0$ es inyectiva y, por lo tanto, tiene una inversa que se denota por

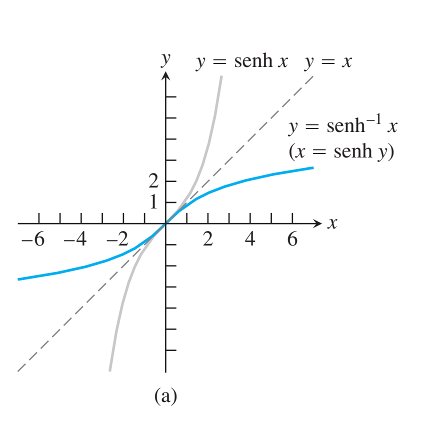
$$y = \cosh^{-1} x.$$

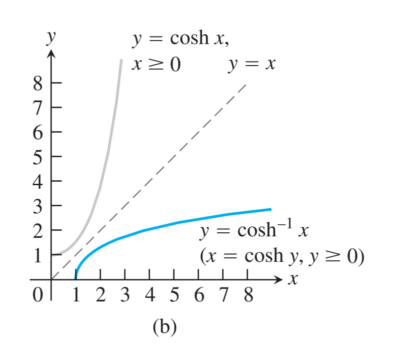
Para todo valor de $x \geq 1$, $y = \cosh^{-1} x$ es el número en el intervalo $0 \leq y < \infty$ cuyo coseno hiperbólico es x. Las gráficas de $y = \cosh x$, $x \geq 0$ y $y = \cosh^{-1} x$ se muestran en la figura 7.32b.

Al igual que $y = \cosh x$, la función $y = \operatorname{sech} x = 1/\cosh x$ no es inyectiva, pero su restricción a valores no negativos de x tiene una inversa, denotada por

$$y = \operatorname{sech}^{-1} x.$$

Para cada valor de x en el intervalo $(0, 1]$, $y = \operatorname{sech}^{-1} x$ es el número no negativo cuya secante hiperbólica es x. Las gráficas de $y = \operatorname{sech} x$, $x \geq 0$ y $y = \operatorname{sech}^{-1} x$ se muestran en la figura 7.32c.





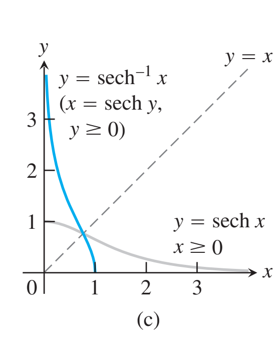


FIGURA 7.32 Gráficas de seno, coseno y secante hiperbólicos inversos de x. Observe las simetrías con respecto de la recta $y = x$.

La tangente, cotangente y cosecante hiperbólicas son inyectivas en sus dominios y, por lo tanto, tienen inversas, denotadas por

$$y = \tanh^{-1} x, \qquad y = \coth^{-1} x, \qquad y = \operatorname{csch}^{-1} x.$$

Estas funciones se grafican en la figura 7.33.

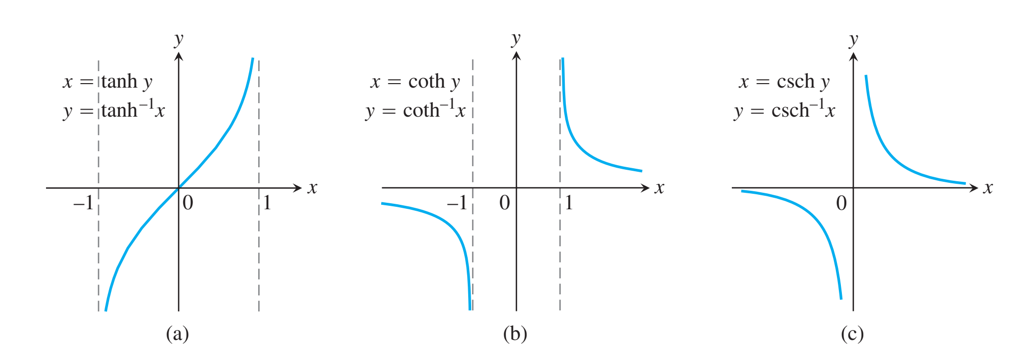


FIGURA 7.33 Gráficas de tangente, cotangente y cosecante hiperbólicas inversas de x.

TABLA 7.9 Identidades para las funciones hiperbólicas inversas

$$\operatorname{sech}^{-1} x = \cosh^{-1} \frac{1}{x}$$

$$\operatorname{csch}^{-1} x = \operatorname{senh}^{-1} \frac{1}{x}$$

$$\coth^{-1} x = \tanh^{-1} \frac{1}{x}$$

Identidades útiles

Las identidades de la tabla 7.9 se utilizan para obtener, con ayuda de una calculadora, los valores de $\operatorname{sech}^{-1} x$, $\operatorname{csch}^{-1} x$ y $\coth^{-1} x$, que sólo dan $\cosh^{-1} x$, $\operatorname{senh}^{-1} x$ y $\tanh^{-1} x$. Estas identidades son consecuencia directa de las definiciones. Por ejemplo, si $0 < x \leq 1$, entonces

$$\operatorname{sech}\left(\cosh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{\cosh\left(\cosh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)\right)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)} = x$$

por lo que

$$\cosh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{sech}^{-1} x$$

ya que la secante hiperbólica es inyectiva en (0, 1].

Derivadas e integrales

La mayor utilidad de las funciones hiperbólicas inversas radica en la integración para revertir las fórmulas de derivadas de la tabla 7.10.

TABLA 7.10 Derivadas de las funciones hiperbólicas inversas

$$\frac{d(\operatorname{senh}^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d(\cosh^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}, \qquad u > 1$$

$$\frac{d(\tanh^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{1-u^2}\frac{du}{dx}, \qquad |u| < 1$$

$$\frac{d(\coth^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{1-u^2}\frac{du}{dx}, \qquad |u| > 1$$

$$\frac{d(\operatorname{sech}^{-1} u)}{dx} = \frac{-du/dx}{u\sqrt{1-u^2}}, \qquad 0 < u < 1$$

$$\frac{d(\operatorname{csch}^{-1} u)}{dx} = \frac{-du/dx}{|u|\sqrt{1+u^2}}, \qquad u \neq 0$$

Las restricciones $|u| < 1$ y $|u| > 1$ en las fórmulas de la derivada de $\tanh^{-1} u$ y $\coth^{-1} u$ provienen de las restricciones naturales en los valores de estas funciones. (Vea las figuras 7.33a y b). La distinción entre $|u| < 1$ y $|u| > 1$ se vuelve importante cuando convertimos las fórmulas de derivadas en fórmulas de integrales. Si $|u| < 1$, la integral de $1/(1 - u^2)$ es $\tanh^{-1} u + C$. Si $|u| > 1$, la integral es $\coth^{-1} u + C$.

En el ejemplo 2 se ilustra cómo se deducen las derivadas de las funciones hiperbólicas inversas, en donde calculamos $d(\cosh^{-1} u)/dx$. Las otras derivadas se obtienen por medio de cálculos similares.

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

Sonya Kovalevsky (1850-1891)

EJEMPLO 2 Derivada del coseno hiperbólico inverso

Demuestre que si u es una función diferenciable de x cuyos valores son mayores que 1, entonces

$$\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}.$$

Solución Primero determinamos la derivada de $y = \cosh^{-1} x$ para $x > 1$ aplicando el teorema 1 con $f(x) = \cosh x$ y $f^{-1}(x) = \cosh^{-1} x$. El teorema 1 se puede aplicar porque la derivada de $\cosh x$ es positiva para $x > 0$.

$$\begin{aligned}
(f^{-1})'(x) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} && \text{Teorema 1} \\
&= \frac{1}{\operatorname{senh}(\cosh^{-1} x)} && f'(u) = \operatorname{senh} u \\
&= \frac{1}{\sqrt{\cosh^2(\cosh^{-1} x) - 1}} && \cosh^2 u - \operatorname{senh}^2 u = 1,\ \operatorname{senh} u = \sqrt{\cosh^2 u - 1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} && \cosh(\cosh^{-1} x) = x
\end{aligned}$$

En resumen,

$$\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Por último, la regla de la cadena produce:

$$\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{u^2 - 1}} \frac{du}{dx}.$$

■

En lugar de aplicar directamente el teorema 1, como se hizo en el ejemplo 2, podríamos determinar la derivada de $y = \cosh^{-1} x$, $x > 1$, por medio de diferenciación implícita y la regla de la cadena:

$$\begin{aligned}
y &= \cosh^{-1} x \\
x &= \cosh y && \text{Ecuación equivalente} \\
1 &= \operatorname{senh} y \frac{dy}{dx} && \text{Diferenciación implícita respecto de } x \text{, y la regla de la cadena} \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\operatorname{senh} y} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 y - 1}} && \text{Ya que } x > 1, y > 0 \text{ y } \operatorname{senh} y > 0 \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}. && \cosh y = x
\end{aligned}$$

Con sustituciones adecuadas, las fórmulas de las derivadas de la tabla 7.10 conducen a las fórmulas de integración de la tabla 7.11. Cada una de las fórmulas de la tabla 7.11 puede verificarse derivando la expresión del lado derecho.

EJEMPLO 3 Uso de la tabla 7.11

Evaluar

$$\int_0^1 \frac{2\,dx}{\sqrt{3 + 4x^2}}.$$

TABLA 7.11 Integrales que conducen a funciones hiperbólicas inversas

1.	$\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C,$	$a > 0$
2.	$\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \cosh^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C,$	$u > a > 0$
3.	$\displaystyle\int \frac{du}{a^2-u^2} = \begin{cases} \frac{1}{a}\tanh^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C & \text{si } u^2 < a^2 \\ \frac{1}{a}\coth^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C, & \text{si } u^2 > a^2 \end{cases}$	
4.	$\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{1}{a}\operatorname{sech}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C,$	$0 < u < a$
5.	$\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{a^2+u^2}} = -\frac{1}{a}\operatorname{csch}^{-1}\left|\frac{u}{a}\right| + C,$	$u \neq 0$ y $a > 0$

Solución La integral indefinida es

$$\int \frac{2\,dx}{\sqrt{3+4x^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} \qquad u = 2x, \quad du = 2\,dx, \quad a = \sqrt{3}$$

$$= \operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C \qquad \text{Fórmula de la tabla 7.11}$$

$$= \operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

Por lo tanto,

$$\int_0^1 \frac{2\,dx}{\sqrt{3+4x^2}} = \operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right)\Bigg]_0^1 = \operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) - \operatorname{senh}^{-1}(0)$$

$$= \operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) - 0 \approx 0.98665.$$

■

EJERCICIOS 7.8

Valores de funciones hiperbólicas e identidades

Cada uno de los ejercicios 1 a 4 da un valor de senh x o cosh x. Utilice las definiciones y la identidad $\cosh^2 - \operatorname{senh}^2 = 1$ para determinar los valores de las restantes cinco funciones hiperbólicas.

1. $\operatorname{senh} x = -\frac{3}{4}$

2. $\operatorname{senh} x = \frac{4}{3}$

3. $\cosh x = \frac{17}{15}, \quad x > 0$

4. $\cosh x = \frac{13}{5}, \quad x > 0$

Reescriba las expresiones de los ejercicios 5 a 10 en términos de exponenciales y simplifique los resultados tanto como sea posible.

5. $2\cosh(\ln x)$

6. $\operatorname{senh}(2\ln x)$

7. $\cosh 5x + \operatorname{senh} 5x$

8. $\cosh 3x - \operatorname{senh} 3x$

9. $(\operatorname{senh} x + \cosh x)^4$

10. $\ln(\cosh x + \operatorname{senh} x) + \ln(\cosh x - \operatorname{senh} x)$

11. Utilice las identidades

$$\operatorname{senh}(x + y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$$

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$$

para demostrar que

a. $\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x$

b. $\cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$.

12. Utilice las definiciones de $\cosh x$ y $\operatorname{senh} x$ para demostrar que

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1.$$

Derivadas

En los ejercicios 13 a 24 determine la derivada de y con respecto de la variable apropiada.

13. $y = 6 \operatorname{senh} \frac{x}{3}$

14. $y = \frac{1}{2} \operatorname{senh}(2x + 1)$

15. $y = 2\sqrt{t} \tanh \sqrt{t}$

16. $y = t^2 \tanh \frac{1}{t}$

17. $y = \ln(\operatorname{senh} z)$

18. $y = \ln(\cosh z)$

19. $y = \operatorname{sech} \theta(1 - \ln \operatorname{sech} \theta)$

20. $y = \operatorname{csch} \theta(1 - \ln \operatorname{csch} \theta)$

21. $y = \ln \cosh v - \frac{1}{2} \tanh^2 v$

22. $y = \ln \operatorname{senh} v - \frac{1}{2} \coth^2 v$

23. $y = (x^2 + 1) \operatorname{sech}(\ln x)$

(*Sugerencia:* Antes de derivar, exprese en términos de exponenciales y simplifique).

24. $y = (4x^2 - 1) \operatorname{csch}(\ln 2x)$

En los ejercicios 25 a 36, determine la derivada de y con respecto de la variable apropiada.

25. $y = \operatorname{senh}^{-1} \sqrt{x}$

26. $y = \cosh^{-1} 2\sqrt{x + 1}$

27. $y = (1 - \theta) \tanh^{-1} \theta$

28. $y = (\theta^2 + 2\theta) \tanh^{-1}(\theta + 1)$

29. $y = (1 - t) \coth^{-1} \sqrt{t}$

30. $y = (1 - t^2) \coth^{-1} t$

31. $y = \cos^{-1} x - x \operatorname{sech}^{-1} x$

32. $y = \ln x + \sqrt{1 - x^2} \operatorname{sech}^{-1} x$

33. $y = \operatorname{csch}^{-1} \left(\frac{1}{2}\right)^\theta$

34. $y = \operatorname{csch}^{-1} 2^\theta$

35. $y = \operatorname{senh}^{-1}(\tan x)$

36. $y = \cosh^{-1}(\sec x), \quad 0 < x < \pi/2$

Fórmulas de integración

Verifique las fórmulas de integración en los ejercicios 37 a 40.

37. a. $\int \operatorname{sech} x\, dx = \tan^{-1}(\operatorname{senh} x) + C$

b. $\int \operatorname{sech} x\, dx = \operatorname{sen}^{-1}(\tanh x) + C$

38. $\int x \operatorname{sech}^{-1} x\, dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{sech}^{-1} x - \frac{1}{2}\sqrt{1 - x^2} + C$

39. $\int x \coth^{-1} x\, dx = \frac{x^2 - 1}{2} \coth^{-1} x + \frac{x}{2} + C$

40. $\int \tanh^{-1} x\, dx = x \tanh^{-1} x + \frac{1}{2} \ln(1 - x^2) + C$

Integrales indefinidas

Evalúe las integrales de los ejercicios 41 a 50.

41. $\int \operatorname{senh} 2x\, dx$

42. $\int \operatorname{senh} \frac{x}{5}\, dx$

43. $\int 6 \cosh\left(\frac{x}{2} - \ln 3\right) dx$

44. $\int 4 \cosh(3x - \ln 2)\, dx$

45. $\int \tanh \frac{x}{7}\, dx$

46. $\int \coth \frac{\theta}{\sqrt{3}}\, d\theta$

47. $\int \operatorname{sech}^2\left(x - \frac{1}{2}\right) dx$

48. $\int \operatorname{csch}^2(5 - x)\, dx$

49. $\int \frac{\operatorname{sech} \sqrt{t} \tanh \sqrt{t}\, dt}{\sqrt{t}}$

50. $\int \frac{\operatorname{csch}(\ln t) \coth(\ln t)\, dt}{t}$

Integrales definidas

Evalúe las integrales de los ejercicios 51 a 60.

51. $\int_{\ln 2}^{\ln 4} \coth x\, dx$

52. $\int_0^{\ln 2} \tanh 2x\, dx$

53. $\int_{-\ln 4}^{-\ln 2} 2e^\theta \cosh \theta\, d\theta$

54. $\int_0^{\ln 2} 4e^{-\theta} \operatorname{senh} \theta\, d\theta$

55. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cosh(\tan \theta) \sec^2 \theta\, d\theta$

56. $\int_0^{\pi/2} 2 \operatorname{senh}(\operatorname{sen} \theta) \cos \theta\, d\theta$

57. $\int_1^2 \frac{\cosh(\ln t)}{t}\, dt$

58. $\int_1^4 \frac{8 \cosh \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

59. $\int_{-\ln 2}^0 \cosh^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$

60. $\int_0^{\ln 10} 4 \operatorname{senh}^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$

Evaluación de funciones hiperbólicas inversas e integrales relacionadas

Aun cuando su calculadora no cuente con teclas para funciones hiperbólicas, podrá evaluar las funciones hiperbólicas inversas expresándolas como logaritmos, tal como se muestra aquí.

$$\operatorname{senh}^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right), \qquad -\infty < x < \infty$$

$$\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right), \qquad x \geq 1$$

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x}, \qquad |x| < 1$$

$$\operatorname{sech}^{-1} x = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right), \qquad 0 < x \leq 1$$

$$\operatorname{csch}^{-1} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1 + x^2}}{|x|}\right), \qquad x \neq 0$$

$$\coth^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x + 1}{x - 1}, \qquad |x| > 1$$

Utilice las fórmulas del cuadro anterior para expresar los números en los ejercicios 61 a 66 en términos de logaritmos naturales.

61. $\operatorname{senh}^{-1}(-5/12)$

62. $\cosh^{-1}(5/3)$

63. $\tanh^{-1}(-1/2)$

64. $\coth^{-1}(5/4)$

65. $\operatorname{sech}^{-1}(3/5)$

66. $\operatorname{csch}^{-1}(-1/\sqrt{3})$

Evalúe las integrales de los ejercicios 67 a 74 en términos de

a. funciones hiperbólicas inversas.

b. logaritmos naturales.

67. $\displaystyle\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$

68. $\displaystyle\int_0^{1/3} \frac{6\,dx}{\sqrt{1+9x^2}}$

69. $\displaystyle\int_{5/4}^{2} \frac{dx}{1-x^2}$

70. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{1-x^2}$

71. $\displaystyle\int_{1/5}^{3/13} \frac{dx}{x\sqrt{1-16x^2}}$

72. $\displaystyle\int_1^{2} \frac{dx}{x\sqrt{4+x^2}}$

73. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}}$

74. $\displaystyle\int_1^{e} \frac{dx}{x\sqrt{1+(\ln x)^2}}$

Aplicaciones y teoría

75. a. Demuestre que si una función f está definida en un intervalo simétrico con respecto del origen (de manera que f está definida en $-x$ siempre que esté definida en x), entonces

$$f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}. \qquad (1)$$

Luego compruebe que $(f(x)+f(-x))/2$ es par y que $(f(x)-f(-x))/2$ es impar.

b. La ecuación (1) se simplifica mucho si la propia f es (i) par o (ii) impar. ¿Cuáles son las nuevas ecuaciones? Justifique sus respuestas.

76. Deduzca la fórmula $\operatorname{senh}^{-1} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right),\ -\infty < x < \infty$. Explique por qué al deducirla se usa el signo más con la raíz cuadrada, en lugar del signo menos.

77. Caída libre Si un cuerpo de masa m que cae libremente desde el reposo encuentra una resistencia del aire proporcional al cuadrado de su velocidad, su velocidad a t segundos de iniciarse la caída satisface la ecuación diferencial

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2,$$

donde k es una constante que depende de las propiedades aerodinámicas del cuerpo y de la densidad del aire. (Suponemos que la caída es lo suficientemente corta para que la variación de la densidad del aire no afecte el resultado de manera significativa).

a. Demuestre que

$$v = \sqrt{\frac{mg}{k}}\tanh\left(\sqrt{\frac{gk}{m}}\,t\right)$$

satisface la ecuación diferencial y la condición inicial de que $v = 0$ cuando $t = 0$.

b. Calcule la *velocidad límite* del cuerpo, $\lim_{t\to\infty} v$.

c. Para un paracaidista que pesa 160 lb ($mg = 160$), el tiempo en segundos y la distancia en pies, un valor común para k es 0.005. ¿Cuál es la velocidad límite del paracaidista?

78. Aceleraciones con magnitudes proporcionales al desplazamiento Supongamos que, en el instante t, la posición de un móvil que se desplaza sobre una recta coordenada es

a. $s = a\cos kt + b\operatorname{sen} kt$

b. $s = a\cosh kt + b\operatorname{senh} kt$.

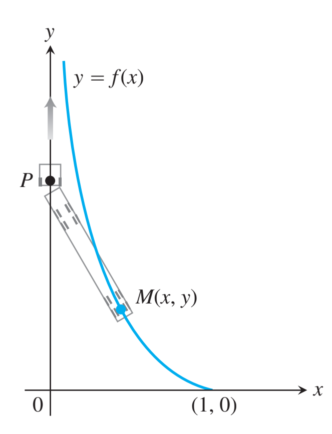
Demuestre que en ambos casos la aceleración d^2s/dt^2 es proporcional a s, pero en el primero el móvil se dirige hacia el origen, mientras que en el segundo se aleja de él.

79. Camión con remolque y la tractriz Cuando un camión con remolque vira en una esquina o en un cruce de caminos, sus ruedas posteriores describen una curva como la que se ilustra a continuación. (Ésta es la razón por la que a veces las ruedas traseras suelen subirse a las aceras al dar la vuelta). Podemos hallar la ecuación de esa curva si imaginamos las ruedas traseras como una masa M en el punto (1,0) sobre el eje x, unida por una varilla de longitud unitaria a un punto P, que representa la cabina del conductor, en el origen. Cuando el punto P sube por el eje y, arrastra a M. La curva descrita por M se llama *tractriz* (del latín *tractum,* arrastrar) y se puede probar que es la gráfica de la función $y = f(x)$ que resuelve el problema con valor inicial

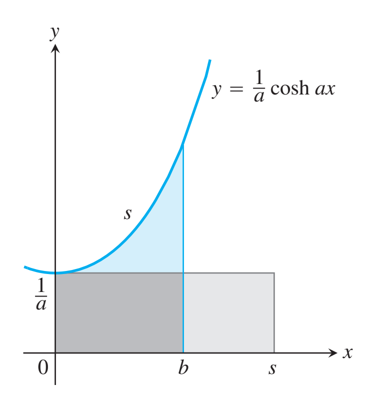
Ecuación diferencial: $\displaystyle\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

Condición inicial: $y = 0$ cuando $x = 1$.

Resuelva el problema con valor inicial para hallar la ecuación de la curva. (Necesitará una función hiperbólica inversa).



80. Área Demuestre que el área de la región del primer cuadrante, acotada por la curva $y = (1/a)\cosh ax$, los ejes coordenados y la recta $x = b$, es igual al área de un rectángulo de altura $1/a$ y longitud s, donde s es la longitud de la curva de $x = 0$ a $x = b$. (Vea la figura siguiente).

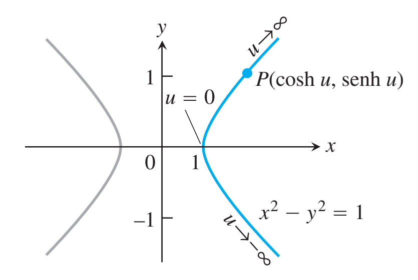


81. Volumen Una región del primer cuadrante está acotada por arriba por la curva $y = \cosh x$, por debajo por la curva $y = \operatorname{senh} x$ y por la izquierda y la derecha por el eje y y la recta $x = 2$, respectivamente. Determine el volumen del sólido que se genera al hacer girar esa región alrededor del eje x.

82. Volumen La región acotada por la curva $y = \operatorname{sech} x$, el eje x y las rectas $x = \pm \ln \sqrt{3}$ se hace girar alrededor del eje x para generar un sólido. ¿Cuál es el volumen del sólido?

83. Longitud de arco Determine la longitud del segmento de la curva $y = (1/2)\cosh 2x$ de $x = 0$ a $x = \ln \sqrt{5}$.

84. Lo hiperbólico en las funciones hiperbólicas Si no sabe por qué las funciones que hemos estudiado se llaman *hiperbólicas*, ésta es la respuesta: así como $x = \cos u$ y $y = \operatorname{sen} u$ han sido identificados con los puntos (x, y) en el círculo unitario, las funciones $x = \cosh u$ y $y = \operatorname{senh} u$ se identifican con los puntos (x, y) en la rama derecha de la hipérbola unitaria $x^2 - y^2 = 1$.



Como $\cosh^2 u - \operatorname{senh}^2 u = 1$, el punto $(\cosh u, \operatorname{senh} u)$ se encuentra en la rama derecha de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ para todo valor de u (ejercicio 84).

Otra analogía entre funciones hiperbólicas y funciones circulares es que la variable u en las coordenadas $(\cosh u, \operatorname{senh} u)$ para los puntos de la rama derecha de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ es el doble del área del sector AOP de la figura siguiente. Para averiguar por qué, siga estos pasos.

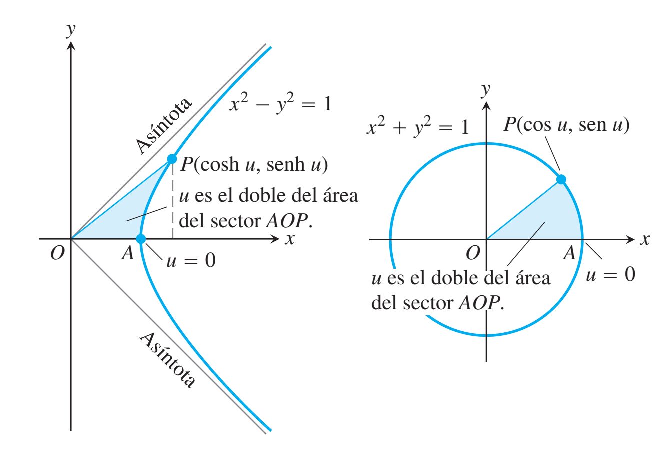
a. Demuestre que el área $A(u)$ del sector AOP es

$$A(u) = \frac{1}{2}\cosh u \operatorname{senh} u - \int_1^{\cosh u} \sqrt{x^2 - 1}\, dx.$$

b. Derive ambos lados de la ecuación del inciso (a) con respecto a u, para demostrar que

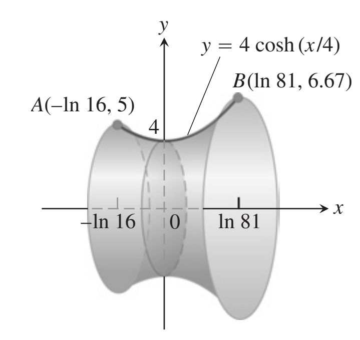
$$A'(u) = \frac{1}{2}.$$

c. Despeje $A(u)$ en esta última ecuación. ¿Cuál es el valor de $A(0)$? ¿Cuál es el valor de la constante de integración C en su solución? Una vez hallada C, ¿qué puede decir acerca de la relación entre u y $A(u)$?



Una de las analogías entre las funciones hiperbólicas y circulares se muestra en estos dos diagramas (ejercicio 84).

85. Superficie mínima Determine el área de la superficie barrida por la curva $y = 4\cosh(x/4)$, $-\ln 16 \leq x \leq \ln 81$, al hacerla girar alrededor del eje x.



Es posible demostrar que, de todas las curvas continuamente diferenciables que unen los puntos A y B en la figura, $y = 4\cosh(x/4)$ es la que genera la superficie de menor área. Si se sumerge una armazón de alambre rígido con los círculos extremos en A y B en una solución jabonosa, la película que unirá los círculos al salir de la solución será la misma que la generada por la curva.

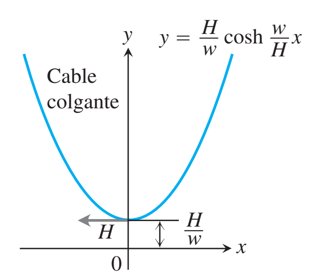
T **86. a.** Halle el centroide de la curva $y = \cosh x$, $-\ln 2 \leq x \leq \ln 2$.

b. Evalúe hasta dos decimales las coordenadas. Dibuje la curva y trace el centroide para mostrar su relación con ella.

Cables colgantes

87. Imagine un cable, como los de teléfono o telecable, que está tendido entre dos soportes y cuelga libremente. El peso del cable por unidad de longitud es w y la tensión horizontal en el punto más bajo es un vector de longitud H. Si elegimos un sistema coordenado para el plano del cable, en el cual el eje x sea horizontal, la fuerza de gravedad apuntara hacia abajo, el extremo positivo del eje y hacia arriba, y el punto más abajo del cable se localizara en $y = H/w$ sobre el eje y (vea la figura siguiente); entonces será posible demostrar que la posición del cable coincide con la gráfica del coseno hiperbólico

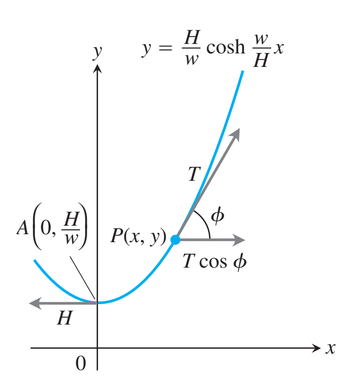
$$y = \frac{H}{w}\cosh\frac{w}{H}x.$$



En ocasiones, a este tipo de curvas se les denomina **curvas de la cadena** o **catenarias,** término que proviene del latín *catena*, que significa cadena.

a. Sea $P(x, y)$ un punto arbitrario sobre el cable. La figura siguiente ilustra la tensión en P como un vector de longitud (magnitud) T, así como también la tensión H en el punto más bajo A. Demuestre que la pendiente del cable en P es

$$\tan\phi = \frac{dy}{dx} = \operatorname{senh}\frac{w}{H}x.$$



b. Utilizando el resultado de la parte (a) y sabiendo que la tensión en P debe ser igual a H (el cable no se está moviendo), demuestre que $T = wy$. En consecuencia, la magnitud de la tensión en $P(x, y)$ es exactamente igual al peso de y unidades de cable.

88. (*Continuación del ejercicio 87*). La longitud del arco AP de la figura del ejercicio 87 es $s = (1/a)\operatorname{senh} ax$, donde $a = w/H$. Demuestre que es posible expresar las coordenadas de P en términos de s como:

$$x = \frac{1}{a}\operatorname{senh}^{-1} as, \qquad y = \sqrt{s^2 + \frac{1}{a^2}}.$$

89. Comba y tensión horizontal en un cable Los extremos de un cable de 32 pies de longitud y 2 lb/pie de peso están sujetos al mismo nivel a postes ubicados a 30 pies de distancia uno del otro.

a. Haga un modelo del cable con la ecuación

$$y = \frac{1}{a}\cosh ax, \quad -15 \le x \le 15.$$

Utilice la información del ejercicio 88 para demostrar que a satisface la ecuación

$$16a = \operatorname{senh} 15a. \qquad (2)$$

T **b.** Resuelva gráficamente la ecuación (2), estimando las coordenadas de los puntos donde las gráficas de las ecuaciones $y = 16a$ y $y = \operatorname{senh} 15a$ se intersecan en el plano ay.

T **c.** Resuelva numéricamente la ecuación (2) para a. Compare esta solución con el valor que encontró en el inciso (b).

d. Estime la tensión horizontal del cable en su punto más bajo.

T **e.** Utilizando el valor que encontró para a en el inciso (c), trace la gráfica de la catenaria

$$y = \frac{1}{a}\cosh ax$$

en el intervalo $-15 \le x \le 15$. Estime la comba en el centro del cable.

Capítulo 7 Preguntas de repaso

1. ¿Qué funciones tienen inversas? ¿Cómo sabe si dos funciones f y g son inversas una de la otra? Proporcione ejemplos de funciones que sean (o no sean) inversas una de la otra.
2. ¿Cómo se relacionan los dominios, rangos y gráficas de funciones y sus inversas? Dé un ejemplo.
3. ¿Cómo es posible expresar (en ocasiones) la inversa de una función de x como una función de x?
4. ¿En qué circunstancias se puede asegurar que la inversa de una función es diferenciable? ¿Cómo se relacionan las derivadas de f y f^{-1}?

5. ¿Qué es la función logaritmo natural? ¿Cuál es su dominio, rango y derivada? ¿Qué propiedades aritméticas tiene? Comente su gráfica.

6. ¿Qué es la derivación logarítmica? Proporcione un ejemplo.

7. ¿Qué integrales conducen a logaritmos? Dé ejemplos. ¿Cuáles son las integrales de $\tan x$ y $\cot x$?

8. ¿Cómo se define la función exponencial e^x? ¿Cuál es su dominio, rango y derivada? ¿Qué leyes de exponentes cumple? Comente su gráfica.

9. ¿Cómo se definen las funciones a^x y $\log_a x$? ¿Existen restricciones sobre a? ¿Cómo se relaciona la gráfica de $\log_a x$ con la de $\ln x$? ¿Es cierto que en realidad sólo existe una función exponencial y una función logaritmo?

10. Describa alguna de las aplicaciones de los logaritmos de base 10.

11. ¿Cuál es la ley de cambio exponencial? ¿Cómo puede deducirse con base en un problema con valor inicial? ¿Cuáles son algunas de las aplicaciones de esta ley?

12. ¿Cómo se comparan las razones de crecimiento de funciones positivas cuando $x \to \infty$?

13. ¿Qué papel desempeñan las funciones e^x y $\ln x$ en las comparaciones de crecimiento?

14. Describa la notación o pequeña y O grande. Proporcione ejemplos.

15. ¿Qué es más eficiente, una búsqueda secuencial o una búsqueda binaria? Explique.

16. ¿Cómo se definen las funciones trigonométricas inversas? ¿Cómo se pueden utilizar triángulos rectángulos para determinar los valores de estas funciones? Proporcione ejemplos.

17. ¿Qué son las derivadas de las funciones trigonométricas inversas? ¿Cómo son los dominios de las derivadas, en comparación con los dominios de las funciones?

18. ¿Qué integrales llevan a funciones trigonométricas inversas? ¿De qué forma se amplía la aplicación de estas integrales mediante la sustitución y completar cuadrados?

19. ¿Cuáles son las seis funciones hiperbólicas básicas? Comente sus dominios, rangos y gráficas. ¿Cuáles son algunas de las identidades que las relacionan?

20. ¿Cuáles son las derivadas de las seis funciones hiperbólicas básicas? ¿Cuáles son las correspondientes fórmulas de integrales? ¿Qué similitudes puede identificar respecto de las seis funciones trigonométricas básicas?

21. ¿Cómo se definen las funciones hiperbólicas inversas? Comente sus dominios, rangos y gráficas. ¿Cómo se pueden determinar, con ayuda de una calculadora, los valores de $\operatorname{sech}^{-1} x$, $\operatorname{csch}^{-1} x$ y $\coth^{-1} x$ para $\cosh^{-1} x$, $\operatorname{senh}^{-1} x$ y $\tanh^{-1} x$?

22. ¿Qué integrales llevan de manera natural a las funciones hiperbólicas inversas?

Capítulo 7 Ejercicios de práctica

Derivación

En los ejercicios 1 a 24, determine la derivada de y con respecto de la variable apropiada.

1. $y = 10e^{-x/5}$

2. $y = \sqrt{2}e^{\sqrt{2}x}$

3. $y = \frac{1}{4}xe^{4x} - \frac{1}{16}e^{4x}$

4. $y = x^2e^{-2/x}$

5. $y = \ln(\operatorname{sen}^2\theta)$

6. $y = \ln(\sec^2\theta)$

7. $y = \log_2(x^2/2)$

8. $y = \log_5(3x - 7)$

9. $y = 8^{-t}$

10. $y = 9^{2t}$

11. $y = 5x^{3.6}$

12. $y = \sqrt{2}x^{-\sqrt{2}}$

13. $y = (x + 2)^{x+2}$

14. $y = 2(\ln x)^{x/2}$

15. $y = \operatorname{sen}^{-1}\sqrt{1 - u^2}, \quad 0 < u < 1$

16. $y = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{v}}\right), \quad v > 1$

17. $y = \ln\cos^{-1} x$

18. $y = z\cos^{-1} z - \sqrt{1 - z^2}$

19. $y = t\tan^{-1} t - \frac{1}{2}\ln t$

20. $y = (1 + t^2)\cot^{-1} 2t$

21. $y = z\sec^{-1} z - \sqrt{z^2 - 1}, \quad z > 1$

22. $y = 2\sqrt{x - 1}\,\sec^{-1}\sqrt{x}$

23. $y = \csc^{-1}(\sec\theta), \quad 0 < \theta < \pi/2$

24. $y = (1 + x^2)e^{\tan^{-1} x}$

Derivación logarítmica

En los ejercicios 25 a 30, utilice la derivación logarítmica para determinar la derivada de y con respecto de la variable apropiada.

25. $y = \frac{2(x^2 + 1)}{\sqrt{\cos 2x}}$

26. $y = \sqrt[10]{\frac{3x + 4}{2x - 4}}$

27. $y = \left(\frac{(t + 1)(t - 1)}{(t - 2)(t + 3)}\right)^5, \quad t > 2$

28. $y = \frac{2u2^u}{\sqrt{u^2 + 1}}$

29. $y = (\operatorname{sen}\theta)^{\sqrt{\theta}}$

30. $y = (\ln x)^{1/(\ln x)}$

Integración

Evalúe las integrales en los ejercicios 31 a 78.

31. $\int e^x \operatorname{sen}(e^x)\,dx$

32. $\int e^t\cos(3e^t - 2)\,dt$

33. $\int e^x \sec^2 (e^x - 7)\, dx$

34. $\int e^y \csc (e^y + 1) \cot (e^y + 1)\, dy$

35. $\int \sec^2 (x) e^{\tan x}\, dx$

36. $\int \csc^2 x\, e^{\cot x}\, dx$

37. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{3x - 4}$

38. $\int_{1}^{e} \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\, dx$

39. $\int_{0}^{\pi} \tan \frac{x}{3}\, dx$

40. $\int_{1/6}^{1/4} 2 \cot \pi x\, dx$

41. $\int_{0}^{4} \frac{2t}{t^2 - 25}\, dt$

42. $\int_{-\pi/2}^{\pi/6} \frac{\cos t}{1 - \operatorname{sen} t}\, dt$

43. $\int \frac{\tan (\ln v)}{v}\, dv$

44. $\int \frac{dv}{v \ln v}$

45. $\int \frac{(\ln x)^{-3}}{x}\, dx$

46. $\int \frac{\ln (x - 5)}{x - 5}\, dx$

47. $\int \frac{1}{r} \csc^2 (1 + \ln r)\, dr$

48. $\int \frac{\cos (1 - \ln v)}{v}\, dv$

49. $\int x 3^{x^2}\, dx$

50. $\int 2^{\tan x} \sec^2 x\, dx$

51. $\int_{1}^{7} \frac{3}{x}\, dx$

52. $\int_{1}^{32} \frac{1}{5x}\, dx$

53. $\int_{1}^{4} \left(\frac{x}{8} + \frac{1}{2x}\right) dx$

54. $\int_{1}^{8} \left(\frac{2}{3x} - \frac{8}{x^2}\right) dx$

55. $\int_{-2}^{-1} e^{-(x+1)}\, dx$

56. $\int_{-\ln 2}^{0} e^{2w}\, dw$

57. $\int_{0}^{\ln 5} e^r (3e^r + 1)^{-3/2}\, dr$

58. $\int_{0}^{\ln 9} e^{\theta} (e^{\theta} - 1)^{1/2}\, d\theta$

59. $\int_{1}^{e} \frac{1}{x} (1 + 7 \ln x)^{-1/3}\, dx$

60. $\int_{e}^{e^2} \frac{1}{x \sqrt{\ln x}}\, dx$

61. $\int_{1}^{3} \frac{(\ln (v + 1))^2}{v + 1}\, dv$

62. $\int_{2}^{4} (1 + \ln t) t \ln t\, dt$

63. $\int_{1}^{8} \frac{\log_4 \theta}{\theta}\, d\theta$

64. $\int_{1}^{e} \frac{8 \ln 3 \log_3 \theta}{\theta}\, d\theta$

65. $\int_{-3/4}^{3/4} \frac{6\, dx}{\sqrt{9 - 4x^2}}$

66. $\int_{-1/5}^{1/5} \frac{6\, dx}{\sqrt{4 - 25x^2}}$

67. $\int_{-2}^{2} \frac{3\, dt}{4 + 3t^2}$

68. $\int_{\sqrt{3}}^{3} \frac{dt}{3 + t^2}$

69. $\int \frac{dy}{y \sqrt{4y^2 - 1}}$

70. $\int \frac{24\, dy}{y \sqrt{y^2 - 16}}$

71. $\int_{\sqrt{2}/3}^{2/3} \frac{dy}{|y| \sqrt{9y^2 - 1}}$

72. $\int_{-2/\sqrt{5}}^{-\sqrt{6}/\sqrt{5}} \frac{dy}{|y| \sqrt{5y^2 - 3}}$

73. $\int \frac{dx}{\sqrt{-2x - x^2}}$

74. $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + 4x - 1}}$

75. $\int_{-2}^{-1} \frac{2\, dv}{v^2 + 4v + 5}$

76. $\int_{-1}^{1} \frac{3\, dv}{4v^2 + 4v + 4}$

77. $\int \frac{dt}{(t + 1) \sqrt{t^2 + 2t - 8}}$

78. $\int \frac{dt}{(3t + 1) \sqrt{9t^2 + 6t}}$

Resolución de ecuaciones con términos logarítmicos o exponenciales

Despeje y en los ejercicios 79 a 84.

79. $3^y = 2^{y+1}$

80. $4^{-y} = 3^{y+2}$

81. $9e^{2y} = x^2$

82. $3^y = 3 \ln x$

83. $\ln (y - 1) = x + \ln y$

84. $\ln (10 \ln y) = \ln 5x$

Evaluación de límites

Determine los límites en los ejercicios 85 a 96.

85. $\lim_{x \to 0} \frac{10^x - 1}{x}$

86. $\lim_{\theta \to 0} \frac{3^{\theta} - 1}{\theta}$

87. $\lim_{x \to 0} \frac{2^{\operatorname{sen} x} - 1}{e^x - 1}$

88. $\lim_{x \to 0} \frac{2^{-\operatorname{sen} x} - 1}{e^x - 1}$

89. $\lim_{x \to 0} \frac{5 - 5 \cos x}{e^x - x - 1}$

90. $\lim_{x \to 0} \frac{4 - 4e^x}{xe^x}$

91. $\lim_{t \to 0^+} \frac{t - \ln (1 + 2t)}{t^2}$

92. $\lim_{x \to 4} \frac{\operatorname{sen}^2 (\pi x)}{e^{x-4} + 3 - x}$

93. $\lim_{t \to 0^+} \left(\frac{e^t}{t} - \frac{1}{t}\right)$

94. $\lim_{y \to 0^+} e^{-1/y} \ln y$

95. $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x$

96. $\lim_{x \to 0^+} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x$

Comparación de razones de crecimiento de funciones

97. ¿f crece más rápido, más lento o a la misma razón que g cuando $x \to \infty$? Justifique sus respuestas.

a. $f(x) = \log_2 x$, $g(x) = \log_3 x$

b. $f(x) = x$, $g(x) = x + \frac{1}{x}$

c. $f(x) = x/100$, $g(x) = xe^{-x}$

d. $f(x) = x$, $g(x) = \tan^{-1} x$

e. $f(x) = \csc^{-1} x$, $g(x) = 1/x$

f. $f(x) = \operatorname{senh} x$, $g(x) = e^x$

98. ¿f crece más rápido, más lento o a la misma razón que g cuando $x \to \infty$? Justifique sus respuestas.

a. $f(x) = 3^{-x}$, $g(x) = 2^{-x}$

b. $f(x) = \ln 2x$, $g(x) = \ln x^2$

c. $f(x) = 10x^3 + 2x^2$, $g(x) = e^x$

d. $f(x) = \tan^{-1}(1/x)$, $g(x) = 1/x$

e. $f(x) = \operatorname{sen}^{-1}(1/x)$, $g(x) = 1/x^2$

f. $f(x) = \operatorname{sech} x$, $g(x) = e^{-x}$

99. ¿Verdadero o falso? Justifique sus respuestas.

a. $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ **b.** $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} = O\left(\frac{1}{x^4}\right)$

c. $x = o(x + \ln x)$ **d.** $\ln(\ln x) = o(\ln x)$

e. $\tan^{-1} x = O(1)$ **f.** $\cosh x = O(e^x)$

100. ¿Verdadero o falso? Justifique sus respuestas.

a. $\frac{1}{x^4} = O\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right)$ **b.** $\frac{1}{x^4} = o\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right)$

c. $\ln x = o(x + 1)$ **d.** $\ln 2x = O(\ln x)$

e. $\sec^{-1} x = O(1)$ **f.** $\operatorname{senh} x = O(e^x)$

Teoría y aplicaciones

101. Ya que la función $f(x) = e^x + x$ es diferenciable e inyectiva, tiene una inversa diferenciable $f^{-1}(x)$. Determine el valor de df^{-1}/dx en el punto $f(\ln 2)$.

102. Determine la inversa de la función $f(x) = 1 + (1/x), x \neq 0$. Demuestre después que $f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$ y que

$$\left.\frac{df^{-1}}{dx}\right|_{f(x)} = \frac{1}{f'(x)}.$$

En los ejercicios 103 y 104, determine los valores máximo absoluto y mínimo absoluto de cada función en el intervalo dado.

103. $y = x \ln 2x - x, \quad \left[\frac{1}{2e}, \frac{e}{2}\right]$

104. $y = 10x(2 - \ln x), \quad (0, e^2]$

105. Área Calcule el área bajo la curva $y = 2(\ln x)/x$ y el eje x, de $x = 1$ a $x = e$.

106. Área

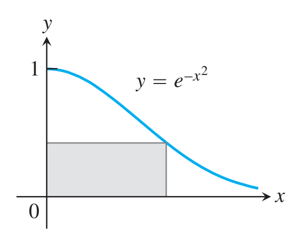
a. Demuestre que el área que está entre la curva $y = 1/x$ y el eje x, de $x = 10$ a $x = 20$, es igual al área que está entre la curva y el eje x, de $x = 1$ a $x = 2$.

b. Demuestre que el área que está entre la curva $y = 1/x$ y el eje x, de ka, a kb, es igual al área que está entre curva y el eje x, de $x = a$ a $x = b$ $(0 < a < b, k > 0)$.

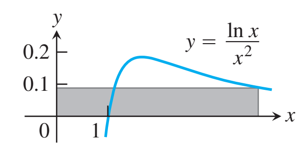
107. Una partícula viaja hacia arriba y a la derecha sobre la curva $y = \ln x$. Su coordenada x crece según la razón $(dx/dt) = \sqrt{x}$ m/s. m/s. ¿Cuál es la razón de cambio de la coordenada y en el punto $(e^2, 2)$?

108. Una niña se desliza por un tobogán cuya forma es la curva $y = 9e^{-x/3}$. Su coordenada y cambia según la razón $dy/dt = (-1/4)\sqrt{9 - y}$ pie/s. ¿A qué razón cambia, aproximadamente, su coordenada x cuando llega a la parte inferior del tobogán en $x = 9$ pies? (Considere que e^3 es 20 y redondee la respuesta al pies/s más cercano).

109. El rectángulo de la ilustración tiene un lado sobre el eje y positivo, otro sobre el eje x positivo y su vértice superior derecho está sobre la curva $y = e^{-x^2}$. ¿Con qué dimensiones alcanza el rectángulo un área máxima y cuál es esa área?



110. El rectángulo de la ilustración tiene un lado sobre el eje y positivo, otro sobre el eje x positivo, y su vértice superior derecho está sobre la curva $y = (\ln x)/x^2$. ¿Con qué dimensiones alcanza el rectángulo un área máxima y cuál es esa área?



111. Las funciones $f(x) = \ln 5x$ y $g(x) = \ln 3x$ difieren por una constante. ¿Cuál es? Justifique su respuesta.

112. a. Si $(\ln x)/x = (\ln 2)/2$, ¿tiene que ser $x = 2$?

b. Si $(\ln x)/x = -2 \ln 2$, ¿tiene que ser $x = 1/2$?

Justifique sus respuestas.

113. El cociente $(\log_4 x)/(\log_2 x)$ tiene un valor constante. ¿Cuál es? Justifique su respuesta.

T **114. $\log_x(2)$ en comparación con $\log_2(x)$** ¿Cómo se compara $f(x) = \log_x(2)$ con $g(x) = \log_2(x)$? Ésta es una forma de averiguarlo:

a. Utilice la ecuación $\log_a b = (\ln b)/(\ln a)$ para expresar $f(x)$ y $g(x)$ en términos de logaritmos naturales.

b. Grafique juntas a f y a g. Comente el comportamiento de f en relación con los signos y valores de g.

T **115.** Grafique las siguientes funciones y por inspección visual localice y estime los valores extremos, identificar las coordenadas de los puntos de inflexión, y determine los intervalos en donde las gráficas son cóncavas hacia arriba y hacia abajo. Después, confirme sus estimaciones trabajando con las derivadas de las funciones.

a. $y = (\ln x)/\sqrt{x}$ **b.** $y = e^{-x^2}$ **c.** $y = (1 + x)e^{-x}$

T **116.** Grafique $f(x) = x \ln x$. ¿Le parece que la función tiene un valor mínimo absoluto? Confirme su respuesta mediante cálculo.

117. ¿Cuál es la edad de una muestra de carbón vegetal, en la cual 90% del carbono 14 original ha decaído?

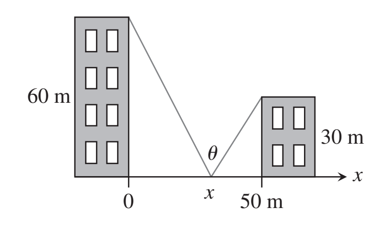
118. Enfriamiento de una tarta En un plato hondo, una tarta cuya temperatura interna era 220°F al ser sacada del horno, se deja enfriar en una terraza bien ventilada a 40°F. A los 15 minutos la temperatura interna de la tarta es de 180°F. ¿Cuánto tiempo más tardará en enfriarse hasta llegar a 70°F?

119. Ubicación de una estación solar Usted ha firmado un contrato para construir una estación solar al nivel del suelo, con alineación este–oeste entre los dos edificios de la ilustración. ¿A qué distancia del edificio más alto debe ubicar la estación para maxi-

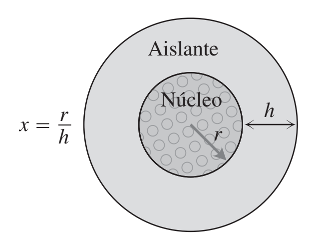
mizar el número de horas que recibirá la luz solar el día en que el sol pase directamente por arriba? Observe primero que

$$\theta = \pi - \cot^{-1}\frac{x}{60} - \cot^{-1}\frac{50 - x}{30}.$$

Encuentre después el valor de x que maximiza θ.



120. Un cable redondo para transmisión submarina está formado por un núcleo de alambres de cobre, forrado con un material aislante no conductor. Si x es la razón entre el radio del núcleo y el grosor del aislante, sabemos que la velocidad de la señal transmitida está dada por la ecuación $v = x^2 \ln(1/x)$. Si el radio del núcleo es 1 cm, ¿qué grosor del aislante h permitirá la mayor velocidad de transmisión?



Capítulo 7 Ejercicios adicionales y avanzados

Límites

Determine los límites en los ejercicios 1 a 6.

1. $\lim\limits_{b\to 1^-}\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x \tan^{-1} t\, dt$

3. $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos\sqrt{x})^{1/x}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}(x + e^x)^{2/x}$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(e^{1/n} + e^{2/n} + \cdots + e^{(n-1)/n} + e^{n/n}\right)$

7. Sea $A(t)$ el área de la región comprendida en el primer cuadrante y acotada por los ejes coordenados, la curva $y = -e^x$ y la recta vertical $x = t$, $t > 0$. Sea $V(t)$ el volumen del sólido generado al hacer girar la región alrededor del eje x. Determine los límites siguientes.

a. $\lim\limits_{t\to\infty} A(t)$ **b.** $\lim\limits_{t\to\infty} V(t)/A(t)$ **c.** $\lim\limits_{t\to 0^+} V(t)/A(t)$

8. Variación de la base de un logaritmo

a. Determine $\lim \log_a 2$ cuando $a \to 0^+, 1^-, 1^+$ y ∞.

T **b.** Grafique $y = \log_a 2$ como una función de a en el intervalo $0 < a \le 4$.

Teoría y ejemplos

9. Determine el área entre las curvas $y = 2(\log_2 x)/x$ y $y = 2(\log_4 x)/x$ y el eje x, de $x = 1$ a $x = e$. ¿Cuál es la razón entre el área mayor y el área menor?

T **10.** Grafique $f(x) = \tan^{-1} x + \tan^{-1}(1/x)$ para $-5 \le x \le 5$. Después utilice cálculo para explicar lo que ve en la gráfica. ¿Cómo esperaría que se comporte f fuera del intervalo [–5, 5]? Justifique su respuesta.

11. ¿Para que $x > 0$ se cumple $x^{(x^x)} = (x^x)^x$? Justifique su respuesta.

T **12.** Grafique $f(x) = (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}$ en $[0, 3\pi]$. Explique lo que ve en la gráfica.

13. Determine $f'(2)$ si $f(x) = e^{g(x)}$ y $g(x) = \int_2^x \frac{t}{1+t^4}\,dt$.

14. a. Determine df/dx si

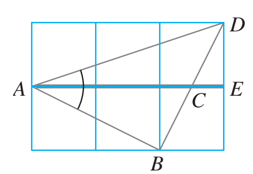
$$f(x) = \int_1^{e^x} \frac{2\ln t}{t}\,dt.$$

b. Encuentre $f(0)$.

c. ¿Qué puede concluir respecto de la gráfica de f? Justifique su respuesta.

15. La siguiente figura muestra una prueba informal de que

$$\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}.$$

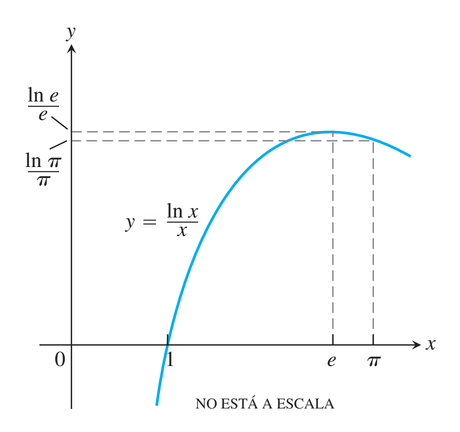


¿Cuál es el argumento? (*Fuente*: "Behold! Sums of Arctan", por Edward M. Harris. *College Mathematics Journal*, vol. 18, núm. 2, marzo de 1987, pág. 141).

16. $\pi^e < e^\pi$

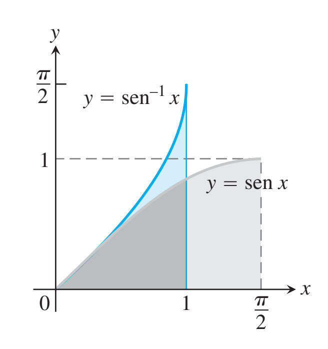
a. ¿Por qué la figura siguiente "demuestra" que $\pi^e < e^\pi$? (*Fuente:* "Proof Without Words", por Fouad Nakhil, *Mathematics Magazine*, vol. 60, núm. 3, junio de 1987, pág. 165),

b. La figura siguiente supone que $f(x) = (\ln x)/x$ tiene un valor máximo absoluto en $x = e$. ¿Cómo saber si esto es verdad?



17. Utilice la figura siguiente para demostrar que

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\, dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^1 \operatorname{sen}^{-1} x\, dx.$$

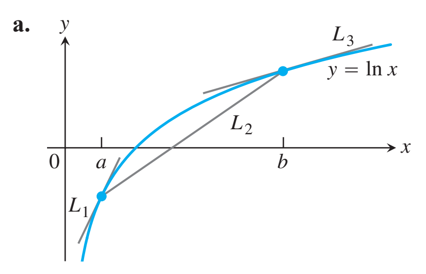


18. Desigualdad de Napier Éstas son dos pruebas gráficas de que

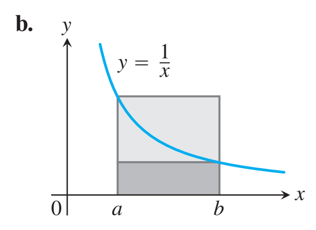
$$b > a > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{b} < \frac{\ln b - \ln a}{b - a} < \frac{1}{a}.$$

Explique cómo se desarrolla cada una de ellas.

a.



b.



(*Fuente:* Roger B. Nelson, *Collage Mathematics Journal*, vol. 24, núm. 2, marzo de 1993, pág. 165).

19. Descomposiciones par-impar

a. Suponga que g es una función par de x y h es una función impar de x. Demuestre que si $g(x) + h(x) = 0$ para toda x, entonces $g(x) = 0$ para toda x y $h(x) = 0$ para toda x.

b. Utilice el resultado del inciso (a) para demostrar que si $f(x) = f_P(x) + f_I(x)$ es la suma de una función par $f_P(x)$ y una función impar $f_I(x)$, entonces

$$f_E(x) = (f(x) + f(-x))/2 \text{ y } f_O(x) = (f(x) - f(-x))/2.$$

c. ¿Qué significa el resultado del inciso (b)?

20. Sea g una función diferenciable en todo intervalo abierto que contiene al origen. Suponga que g tiene las siguientes propiedades:

i. $g(x + y) = \dfrac{g(x) + g(y)}{1 - g(x)g(y)}$ para todos los números reales x, y y $x + y$ en el dominio de g.

ii. $\lim_{h \to 0} g(h) = 0$

iii. $\lim_{h \to 0} \dfrac{g(h)}{h} = 1$

a. Demuestre que $g(0) = 0$.

b. Demuestre que $g'(x) = 1 + [g(x)]^2$.

c. Determine $g(x)$ resolviendo la ecuación diferencial del inciso (b).

Aplicaciones

21. Centro de masa Halle el centro de masa de un placa delgada con densidad constante que cubre una región localizada en el primero y cuarto cuadrantes y está delimitada por las curvas $y = 1/(1 + x^2)$ y $y = -1/(1 + x^2)$ y por las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

22. Sólido de revolución La región que está entre la curva $y = 1/(2\sqrt{x})$ y el eje x, de $x = 1/4$ a $x = 4$, se gira sobre el eje x para generar un sólido.

a. Calcule el volumen del sólido.

b. Determine el centroide de la región.

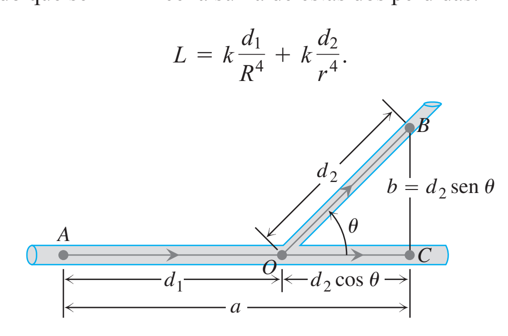
23. La regla del 70 Si utiliza la aproximación $\ln 2 \approx 0.70$ (en lugar de 0.69314…), puede deducir una regla práctica que dice: "Para estimar cuántos años tardará una suma de dinero en duplicarse cuando se invierte a r por ciento de interés compuesto continuo, divida r entre 70". Por ejemplo, una suma invertida a 5% se duplicará al cabo de unos $70/5 = 14$ años. Si desea que se duplique en 10 años, tendrá que invertir dicha suma a $70/10 = 7\%$. Demuestre cómo se deduce la regla del 70. ("La regla del 72" es similar, pero usa 72 en lugar de 70 porque 72 tiene más factores enteros).

24. Caída libre en el siglo XIV A mediados del siglo XIV, Alberto de Sajonia (1316-1390) propuso un modelo para la caída libre, en el cual suponía que la velocidad de un cuerpo que cae es proporcional a la distancia recorrida en la caída. Parecía razonable pensar que si un cuerpo había caído 20 pies, descendería al doble de velocidad que otro que había caído 10 pies. Además, ninguno de los instrumentos disponibles en aquella época era lo suficientemente preciso para probar lo contrario. Hoy podemos ver qué equivocado estaba el modelo de Alberto de Sajonia, si resolvemos el problema con valor inicial que está implícito en él. Resuelva el problema y compare gráficamente su solución con la ecuación $s = 16t^2$. Verá

que describe un movimiento que comienza demasiado lento, pero luego se vuelve tan rápido que deja de ser realista.

25. Los mejores ángulos para ramificaciones de vasos sanguíneos y tuberías Cuando un tubo se ramifica en otro más pequeño en un sistema de flujo, es posible que deseemos darle el ángulo más adecuado desde el punto de vista del ahorro de energía. Se podría requerir, por ejemplo, que la pérdida de energía a causa de la fricción se minimice en la sección AOB de la figura siguiente. En este diagrama, B es un punto dado al que debe tener acceso el tubo pequeño. A es un punto del tubo más grande, corriente arriba de B y O es el punto donde se localiza la ramificación. Una ley, debida a Poiseuille establece que, en un flujo no turbulento, la pérdida de energía a causa de la fricción es proporcional a la longitud del trayecto recorrido, e inversamente proporcional a la cuarta potencia del radio del tubo. Así, la pérdida a lo largo de AO es $(kd_1)/R^4$ y a lo largo de OB es $(kd_2)/r^4$, donde k es una constante, d_1 es la longitud de AO, d_2 es la longitud de OB, R es el radio del tubo grande y r es el radio del tubo pequeño. Es necesario elegir el ángulo θ de modo que se minimice la suma de estas dos pérdidas:

$$L = k\frac{d_1}{R^4} + k\frac{d_2}{r^4}.$$



En nuestro modelo hemos supuesto que $AC = a$ y $BC = b$ son longitudes fijas. De esta forma tenemos las relaciones

$$d_1 + d_2 \cos\theta = a \quad d_2 \operatorname{sen}\theta = b,$$

por lo cual

$$d_2 = b \csc\theta,$$
$$d_1 = a - d_2\cos\theta = a - b\cot\theta.$$

La pérdida total L se puede expresar como una función de θ:

$$L = k\left(\frac{a - b\cot\theta}{R^4} + \frac{b\csc\theta}{r^4}\right).$$

a. Demuestre que el valor crítico de θ para el que $dL/d\theta$ es igual a cero, es

$$\theta_c = \cos^{-1}\frac{r^4}{R^4}.$$

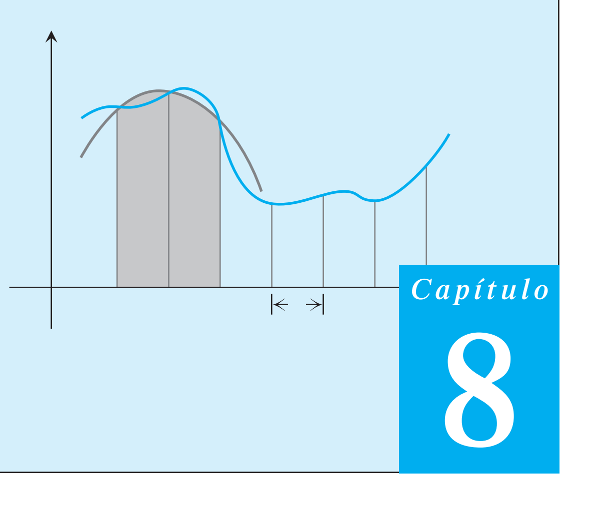
b. Si la razón entre los radios de los tubos es $r/R = 5/6$, estime el ángulo de ramificación óptimo descrito en el inciso (a), redondeando al grado más próximo.

El análisis matemático que hemos descrito se usa también para explicar los ángulos en que se ramifican las arterias en el cuerpo de un animal. (Vea *Introduction to Mathematics for Life Scientists,* segunda edición, por E. Batschelet [Nueva York: Springer-Verlag, 1976]).

T **26. Análisis de sangre por grupos** Durante la Segunda Guerra Mundial era necesario realizar análisis de sangre a grandes grupos de reclutas. Por lo general, se utilizan dos métodos para efectuar este tipo de análisis a N personas. Con el método 1, cada persona es analizada por separado. Con el método 2, las muestras de sangre de x personas se mezclan y se analizan como una sola muestra grande. Si el resultado obtenido es negativo, ese análisis será suficiente para todas las x personas. Si el análisis resulta positivo, se analizará por separado a cada una de las x personas, lo cual requerirá en total $x + 1$ análisis. Usando el segundo método y la teoría de probabilidades, se puede demostrar que, en promedio, el número total de análisis y será

$$y = N\left(1 - q^x + \frac{1}{x}\right).$$

Con $q = 0.99$ y $N = 1000$, determine el valor entero de x que minimiza y. Además determine el valor entero de x que maximiza y. (Este segundo resultado no es importante en la situación real). El método de los grupos se utilizó en la Segunda Guerra Mundial, con un ahorro de 80% en comparación con el método de análisis individuales, pero no con el valor de q dado.



Capítulo

8

TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

INTRODUCCIÓN El Teorema Fundamental relaciona las antiderivadas y la integral definida. Evaluar la integral indefinida

$$\int f(x)\,dx$$

es equivalente a determinar una función F tal que $F'(x) = f(x)$, y luego sumar una constante arbitraria C:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

En este capítulo estudiaremos varias técnicas importantes para determinar integrales indefinidas de funciones más complicadas que las que hemos visto hasta el momento. El objetivo de este capítulo es mostrar cómo cambiar integrales no conocidas por integrales que podamos reconocer, encontrar en una tabla o evaluar por medio de una computadora. Además se amplía la idea de la integral definida a *integrales impropias* para las que el integrando puede ser no acotado en el intervalo de integración, o el intervalo mismo ya no es finito.

8.1 Fórmulas básicas de integración

Para auxiliarnos en la determinación de integrales indefinidas, es útil construir una tabla de fórmulas de integrales invirtiendo las fórmulas para derivadas, como lo hemos hecho en los capítulos anteriores. Luego trataremos de hacer corresponder la integral con la que nos enfrentemos con una de los tipos estándar. Usualmente esto incluye cierta cantidad de manipulaciones algebraicas, así como el uso de la Regla de Sustitución.

Recuerde la regla de sustitución que se comentó en la sección 5.5:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

en donde $u = g(x)$ es una función diferenciable cuyo rango es un intervalo I y f es continua en I. El éxito de la integración suele depender de la habilidad que se tenga para reconocer qué parte del integrando debe llamarse u para que uno también tenga du, de modo que pueda aplicarse una fórmula conocida. Esto significa que el primer requisito para tener éxito en integración es un completo dominio de las fórmulas de derivación.

La tabla 8.1 muestra las formas básicas de integrales que hemos evaluado hasta ahora. En esta sección presentamos varios métodos algebraicos o de sustitución que nos ayudarán a utilizar esta tabla. Al final del libro se presenta una tabla más extensa; analizaremos su uso en la sección 8.6.

TABLA 8.1 Fórmulas básicas de integración

1. $\int du = u + C$

2. $\int k\,du = ku + C$ (cualquier número k)

3. $\int (du + dv) = \int du + \int dv$

4. $\int u^n\,du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$

5. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C$

6. $\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$

7. $\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$

8. $\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$

9. $\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$

10. $\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$

11. $\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$

12. $\int \tan u\,du = -\ln|\cos u| + C$
$= \ln|\sec u| + C$

13. $\int \cot u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$
$= -\ln|\csc u| + C$

14. $\int e^u\,du = e^u + C$

15. $\int a^u\,du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$

16. $\int \operatorname{senh} u\,du = \cosh u + C$

17. $\int \cosh u\,du = \operatorname{senh} u + C$

18. $\int \dfrac{du}{a^2 + u^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{u}{a}\right) + C$

19. $\int \dfrac{du}{a^2 + u^2} = \dfrac{1}{a}\tan^{-1}\left(\dfrac{u}{a}\right) + C$

20. $\int \dfrac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \dfrac{1}{a}\sec^{-1}\left|\dfrac{u}{a}\right| + C$

21. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \operatorname{senh}^{-1}\left(\dfrac{u}{a}\right) + C \quad (a > 0)$

22. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \cosh^{-1}\left(\dfrac{u}{a}\right) + C \quad (u > a > 0)$

Con frecuencia tenemos que reescribir una integral para que coincida con una fórmula estándar.

EJEMPLO 1 Simplificación por sustitución

Evaluar

$$\int \frac{2x - 9}{\sqrt{x^2 - 9x + 1}}\,dx.$$

Solución

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x-9}{\sqrt{x^2-9x+1}}\,dx &= \int \frac{du}{\sqrt{u}} && u = x^2 - 9x + 1,\ du = (2x-9)\,dx. \\
&= \int u^{-1/2}\,du \\
&= \frac{u^{(-1/2)+1}}{(-1/2)+1} + C && \text{Fórmula 4, de la tabla 8.1, con } n = -1/2 \\
&= 2u^{1/2} + C \\
&= 2\sqrt{x^2-9x+1} + C
\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 2 Completar el cuadrado

Evaluar

$$\int \frac{dx}{\sqrt{8x-x^2}}.$$

Solución Completamos el cuadrado para simplificar el denominador:

$$\begin{aligned}
8x - x^2 &= -(x^2 - 8x) = -(x^2 - 8x + 16 - 16) \\
&= -(x^2 - 8x + 16) + 16 = 16 - (x-4)^2.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{8x-x^2}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{16-(x-4)^2}} \\
&= \int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} && a = 4,\ u = (x-4),\ du = dx \\
&= \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C && \text{Fórmula 18 de la tabla 8.1} \\
&= \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x-4}{4}\right) + C.
\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 3 Desarrollo de una potencia y uso de una identidad trigonométrica

Evaluar

$$\int (\sec x + \tan x)^2\,dx.$$

Solución Desarrollamos el integrado y obtenemos

$$(\sec x + \tan x)^2 = \sec^2 x + 2\sec x \tan x + \tan^2 x.$$

Los primeros dos términos del lado derecho de esta ecuación son conocidos; podemos integrarlos de inmediato. Pero, ¿qué pasa con $\tan^2 x$? Hay una identidad que la relaciona con $\sec^2 x$:

$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x, \qquad \tan^2 x = \sec^2 x - 1.$$

Reemplazamos $\tan^2 x$ por $\sec^2 x - 1$ y obtenemos

$$\begin{aligned}\int (\sec x + \tan x)^2\,dx &= \int (\sec^2 x + 2\sec x\tan x + \sec^2 x - 1)\,dx \\ &= 2\int \sec^2 x\,dx + 2\int \sec x\tan x\,dx - \int 1\,dx \\ &= 2\tan x + 2\sec x - x + C.\end{aligned}$$

EJEMPLO 4 Eliminación de una raíz cuadrada

Evaluar

$$\int_0^{\pi/4} \sqrt{1+\cos 4x}\,dx.$$

Solución Utilizamos la identidad

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}, \qquad \text{o} \qquad 1+\cos 2\theta = 2\cos^2\theta.$$

Con $\theta = 2x$, esta identidad se transforma en

$$1+\cos 4x = 2\cos^2 2x.$$

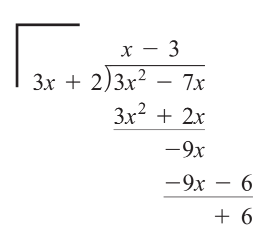
De aquí que,

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4}\sqrt{1+\cos 4x}\,dx &= \int_0^{\pi/4}\sqrt{2}\sqrt{\cos^2 2x}\,dx \\ &= \sqrt{2}\int_0^{\pi/4}|\cos 2x|\,dx && \sqrt{u^2} = |u| \\ &= \sqrt{2}\int_0^{\pi/4}\cos 2x\,dx && \text{En } [0, \pi/4], \cos 2x \geq 0, \text{ de modo que } |\cos 2x| = \cos 2x. \\ &= \sqrt{2}\left[\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\right]_0^{\pi/4} && \text{Fórmula 7, tabla 8.1, con } u = 2x \text{ y } du = 2\,dx \\ &= \sqrt{2}\left[\frac{1}{2} - 0\right] = \frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Reducción de una fracción impropia

Evaluar

$$\int \frac{3x^2 - 7x}{3x+2}\,dx.$$



Solución El integrando es una fracción impropia (el grado del numerador es mayor o igual al grado del denominador). Para integrarlo, primero dividimos, obteniendo un cociente más un residuo que es una fracción propia:

$$\frac{3x^2-7x}{3x+2} = x - 3 + \frac{6}{3x+2}.$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{3x^2-7x}{3x+2}\,dx = \int\left(x - 3 + \frac{6}{3x+2}\right)dx = \frac{x^2}{2} - 3x + 2\ln|3x+2| + C.$$

Reducir una fracción impropia por medio de la división de polinomios o, también llamada, división larga (ejemplo 5) no siempre lleva a una expresión que podamos integrar de manera directa. En la sección 8.5 veremos qué hacer al respecto.

EJEMPLO 6 Separación de una fracción

Evaluar

$$\int \frac{3x + 2}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx.$$

Solución Primero separamos el integrando para obtener

$$\int \frac{3x + 2}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = 3\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1 - x^2}} + 2\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

En la primera de estas nuevas integrales, sustituimos

$$u = 1 - x^2, \qquad du = -2x\, dx, \qquad \text{y} \qquad x\, dx = -\frac{1}{2}\, du.$$

$$\begin{aligned} 3\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1 - x^2}} &= 3\int \frac{(-1/2)\, du}{\sqrt{u}} = -\frac{3}{2}\int u^{-1/2}\, du \\ &= -\frac{3}{2} \cdot \frac{u^{1/2}}{1/2} + C_1 = -3\sqrt{1 - x^2} + C_1 \end{aligned}$$

La segunda de las integrales nuevas es una forma estándar,

$$2\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = 2 \operatorname{sen}^{-1} x + C_2.$$

Combinando estos resultados y renombrando a $C_1 + C_2$ como C se obtiene

$$\int \frac{3x + 2}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = -3\sqrt{1 - x^2} + 2 \operatorname{sen}^{-1} x + C.$$ ■

En el último ejemplo de esta sección calcularemos una integral importante por medio de la técnica algebraica de multiplicar el integrando por una forma de 1 para cambiar el integrando por otro que podamos integrar.

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

George David Birkhoff (1884-1944)

EJEMPLO 7 Integral de $y = \sec x$, multiplicando por una forma de 1

Evaluar

$$\int \sec x\, dx.$$

Solución

$$\begin{aligned} \int \sec x\, dx &= \int (\sec x)(1)\, dx = \int \sec x \cdot \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}\, dx \\ &= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}\, dx \\ &= \int \frac{du}{u} \qquad u = \tan x + \sec x, \; du = (\sec^2 x + \sec x \tan x)\, dx \\ &= \ln |u| + C = \ln |\sec x + \tan x| + C. \end{aligned}$$ ■

El método del ejemplo 7, con cosecantes y cotangentes en lugar de secantes y tangentes, lleva a una fórmula paralela para la integral de la cosecante (vea el ejercicio 95).

TABLA 8.2 Integrales de la secante y la cosecante

1. $\int \sec u\, du = \ln |\sec u + \tan u| + C$

2. $\int \csc u\, du = -\ln |\csc u + \cot u| + C$

Procedimientos para hacer coincidir integrales con fórmulas básicas

PROCEDIMIENTO	EJEMPLO
Sustituir para simplificar	$\dfrac{2x - 9}{\sqrt{x^2 - 9x + 1}}\, dx = \dfrac{du}{\sqrt{u}}$
Completar el cuadrado	$\sqrt{8x - x^2} = \sqrt{16 - (x - 4)^2}$
Usar una identidad trigonométrica	$(\sec x + \tan x)^2 = \sec^2 x + 2 \sec x \tan x + \tan^2 x$ $= \sec^2 x + 2 \sec x \tan x + (\sec^2 x - 1)$ $= 2 \sec^2 x + 2 \sec x \tan x - 1$
Eliminar una raíz cuadrada	$\sqrt{1 + \cos 4x} = \sqrt{2 \cos^2 2x} = \sqrt{2}\, \lvert\cos 2x\rvert$
Reducir una fracción impropia	$\dfrac{3x^2 - 7x}{3x + 2} = x - 3 + \dfrac{6}{3x + 2}$
Separar una fracción	$\dfrac{3x + 2}{\sqrt{1 - x^2}} = \dfrac{3x}{\sqrt{1 - x^2}} + \dfrac{2}{\sqrt{1 - x^2}}$
Multiplicar por una forma de 1	$\sec x = \sec x \cdot \dfrac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}$ $= \dfrac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}$

EJERCICIOS 8.1

Sustituciones básicas

En los ejercicios 1 a 36, evalúe cada integral por medio de sustitución para reducirla a una forma estándar.

1. $\int \dfrac{16x\, dx}{\sqrt{8x^2 + 1}}$

2. $\int \dfrac{3 \cos x\, dx}{\sqrt{1 + 3 \operatorname{sen} x}}$

3. $\int 3\sqrt{\operatorname{sen} v} \cos v\, dv$

4. $\int \cot^3 y \csc^2 y\, dy$

5. $\int_0^1 \dfrac{16x\, dx}{8x^2 + 2}$

6. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \dfrac{\sec^2 z}{\tan z}\, dz$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$

8. $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}}$

9. $\int \cot(3-7x)\,dx$

10. $\int \csc(\pi x-1)\,dx$

11. $\int e^{\theta}\csc(e^{\theta}+1)\,d\theta$

12. $\int \frac{\cot(3+\ln x)}{x}\,dx$

13. $\int \sec\frac{t}{3}\,dt$

14. $\int x\sec(x^2-5)\,dx$

15. $\int \csc(s-\pi)\,ds$

16. $\int \frac{1}{\theta^2}\csc\frac{1}{\theta}\,d\theta$

17. $\int_0^{\sqrt{\ln 2}} 2x\,e^{x^2}\,dx$

18. $\int_{\pi/2}^{\pi}(\operatorname{sen} y)e^{\cos y}\,dy$

19. $\int e^{\tan v}\sec^2 v\,dv$

20. $\int \frac{e^{\sqrt{t}}\,dt}{\sqrt{t}}$

21. $\int 3^{x+1}\,dx$

22. $\int \frac{2^{\ln x}}{x}\,dx$

23. $\int \frac{2^{\sqrt{w}}\,dw}{2\sqrt{w}}$

24. $\int 10^{2\theta}\,d\theta$

25. $\int \frac{9\,du}{1+9u^2}$

26. $\int \frac{4\,dx}{1+(2x+1)^2}$

27. $\int_0^{1/6} \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$

28. $\int_0^{1} \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}}$

29. $\int \frac{2s\,ds}{\sqrt{1-s^4}}$

30. $\int \frac{2\,dx}{x\sqrt{1-4\ln^2 x}}$

31. $\int \frac{6\,dx}{x\sqrt{25x^2-1}}$

32. $\int \frac{dr}{r\sqrt{r^2-9}}$

33. $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

34. $\int \frac{dy}{\sqrt{e^{2y}-1}}$

35. $\int_1^{e^{\pi/3}} \frac{dx}{x\cos(\ln x)}$

36. $\int \frac{\ln x\,dx}{x+4x\ln^2 x}$

Completar el cuadrado

En los ejercicios 37 a 42, evalúe cada integral completando el cuadrado y utilizando una sustitución para reducirla a una forma estándar.

37. $\int_1^{2} \frac{8\,dx}{x^2-2x+2}$

38. $\int_2^{4} \frac{2\,dx}{x^2-6x+10}$

39. $\int \frac{dt}{\sqrt{-t^2+4t-3}}$

40. $\int \frac{d\theta}{\sqrt{2\theta-\theta^2}}$

41. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}$

42. $\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2-4x+3}}$

Identidades trigonométricas

En los ejercicios 43 a 46, evalúe cada integral por medio de identidades trigonométricas y sustituciones para reducirla a una forma estándar.

43. $\int (\sec x+\cot x)^2\,dx$

44. $\int (\csc x-\tan x)^2\,dx$

45. $\int \csc x\operatorname{sen} 3x\,dx$

46. $\int (\operatorname{sen} 3x\cos 2x-\cos 3x\operatorname{sen} 2x)\,dx$

Fracciones impropias

Evalúe cada integral en los ejercicios 47 a 52, reduciendo la fracción impropia y utilizando una sustitución (de ser necesario) para reducirla a una forma estándar.

47. $\int \frac{x}{x+1}\,dx$

48. $\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$

49. $\int_{\sqrt{2}}^{3} \frac{2x^3}{x^2-1}\,dx$

50. $\int_{-1}^{3} \frac{4x^2-7}{2x+3}\,dx$

51. $\int \frac{4t^3-t^2+16t}{t^2+4}\,dt$

52. $\int \frac{2\theta^3-7\theta^2+7\theta}{2\theta-5}\,d\theta$

Separación de fracciones

Evalúe cada integral en los ejercicios 53 a 56, separando la fracción y utilizando una sustitución (de ser necesario) para reducirla a una forma estándar.

53. $\int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

54. $\int \frac{x+2\sqrt{x-1}}{2x\sqrt{x-1}}\,dx$

55. $\int_0^{\pi/4} \frac{1+\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\,dx$

56. $\int_0^{1/2} \frac{2-8x}{1+4x^2}\,dx$

Multiplicación por una forma de 1

Evalúe cada integral en los ejercicios 57 a 62, por medio de la multiplicación de una forma de 1 y utilizando una sustitución (de ser necesario) para reducirla a una forma estándar.

57. $\int \frac{1}{1+\operatorname{sen} x}\,dx$

58. $\int \frac{1}{1+\cos x}\,dx$

59. $\int \frac{1}{\sec\theta+\tan\theta}\,d\theta$

60. $\int \frac{1}{\csc\theta+\cot\theta}\,d\theta$

61. $\int \frac{1}{1-\sec x}\,dx$

62. $\int \frac{1}{1-\csc x}\,dx$

Eliminación de raíces cuadradas

Evalúe cada integral en los ejercicios 63 a 70, por medio de la eliminación de la raíz cuadrada.

63. $\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}\,dx$

64. $\int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,dx$

65. $\int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{1 + \cos 2t}\, dt$

66. $\int_{-\pi}^{0} \sqrt{1 + \cos t}\, dt$

67. $\int_{-\pi}^{0} \sqrt{1 - \cos^2 \theta}\, d\theta$

68. $\int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \theta}\, d\theta$

69. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{1 + \tan^2 y}\, dy$

70. $\int_{-\pi/4}^{0} \sqrt{\sec^2 y - 1}\, dy$

Miscelánea de integrales

Evalúe cada integral en los ejercicios 71 a 82, usando la técnica que considere apropiada.

71. $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} (\csc x - \cot x)^2\, dx$

72. $\int_{0}^{\pi/4} (\sec x + 4 \cos x)^2\, dx$

73. $\int \cos \theta \csc (\operatorname{sen} \theta)\, d\theta$

74. $\int \left(1 + \frac{1}{x}\right) \cot (x + \ln x)\, dx$

75. $\int (\csc x - \sec x)(\operatorname{sen} x + \cos x)\, dx$

76. $\int 3 \operatorname{senh} \left(\frac{x}{2} + \ln 5\right) dx$

77. $\int \frac{6\, dy}{\sqrt{y}(1 + y)}$

78. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2 - 1}}$

79. $\int \frac{7\, dx}{(x - 1)\sqrt{x^2 - 2x - 48}}$

80. $\int \frac{dx}{(2x + 1)\sqrt{4x^2 + 4x}}$

81. $\int \sec^2 t \tan (\tan t)\, dt$

82. $\int \frac{dx}{x\sqrt{3 + x^2}}$

Potencias trigonométricas

83. **a.** Evalúe $\int \cos^3 \theta\, d\theta$. (*Sugerencia:* $\cos^2 \theta = 1 - \operatorname{sen}^2 \theta$).

b. Evalúe $\int \cos^5 \theta\, d\theta$.

c. Sin evaluar realmente la integral, explique cómo evaluaría $\int \cos^9 \theta\, d\theta$.

84. **a.** Evalúe $\int \operatorname{sen}^3 \theta\, d\theta$. (*Sugerencia:* $\operatorname{sen}^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$).

b. Evalúe $\int \operatorname{sen}^5 \theta\, d\theta$.

c. Evalúe $\int \operatorname{sen}^7 \theta\, d\theta$.

d. Sin evaluar realmente la integral, explique cómo evaluaría $\int \operatorname{sen}^{13} \theta\, d\theta$.

85. **a.** Exprese $\int \tan^3 \theta\, d\theta$ en términos de $\int \tan \theta\, d\theta$. Después evalúe $\int \tan^3 \theta\, d\theta$. (*Sugerencia:* $\tan^2 \theta = \sec^2 \theta - 1$).

b. Exprese $\int \tan^5 \theta\, d\theta$ en términos de $\int \tan^3 \theta\, d\theta$.

c. Exprese $\int \tan^7 \theta\, d\theta$ en términos de $\int \tan^5 \theta\, d\theta$.

d. Exprese $\int \tan^{2k+1} \theta\, d\theta$, donde k es un entero positivo, en términos de $\int \tan^{2k-1} \theta\, d\theta$.

86. **a.** Exprese $\int \cot^3 \theta\, d\theta$ en términos de $\int \cot \theta\, d\theta$. Luego evalúe $\int \cot^3 \theta\, d\theta$. (*Sugerencia:* $\cot^2 \theta = \csc^2 \theta - 1$).

b. Exprese $\int \cot^5 \theta\, d\theta$ en términos de $\int \cot^3 \theta\, d\theta$.

c. Exprese $\int \cot^7 \theta\, d\theta$ en términos de $\int \cot^5 \theta\, d\theta$.

d. Exprese $\int \cot^{2k+1} \theta\, d\theta$, en donde k es un entero positivo, en términos de $\int \cot^{2k-1} \theta\, d\theta$.

Teoría y ejemplos

87. Área Determine el área de la región acotada por arriba por $y = 2 \cos x$, y por abajo por $y = \sec x$, $-\pi/4 \le x \le \pi/4$.

88. Área Determine el área de la región "triangular" que está acotada por arriba y por abajo por las curvas $y = \csc x$ y $y = \operatorname{sen} x$, $\pi/6 \le x \le \pi/2$, y a la izquierda por la recta $x = \pi/6$.

89. Volumen Determine el volumen del sólido generado al hacer girar, alrededor del eje x, la región del ejercicio 87.

90. Volumen Determine el volumen del sólido generado al hacer girar, alrededor del eje x, la región del ejercicio 88.

91. Longitud de arco Determine la longitud de la curva $y = \ln (\cos x)$, $0 \le x \le \pi/3$.

92. Longitud de arco Determine la longitud de la curva $y = \ln (\sec x)$, $0 \le x \le \pi/4$.

93. Centroide Determine el centroide de la región acotada por el eje x, la curva $y = \sec x$ y las rectas $x = -\pi/4$, $x = \pi/4$.

94. Centroide Determine el centroide de la región acotada por el eje x, la curva $y = \csc x$ y las rectas $x = \pi/6$, $x = 5\pi/6$.

95. La integral de csc *x* Repita, por medio de cofunciones, la deducción del ejemplo 7 para demostrar que

$$\int \csc x\, dx = -\ln |\csc x + \cot x| + C.$$

96. Uso de sustituciones diferentes Demuestre que la integral

$$\int ((x^2 - 1)(x + 1))^{-2/3}\, dx$$

puede evaluarse con cualquiera de las sustituciones siguientes.

a. $u = 1/(x + 1)$

b. $u = ((x - 1)/(x + 1))^k$ para $k = 1, 1/2, 1/3, -1/3, -2/3$, y -1

c. $u = \tan^{-1} x$

d. $u = \tan^{-1} \sqrt{x}$

e. $u = \tan^{-1} ((x - 1)/2)$

f. $u = \cos^{-1} x$

g. $u = \cosh^{-1} x$

¿Cuál es el valor de la integral? (*Fuente:* "Problems and Solutions", *College Mathematics Journal*, volumen 21, número 5, noviembre de 1990, páginas 425-426).

8.2 Integración por partes

Como

$$\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C$$

y

$$\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C,$$

es claro que

$$\int x \cdot x\,dx \neq \int x\,dx \cdot \int x\,dx.$$

En otras palabras, la integral de un producto en general *no* es el producto de las integrales:

$$\int f(x)g(x)\,dx \quad \text{no es igual a} \quad \int f(x)\,dx \cdot \int g(x)\,dx.$$

La integración por partes es una técnica para simplificar integrales de la forma

$$\int f(x)g(x)\,dx.$$

Esto es útil cuando f puede diferenciarse repetidamente y g puede integrarse repetidamente sin dificultad. La integral

$$\int xe^x\,dx$$

es un ejemplo de lo anterior, ya que $f(x) = x$ puede diferenciarse dos veces para convertirse en cero, y $g(x) = e^x$ puede integrarse de manera repetida sin dificultad. La integración por partes también se aplica a integrales como

$$\int e^x \operatorname{sen} x\,dx$$

en las que cada parte del integrando vuelve a aparecer después de diferenciaciones e integraciones sucesivas.

En esta sección describiremos la integración por partes y mostraremos cómo aplicarla.

Regla del producto en forma de integral

Si f y g son funciones diferenciables de x, la regla del producto establece que

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

En términos de integrales indefinidas, esta ecuación se transforma en

$$\int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)]\,dx = \int [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]\,dx$$

o

$$\int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)]\,dx = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx.$$

Reacomodando los términos de esta última ecuación, obtenemos

$$\int f(x)g'(x)\,dx = \int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)]\,dx - \int f'(x)g(x)\,dx$$

lo que nos lleva a la fórmula de **integración por partes**

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx \qquad (1)$$

En ocasiones es más fácil recordar la fórmula si la escribimos en forma diferencial. Sea $u = f(x)$ y $v = g(x)$. Entonces $du = f'(x)\,dx$ y $dv = g'(x)\,dx$. Utilizando la regla de sustitución, la fórmula de integración por partes se transforma en

Fórmula de integración por partes

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \qquad (2)$$

Esta fórmula expresa una integral, $\int u\,dv$, en términos de una segunda integral, $\int v\,du$. Con una elección adecuada de u y v, la segunda integral podría ser más fácil de evaluar que la primera. Para utilizar la fórmula, puede haber varias elecciones posibles para u y dv. Los siguientes ejemplos ilustran la técnica.

EJEMPLO 1 Integración por partes

Entonces

$$\int x \cos x\,dx.$$

Solución Utilizamos la fórmula $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ con

$$u = x, \qquad dv = \cos x\,dx,$$
$$du = dx, \qquad v = \operatorname{sen} x.$$

La antiderivada más sencilla de $\cos x$

Entonces

$$\int x \cos x\,dx = x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\,dx = x \operatorname{sen} x + \cos x + C.$$

■

Examinemos las opciones disponibles para u y dv en el ejemplo 1.

EJEMPLO 2 Revisión del ejemplo 1

Para aplicar integración por partes a

$$\int x \cos x\,dx = \int u\,dv$$

tenemos cuatro posibles opciones:

1. Hacer $u = 1$ y $dv = x\cos x\,dx$.

2. Hacer $u = x$ y $dv = \cos x\,dx$.

3. Hacer $u = x\cos x$ y $dv = dx$.

4. Hacer $u = \cos x$ y $dv = x\,dx$.

Examinemos cada una de ellas.

La opción 1 no es conveniente, porque desconocemos cómo integrar $dv = x\cos x\,dx$ para obtener v.

La opción 2 funciona bien, como vimos en el ejemplo 1.

La opción 3 nos lleva a

$$\begin{aligned} u &= x\cos x, & dv &= dx, \\ du &= (\cos x - x\operatorname{sen} x)\,dx, & v &= x, \end{aligned}$$

y a la nueva integral

$$\int v\,du = \int (x\cos x - x^2\operatorname{sen} x)\,dx.$$

Ésta integral es peor que la integral con la que iniciamos.

La opción 4 nos lleva a

$$\begin{aligned} u &= \cos x, & dv &= x\,dx, \\ du &= -\operatorname{sen} x\,dx, & v &= x^2/2, \end{aligned}$$

por lo que la nueva integral es

$$\int v\,du = -\int \frac{x^2}{2}\operatorname{sen} x\,dx.$$

que también es una peor integral. ■

El objetivo de la integración por partes es pasar de una integral $\int u\,dv$, que no sabemos cómo evaluar, a una integral $\int v\,du$, que sí podamos evaluar. Por lo general, elija primero que dv sea tan semejante como sea posible al integrando, incluyendo a dx, de manera que la integración sea más sencilla; u es la parte restante. Tenga en cuenta que la integración por partes no siempre funciona.

EJEMPLO 3 Integral del logaritmo natural

Determine

$$\int \ln x\,dx.$$

Solución Como $\int \ln x\,dx$ puede escribirse como $\int \ln x \cdot 1\,dx$, utilizamos la fórmula $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ con

$u = \ln x$ Se simplifica cuando se deriva

$dv = dx$ Fácil de integrar

$du = \frac{1}{x}\,dx,$

$v = x.$ La antiderivada más sencilla

Entonces

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$$ ■

A veces, tenemos que utilizar la integración por partes más de una vez.

EJEMPLO 4 Uso repetido de la integración por partes

Evaluar

$$\int x^2 e^x \, dx.$$

Solución Con $u = x^2$, $dv = e^x\,dx$, $du = 2x\,dx$, y $v = e^x$, tenemos

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2\int x e^x \, dx.$$

La nueva integral es menos complicada que la original, ya que el exponente de x se redujo en 1. Para evaluar la integral de la derecha, nuevamente integramos por partes con $u = x$, $dv = e^x\,dx$. Entonces $du = dx$, $v = e^x$, y

$$\int xe^x \, dx = xe^x - \int e^x \, dx = xe^x - e^x + C.$$

De aquí que,

$$\begin{aligned}\int x^2 e^x \, dx &= x^2 e^x - 2\int xe^x \, dx \\ &= x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C.\end{aligned}$$

■

La técnica del ejemplo 4 funciona para cualquier integral $\int x^n e^x \, dx$ en la que n es un entero positivo, ya que al diferenciar x^n se llegará, tarde o temprano, a cero, y la integración de e^x es sencilla. Más adelante en esta sección hablaremos de esto con más detalle, cuando analicemos la *integración tabular*.

Integrales como la del ejemplo siguiente aparecen en ingeniería eléctrica. Su evaluación requiere dos integraciones por partes, seguidas por un despeje de la integral desconocida.

EJEMPLO 5 Despejar una integral desconocida

Evaluar

$$\int e^x \cos x \, dx.$$

Solución Sean $u = e^x$ y $dv = \cos x\,dx$. Entonces $du = e^x\,dx$, $v = \operatorname{sen} x$, y

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x \, dx.$$

La segunda integral es como la primera, salvo que tiene sen x en lugar de cos x. Para evaluarla, utilizamos integración por partes con

$$u = e^x, \qquad dv = \operatorname{sen} x \, dx, \qquad v = -\cos x, \qquad du = e^x \, dx.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\int e^x \cos x \, dx &= e^x \operatorname{sen} x - \left(-e^x \cos x - \int (-\cos x)(e^x \, dx)\right) \\ &= e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x - \int e^x \cos x \, dx.\end{aligned}$$

Ahora la integral desconocida aparece en ambos lados de la ecuación. Sumando la integral a ambos lados y agregando la constante de integración se obtiene

$$2\int e^x \cos x\,dx = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x + C_1.$$

Dividiendo entre 2 y renombrando la constante de integración se obtiene

$$\int e^x \cos x\,dx = \frac{e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x}{2} + C.$$

■

Integración por partes para integrales definidas

La fórmula de integración por partes de la ecuación (1) puede combinarse con la parte 2 del Teorema Fundamental para evaluar por partes integrales definidas. Suponiendo que f' y g' son continuas en el intervalo $[a, b]$, la parte 2 del Teorema Fundamental da

Fórmula de integración por partes para integrales definidas

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx \qquad (3)$$

Al aplicar la ecuación (3), por lo regular utilizamos la notación u y v de la ecuación (2), ya que es más fácil de recordar. A continuación se da un ejemplo de ello.

EJEMPLO 6 Determinación del área

Determinar el área de la región acotada por la curva $y = xe^{-x}$ y el eje x, de $x = 0$ a $x = 4$.

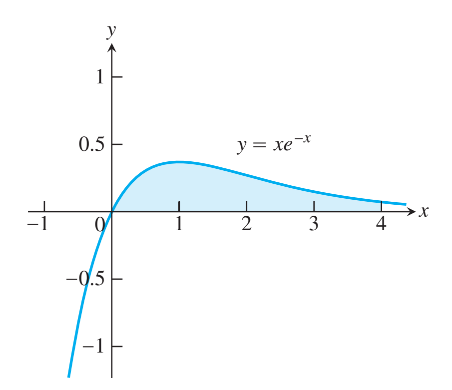


FIGURA 8.1 La región del ejemplo 6.

Solución La región aparece sombreada en la figura 8.1. Su área es

$$\int_0^4 xe^{-x}\,dx.$$

Sea $u = x$, $dv = e^{-x}\,dx$, $v = -e^{-x}$ y $du = dx$. Entonces,

$$\begin{aligned}\int_0^4 xe^{-x}\,dx &= -xe^{-x}\Big]_0^4 - \int_0^4 (-e^{-x})\,dx \\ &= [-4e^{-4} - (0)] + \int_0^4 e^{-x}\,dx \\ &= -4e^{-4} - e^{-x}\Big]_0^4 \\ &= -4e^{-4} - e^{-4} - (-e^0) = 1 - 5e^{-4} \approx 0.91.\end{aligned}$$

■

Integración tabular

Hemos visto que las integrales de la forma $\int f(x)g(x)\,dx$, en las que f puede diferenciarse de forma repetida hasta volverse cero y g puede integrarse varias veces sin dificultad, son candidatas naturales para integrarse por partes. Sin embargo, si se requieren muchas repeticiones, los cálculos pueden volverse pesados. En situaciones como ésta, existe una mane-

ra de organizar los cálculos para ahorrar una gran cantidad de trabajo. Se denomina **integración tabular** y se ilustra en los ejemplos siguientes.

EJEMPLO 7 Uso de integración tabular

Evaluar

$$\int x^2 e^x \, dx.$$

Solución Con $f(x) = x^2$ y $g(x) = e^x$, listamos:

$f(x)$ y sus derivadas		$g(x)$ y sus integrales
x^2	$(+)$	e^x
$2x$	$(-)$	e^x
2	$(+)$	e^x
0		e^x

Combinamos los productos de las funciones conectadas por las flechas de acuerdo con los signos de operación que están arriba de las flechas, para obtener

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C.$$

Compare esto con el resultado del ejemplo 4. ■

EJEMPLO 8 Uso de integración tabular

Evaluar

$$\int x^3 \operatorname{sen} x \, dx.$$

Solución Con $f(x) = x^3$ y $g(x) = \operatorname{sen} x$, listamos:

$f(x)$ y sus derivadas		$g(x)$ y sus integrales
x^3	$(+)$	$\operatorname{sen} x$
$3x^2$	$(-)$	$-\cos x$
$6x$	$(+)$	$-\operatorname{sen} x$
6	$(-)$	$\cos x$
0		$\operatorname{sen} x$

Nuevamente combinamos los productos de las funciones conectadas por las flechas de acuerdo con los signos de operación que están arriba de las flechas, para obtener

$$\int x^3 \operatorname{sen} x \, dx = -x^3 \cos x + 3x^2 \operatorname{sen} x + 6x \cos x - 6 \operatorname{sen} x + C.$$ ■

Los ejercicios adicionales, al final de este capítulo, muestran cómo la integración tabular puede utilizarse cuando ninguna de las dos funciones, f y g, puede diferenciarse de manera repetida hasta hacerse cero.

Resumen

Cuando no funciona la sustitución, intente integración por partes. Inicie con una integral en la que el integrando sea el producto de dos funciones,

$$\int f(x)g(x)\,dx.$$

(Recuerde que g puede ser la función constante 1, como en el ejemplo 3). Haga coincidir la integral con la forma

$$\int u\,dv$$

eligiendo dv como la parte del integrando que incluye a dx y a $f(x)$ o $g(x)$. Recuerde que debe ser capaz de integrar con facilidad dv para obtener v, y así obtener el lado derecho de la fórmula

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Si la nueva integral, en el lado derecho, es más complicada que la original, intente una elección diferente para u y dv.

EJEMPLO 9 Una fórmula de reducción

Obtenga una fórmula de "reducción" que exprese la integral

$$\int \cos^n x\,dx$$

en términos de una integral de una potencia menor de $\cos x$.

Solución Podemos considerar a $\cos^n x$ como $\cos^{n-1} x \cdot \cos x$. Entonces hacemos

$$u = \cos^{n-1} x \qquad \text{y} \qquad dv = \cos x\,dx,$$

de modo que

$$du = (n-1)\cos^{n-2} x\,(-\operatorname{sen} x\,dx) \qquad \text{y} \qquad v = \operatorname{sen} x.$$

De aquí que

$$\begin{aligned}\int \cos^n x\,dx &= \cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + (n-1)\int \operatorname{sen}^2 x \cos^{n-2} x\,dx \\ &= \cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + (n-1)\int (1-\cos^2 x)\cos^{n-2} x\,dx, \\ &= \cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + (n-1)\int \cos^{n-2} x\,dx - (n-1)\int \cos^n x\,dx.\end{aligned}$$

Si sumamos

$$(n-1)\int \cos^n x\,dx$$

a ambos lados de esta ecuación, obtenemos

$$n\int \cos^n x\, dx = \cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + (n-1)\int \cos^{n-2} x\, dx.$$

Después dividimos todo entre n, y el resultado final es

$$\int \cos^n x\, dx = \frac{\cos^{n-1} x \operatorname{sen} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\, dx.$$

Esto nos permite reducir el exponente del $\cos x$ en 2, de manera que esta fórmula resulta muy útil. Cuando n es un entero positivo, podemos aplicar la fórmula de manera repetida hasta que la integral que queda sea

$$\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C \qquad \text{o} \qquad \int \cos^0 x\, dx = \int dx = x + C.$$ ■

EJEMPLO 10 Uso de una fórmula de reducción

Evaluar

$$\int \cos^3 x\, dx.$$

Solución Con base en el resultado del ejemplo 9,

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x\, dx &= \frac{\cos^2 x \operatorname{sen} x}{3} + \frac{2}{3}\int \cos x\, dx \\ &= \frac{1}{3}\cos^2 x \operatorname{sen} x + \frac{2}{3}\operatorname{sen} x + C.\end{aligned}$$ ■

EJERCICIOS 8.2

Integración por partes

Evalúe las integrales de los ejercicios 1 a 24.

1. $\int x \operatorname{sen} \frac{x}{2}\, dx$
2. $\int \theta \cos \pi\theta\, d\theta$
3. $\int t^2 \cos t\, dt$
4. $\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx$
5. $\int_1^2 x \ln x\, dx$
6. $\int_1^e x^3 \ln x\, dx$
7. $\int \tan^{-1} y\, dy$
8. $\int \operatorname{sen}^{-1} y\, dy$
9. $\int x \sec^2 x\, dx$
10. $\int 4x \sec^2 2x\, dx$
11. $\int x^3 e^x\, dx$
12. $\int p^4 e^{-p}\, dp$
13. $\int (x^2 - 5x)e^x\, dx$
14. $\int (r^2 + r + 1)e^r\, dr$
15. $\int x^5 e^x\, dx$
16. $\int t^2 e^{4t}\, dt$
17. $\int_0^{\pi/2} \theta^2 \operatorname{sen} 2\theta\, d\theta$
18. $\int_0^{\pi/2} x^3 \cos 2x\, dx$
19. $\int_{2/\sqrt{3}}^2 t \sec^{-1} t\, dt$
20. $\int_0^{1/\sqrt{2}} 2x \operatorname{sen}^{-1}(x^2)\, dx$
21. $\int e^\theta \operatorname{sen} \theta\, d\theta$
22. $\int e^{-y} \cos y\, dy$
23. $\int e^{2x} \cos 3x\, dx$
24. $\int e^{-2x} \operatorname{sen} 2x\, dx$

Sustitución e integración por partes

Evalúe las integrales en los ejercicios 25 a 30, usando una sustitución antes de la integración por partes.

25. $\int e^{\sqrt{3s+9}}\, ds$

26. $\int_0^1 x\sqrt{1-x}\, dx$

27. $\int_0^{\pi/3} x \tan^2 x\, dx$

28. $\int \ln(x + x^2)\, dx$

29. $\int \operatorname{sen}(\ln x)\, dx$

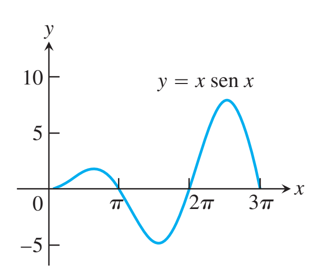
30. $\int z(\ln z)^2\, dz$

Teoría y ejemplos

31. Cálculo de un área Determine el área de la región acotada por la curva $y = x \operatorname{sen} x$ y el eje x (vea la figura siguiente) para

a. $0 \le x \le \pi$ **b.** $\pi \le x \le 2\pi$ **c.** $2\pi \le x \le 3\pi$.

d. ¿Ve algún patrón? ¿Cuál es el área entre la curva y el eje x para $n\pi \le x \le (n+1)\pi$, n es un entero no negativo arbitrario? Justifique su respuesta.



32. Cálculo de un área Determine el área de la región acotada por la curva $y = x \cos x$ y el eje x (vea la figura siguiente) para

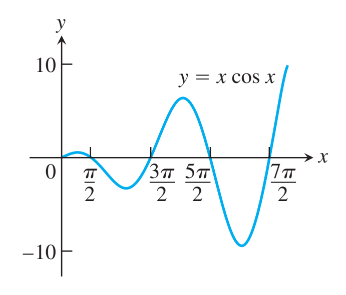
a. $\pi/2 \le x \le 3\pi/2$ **b.** $3\pi/2 \le x \le 5\pi/2$

c. $5\pi/2 \le x \le 7\pi/2$.

d. ¿Ve algún patrón? ¿Cuál es el área entre la curva y el eje x para

$$\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi \le x \le \left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi,$$

n es un entero positivo arbitrario? Justifique su respuesta.



33. Cálculo de un volumen Determine el volumen del sólido generado al hacer girar, alrededor del eje x, la región en el primer cuadrante acotada por los ejes coordenados, la curva $y = e^x$ y la recta $x = \ln 2$ alrededor de la recta $x = \ln 2$.

34. Cálculo de un volumen Determine el volumen del sólido generado al hacer girar la región en el primer cuadrante acotada por los ejes coordenados, la curva $y = e^{-x}$, y la recta $x = 1$, alrededor

a. del eje y. **b.** de la recta $x = 1$.

35. Cálculo de un volumen Determine el volumen del sólido generado al hacer girar la región en el primer cuadrante acotada por los ejes coordenados, la curva $y = \cos x$, $0 \le x \le \pi/2$, alrededor

a. del eje y. **b.** de la recta $x = \pi/2$.

36. Cálculo de un volumen Determine el volumen del sólido generado al hacer girar la región acotada por el eje x y la curva $y = x \operatorname{sen} x$, $0 \le x \le \pi$, alrededor

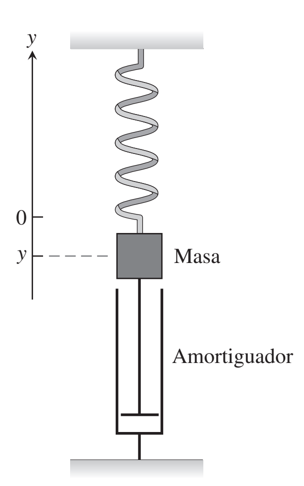
a. del eje y. **b.** de la recta $x = \pi$.

(Vea la gráfica del ejercicio 31).

37. Valor promedio Una fuerza de retardo, simbolizada en la figura por el amortiguador, reduce el movimiento de un resorte al que se ha aplicado un peso, de modo que la posición de la masa en el instante t es

$$y = 2e^{-t}\cos t, \qquad t \ge 0.$$

Determine el valor promedio de y en el intervalo $0 \le t \le 2\pi$.



38. Valor promedio En un sistema masa-resorte-amortiguador como el del ejercicio 37, la posición de la masa en el instante t es

$$y = 4e^{-t}(\operatorname{sen} t - \cos t), \qquad t \ge 0.$$

Determine el valor promedio de y en el intervalo $0 \le t \le 2\pi$.

Fórmulas de reducción

En los ejercicios 39 a 42, utilice integración por partes para establecer la *fórmula de reducción*.

39. $\int x^n \cos x\, dx = x^n \operatorname{sen} x - n \int x^{n-1} \operatorname{sen} x\, dx$

40. $\int x^n \operatorname{sen} x\, dx = -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x\, dx$

41. $\int x^n e^{ax}\, dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax}\, dx, \quad a \neq 0$

42. $\int (\ln x)^n\, dx = x(\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1}\, dx$

Integración de funciones inversas

La integración por partes conduce a una regla para la integración de inversas que, por lo regular, proporciona buenos resultados:

$$\int f^{-1}(x)\, dx = \int y f'(y)\, dy \qquad \begin{array}{l} y = f^{-1}(x), \quad x = f(y) \\ dx = f'(y)\, dy \end{array}$$

$$= yf(y) - \int f(y)\, dy \qquad \text{Integración por partes con } u = y, dv = f'(y)\, dy$$

$$= xf^{-1}(x) - \int f(y)\, dy$$

La idea es tomar la parte más complicada de la integral, en este caso $f^{-1}(x)$, y simplificarla en primer lugar. Para la integral de $\ln x$, tenemos

$$\int \ln x\, dx = \int y e^y\, dy \qquad \begin{array}{l} y = \ln x, \quad x = e^y \\ dx = e^y\, dy \end{array}$$

$$= ye^y - e^y + C$$

$$= x \ln x - x + C.$$

Para la integral de $\cos^{-1} x$, tenemos

$$\int \cos^{-1} x\, dx = x \cos^{-1} x - \int \cos y\, dy \qquad y = \cos^{-1} x$$

$$= x \cos^{-1} x - \operatorname{sen} y + C$$

$$= x \cos^{-1} x - \operatorname{sen}(\cos^{-1} x) + C.$$

Utilice la fórmula

$$\int f^{-1}(x)\, dx = xf^{-1}(x) - \int f(y)\, dy \qquad y = f^{-1}(x) \qquad (4)$$

para evaluar las integrales en los ejercicios 43 a 46. Exprese su respuesta en términos de x.

43. $\int \operatorname{sen}^{-1} x\, dx$

44. $\int \tan^{-1} x\, dx$

45. $\int \sec^{-1} x\, dx$

46. $\int \log_2 x\, dx$

Otra forma de integrar $f^{-1}(x)$ (por supuesto, cuando f^{-1} es integrable) consiste en utilizar integración por partes con $u = f^{-1}(x)$ y $dv = dx$ para reescribir la integral de f^{-1} como

$$\int f^{-1}(x)\, dx = xf^{-1}(x) - \int x\left(\frac{d}{dx} f^{-1}(x)\right) dx. \qquad (5)$$

Los ejercicios 47 y 48 comparan los resultados de utilizar las ecuaciones (4) y (5).

47. Las ecuaciones (4) y (5) dan fórmulas diferentes para la integral de $\cos^{-1} x$:

a. $\int \cos^{-1} x\, dx = x \cos^{-1} x - \operatorname{sen}(\cos^{-1} x) + C$ Ecuación (4)

b. $\int \cos^{-1} x\, dx = x \cos^{-1} x - \sqrt{1 - x^2} + C$ Ecuación (5)

¿Pueden ser correctas ambas integraciones? Explique.

48. Las ecuaciones (4) y (5) dan fórmulas diferentes para la integral de $\tan^{-1} x$:

a. $\int \tan^{-1} x\, dx = x \tan^{-1} x - \ln \sec(\tan^{-1} x) + C$ Ecuación (4)

b. $\int \tan^{-1} x\, dx = x \tan^{-1} x - \ln \sqrt{1 + x^2} + C$ Ecuación (5)

¿Pueden ser correctas ambas integraciones? Explique.

Evalúe las integrales en los ejercicios 49 y 50 con **(a)** la ecuación (4), y **(b)** con la ecuación (5). En cada caso, verifique su respuesta diferenciándola respecto de x.

49. $\int \operatorname{senh}^{-1} x\, dx$

50. $\int \tanh^{-1} x\, dx$

8.3 Integración de funciones racionales por medio de fracciones parciales

En esta sección mostraremos cómo expresar una función racional (un cociente de polinomios) como una suma de fracciones más sencillas, denominadas *fracciones parciales*, que son fáciles de integrar. Por ejemplo, la función racional $(5x - 3)/(x^2 - 2x - 3)$ puede reescribirse como

$$\frac{5x - 3}{x^2 - 2x - 3} = \frac{2}{x + 1} + \frac{3}{x - 3},$$

que puede verificarse de manera algebraica colocando las fracciones del lado derecho con un denominador común, $(x + 1)(x - 3)$. La habilidad adquirida para escribir funciones racionales como tal suma también es útil en otros contextos, por ejemplo cuando se utilizan ciertos métodos de transformación para resolver ecuaciones diferenciales. Para integrar la función racional $(5x - 3)/(x + 1)(x - 3)$ en el lado izquierdo de nuestra expresión, simplemente sumamos las integrales de las fracciones del lado derecho:

$$\int \frac{5x - 3}{(x + 1)(x - 3)}\, dx = \int \frac{2}{x + 1}\, dx + \int \frac{3}{x - 3}\, dx$$

$$= 2 \ln |x + 1| + 3 \ln |x - 3| + C.$$

El método para reescribir funciones racionales como una suma de fracciones más sencillas se denomina **método de las fracciones parciales**. En el caso del ejemplo anterior, consiste en determinar las constantes A y B tales que

$$\frac{5x - 3}{x^2 - 2x - 3} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 3}. \tag{1}$$

(Suponga por un momento, que no sabe si $A = 2$ y $B = 3$ funcionarán). A las fracciones $A/(x + 1)$ y $B/(x - 3)$ les llamamos **fracciones parciales**, ya que sus denominadores sólo son parte del denominador original, $x^2 - 2x - 3$. Decimos que A y B son **coeficientes indeterminados** hasta que encontremos valores adecuados para ellos.

Para determinar A y B, primero eliminamos las fracciones de la ecuación (1), obteniendo

$$5x - 3 = A(x - 3) + B(x + 1) = (A + B)x - 3A + B.$$

Esto será una identidad en x, si y sólo si los coeficientes de potencias iguales de x en los dos lados son iguales:

$$A + B = 5, \qquad -3A + B = -3.$$

Al resolver este sistema de ecuaciones, se obtiene $A = 2$ y $B = 3$.

Descripción general del método

El éxito al escribir una función racional $f(x)/g(x)$ como una suma de fracciones parciales depende de dos cosas:

- *El grado de $f(x)$ debe ser menor que el grado de $g(x)$*. Esto es, la fracción debe ser propia. Si no es así, divida $f(x)$ entre $g(x)$ y trabaje con el residuo. Vea el ejemplo 3 de esta sección.
- *Debemos conocer los factores de $g(x)$*. En teoría, cualquier polinomio con coeficientes reales puede escribirse como un producto de factores lineales con coeficientes reales y factores cuadráticos con coeficientes reales. En la práctica, puede ser difícil obtener estos factores.

A continuación veremos cómo determinar las fracciones parciales de una fracción propia $f(x)/g(x)$ cuando se conocen los factores de $g(x)$.

Método de las fracciones parciales ($f(x)/g(x)$ propia)

1. Sea $x - r$ un factor lineal de $g(x)$. Suponga que $(x - r)^m$ es la potencia más grande de $x - r$ que divide a $g(x)$. Entonces, para este factor, asigne la suma de las m fracciones parciales:

$$\frac{A_1}{x - r} + \frac{A_2}{(x - r)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(x - r)^m}.$$

Haga esto para cada factor lineal distinto de $g(x)$.

2. Sea $x^2 + px + q$ un factor cuadrático de $g(x)$. Suponga que $(x^2 + px + q)^n$ es la potencia más grande de este factor que divide a $g(x)$. Entonces, para este factor, asigne la suma de las n fracciones parciales:

$$\frac{B_1x + C_1}{x^2 + px + q} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + px + q)^2} + \cdots + \frac{B_nx + C_n}{(x^2 + px + q)^n}.$$

Haga esto para cada uno de los factores cuadráticos distintos de $g(x)$ que no pueda factorizarse en factores lineales con coeficientes reales.

3. Haga la fracción original $f(x)/g(x)$ igual a la suma de todas estas fracciones parciales. Elimine las fracciones de la ecuación resultante y reacomode los términos en potencias decrecientes de x.
4. Iguale los coeficientes de potencias correspondientes de x y resuelva las ecuaciones resultantes para los coeficientes indeterminados.

EJEMPLO 1 Factores lineales distintos

Evaluar

$$\int \frac{x^2 + 4x + 1}{(x - 1)(x + 1)(x + 3)}\,dx$$

por medio de fracciones parciales.

Solución La descomposición en fracciones parciales tiene la forma

$$\frac{x^2 + 4x + 1}{(x - 1)(x + 1)(x + 3)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{x + 3}.$$

Para encontrar los valores de los coeficientes indeterminados A, B y C, eliminamos las fracciones y obtenemos

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + 1 &= A(x + 1)(x + 3) + B(x - 1)(x + 3) + C(x - 1)(x + 1) \\ &= (A + B + C)x^2 + (4A + 2B)x + (3A - 3B - C). \end{aligned}$$

Los polinomios en ambos lados de la ecuación anterior son idénticos, por lo que igualamos los coeficientes de potencias iguales de x, obteniendo:

$$\begin{aligned} &\text{Coeficiente de } x^2\text{:} && A + b + C = 1 \\ &\text{Coeficiente de } x^1\text{:} && 4A + 2B = 4 \\ &\text{Coeficiente de } x^0\text{:} && 3A - 3B - C = 1. \end{aligned}$$

Hay varias formas de resolver el sistema de ecuaciones lineales para las incógnitas A, B y C, incluyendo la eliminación de variables, o el uso de una calculadora o una computadora. Sin importar el método que se use, la solución es $A = 3/4$, $B = 1/2$ y $C = -1/4$. En consecuencia, tenemos

$$\int \frac{x^2 + 4x + 1}{(x - 1)(x + 1)(x + 3)}\,dx = \int \left[\frac{3}{4}\frac{1}{x - 1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x + 1} - \frac{1}{4}\frac{1}{x + 3}\right] dx$$

$$= \frac{3}{4}\ln|x - 1| + \frac{1}{2}\ln|x + 1| - \frac{1}{4}\ln|x + 3| + K,$$

donde K es la constante arbitraria de integración (para evitar confusión con el coeficiente indeterminado C). ■

EJEMPLO 2 Un factor lineal repetido

Evaluar

$$\int \frac{6x + 7}{(x + 2)^2}\,dx.$$

Solución Primero expresamos el integrando como una suma de fracciones parciales con coeficientes indeterminados.

$$\frac{6x + 7}{(x + 2)^2} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{(x + 2)^2}$$

$$6x + 7 = A(x + 2) + B \qquad \text{Multiplicar ambos lados por } (x + 2)^2.$$

$$= Ax + (2A + B)$$

Al igualar coeficientes de potencias correspondientes de x se obtiene:

$$A = 6 \quad \text{y} \quad 2A + B = 12 + B = 7, \quad \text{o} \quad A = 6 \quad \text{y} \quad B = -5.$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{6x + 7}{(x + 2)^2}\,dx = \int \left(\frac{6}{x + 2} - \frac{5}{(x + 2)^2}\right) dx$$

$$= 6\int \frac{dx}{x + 2} - 5\int (x + 2)^{-2}\,dx$$

$$= 6\ln|x + 2| + 5(x + 2)^{-1} + C$$ ■

EJEMPLO 3 Integración de una fracción impropia

Evaluar

$$\int \frac{2x^3 - 4x^2 - x - 3}{x^2 - 2x - 3}\,dx.$$

Solución Primero dividimos el numerador entre el denominador para obtener un polinomio más una fracción propia.

$$\begin{array}{r} 2x \\ x^2 - 2x - 3 \overline{)\,2x^3 - 4x^2 - x - 3} \\ \underline{2x^3 - 4x^2 - 6x} \\ 5x - 3 \end{array}$$

Después escribimos la fracción impropia como un polinomio más una fracción propia.

$$\frac{2x^3 - 4x^2 - x - 3}{x^2 - 2x - 3} = 2x + \frac{5x - 3}{x^2 - 2x - 3}$$

En el ejemplo inicial encontramos la descomposición de la fracción del lado derecho en fracciones parciales, por lo que

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^3 - 4x^2 - x - 3}{x^2 - 2x - 3}\,dx &= \int 2x\,dx + \int \frac{5x - 3}{x^2 - 2x - 3}\,dx \\ &= \int 2x\,dx + \int \frac{2}{x + 1}\,dx + \int \frac{3}{x - 3}\,dx \\ &= x^2 + 2\ln|x + 1| + 3\ln|x - 3| + C.\end{aligned}$$

Un polinomio cuadrático es **irreducible** si no podemos escribirlo como un producto de dos factores lineales con coeficientes reales.

EJEMPLO 4 Integración con un factor cuadrático irreducible en el denominador

Evaluar

$$\int \frac{-2x + 4}{(x^2 + 1)(x - 1)^2}\,dx$$

por medio de fracciones parciales.

Solución El denominador tiene un factor cuadrático irreducible y un factor lineal repetido, así que escribimos

$$\frac{-2x + 4}{(x^2 + 1)(x - 1)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{C}{x - 1} + \frac{D}{(x - 1)^2}. \tag{2}$$

Eliminando las fracciones de la ecuación se obtiene

$$\begin{aligned}-2x + 4 &= (Ax + B)(x - 1)^2 + C(x - 1)(x^2 + 1) + D(x^2 + 1) \\ &= (A + C)x^3 + (-2A + B - C + D)x^2 \\ &\quad + (A - 2B + C)x + (B - C + D).\end{aligned}$$

Al igualar coeficientes de términos semejantes se obtiene

$$\begin{aligned}&\text{Coeficientes de } x^3: & 0 &= A + C \\ &\text{Coeficientes de } x^2: & 0 &= -2A + B - C + D \\ &\text{Coeficientes de } x^1: & -2 &= A - 2B + C \\ &\text{Coeficientes de } x^0: & 4 &= B - C + D\end{aligned}$$

Resolvemos estas ecuaciones de manera simultánea para determinar los valores de A, B, C y D:

$$\begin{aligned}&-4 = -2A, \quad A = 2 && \text{Restar la cuarta ecuación de la segunda.} \\ &C = -A = -2 && \text{De la primera ecuación} \\ &B = 1 && A = 2 \text{ y } C = -2 \text{ en la tercera ecuación.} \\ &D = 4 - B + C = 1. && \text{De la cuarta ecuación}\end{aligned}$$

Sustituimos estos valores en la ecuación (2), obteniendo

$$\frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2} = \frac{2x+1}{x^2+1} - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}.$$

Por último, usando el desarrollo anterior podemos integrar:

$$\int \frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2}\,dx = \int \left(\frac{2x+1}{x^2+1} - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\right) dx$$

$$= \int \left(\frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\right) dx$$

$$= \ln(x^2+1) + \tan^{-1} x - 2\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C.$$ ■

EJEMPLO 5 Un factor cuadrático irreducible repetido

Evaluar

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2}.$$

Solución La forma de la descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

Multiplicando por $x(x^2+1)^2$, tenemos

$$1 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)x(x^2+1) + (Dx+E)x$$
$$= A(x^4+2x^2+1) + B(x^4+x^2) + C(x^3+x) + Dx^2 + Ex$$
$$= (A+B)x^4 + Cx^3 + (2A+B+D)x^2 + (C+E)x + A$$

Si igualamos coeficientes, obtenemos el sistema

$$A+B=0, \quad C=0, \quad 2A+B+D=0, \quad C+E=0, \quad A=1.$$

Resolviendo este sistema se obtiene $A = 1$, $B = -1$, $C = 0$, $D = -1$ y $E = 0$. Así,

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2} = \int \left[\frac{1}{x} + \frac{-x}{x^2+1} + \frac{-x}{(x^2+1)^2}\right] dx$$

$$= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x\,dx}{x^2+1} - \int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}$$

$$= \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} - \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2}$$ $u = x^2+1,$ $du = 2x\,dx$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|u| + \frac{1}{2u} + K$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + K$$

$$= \ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{2(x^2+1)} + K.$$ ■

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

Oliver Heaviside
(1850-1925)

Método de “eliminación” de Heaviside para factores lineales

Cuando el grado del polinomio $f(x)$ es menor que el grado de $g(x)$ y

$$g(x) = (x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n)$$

es un producto de n factores lineales distintos, cada uno elevado a la primera potencia, existe una manera rápida de desarrollar $f(x)/g(x)$ por medio de fracciones parciales.

EJEMPLO 6 Uso del método de Heaviside

Determine A, B y C en el desarrollo de fracciones parciales

$$\frac{x^2 + 1}{(x - 1)(x - 2)(x - 3)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x - 3}. \qquad (3)$$

Solución Si multiplicamos ambos lados de la ecuación (3) por $(x - 1)$, obtenemos

$$\frac{x^2 + 1}{(x - 2)(x - 3)} = A + \frac{B(x - 1)}{x - 2} + \frac{C(x - 1)}{x - 3}$$

y haciendo $x = 1$, la ecuación resultante proporciona el valor de A:

$$\frac{(1)^2 + 1}{(1 - 2)(1 - 3)} = A + 0 + 0,$$

$$A = 1.$$

Así, el valor de A es el número que habríamos obtenido si hubiéramos eliminado el factor $(x - 1)$ en el denominador de la fracción original

$$\frac{x^2 + 1}{(x - 1)(x - 2)(x - 3)} \qquad (4)$$

y evaluamos el resto en $x = 1$:

$$A = \frac{(1)^2 + 1}{\boxed{(x - 1)}\,(1 - 2)(1 - 3)} = \frac{2}{(-1)(-2)} = 1.$$

⇑ Eliminado

De manera similar, determinamos el valor de B en la ecuación (3), eliminando el factor $(x - 2)$ en la expresión (4) y evaluando el resto en $x = 2$:

$$B = \frac{(2)^2 + 1}{(2 - 1)\,\boxed{(x - 2)}\,(2 - 3)} = \frac{5}{(1)(-1)} = -5.$$

⇑ Eliminado

Por último, C se determina eliminando $(x - 3)$ en la expresión (4) y evaluando el resto en $x = 3$:

$$C = \frac{(3)^2 + 1}{(3 - 1)(3 - 2)\,\boxed{(x - 3)}} = \frac{10}{(2)(1)} = 5.$$

⇑ Eliminado

■

Método de Heaviside

1. *Escribir el cociente con* $g(x)$ *en forma factorizada:*

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n)}.$$

2. *Eliminar uno a uno los factores* $(x - r_i)$ de $g(x)$, reemplazando cada vez todas las x no eliminadas por el número r_i. Esto produce un número A_i para cada raíz r_i:

$$A_1 = \frac{f(r_1)}{(r_1 - r_2)\cdots(r_1 - r_n)}$$

$$A_2 = \frac{f(r_2)}{(r_2 - r_1)(r_2 - r_3)\cdots(r_2 - r_n)}$$

$$\vdots$$

$$A_n = \frac{f(r_n)}{(r_n - r_1)(r_n - r_2)\cdots(r_n - r_{n-1})}.$$

3. *Escribir el desarrollo de la fracción parcial de* $f(x)/g(x)$ como

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{(x - r_1)} + \frac{A_2}{(x - r_2)} + \cdots + \frac{A_n}{(x - r_n)}.$$

EJEMPLO 7 Integración con el método de Heaviside

Evaluar

$$\int \frac{x + 4}{x^3 + 3x^2 - 10x}\,dx.$$

Solución El grado de $f(x) = x + 4$ es menor que el grado de $g(x) = x^3 + 3x^2 - 10x$ y, con $g(x)$ factorizada,

$$\frac{x + 4}{x^3 + 3x^2 - 10x} = \frac{x + 4}{x(x - 2)(x + 5)}.$$

Las raíces de $g(x)$ son $r_1 = 0$, $r_2 = 2$ y $r_3 = -5$. Determinamos

$$A_1 = \frac{0 + 4}{\boxed{x}\,(0 - 2)(0 + 5)} = \frac{4}{(-2)(5)} = -\frac{2}{5}$$

Eliminado

$$A_2 = \frac{2 + 4}{2\,\boxed{(x - 2)}\,(2 + 5)} = \frac{6}{(2)(7)} = \frac{3}{7}$$

Eliminado

$$A_3 = \frac{-5 + 4}{(-5)(-5 - 2)\,\boxed{(x + 5)}} = \frac{-1}{(-5)(-7)} = -\frac{1}{35}.$$

Eliminado

Por lo tanto,

$$\frac{x+4}{x(x-2)(x+5)} = -\frac{2}{5x} + \frac{3}{7(x-2)} - \frac{1}{35(x+5)},$$

y

$$\int \frac{x+4}{x(x-2)(x+5)}\,dx = -\frac{2}{5}\ln|x| + \frac{3}{7}\ln|x-2| - \frac{1}{35}\ln|x+5| + C.$$

Otras formas de determinar los coeficientes

Otra forma de determinar las constantes que aparecen en las fracciones parciales es derivar, como en el ejemplo siguiente. Otro método más consiste en asignar valores numéricos seleccionados a x.

EJEMPLO 8 Uso de derivación

Determinar A, B y C en la ecuación

$$\frac{x-1}{(x+1)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3}.$$

Solución Primero eliminamos las fracciones:

$$x - 1 = A(x+1)^2 + B(x+1) + C.$$

La sustitución $x = -1$ muestra que $C = -2$. Después derivamos ambos lados respecto de x, obteniendo

$$1 = 2A(x+1) + B.$$

La sustitución $x = -1$ muestra que $B = 1$. Nuevamente derivamos para obtener $0 = 2A$, lo cual muestra que $A = 0$. De aquí que,

$$\frac{x-1}{(x+1)^3} = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{(x+1)^3}.$$

En algunos problemas, la asignación de valores pequeños a x, tales como $x = 0, \pm 1, \pm 2$, para obtener ecuaciones en A, B y C, proporciona una alternativa rápida frente a otros métodos.

EJEMPLO 9 Asignación de valores numéricos a x

Determinar A, B y C en

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}.$$

Solución Elimine las fracciones para obtener

$$x^2 + 1 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2).$$

Después haga $x = 1, 2, 3$ sucesivamente para determinar A, B y C:

$$\begin{aligned} x = 1: \quad (1)^2 + 1 &= A(-1)(-2) + B(0) + C(0) \\ 2 &= 2A \\ A &= 1 \\ x = 2: \quad (2)^2 + 1 &= A(0) + B(1)(-1) + C(0) \\ 5 &= -B \\ B &= -5 \\ x = 3: \quad (3)^2 + 1 &= A(0) + B(0) + C(2)(1) \\ 10 &= 2C \\ C &= 5. \end{aligned}$$

Conclusión:

$$\frac{x^2 + 1}{(x - 1)(x - 2)(x - 3)} = \frac{1}{x - 1} - \frac{5}{x - 2} + \frac{5}{x - 3}.$$

EJERCICIOS 8.3

Desarrollo de cocientes en fracciones parciales

Desarrolle los cocientes en los ejercicios 1 a 8 por medio de fracciones parciales.

1. $\dfrac{5x - 13}{(x - 3)(x - 2)}$

2. $\dfrac{5x - 7}{x^2 - 3x + 2}$

3. $\dfrac{x + 4}{(x + 1)^2}$

4. $\dfrac{2x + 2}{x^2 - 2x + 1}$

5. $\dfrac{z + 1}{z^2(z - 1)}$

6. $\dfrac{z}{z^3 - z^2 - 6z}$

7. $\dfrac{t^2 + 8}{t^2 - 5t + 6}$

8. $\dfrac{t^4 + 9}{t^4 + 9t^2}$

Factores lineales no repetidos

En los ejercicios 9 a 16, exprese los integrandos como suma de fracciones parciales y evalúe las integrales.

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 - x^2}$

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + 2x}$

11. $\displaystyle\int \frac{x + 4}{x^2 + 5x - 6}\, dx$

12. $\displaystyle\int \frac{2x + 1}{x^2 - 7x + 12}\, dx$

13. $\displaystyle\int_4^8 \frac{y\, dy}{y^2 - 2y - 3}$

14. $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{y + 4}{y^2 + y}\, dy$

15. $\displaystyle\int \frac{dt}{t^3 + t^2 - 2t}$

16. $\displaystyle\int \frac{x + 3}{2x^3 - 8x}\, dx$

Factores lineales repetidos

En los ejercicios 17 a 20, exprese los integrandos como una suma de fracciones parciales y evalúe las integrales.

17. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3\, dx}{x^2 + 2x + 1}$

18. $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{x^3\, dx}{x^2 - 2x + 1}$

19. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2 - 1)^2}$

20. $\displaystyle\int \frac{x^2\, dx}{(x - 1)(x^2 + 2x + 1)}$

Factores cuadráticos irreducibles

En los ejercicios 21 a 28, exprese los integrandos como una suma de fracciones parciales y evalúe las integrales.

21. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x + 1)(x^2 + 1)}$

22. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{3t^2 + t + 4}{t^3 + t}\, dt$

23. $\displaystyle\int \frac{y^2 + 2y + 1}{(y^2 + 1)^2}\, dy$

24. $\displaystyle\int \frac{8x^2 + 8x + 2}{(4x^2 + 1)^2}\, dx$

25. $\displaystyle\int \frac{2s + 2}{(s^2 + 1)(s - 1)^3}\, ds$

26. $\displaystyle\int \frac{s^4 + 81}{s(s^2 + 9)^2}\, ds$

27. $\displaystyle\int \frac{2\theta^3 + 5\theta^2 + 8\theta + 4}{(\theta^2 + 2\theta + 2)^2}\, d\theta$

28. $\displaystyle\int \frac{\theta^4 - 4\theta^3 + 2\theta^2 - 3\theta + 1}{(\theta^2 + 1)^3}\, d\theta$

Fracciones impropias

En los ejercicios 29 a 34, realice la división larga del integrando, escriba la fracción propia como una suma de fracciones parciales y luego evalúe la integral.

29. $\displaystyle\int \frac{2x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - x}\, dx$

30. $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^2 - 1}\, dx$

31. $\displaystyle\int \frac{9x^3 - 3x + 1}{x^3 - x^2}\, dx$

32. $\displaystyle\int \frac{16x^3}{4x^2 - 4x + 1}\, dx$

33. $\displaystyle\int \frac{y^4 + y^2 - 1}{y^3 + y}\, dy$

34. $\displaystyle\int \frac{2y^4}{y^3 - y^2 + y - 1}\, dy$

Evaluación de integrales

Evalúe las integrales de los ejercicios 35 a 40.

35. $\displaystyle\int \frac{e^t\,dt}{e^{2t} + 3e^t + 2}$

36. $\displaystyle\int \frac{e^{4t} + 2e^{2t} - e^t}{e^{2t} + 1}\,dt$

37. $\displaystyle\int \frac{\cos y\,dy}{\operatorname{sen}^2 y + \operatorname{sen} y - 6}$

38. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}\theta\,d\theta}{\cos^2\theta + \cos\theta - 2}$

39. $\displaystyle\int \frac{(x-2)^2\tan^{-1}(2x) - 12x^3 - 3x}{(4x^2+1)(x-2)^2}\,dx$

40. $\displaystyle\int \frac{(x+1)^2\tan^{-1}(3x) + 9x^3 + x}{(9x^2+1)(x+1)^2}\,dx$

Problemas con valor inicial

Resuelva los problemas con valor inicial en los ejercicios 41 a 44, para x como una función de t.

41. $(t^2 - 3t + 2)\dfrac{dx}{dt} = 1 \quad (t > 2), \quad x(3) = 0$

42. $(3t^4 + 4t^2 + 1)\dfrac{dx}{dt} = 2\sqrt{3}, \quad x(1) = -\pi\sqrt{3}/4$

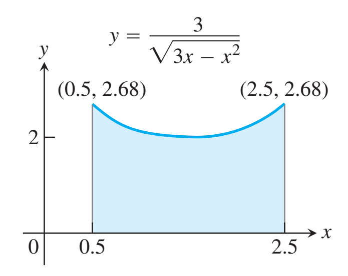
43. $(t^2 + 2t)\dfrac{dx}{dt} = 2x + 2 \quad (t, x > 0), \quad x(1) = 1$

44. $(t + 1)\dfrac{dx}{dt} = x^2 + 1 \quad (t > -1), \quad x(0) = \pi/4$

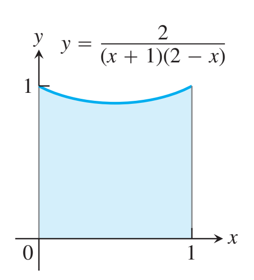
Aplicaciones y ejemplos

En los ejercicios 45 y 46, determine el volumen del sólido generado al hacer girar, alrededor del eje que se indica, la región sombreada.

45. El eje x

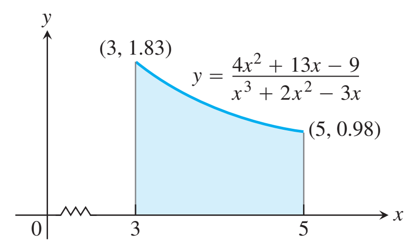


46. El eje y



T 47. Determine, con precisión de dos decimales, la coordenada x del centroide de la región en el primer cuadrante acotada por el eje x, la curva $y = \tan^{-1} x$ y la recta $x = \sqrt{3}$.

T 48. Determine la coordenada x, con dos decimales, del centroide de esta región.



T 49. Difusión social En ocasiones, los sociólogos utilizan la frase “difusión social” para describir la manera en que la información se difunde en una población. La información puede ser un rumor, una moda cultural o una noticia acerca de una innovación tecnológica. En una población suficientemente grande, el número de personas x que conocen la información se trata como una función diferenciable del tiempo t, y la velocidad de difusión, dx/dt, se supone que es proporcional al número de personas que conocen la información por el número de personas que la desconocen. Esto lleva a la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = kx(N - x),$$

en donde N es el número de personas que conforman la población.

Suponga que t está en días, $k = 1/250$, y que dos personas inician un rumor en el instante $t = 0$ en un población de $N = 1000$ personas.

a. Determine a x como una función de t.

b. ¿En qué momento la mitad de la población ha escuchado el rumor? (Aquí es cuando el rumor se propaga más rápidamente).

T 50. Reacciones químicas de segundo orden Muchas reacciones químicas son el resultado de la interacción de dos moléculas que sufren un cambio para producir un nuevo producto. La velocidad de la reacción comúnmente depende de las concentraciones de las dos clases de moléculas. Si a es la cantidad de sustancia A y b es la cantidad de sustancia B en el instante $t = 0$, y si x es la cantidad de producto en el instante t, entonces la velocidad de formación de x puede expresarse por medio de la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x),$$

o

$$\frac{1}{(a - x)(b - x)}\frac{dx}{dt} = k,$$

en donde k es una constante para la reacción. Integre ambos lados de esta ecuación para obtener una relación entre x y t, **(a)** si $a = b$, y **(b)** si $a \neq b$. En cada caso, suponga que $x = 0$ cuando $t = 0$.

51. Una integral que relaciona a π con la aproximación 22/7

a. Evaluar $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^4(x-1)^4}{x^2+1}\,dx$.

b. ¿Qué tan buena es la aproximación de $\pi \approx 22/7$? Determínelo expresando $\left(\dfrac{22}{7} - \pi\right)$ como un porcentaje de π.

c. Grafique la función $y = \dfrac{x^4(x-1)^4}{x^2+1}$ para $0 \le x \le 1$. Experimente con el rango en el eje y entre 0 y 1, luego entre 0 y 0.5, y después disminuya el rango hasta que la gráfica pueda verse. ¿Qué concluye acerca del área que está debajo de la curva?

52. Determine el polinomio de segundo grado $P(x)$ tal que $P(0) = 1$, $P'(0) = 0$ y

$$\int \frac{P(x)}{x^3(x-1)^2}\,dx$$

es una función racional.

8.4 Integrales trigonométricas

Las integrales trigonométricas incluyen combinaciones algebraicas de las seis funciones trigonométricas básicas. En principio, siempre podemos expresar tales integrales en términos de senos y cosenos, pero con frecuencia es más sencillo hacerlo con otras funciones, como en la integral

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C.$$

La idea general es utilizar identidades para transformar las integrales en integrales con las que sea más fácil trabajar.

Productos de potencias de senos y cosenos

Iniciamos con integrales de la forma:

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx,$$

donde m y n son enteros no negativos (positivo o cero). Podemos separar el trabajo en tres casos.

Caso 1 Si m es impar, escribimos m como $2k + 1$ y utilizamos la identidad $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ para obtener

$$\operatorname{sen}^m x = \operatorname{sen}^{2k+1} x = (\operatorname{sen}^2 x)^k \operatorname{sen} x = (1 - \cos^2 x)^k \operatorname{sen} x. \qquad (1)$$

Después combinamos en la integral el sen x, que está solo, con dx, y hacemos sen $x\,dx$ igual a $-d(\cos x)$.

Caso 2 Si m es par y n es impar en $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx$, escribimos n como $2k+1$ y utilizamos la identidad $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$ para obtener

$$\cos^n x = \cos^{2k+1} x = (\cos^2 x)^k \cos x = (1 - \operatorname{sen}^2 x)^k \cos x.$$

Luego combinamos el cos x, que está solo, con dx, y hacemos cos $x\,dx$ igual a $d(\operatorname{sen} x)$.

Caso 3 Si m y n son pares en $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx$, sustituimos

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \qquad (2)$$

para reducir el integrando a uno con potencias menores de cos $2x$.

A continuación presentamos algunos ejemplos que ilustran cada caso.

EJEMPLO 1 *m* es impar

Evaluar

$$\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x\,dx.$$

Solución

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x\, dx &= \int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \operatorname{sen} x\, dx \\ &= \int (1-\cos^2 x)\cos^2 x\,(-d(\cos x)) \\ &= \int (1-u^2)(u^2)(-du) \qquad u=\cos x \\ &= \int (u^4-u^2)\,du \\ &= \frac{u^5}{5}-\frac{u^3}{3}+C \\ &= \frac{\cos^5 x}{5}-\frac{\cos^3 x}{3}+C.\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 2 *m* es par y *n* es impar

Evaluar

$$\int \cos^5 x\, dx.$$

Solución

$$\begin{aligned}\int \cos^5 x\, dx = \int \cos^4 x \cos x\, dx &= \int (1-\operatorname{sen}^2 x)^2\, d(\operatorname{sen} x) \qquad m=0 \\ &= \int (1-u^2)^2\, du \qquad u=\operatorname{sen} x \\ &= \int (1-2u^2+u^4)\, du \\ &= u-\frac{2}{3}u^3+\frac{1}{5}u^5+C = \operatorname{sen} x-\frac{2}{3}\operatorname{sen}^3 x+\frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x+C.\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 3 *m* y *n* son pares

Evaluar

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x\, dx.$$

Solución

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x\, dx &= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx \\ &= \frac{1}{8}\int (1-\cos 2x)(1+2\cos 2x+\cos^2 2x)\, dx \\ &= \frac{1}{8}\int (1+\cos 2x-\cos^2 2x-\cos^3 2x)\, dx \\ &= \frac{1}{8}\left[x+\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x-\int(\cos^2 2x+\cos^3 2x)\, dx\right].\end{aligned}$$

Para el término que incluye a $\cos^2 2x$ utilizamos

$$\int \cos^2 2x\,dx = \frac{1}{2}\int (1 + \cos 4x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x\right).$$

Se omite la constante de integración hasta el resultado final.

Para el término $\cos^3 2x$, tenemos

$$\int \cos^3 2x\,dx = \int (1 - \operatorname{sen}^2 2x)\cos 2x\,dx$$

$u = \operatorname{sen} 2x$, $du = 2\cos 2x\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int (1 - u^2)\,du = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 2x\right).$$

Nuevamente se omite C.

Combinando todo y simplificando, obtenemos

$$\int \operatorname{sen}^2 x\cos^4 x\,dx = \frac{1}{16}\left(x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x + \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 2x\right) + C.$$

■

Eliminación de raíces cuadradas

En el ejemplo siguiente, utilizamos la identidad $\cos^2\theta = (1 + \cos 2\theta)/2$ para eliminar una raíz cuadrada.

EJEMPLO 4 Evaluar

$$\int_0^{\pi/4}\sqrt{1 + \cos 4x}\,dx.$$

Solución Para eliminar la raíz cuadrada utilizamos la identidad

$$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}, \qquad \text{o} \qquad 1 + \cos 2\theta = 2\cos^2\theta.$$

Con $\theta = 2x$, esto se transforma en

$$1 + \cos 4x = 2\cos^2 2x.$$

Por lo tanto,

$$\int_0^{\pi/4}\sqrt{1 + \cos 4x}\,dx = \int_0^{\pi/4}\sqrt{2\cos^2 2x}\,dx = \int_0^{\pi/4}\sqrt{2}\sqrt{\cos^2 2x}\,dx$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\pi/4}|\cos 2x|\,dx = \sqrt{2}\int_0^{\pi/4}\cos 2x\,dx$$

$\cos 2x \geq 0$ en $[0, \pi/4]$

$$= \sqrt{2}\left[\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\right]_0^{\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}[1 - 0] = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

■

Integrales de potencias de tan *x* y sec *x*

Sabemos cómo integrar la tangente, la secante y sus cuadrados. Para integrar potencias mayores, utilizamos las identidades $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ y $\sec^2 x = \tan^2 x + 1$ e integramos por partes, cuando sea necesario, para reducir las potencias grandes a potencias menores.

EJEMPLO 5 Evaluar

$$\int \tan^4 x\, dx.$$

Solución

$$\int \tan^4 x\, dx = \int \tan^2 x \cdot \tan^2 x\, dx = \int \tan^2 x \cdot (\sec^2 x - 1)\, dx$$

$$= \int \tan^2 x \sec^2 x\, dx - \int \tan^2 x\, dx$$

$$= \int \tan^2 x \sec^2 x\, dx - \int (\sec^2 x - 1)\, dx$$

$$= \int \tan^2 x \sec^2 x\, dx - \int \sec^2 x\, dx + \int dx.$$

En la primera integral, hacemos

$$u = \tan x, \qquad du = \sec^2 x\, dx$$

y tenemos

$$\int u^2\, du = \frac{1}{3}u^3 + C_1.$$

Las integrales restantes están en forma estándar, de manera que

$$\int \tan^4 x\, dx = \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x + C.$$ ■

EJEMPLO 6 Evaluar

$$\int \sec^3 x\, dx.$$

Solución Integramos por partes, usando

$$u = \sec x, \qquad dv = \sec^2 x\, dx, \qquad v = \tan x, \qquad du = \sec x \tan x\, dx.$$

Entonces

$$\int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x - \int (\tan x)(\sec x \tan x\, dx)$$

$$= \sec x \tan x - \int (\sec^2 x - 1) \sec x\, dx \qquad \tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

$$= \sec x \tan x + \int \sec x\, dx - \int \sec^3 x\, dx.$$

Combinando las dos integrales de secante cúbica se obtiene

$$2\int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x + \int \sec x\, dx$$

y

$$\int \sec^3 x\,dx = \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C.$$ ■

Productos de senos y cosenos

Las integrales

$$\int \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\,dx, \qquad \int \operatorname{sen} mx \cos nx\,dx \qquad \text{y} \qquad \int \cos mx \cos nx\,dx$$

surgen un muchos lugares en donde se aplican las funciones trigonométricas a problemas de matemáticas y ciencia. Podemos evaluar estas integrales mediante integración por partes, pero en cada caso se requieren dos integraciones por partes. Es más sencillo utilizar las identidades

$$\operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x], \tag{3}$$

$$\operatorname{sen} mx \cos nx = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(m-n)x + \operatorname{sen}(m+n)x], \tag{4}$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x]. \tag{5}$$

Estas identidades provienen de las fórmulas de la suma de ángulos para las funciones seno y coseno (sección 1.6) y proporcionan funciones cuyas antiderivadas son fáciles de encontrar.

EJEMPLO 7 Evaluar

$$\int \operatorname{sen} 3x \cos 5x\,dx.$$

Solución De acuerdo con la ecuación (4), con $m = 3$ y $n = 5$, obtenemos

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen} 3x \cos 5x\,dx &= \frac{1}{2}\int [\operatorname{sen}(-2x) + \operatorname{sen} 8x]\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int (\operatorname{sen} 8x - \operatorname{sen} 2x)\,dx \\ &= -\frac{\cos 8x}{16} + \frac{\cos 2x}{4} + C.\end{aligned}$$ ■

EJERCICIOS 8.4

Productos de potencias de senos y cosenos

Evalúe las integrales de los ejercicios 1 a 14.

1. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^5 x\,dx$

2. $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^5 \frac{x}{2}\,dx$

3. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 x\,dx$

4. $\int_0^{\pi/6} 3\cos^5 3x\,dx$

5. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^7 y\,dy$

6. $\int_0^{\pi/2} 7\cos^7 t\,dt$

7. $\int_0^{\pi} 8 \operatorname{sen}^4 x\, dx$

8. $\int_0^{1} 8 \cos^4 2\pi x\, dx$

9. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} 16 \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\, dx$

10. $\int_0^{\pi} 8 \operatorname{sen}^4 y \cos^2 y\, dy$

11. $\int_0^{\pi/2} 35 \operatorname{sen}^4 x \cos^3 x\, dx$

12. $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} 2x \cos^2 2x\, dx$

13. $\int_0^{\pi/4} 8 \cos^3 2\theta \operatorname{sen} 2\theta\, d\theta$

14. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 2\theta \cos^3 2\theta\, d\theta$

Integrales con raíces cuadradas

Evalúe las integrales de los ejercicios 15 a 22.

15. $\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}\, dx$

16. $\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos 2x}\, dx$

17. $\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t}\, dt$

18. $\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos^2 \theta}\, d\theta$

19. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{1 + \tan^2 x}\, dx$

20. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{\sec^2 x - 1}\, dx$

21. $\int_0^{\pi/2} \theta\sqrt{1 - \cos 2\theta}\, d\theta$

22. $\int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos^2 t)^{3/2}\, dt$

Potencias de tan *x* y sec *x*

Evalúe las integrales de los ejercicios 23 a 32.

23. $\int_{-\pi/3}^{0} 2 \sec^3 x\, dx$

24. $\int e^x \sec^3 e^x\, dx$

25. $\int_0^{\pi/4} \sec^4 \theta\, d\theta$

26. $\int_0^{\pi/12} 3 \sec^4 3x\, dx$

27. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \csc^4 \theta\, d\theta$

28. $\int_{\pi/2}^{\pi} 3 \csc^4 \frac{\theta}{2}\, d\theta$

29. $\int_0^{\pi/4} 4 \tan^3 x\, dx$

30. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} 6 \tan^4 x\, dx$

31. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \cot^3 x\, dx$

32. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} 8 \cot^4 t\, dt$

Productos de senos y cosenos

Evalúe las integrales de los ejercicios 33 a 38.

33. $\int_{-\pi}^{0} \operatorname{sen} 3x \cos 2x\, dx$

34. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} 2x \cos 3x\, dx$

35. $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 3x\, dx$

36. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \cos x\, dx$

37. $\int_0^{\pi} \cos 3x \cos 4x\, dx$

38. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \cos 7x\, dx$

Teoría y ejemplos

39. **Área de una superficie** Determine el área de la superficie generada al hacer girar el arco

$$x = t^{2/3}, \quad y = t^2/2, \quad 0 \le t \le 2,$$

alrededor del eje x.

40. **Longitud de arco** Determine la longitud de la curva

$$y = \ln(\cos x), \quad 0 \le x \le \pi/3.$$

41. **Longitud de arco** Determine la longitud de la curva

$$y = \ln(\sec x), \quad 0 \le x \le \pi/4.$$

42. **Centro de gravedad** Determine el centro de gravedad de la región acotada por el eje x, la curva $y = \sec x$ y las rectas $x = -\pi/4$, $x = \pi/4$.

43. **Volumen** Determine el volumen generado, al hacer girar un arco de la curva $y = \operatorname{sen} x$ alrededor del eje x.

44. **Área** Determine el área entre el eje x y la curva $y = \sqrt{1 + \cos 4x}$, $0 \le x \le \pi$.

45. **Funciones ortogonales** Se dice que dos funciones f y g son **ortogonales** en un intervalo $a \le x \le b$ si $\int_a^b f(x)g(x)\, dx = 0$.
   a. Demuestre que sen mx y sen nx son ortogonales en cualquier intervalo de longitud 2π, siempre y cuando m y n sean enteros y $m^2 \neq n^2$.
   b. Demuestre lo mismo para cos mx y cos nx.
   c. Demuestre los mismo para sen mx y cos nx, incluso si $m = n$.

46. **Serie de Fourier** Una serie finita de Fourier está dada por la suma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \operatorname{sen} nx = a_1 \operatorname{sen} x + a_2 \operatorname{sen} 2x + \cdots + a_N \operatorname{sen} Nx$$

Demuestre que el m-ésimo coeficiente, a_m, está dado por la fórmula

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} mx\, dx.$$

8.5 Sustituciones trigonométricas

Las sustituciones trigonométricas pueden ser eficaces para transformar integrales que incluyen $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$ y $\sqrt{x^2 - a^2}$ en integrales que podamos evaluar de manera directa.

Tres sustituciones básicas

Las sustituciones más comunes son $x = a \tan \theta$, $x = a \operatorname{sen} \theta$ y $x = a \sec \theta$. Provienen de los triángulos de referencia de la figura 8.2.

Con $x = a \tan \theta$,

$$a^2 + x^2 = a^2 + a^2 \tan^2 \theta = a^2(1 + \tan^2 \theta) = a^2 \sec^2 \theta.$$

Con $x = a \operatorname{sen} \theta$,

$$a^2 - x^2 = a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 \theta = a^2(1 - \operatorname{sen}^2 \theta) = a^2 \cos^2 \theta.$$

Con $x = a \sec \theta$,

$$x^2 - a^2 = a^2 \sec^2 \theta - a^2 = a^2(\sec^2 \theta - 1) = a^2 \tan^2 \theta.$$

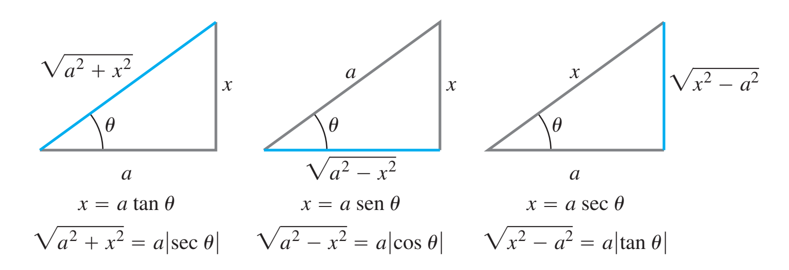


FIGURA 8.2 Triángulos de referencia para las tres sustituciones básicas, identificando los lados etiquetados con x y a para cada sustitución.

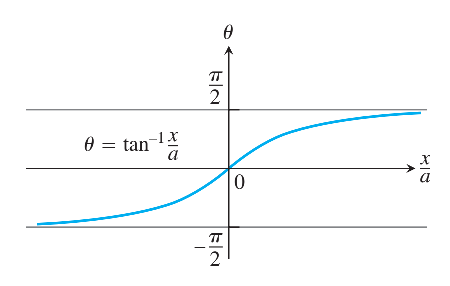
Queremos que cualquier sustitución que utilicemos en una integración sea reversible, de manera que podamos restituirla a su variable original. Por ejemplo, si $x = a \tan \theta$, deseamos poder hacer $\theta = \tan^{-1}(x/a)$ después de realizar la integración. Si $x = a \operatorname{sen} \theta$, deseamos poder hacer $\theta = \operatorname{sen}^{-1}(x/a)$ cuando hayamos terminado la integración, y de manera similar para $x = a \sec \theta$.

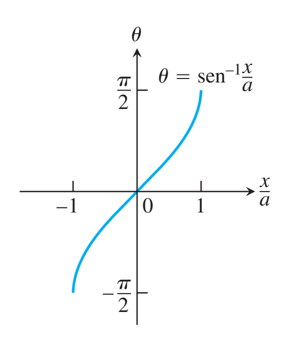
Como sabemos, de acuerdo con la sección 7.7, las funciones en estas sustituciones sólo tienen inversa para ciertos valores de θ (figura 8.3). Para que se pueda revertir,

$$x = a \tan \theta \quad \text{requiere} \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \quad \text{con} \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2},$$

$$x = a \operatorname{sen} \theta \quad \text{requiere} \quad \theta = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \quad \text{con} \quad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2},$$

$$x = a \sec \theta \quad \text{requiere} \quad \theta = \sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \quad \text{con} \quad \begin{cases} 0 \le \theta < \dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad \dfrac{x}{a} \ge 1, \\[2mm] \dfrac{\pi}{2} < \theta \le \pi & \text{si} \quad \dfrac{x}{a} \le -1. \end{cases}$$





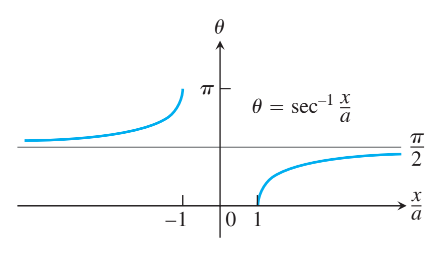


FIGURA 8.3 Arco tangente, arco seno y arco secante de x/a, graficados como funciones de x/a.

Para simplificar los cálculos con la sustitución $x = a \sec \theta$, restringiremos su uso a integrales en las que $x/a \ge 1$. Esto colocará a θ en $[0, \pi/2)$ y hará que $\tan \theta \ge 0$. Después tendremos $\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \tan^2 \theta} = |a \tan \theta| = a \tan \theta$, sin valores absolutos, siempre y cuando

EJEMPLO 1 Uso de la sustitución $x = a \tan \theta$

Evaluar



$$\int \frac{dx}{\sqrt{4 + x^2}}.$$

Solución Hacemos

$$x = 2\tan\theta, \qquad dx = 2\sec^2\theta\, d\theta, \qquad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2},$$

$$4 + x^2 = 4 + 4\tan^2\theta = 4(1 + \tan^2\theta) = 4\sec^2\theta.$$

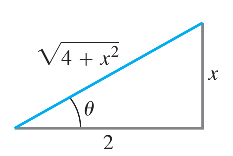


FIGURA 8.4 Triángulo de referencia para $x = 2\tan\theta$ (ejemplo 1):

$$\tan\theta = \frac{x}{2}$$

y

$$\sec\theta = \frac{\sqrt{4+x^2}}{2}.$$

Entonces

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} = \int \frac{2\sec^2\theta\, d\theta}{\sqrt{4\sec^2\theta}} = \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{|\sec\theta|} \qquad \sqrt{\sec^2\theta} = |\sec\theta|$$

$$= \int \sec\theta\, d\theta \qquad \sec\theta > 0 \text{ para } -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$= \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{4+x^2}}{2} + \frac{x}{2}\right| + C \qquad \text{De la figura 8.4}$$

$$= \ln\left|\sqrt{4+x^2} + x\right| + C'. \qquad \text{Tomando } C' = C - \ln 2$$

Observe cómo expresamos $\ln|\sec\theta + \tan\theta|$ en términos de x: dibujamos un triángulo de referencia para la sustitución original $x = 2\tan\theta$ (figura 8.4) y obtenemos las razones del triángulo. ■

EJEMPLO 2 Uso de la sustitución $x = a\,\text{sen}\,\theta$

Evaluar

$$\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{9-x^2}}.$$

Solución Hacemos

$$x = 3\,\text{sen}\,\theta, \qquad dx = 3\cos\theta\, d\theta, \qquad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$9 - x^2 = 9 - 9\,\text{sen}^2\theta = 9(1 - \text{sen}^2\theta) = 9\cos^2\theta.$$

Entonces

$$\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int \frac{9\,\text{sen}^2\theta \cdot 3\cos\theta\, d\theta}{|3\cos\theta|}$$

$$= 9\int \text{sen}^2\theta\, d\theta \qquad \cos\theta > 0 \text{ para } -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$= 9\int \frac{1 - \cos 2\theta}{2}\, d\theta$$

$$= \frac{9}{2}\left(\theta - \frac{\text{sen}\,2\theta}{2}\right) + C$$

$$= \frac{9}{2}(\theta - \text{sen}\,\theta\cos\theta) + C \qquad \text{sen}\,2\theta = 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$$

$$= \frac{9}{2}\left(\text{sen}^{-1}\frac{x}{3} - \frac{x}{3}\cdot\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}\right) + C \qquad \text{Figura 8.5}$$

$$= \frac{9}{2}\,\text{sen}^{-1}\frac{x}{3} - \frac{x}{2}\sqrt{9-x^2} + C. \qquad ■$$

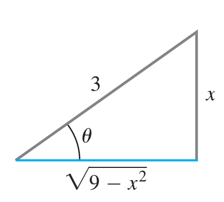


FIGURA 8.5 Triángulo de referencia para $x = 3\,\text{sen}\,\theta$ (ejemplo 2):

$$\text{sen}\,\theta = \frac{x}{3}$$

y

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{9-x^2}}{3}.$$

EJEMPLO 3 Uso de la sustitución $x = a \sec \theta$

Evaluar

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2 - 4}}, \qquad x > \frac{2}{5}.$$

Solución Primero reescribimos el radical como

$$\begin{aligned} \sqrt{25x^2 - 4} &= \sqrt{25\left(x^2 - \frac{4}{25}\right)} \\ &= 5\sqrt{x^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} \end{aligned}$$

para poner el radical en la forma $x^2 - a^2$. Después sustituimos

$$x = \frac{2}{5}\sec\theta, \qquad dx = \frac{2}{5}\sec\theta\tan\theta\, d\theta, \qquad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} x^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2 &= \frac{4}{25}\sec^2\theta - \frac{4}{25} \\ &= \frac{4}{25}(\sec^2\theta - 1) = \frac{4}{25}\tan^2\theta \end{aligned}$$

$$\sqrt{x^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{2}{5}|\tan\theta| = \frac{2}{5}\tan\theta.$$

$\tan\theta > 0$ para $0 < \theta < \pi/2$

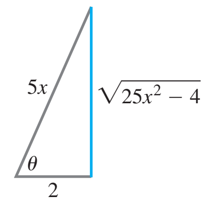


FIGURA 8.6 Si $x = (2/5)\sec\theta$, $0 < \theta < \pi/2$, entonces $\theta = \sec^{-1}(5x/2)$, y podemos leer los valores de las otras funciones trigonométricas de θ de este triángulo rectángulo (ejemplo 3).

Con estas sustituciones, tenemos

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{25x^2 - 4}} &= \int \frac{dx}{5\sqrt{x^2 - (4/25)}} = \int \frac{(2/5)\sec\theta\tan\theta\, d\theta}{5\cdot(2/5)\tan\theta} \\ &= \frac{1}{5}\int \sec\theta\, d\theta = \frac{1}{5}\ln|\sec\theta + \tan\theta| + C \\ &= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{5x}{2} + \frac{\sqrt{25x^2 - 4}}{2}\right| + C. \end{aligned}$$

Figura 8.6 ■

En ocasiones una sustitución trigonométrica nos puede ayudar a evaluar una integral que tiene una potencia entera de un binomio cuadrático, como en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 4 Determinación del volumen de un sólido de rotación

Determine el volumen del sólido generado al hacer girar, alrededor del eje x, la región acotada por la curva $y = 4/(x^2 + 4)$, el eje x y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

Solución Hacemos un bosquejo de la región (figura 8.7) y utilizamos el método de los discos:

$$V = \int_0^2 \pi[R(x)]^2\, dx = 16\pi\int_0^2 \frac{dx}{(x^2 + 4)^2}.$$

$R(x) = \dfrac{4}{x^2 + 4}$

Para evaluar la integral, hacemos

$$x = 2\tan\theta, \qquad dx = 2\sec^2\theta\, d\theta, \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{x}{2},$$

$$x^2 + 4 = 4\tan^2\theta + 4 = 4(\tan^2\theta + 1) = 4\sec^2\theta$$

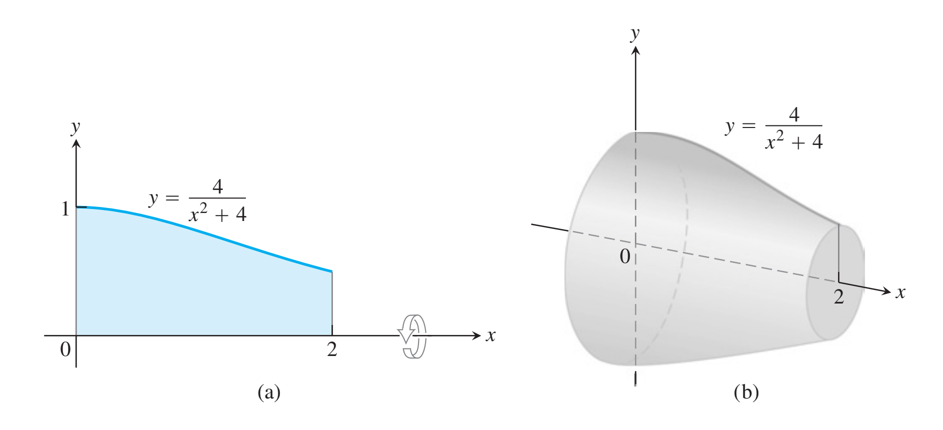


FIGURA 8.7 La región (a) y el sólido (b) del ejemplo 4.

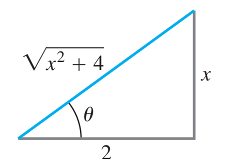


FIGURA 8.8 Triángulo de referencia para $x = 2\tan\theta$ (ejemplo 4).

(figura 8.8). Con estas sustituciones,

$$\begin{aligned}
V &= 16\pi \int_0^2 \frac{dx}{(x^2+4)^2} \\
&= 16\pi \int_0^{\pi/4} \frac{2\sec^2\theta\, d\theta}{(4\sec^2\theta)^2} \qquad \theta = 0 \text{ cuando } x = 0;\ \theta = \pi/4 \text{ cuando } x = 2 \\
&= 16\pi \int_0^{\pi/4} \frac{2\sec^2\theta\, d\theta}{16\sec^4\theta} = \pi \int_0^{\pi/4} 2\cos^2\theta\, d\theta \\
&= \pi \int_0^{\pi/4} (1 + \cos 2\theta)\, d\theta = \pi\left[\theta + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/4} \qquad 2\cos^2\theta = 1 + \cos 2\theta \\
&= \pi\left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right] \approx 4.04.
\end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Determinación del área de una elipse

Determine el área acotada por la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

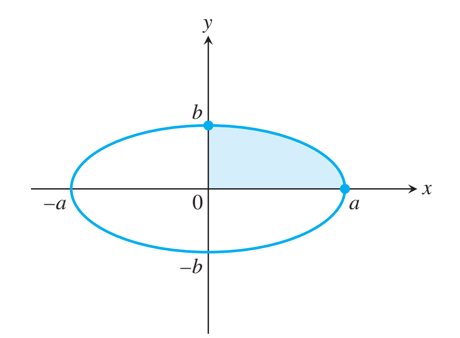


FIGURA 8.9 La elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ del ejemplo 5.

Solución Ya que la elipse es simétrica respecto de ambos ejes, el área total A es cuatro veces el área en el primer cuadrante (figura 8.9). Resolviendo la ecuación de la elipse para $y \geq 0$, obtenemos

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2},$$

o

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \qquad 0 \leq x \leq a$$

El área de la elipse es

$$\begin{aligned} A &= 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx \\ &= 4\frac{b}{a}\int_0^{\pi/2} a\cos\theta \cdot a\cos\theta\,d\theta \\ &= 4ab\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\,d\theta \\ &= 4ab\int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta \\ &= 2ab\left[\theta + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} \\ &= 2ab\left[\frac{\pi}{2} + 0 - 0\right] = \pi ab. \end{aligned}$$

$x = a \operatorname{sen}\theta$, $dx = a\cos\theta\,d\theta$, $\theta = 0$ cuando $x = 0$; $\theta = \pi/2$ cuando $x = a$

Si $a = b = r$, obtenemos que el área de un círculo de radio r es πr^2. ■

EJERCICIOS 8.5

Sustituciones trigonométricas básicas

Evalúe las integrales de los ejercicios 1 a 28.

1. $\int \frac{dy}{\sqrt{9+y^2}}$
2. $\int \frac{3\,dy}{\sqrt{1+9y^2}}$
3. $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{4+x^2}$
4. $\int_0^2 \frac{dx}{8+2x^2}$
5. $\int_0^{3/2} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$
6. $\int_0^{1/2\sqrt{2}} \frac{2\,dx}{\sqrt{1-4x^2}}$
7. $\int \sqrt{25-t^2}\,dt$
8. $\int \sqrt{1-9t^2}\,dt$
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-49}},\quad x > \frac{7}{2}$
10. $\int \frac{5\,dx}{\sqrt{25x^2-9}},\quad x > \frac{3}{5}$
11. $\int \frac{\sqrt{y^2-49}}{y}\,dy,\quad y > 7$
12. $\int \frac{\sqrt{y^2-25}}{y^3}\,dy,\quad y > 5$
13. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}},\quad x > 1$
14. $\int \frac{2\,dx}{x^3\sqrt{x^2-1}},\quad x > 1$
15. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2+4}}$
16. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}$
17. $\int \frac{8\,dw}{w^2\sqrt{4-w^2}}$
18. $\int \frac{\sqrt{9-w^2}}{w^2}\,dw$
19. $\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{4x^2\,dx}{(1-x^2)^{3/2}}$
20. $\int_0^1 \frac{dx}{(4-x^2)^{3/2}}$
21. $\int \frac{dx}{(x^2-1)^{3/2}},\quad x > 1$
22. $\int \frac{x^2\,dx}{(x^2-1)^{5/2}},\quad x > 1$
23. $\int \frac{(1-x^2)^{3/2}}{x^6}\,dx$
24. $\int \frac{(1-x^2)^{1/2}}{x^4}\,dx$
25. $\int \frac{8\,dx}{(4x^2+1)^2}$
26. $\int \frac{6\,dt}{(9t^2+1)^2}$
27. $\int \frac{v^2\,dv}{(1-v^2)^{5/2}}$
28. $\int \frac{(1-r^2)^{5/2}}{r^8}\,dr$

En los ejercicios 29 a 36, utilice una sustitución apropiada y después una sustitución trigonométrica para evaluar las integrales.

29. $\int_0^{\ln 4} \frac{e^t\,dt}{\sqrt{e^{2t}+9}}$
30. $\int_{\ln(3/4)}^{\ln(4/3)} \frac{e^t\,dt}{(1+e^{2t})^{3/2}}$
31. $\int_{1/12}^{1/4} \frac{2\,dt}{\sqrt{t}+4t\sqrt{t}}$
32. $\int_1^e \frac{dy}{y\sqrt{1+(\ln y)^2}}$
33. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$
34. $\int \frac{dx}{1+x^2}$
35. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$
36. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Problemas con valor inicial

Resuelva los problemas con valor inicial de los ejercicios 37 a 40 para y como una función de x.

37. $x\frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2-4},\quad x \geq 2,\quad y(2) = 0$
38. $\sqrt{x^2-9}\frac{dy}{dx} = 1,\quad x > 3,\quad y(5) = \ln 3$
39. $(x^2+4)\frac{dy}{dx} = 3,\quad y(2) = 0$
40. $(x^2+1)^2\frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2+1},\quad y(0) = 1$

Aplicaciones

41. Determine el área de la región en el primer cuadrante que está acotada por los ejes coordenados y la curva $y = \sqrt{9 - x^2}/3$.

42. Determine el volumen del sólido generado al hacer girar, alrededor del eje x, la región en el primer cuadrante acotada por los ejes coordenados, la curva $y = 2/(1 + x^2)$, y la recta $x = 1$.

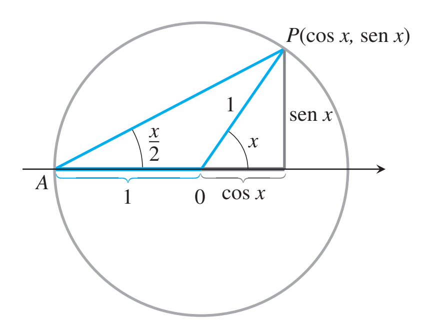
La sustitución $z = \tan(x/2)$

La sustitución

$$z = \tan\frac{x}{2} \tag{1}$$

reduce el problema de integración de expresión racional en sen x y cos x a un problema de integración de una función racional de z. Esto a su vez puede integrarse por medio de fracciones parciales.

De la siguiente figura



vemos la relación

$$\tan\frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}.$$

Para ver el efecto de la sustitución, calculamos

$$\cos x = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = \frac{2}{\sec^2(x/2)} - 1$$

$$= \frac{2}{1 + \tan^2(x/2)} - 1 = \frac{2}{1 + z^2} - 1$$

$$\cos x = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}, \tag{2}$$

y

$$\operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\frac{\operatorname{sen}(x/2)}{\cos(x/2)} \cdot \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= 2\tan\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{\sec^2(x/2)} = \frac{2\tan(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)}$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{2z}{1 + z^2}. \tag{3}$$

Por último, $x = 2\tan^{-1} z$, por lo que

$$dx = \frac{2\,dz}{1 + z^2}. \tag{4}$$

Ejemplos

a. $$\int \frac{1}{1 + \cos x}\,dx = \int \frac{1 + z^2}{2}\frac{2\,dz}{1 + z^2}$$

$$= \int dz = z + C$$

$$= \tan\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

b. $$\int \frac{1}{2 + \operatorname{sen} x}\,dx = \int \frac{1 + z^2}{2 + 2z + 2z^2}\frac{2\,dz}{1 + z^2}$$

$$= \int \frac{dz}{z^2 + z + 1} = \int \frac{dz}{(z + (1/2))^2 + 3/4}$$

$$= \int \frac{du}{u^2 + a^2}$$

$$= \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2z + 1}{\sqrt{3}} + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{1 + 2\tan(x/2)}{\sqrt{3}} + C$$

Utilice las sustituciones de las ecuaciones (1) a (4) para evaluar las integrales de los ejercicios 43 a 50. Integrales como éstas surgen en el cálculo de la velocidad angular promedio del eje secundario de una junta universal, cuando los ejes primario y secundario no están alineados.

43. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 - \operatorname{sen} x}$

44. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen} x + \cos x}$

45. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \operatorname{sen} x}$

46. $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{1 - \cos x}$

47. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{2 + \cos\theta}$

48. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{2\pi/3} \frac{\cos\theta\,d\theta}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \operatorname{sen}\theta}$

49. $\displaystyle\int \frac{dt}{\operatorname{sen} t - \cos t}$

50. $\displaystyle\int \frac{\cos t\,dt}{1 - \cos t}$

Utilice la sustitución $z = \tan(\theta/2)$ para evaluar las integrales de los ejercicios 51 y 52.

51. $\displaystyle\int \sec\theta\,d\theta$

52. $\displaystyle\int \csc\theta\,d\theta$

8.6 Tablas de integrales y sistemas de álgebra por computadora (SAC)

Como hemos estudiado, las técnicas básicas de integración son la sustitución y la integración por partes. Aplicamos estas técnicas para transformar integrales no conocidas en integrales cuyas formas reconocemos o podemos encontrar en una tabla. Pero, ¿de dónde vienen las integrales que conforman las tablas? Vienen de la aplicación de sustituciones e integración por partes, de la diferenciación de funciones importantes que aparecen en la práctica o en aplicaciones. El resultado se coloca en una tabla (como hicimos al crear la tabla 8.1). Cuando una integral coincide con una integral de la tabla o puede transformarse en una de tales integrales con alguna combinación de álgebra, trigonometría, sustitución o algún otro cálculo apropiado, el resultado puede utilizarse para resolver el problema de integración que se tenga.

Los sistemas de álgebra por computadora (SAC), conocidos también con el nombre genérico de *software matemático*, también pueden usarse para evaluar una integral, si es que tal sistema está disponible. Sin embargo, es conveniente tener en cuenta que existen muchas funciones relativamente sencillas, como $\operatorname{sen}(x^2)$ o $1/\ln x$, en las que incluso los sistemas de cómputo más poderosos son incapaces de encontrar fórmulas explícitas para la antiderivada, ya que no existen tales fórmulas.

En esta sección analizaremos cómo utilizar tablas y sistemas de álgebra por computadora para evaluar integrales.

Tablas de integrales

Al final de este libro, después del índice, se ofrece una tabla de integrales. (Tablas más extensas aparecen en antologías como *CRC Mathematical Tables,* que contienen miles de integrales). Las fórmulas de integración se establecen en términos de constantes a, b, c, m, n, etcétera. Por lo regular estas constantes toman cualquier valor real y no necesitan ser enteros. Las restricciones ocasionales en sus valores se indican en las fórmulas. Por ejemplo, la fórmula 5 requiere que $n \neq -1$, y la fórmula 11 que $n \neq 2$.

En las fórmulas se supone que las constantes no toman valores que impliquen la división entre cero ni la extracción de raíces pares de números negativos. Por ejemplo, la fórmula 8 supone que $a \neq 0$, y las fórmulas 13(a) y (b) no pueden utilizarse, a menos que b sea positiva.

En los ejemplos 1 a 5 de esta sección, las integrales pueden evaluarse por medio de manipulación algebraica, sustitución o integración por partes. A continuación se ilustra cómo determinar las integrales utilizando la tabla de integrales.

EJEMPLO 1 Determinar

$$\int x(2x + 5)^{-1}\,dx.$$

Solución Utilizamos la fórmula 8 (no la 7, la cual requiere que $n \neq -1$):

$$\int x(ax + b)^{-1}\,dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2}\ln|ax + b| + C.$$

Con $a = 2$ y $b = 5$, tenemos

$$\int x(2x + 5)^{-1}\,dx = \frac{x}{2} - \frac{5}{4}\ln|2x + 5| + C.$$ ■

EJEMPLO 2 Determinar

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x + 4}}.$$

Solución Utilizamos la fórmula 13(b):

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \ln \left| \frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}} \right| + C, \qquad \text{si } b > 0.$$

Con $a = 2$ y $b = 4$, tenemos

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+4}} = \frac{1}{\sqrt{4}} \ln \left| \frac{\sqrt{2x+4}-\sqrt{4}}{\sqrt{2x+4}+\sqrt{4}} \right| + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{2x+4}-2}{\sqrt{2x+4}+2} \right| + C.$$

La fórmula 13(a), que requiere $b < 0$, no es adecuada para el ejemplo 2. Sin embargo, sí lo es para el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 3 Determinar

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-4}}.$$

Solución Utilizamos la fórmula 13(a):

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax-b}} = \frac{2}{\sqrt{b}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{ax-b}{b}} + C.$$

Con $a = 2$ y $b = 4$, tenemos

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-4}} = \frac{2}{\sqrt{4}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{2x-4}{4}} + C = \tan^{-1} \sqrt{\frac{x-2}{2}} + C.$$

EJEMPLO 4 Determinar

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2x-4}}.$$

Solución Iniciamos con la fórmula 15:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{ax+b}} = -\frac{\sqrt{ax+b}}{bx} - \frac{a}{2b} \int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} + C.$$

Con $a = 2$ y $b = -4$, tenemos

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2x-4}} = -\frac{\sqrt{2x-4}}{-4x} + \frac{2}{2\cdot 4} \int \frac{dx}{x\sqrt{2x-4}} + C.$$

Después utilizamos la fórmula 13(a) para evaluar la integral del lado derecho (ejemplo 3), para obtener

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2x-4}} = \frac{\sqrt{2x-4}}{4x} + \frac{1}{4} \tan^{-1} \sqrt{\frac{x-2}{2}} + C.$$

EJEMPLO 5 Determinar

$$\int x \operatorname{sen}^{-1} x \, dx.$$

Solución Utilizamos la fórmula 99:

$$\int x^n \operatorname{sen}^{-1} ax\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\operatorname{sen}^{-1} ax - \frac{a}{n+1}\int \frac{x^{n+1}\, dx}{\sqrt{1-a^2x^2}}, \qquad n \neq -1.$$

Con $n = 1$ y $a = 1$, tenemos

$$\int x \operatorname{sen}^{-1} x\, dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{sen}^{-1} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

La integral del lado derecho se encuentra en la tabla como la fórmula 33:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx = \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + C.$$

Con $a = 1$,

$$\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1} x - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C.$$

El resultado combinado es

$$\begin{aligned}\int x \operatorname{sen}^{-1} x\, dx &= \frac{x^2}{2}\operatorname{sen}^{-1} x - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1} x - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C\right)\\ &= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\right)\operatorname{sen}^{-1} x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} + C'.\end{aligned}$$

■

Fórmulas de reducción

El tiempo que se requiere para integración por partes repetida en ocasiones se puede reducir aplicando fórmulas como

$$\int \tan^n x\, dx = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x\, dx \tag{1}$$

$$\int (\ln x)^n\, dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}\, dx \tag{2}$$

$$\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x\, dx = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} x \cos^{m+1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x \cos^m x\, dx \qquad (n \neq -m). \tag{3}$$

Fórmulas como éstas se denominan **fórmulas de reducción**, ya que reemplazan una integral con alguna potencia de una función, por una integral de la misma forma pero con la potencia de menor grado. Al aplicar tal fórmula de repetidamente, se puede expresar la integral original en términos de una potencia suficientemente baja, que puede evaluarse de manera directa.

EJEMPLO 6 Uso de una fórmula de reducción

Determinar

$$\int \tan^5 x\, dx.$$

Solución Aplicamos la ecuación (1) con $n = 5$ para obtener

$$\int \tan^5 x\, dx = \frac{1}{4}\tan^4 x - \int \tan^3 x\, dx.$$

Después aplicamos de nuevo la ecuación (1), con $n = 3$, para evaluar la integral que queda:

$$\int \tan^3 x\, dx = \frac{1}{2}\tan^2 x - \int \tan x\, dx = \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\cos x| + C.$$

El resultado combinado es

$$\int \tan^5 x\, dx = \frac{1}{4}\tan^4 x - \frac{1}{2}\tan^2 x - \ln|\cos x| + C'.$$ ■

Como sugiere su forma, las fórmulas de reducción se deducen por medio de integración por partes.

EJEMPLO 7 Deducción de una fórmula de reducción

Demostrar que, para cualquier entero positivo n,

$$\int (\ln x)^n\, dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}\, dx.$$

Solución Utilizamos la fórmula de integración por partes

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

con

$$u = (\ln x)^n, \qquad du = n(\ln x)^{n-1}\frac{dx}{x}, \qquad dv = dx, \qquad v = x,$$

para obtener

$$\int (\ln x)^n\, dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}\, dx.$$ ■

A veces pueden utilizarse dos fórmulas de reducción en el mismo problema.

EJEMPLO 8 Determinar

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x\, dx.$$

Solución 1 Aplicamos la ecuación (3) con $n = 2$ y $m = 3$ para obtener

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x\, dx &= -\frac{\operatorname{sen} x \cos^4 x}{2+3} + \frac{1}{2+3}\int \operatorname{sen}^0 x \cos^3 x\, dx \\ &= -\frac{\operatorname{sen} x \cos^4 x}{5} + \frac{1}{5}\int \cos^3 x\, dx.\end{aligned}$$

Podemos evaluar la integral que queda con la fórmula 61 (otra fórmula de reducción):

$$\int \cos^n ax\, dx = \frac{\cos^{n-1} ax \operatorname{sen} ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} ax\, dx.$$

Con $n = 3$ y $a = 1$, tenemos

$$\int \cos^3 x\, dx = \frac{\cos^2 x \operatorname{sen} x}{3} + \frac{2}{3}\int \cos x\, dx$$

$$= \frac{\cos^2 x \operatorname{sen} x}{3} + \frac{2}{3}\operatorname{sen} x + C.$$

El resultado combinado es

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x\, dx = -\frac{\operatorname{sen} x \cos^4 x}{5} + \frac{1}{5}\left(\frac{\cos^2 x \operatorname{sen} x}{3} + \frac{2}{3}\operatorname{sen} x + C\right)$$

$$= -\frac{\operatorname{sen} x \cos^4 x}{5} + \frac{\cos^2 x \operatorname{sen} x}{15} + \frac{2}{15}\operatorname{sen} x + C'.$$

Solución 2 La ecuación (3) corresponde a la fórmula 68 de la tabla, pero hay otra fórmula que podríamos utilizar, la fórmula 69. Con $a = 1$, la fórmula 69 da

$$\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x\, dx = \frac{\operatorname{sen}^{n+1} x \cos^{m-1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \operatorname{sen}^n x \cos^{m-2} x\, dx.$$

En nuestro caso, $n = 2$ y $m = 3$, de modo que

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x\, dx = \frac{\operatorname{sen}^3 x \cos^2 x}{5} + \frac{2}{5}\int \operatorname{sen}^2 x \cos x\, dx$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^3 x \cos^2 x}{5} + \frac{2}{5}\left(\frac{\operatorname{sen}^3 x}{3}\right) + C$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^3 x \cos^2 x}{5} + \frac{2}{15}\operatorname{sen}^3 x + C.$$

Como podemos ver, es más rápido al utilizar la fórmula 69, pero a menudo no podemos saber de antemano cómo resultarán las cosas. No destine demasiado tiempo a buscar la “mejor” fórmula. Sólo encuentre una que funcione y proceda.

También observe que las fórmulas 68 (solución 1) y 60 (solución 2) llevan a respuestas que se ven diferentes. Esto es frecuente con integrales trigonométricas y no debe causar consternación. Los resultados son equivalentes y podemos utilizar el que más nos guste. ■

Integrales no elementales

El desarrollo de computadoras y calculadoras que encuentran antiderivadas por medio de manipulación simbólica, ha llevado a un interés renovado por la determinación de qué antiderivadas pueden expresarse como una combinación finita de funciones elementales (las funciones que hemos estudiado) y cuáles no. Las integrales de funciones que no tienen antiderivadas elementales se denominan **integrales no elementales.** Para su evaluación se requieren series infinitas (capítulo 11), o métodos numéricos. Ejemplo de estas últimas es la función error (conocida como *erf*, y cuyo propósito es medir la probabilidad de errores aleatorios)

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

e integrales como

$$\int \operatorname{sen} x^2\, dx \qquad \text{y} \qquad \int \sqrt{1 + x^4}\, dx$$

que surgen en ingeniería y física. Éstas y varias otras, como

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx, \qquad \int e^{(e^x)}\,dx, \qquad \int \frac{1}{\ln x}\,dx, \qquad \int \ln(\ln x)\,dx, \int \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx,$$

$$\int \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 x}\,dx, \qquad 0 < k < 1,$$

parecen tan sencillas que nos sentimos tentados a averiguar cómo se calculan. Sin embargo, se puede demostrar que no hay forma de expresar estas integrales como combinaciones finitas de funciones elementales. Lo mismo se aplica a integrales que puedan transformarse en las anteriores por sustitución. De acuerdo con el Teorema Fundamental del Cálculo, parte 1, todos los integrandos de arriba tienen antiderivadas, ya que son continuos. Sin embargo ninguna de sus antiderivadas es elemental.

Ninguna de las integrales que se le pedirá evaluar en este capítulo entra en esta categoría, pero es posible que encuentre integrales no elementales en otros contextos.

Integración con un software matemático

Una de las capacidades más importantes de los sistemas de software matemático es la integración simbólica. Esto se realiza con un **comando para integrar**, específico para cada sistema particular (por ejemplo, **int** en Maple, **Integrate** en Mathematica).

EJEMPLO 9 Uso de un software matemático con una función declarada

Suponga que quiere evaluar la integral indefinida de la función

$$f(x) = x^2\sqrt{a^2 + x^2}.$$

Por medio de Maple, primero se define o declara la función:

```
> f:= x^2 * sqrt (a^2 + x^2);
```

Después se utiliza el comando para integrar sobre f, identificando la variable de integración:

```
> int(f, x);
```

Maple da la siguiente solución:

$$\frac{1}{4}x(a^2 + x^2)^{3/2} - \frac{1}{8}a^2x\sqrt{a^2 + x^2} - \frac{1}{8}a^4\ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right).$$

Para averiguar si la respuesta puede simplificarse, introduzca

```
> simplify(%);
```

Maple da:

$$\frac{1}{8}a^2x\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{1}{4}x^3\sqrt{a^2 + x^2} - \frac{1}{8}a^4\ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right).$$

Si queremos la integral definida para $0 \le x \le \pi/2$, podemos utilizar el formato

```
> int(f, x = 0..Pi/2);
```

Maple (versión 5.1) dará como resultado la expresión

$$\frac{1}{64}\pi(4a^2 + \pi^2)^{(3/2)} - \frac{1}{32}a^2\pi\sqrt{4a^2 + \pi^2} + \frac{1}{8}a^4\ln(2)$$
$$- \frac{1}{8}a^4\ln\left(\pi + \sqrt{4a^2 + \pi^2}\right) + \frac{1}{16}a^4\ln(a^2).$$

También se puede hallar la integral definida para un valor particular de la constante a:

$$> a := 1;$$

$$> \text{int}(f, x = 0..1);$$

Maple da esta respuesta numérica

$$\frac{3}{8}\sqrt{2} + \frac{1}{8}\ln\left(\sqrt{2} - 1\right).$$

EJEMPLO 10 Uso de un software matemático sin definir la función

Utilice un software matemático para determinar

$$\int \text{sen}^2 x \cos^3 x \, dx.$$

Solución En Maple introducimos

$$> \text{int}\,((\sin\text{^}2)(x) * (\cos\text{^}3)(x), x);$$

(recuerde escribir **sin** en lugar de **sen**, ya que este tipo de software admite los comandos en inglés; asimismo, recuerde que las respuestas se dan también en dicho idioma)

y obtenemos

$$-\frac{1}{5}\sin(x)\cos(x)^4 + \frac{1}{15}\cos(x)^2\sin(x) + \frac{2}{15}\sin(x).$$

EJEMPLO 11 El software matemático podría no dar una solución en forma cerrada

Utilice un software matemático para determinar

$$\int (\cos^{-1} ax)^2 \, dx.$$

Solución Con Maple, introduzca

$$> \text{int}((\arccos(a * x))\text{^}2, x);$$

y Maple responde con la expresión

$$\int \arccos(ax)^2 \, dx,$$

con lo que indica que no tiene una solución en forma cerrada. En el capítulo 11 veremos cómo el desarrollo en serie puede ayudar a evaluar integrales como ésta.

En los distintos paquetes de software matemático, la forma en que se procesan las integraciones varía. En los ejemplos 9 a 11 utilizamos Maple 5.1. Mathematica habría dado resultados un poco diferentes:

1. En el ejemplo 9, dada

$$\textit{In [1]:=}\ \text{Integrate}\,[x\text{^}2 * \text{Sqrt}\,[a\text{^}2 + x\text{^}2], x]$$

Mathematica da

$$\textit{Out [1]=}\ \sqrt{a^2 + x^2}\left(\frac{a^2 x}{8} + \frac{x^3}{4}\right) - \frac{1}{8}a^4\,\text{Log}\left[x + \sqrt{a^2 + x^2}\right]$$

sin tener que simplificar un resultado intermedio. La respuesta es parecida a la fórmula 22 en las tablas de integrales.

2. La respuesta de Mathematica para la integral

In [2]:= Integrate [Sin [*x*]^2 * Cos [*x*]^3, *x*]

del ejemplo 10 es

$$Out\ [2]\!= \frac{\text{Sin}\,[x]}{8} - \frac{1}{48}\text{Sin}\,[3\,x] - \frac{1}{80}\text{Sin}\,[5\,x]$$

que difiere de la respuesta de Maple y de las respuestas que se dieron al ejemplo 8.

3. En el caso de la integración

In [3]:= Integrate [ArcCos [*a* * *x*]^2, *x*]

del ejemplo 11, Mathematica da el siguiente resultado, siempre y cuando $a \neq 0$:

$$Out\ [3]\!= -2x - \frac{2\sqrt{1 - a^2 x^2}\ \text{ArcCos}\,[a\,x]}{a} + x\ \text{ArcCos}\,[a\,x]^2$$

Aunque los paquetes de software matemático son muy poderosos y nos pueden ayudar a resolver problemas difíciles, cada uno de ellos tiene sus propias limitaciones. Incluso existen situaciones en donde un software matemático puede hacer más complicado un problema (en el sentido de producir una respuesta extremadamente difícil de utilizar o interpretar). Además, observe que ni Maple ni Mathematica dan como respuesta una constante arbitraria $+C$. Por otro lado, con un poco de reflexión matemática de su parte, puede reducir el problema a otro que sea más fácil de resolver. En el ejercicio 111 se presenta un ejemplo de lo anterior.

EJERCICIOS 8.6

Uso de tablas de integrales

Utilice la tabla de integrales de la parte final del libro para evaluar las integrales de los ejercicios 1 a 38.

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x - 3}}$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x + 4}}$

3. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x - 2}}$

4. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(2x + 3)^{3/2}}$

5. $\displaystyle\int x\sqrt{2x - 3}\,dx$

6. $\displaystyle\int x(7x + 5)^{3/2}\,dx$

7. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9 - 4x}}{x^2}\,dx$

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4x - 9}}$

9. $\displaystyle\int x\sqrt{4x - x^2}\,dx$

10. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x - x^2}}{x}\,dx$

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{7 + x^2}}$

12. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{7 - x^2}}$

13. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x}\,dx$

14. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x}\,dx$

15. $\displaystyle\int \sqrt{25 - p^2}\,dp$

16. $\displaystyle\int q^2\sqrt{25 - q^2}\,dq$

17. $\displaystyle\int \frac{r^2}{\sqrt{4 - r^2}}\,dr$

18. $\displaystyle\int \frac{ds}{\sqrt{s^2 - 2}}$

19. $\displaystyle\int \frac{d\theta}{5 + 4\,\text{sen}\,2\theta}$

20. $\displaystyle\int \frac{d\theta}{4 + 5\,\text{sen}\,2\theta}$

21. $\displaystyle\int e^{2t}\cos 3t\,dt$

22. $\displaystyle\int e^{-3t}\,\text{sen}\,4t\,dt$

23. $\displaystyle\int x\cos^{-1}x\,dx$

24. $\displaystyle\int x\tan^{-1}x\,dx$

25. $\displaystyle\int \frac{ds}{(9 - s^2)^2}$

26. $\displaystyle\int \frac{d\theta}{(2 - \theta^2)^2}$

27. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4x + 9}}{x^2}\,dx$

28. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9x - 4}}{x^2}\,dx$

29. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{3t - 4}}{t}\,dt$

30. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{3t + 9}}{t}\,dt$

31. $\displaystyle\int x^2\tan^{-1}x\,dx$

32. $\displaystyle\int \frac{\tan^{-1}x}{x^2}\,dx$

33. $\displaystyle\int \text{sen}\,3x\cos 2x\,dx$

34. $\displaystyle\int \text{sen}\,2x\cos 3x\,dx$

35. $\int 8 \operatorname{sen} 4t \operatorname{sen} \frac{t}{2}\, dt$

36. $\int \operatorname{sen} \frac{t}{3} \operatorname{sen} \frac{t}{6}\, dt$

37. $\int \cos \frac{\theta}{3} \cos \frac{\theta}{4}\, d\theta$

38. $\int \cos \frac{\theta}{2} \cos 7\theta\, d\theta$

Sustitución y tablas de integrales

En los ejercicios 39 a 52, utilice una sustitución para cambiar la integral por una que pueda encontrar en la tabla. Después evalúe la integral.

39. $\int \frac{x^3 + x + 1}{(x^2 + 1)^2}\, dx$

40. $\int \frac{x^2 + 6x}{(x^2 + 3)^2}\, dx$

41. $\int \operatorname{sen}^{-1} \sqrt{x}\, dx$

42. $\int \frac{\cos^{-1} \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

43. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1 - x}}\, dx$

44. $\int \frac{\sqrt{2 - x}}{\sqrt{x}}\, dx$

45. $\int \cot t \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t}\, dt, \quad 0 < t < \pi/2$

46. $\int \frac{dt}{\tan t \sqrt{4 - \operatorname{sen}^2 t}}$

47. $\int \frac{dy}{y \sqrt{3 + (\ln y)^2}}$

48. $\int \frac{\cos \theta\, d\theta}{\sqrt{5 + \operatorname{sen}^2 \theta}}$

49. $\int \frac{3\, dr}{\sqrt{9r^2 - 1}}$

50. $\int \frac{3\, dy}{\sqrt{1 + 9y^2}}$

51. $\int \cos^{-1} \sqrt{x}\, dx$

52. $\int \tan^{-1} \sqrt{y}\, dy$

Uso de fórmulas de reducción

Utilice las fórmulas de reducción para evaluar las integrales en los ejercicios 53 a 72.

53. $\int \operatorname{sen}^5 2x\, dx$

54. $\int \operatorname{sen}^5 \frac{\theta}{2}\, d\theta$

55. $\int 8 \cos^4 2\pi t\, dt$

56. $\int 3 \cos^5 3y\, dy$

57. $\int \operatorname{sen}^2 2\theta \cos^3 2\theta\, d\theta$

58. $\int 9 \operatorname{sen}^3 \theta \cos^{3/2} \theta\, d\theta$

59. $\int 2 \operatorname{sen}^2 t \sec^4 t\, dt$

60. $\int \csc^2 y \cos^5 y\, dy$

61. $\int 4 \tan^3 2x\, dx$

62. $\int \tan^4 \left(\frac{x}{2}\right) dx$

63. $\int 8 \cot^4 t\, dt$

64. $\int 4 \cot^3 2t\, dt$

65. $\int 2 \sec^3 \pi x\, dx$

66. $\int \frac{1}{2} \csc^3 \frac{x}{2}\, dx$

67. $\int 3 \sec^4 3x\, dx$

68. $\int \csc^4 \frac{\theta}{3}\, d\theta$

69. $\int \csc^5 x\, dx$

70. $\int \sec^5 x\, dx$

71. $\int 16x^3 (\ln x)^2\, dx$

72. $\int (\ln x)^3\, dx$

Potencias de *x* multiplicadas por exponenciales

Evalúe las integrales en los ejercicios 73 a 80, utilizando las fórmulas 103 a 106 de la tabla. Estas integrales también se pueden evaluar por medio de la integración tabular (sección 8.2).

73. $\int x e^{3x}\, dx$

74. $\int x e^{-2x}\, dx$

75. $\int x^3 e^{x/2}\, dx$

76. $\int x^2 e^{\pi x}\, dx$

77. $\int x^2\, 2^x\, dx$

78. $\int x^2\, 2^{-x}\, dx$

79. $\int x \pi^x\, dx$

80. $\int x 2^{\sqrt{2}x}\, dx$

Sustitución con fórmulas de reducción

Evalúe las integrales de los ejercicios 81 a 86; primero haga una sustitución (quizá trigonométrica) y después aplique una fórmula de reducción.

81. $\int e^t \sec^3 (e^t - 1)\, dt$

82. $\int \frac{\csc^3 \sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}}\, d\theta$

83. $\int_0^1 2\sqrt{x^2 + 1}\, dx$

84. $\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{dy}{(1 - y^2)^{5/2}}$

85. $\int_1^2 \frac{(r^2 - 1)^{3/2}}{r}\, dr$

86. $\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{dt}{(t^2 + 1)^{7/2}}$

Funciones hiperbólicas

Utilice la tabla de integrales para evaluar las integrales en los ejercicios 87 a 92.

87. $\int \frac{1}{8} \operatorname{senh}^5 3x\, dx$

88. $\int \frac{\cosh^4 \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

89. $\int x^2 \cosh 3x\, dx$

90. $\int x \operatorname{senh} 5x\, dx$

91. $\int \operatorname{sech}^7 x \tanh x\, dx$

92. $\int \operatorname{csch}^3 2x \coth 2x\, dx$

Teoría y ejemplos

Los ejercicios 93 a 100 hacen referencia a la tabla de integrales del final del texto.

93. Deduzca la fórmula 9 por medio de la sustitución $u = ax + b$ para evaluar

$$\int \frac{x}{(ax + b)^2}\, dx.$$

94. Deduzca la fórmula 17, por medio de una sustitución trigonométrica, para evaluar

$$\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^2}.$$

95. Deduzca la fórmula 29, usando una sustitución trigonométrica, para evaluar

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx.$$

96. Deduzca la fórmula 46, usando una sustitución trigonométrica, para evaluar

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

97. Deduzca la fórmula 80 evaluando

$$\int x^n \operatorname{sen} ax\, dx$$

mediante integración por partes.

98. Deduzca la fórmula 110 evaluando

$$\int x^n (\ln ax)^m\, dx$$

mediante integración por partes.

99. Deduzca la fórmula 99 evaluando

$$\int x^n \operatorname{sen}^{-1} ax\, dx$$

mediante integración por partes.

100. Deduzca la fórmula 101 evaluando

$$\int x^n \tan^{-1} ax\, dx$$

mediante integración por partes.

101. Área de una superficie Determine el área de la superficie generada al hacer girar, alrededor del eje x, la curva $y = \sqrt{x^2 + 2}$, $0 \le x \le \sqrt{2}$.

102. Longitud de arco Determine la longitud de la curva $y = x^2$, $0 \le x \le \sqrt{3}/2$.

103. Centroide Halle el centroide de la región en el primer cuadrante determinada por la curva $y = 1/\sqrt{x + 1}$ y la recta $x = 3$.

104. Momento respecto del eje *y* Una placa delgada de densidad constante $\delta = 1$ ocupa la región acotada por la curva $y = 36/(2x + 3)$ y la recta $x = 3$ en el primer cuadrante. Determine el momento de la placa respecto del eje y.

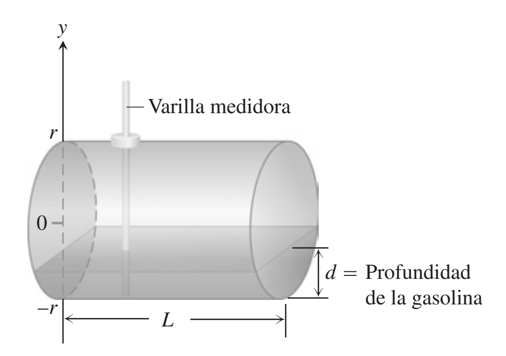
T **105.** Utilice la tabla de integrales y una calculadora para determinar, con dos decimales, el área de la superficie generada al hacer girar, alrededor del eje x, la curva $y = x^2$, $-1 \le x \le 1$.

106. Volumen La jefa del departamento de contabilidad de la empresa en donde usted trabaja le ha pedido determinar una fórmula que pueda utilizar en un programa de cómputo para calcular el inventario de fin de año de la gasolina contenida en los depósitos de la compañía. Cada depósito tiene forma de un cilindro circular recto de radio r y longitud L, montado en forma horizontal, como se muestra a continuación. La información que llega al departamento de contabilidad como medidas de la profundidad, se toma con una varilla medidora, graduada en centímetros.

a. Demuestre, en la notación de la figura, que el volumen de la gasolina en el tanque hasta una profundidad d es

$$V = 2L\int_{-r}^{-r+d} \sqrt{r^2 - y^2}\, dy.$$

b. Evalúe la integral.



107. ¿Cuál es el mayor valor que

$$\int_a^b \sqrt{x - x^2}\, dx$$

puede tener para cualesquiera valores de a y b? Justifique su respuesta.

108. ¿Cuál es el mayor valor que

$$\int_a^b x\sqrt{2x - x^2}\, dx$$

puede tener para cualesquiera valores de a y b? Justifique su respuesta.

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

En los ejercicios 109 y 110, utilice un software matemático para realizar las integraciones.

109. Evalúe las integrales

a. $\int x \ln x\, dx$ **b.** $\int x^2 \ln x\, dx$ **c.** $\int x^3 \ln x\, dx.$

d. ¿Observa algún patrón? Trate de predecir la fórmula para $\int x^4 \ln x\, dx$ y después evalúe su conjetura con un software matemático para ver si es correcta.

e. ¿Cuál es la fórmula para $\int x^n \ln x\, dx$, $n \ge 1$? Compruebe su respuesta utilizando un software matemático.

110. Evalúe las integrales

a. $\int \frac{\ln x}{x^2}\, dx$ **b.** $\int \frac{\ln x}{x^3}\, dx$ **c.** $\int \frac{\ln x}{x^4}\, dx.$

d. ¿Observa algún patrón? Trate de predecir la fórmula para

$$\int \frac{\ln x}{x^5}\, dx$$

y después evalúela con un software matemático para ver si es correcta.

e. ¿Cuál es la fórmula para

$$\int \frac{\ln x}{x^n}\, dx, \quad n \ge 2?$$

Verifique su respuesta utilizando un software matemático.

111. **a.** Utilice un software matemático para evaluar

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^n x}{\operatorname{sen}^n x + \cos^n x}\, dx$$

en donde n es un entero positivo arbitrario. ¿Es posible determinar el resultado con el software matemático que está empleando?

b. De manera sucesiva, determine la integral cuando $n = 1, 2, 3, 5, 7$. Comente la complejidad de los resultados.

c. Ahora haga la sustitución $x = (\pi/2) - u$ y sume la nueva integral con la anterior. ¿Cuál es el valor de

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^n x}{\operatorname{sen}^n x + \cos^n x}\, dx?$$

Este ejercicio ilustra cómo un poco de ingenio matemático resuelve un problema que no puede ser resuelto de forma inmediata con un software matemático.

8.7 Integración numérica

Como hemos visto, la manera ideal de evaluar una integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ consiste en determinar una fórmula $F(x)$ para una de las antiderivadas de $f(x)$ y calcular el número $F(b) - F(a)$. Pero encontrar algunas antiderivadas requiere considerable trabajo, e incluso otras, como las antiderivadas de $\operatorname{sen}(x^2)$, $1/\ln x$, y $\sqrt{1 + x^4}$, no tienen fórmulas elementales.

Se da otra situación cuando una función se define por medio de una tabla, cuyas entradas fueron obtenidas de manera experimental a partir de la lectura de instrumentos. En este caso, incluso podría no existir una fórmula para la función.

Sin importar la razón, cuando evaluar una integral definida con una antiderivada no es posible, volvemos nuestra atención a métodos numéricos como la *regla del trapecio* o la *regla de Simpson*, de las que hablaremos en esta sección.En comparación con las distintas reglas de rectángulos que se presentaron en las secciones 5.1 y 5.2, estas reglas por lo regular requieren de muchas menos divisiones del intervalo de integración, para obtener resultados precisos. También estimaremos el error que se tiene al aproximar el valor de una integral con estos métodos.

Aproximaciones por trapecios

Cuando tenemos que integrar y no podemos determinar una antiderivada sencilla para una función f, dividimos el intervalo de integración, reemplazamos f por un polinomio que la aproxime suficientemente bien en cada subintervalo, integramos los polinomios y sumamos los resultados para aproximar la integral de f. En nuestro análisis supondremos que f es positiva, pero el único requisito es que f sea continua en el intervalo de integración $[a, b]$.

La regla del trapecio para el valor de la integral definida se basa en la aproximación de la región entre una curva y el eje x, con trapecios en lugar de rectángulos, como en la figura 8.10. No es necesario que los puntos de subdivisión $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ de la figura estén igualmente espaciados, pero la fórmula es mucho más sencilla si lo están. Por lo tanto, supondremos que la longitud de cada subintervalo es

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}.$$

La longitud $\Delta x = (b - a)/n$ se denomina **longitud del paso** o **tamaño de la malla**. El área del trapecio que está arriba del i–ésimo subintervalo es

$$\Delta x \left(\frac{y_{i-1} + y_i}{2} \right) = \frac{\Delta x}{2}(y_{i-1} + y_i),$$

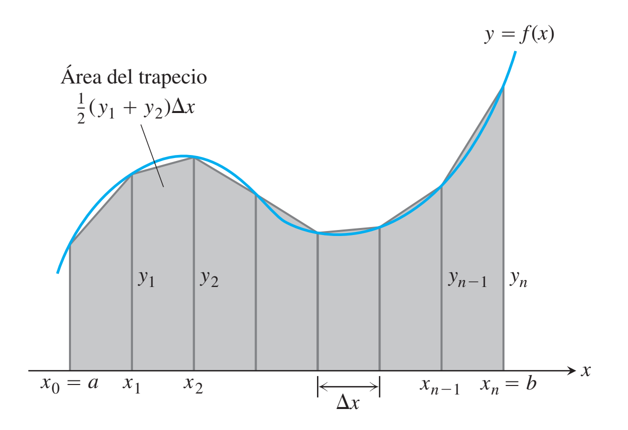


FIGURA 8.10 La regla del trapecio aproxima pequeñas secciones de la curva $y = f(x)$ con segmentos de rectas. Para aproximar la integral de f de a a b, sumamos las áreas de los trapecios formados al unir los extremos de los segmentos con el eje x.

en donde $y_{i-1} = f(x_{i-1})$ y $y_i = f(x_i)$. Esta área es igual a la longitud Δx de la "altura" horizontal del trapecio, multiplicada por el promedio de sus dos "bases" verticales. (Vea la figura 8.10). Entonces, el área que está debajo de la curva $y = f(x)$ y encima del eje x se aproxima sumando las áreas de todos los trapecios:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(y_0 + y_1)\Delta x + \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\Delta x + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{2}(y_{n-2} + y_{n-1})\Delta x + \frac{1}{2}(y_{n-1} + y_n)\Delta x \\ &= \Delta x\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right) \\ &= \frac{\Delta x}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n), \end{aligned}$$

en donde

$$y_0 = f(a), \qquad y_1 = f(x_1), \qquad \ldots, \qquad y_{n-1} = f(x_{n-1}), \qquad y_n = f(b).$$

La regla del trapecio indica: utilice T para estimar la integral de f desde a hasta b.

Regla del trapecio

Para aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$, utilice

$$T = \frac{\Delta x}{2}\left(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n\right).$$

Las y's son los valores de f en los puntos de la partición

$x_0 = a, x_1 = a + \Delta x, x_2 = a + 2\Delta x, \ldots, x_{n-1} = a + (n-1)\Delta x, x_n = b,$
en donde $\Delta x = (b - a)/n$.

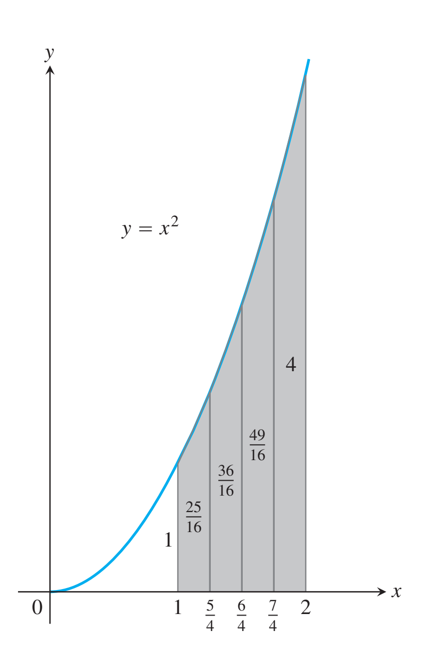


FIGURA 8.11 La aproximación trapezoidal del área debajo de la gráfica de $y = x^2$, de $x = 1$ a $x = 2$, es un ligera sobreestimación (ejemplo 1).

TABLA 8.3

x	$y = x^2$
1	1
$\frac{5}{4}$	$\frac{25}{16}$
$\frac{6}{4}$	$\frac{36}{16}$
$\frac{7}{4}$	$\frac{49}{16}$
2	4

EJEMPLO 1 Aplicación de la regla del trapecio

Utilice la regla del trapecio con $n = 4$ para estimar $\int_1^2 x^2\,dx$. Compare la estimación con el valor exacto.

Solución Divida el intervalo [1, 2] en cuatro subintervalos de la misma longitud (figura 8.11). Después evalúe $y = x^2$ en cada punto de la partición (tabla 8.3).

Utilizando estos valores de y, $n = 4$, y $\Delta x = (2 - 1)/4 = 1/4$ en la regla del trapecio, tenemos

$$\begin{aligned} T &= \frac{\Delta x}{2}\left(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4\right) \\ &= \frac{1}{8}\left(1 + 2\left(\frac{25}{16}\right) + 2\left(\frac{36}{16}\right) + 2\left(\frac{49}{16}\right) + 4\right) \\ &= \frac{75}{32} = 2.34375. \end{aligned}$$

El valor exacto de la integral es

$$\int_1^2 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\bigg]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

La aproximación T estima por arriba o sobreestima la integral aproximadamente en medio punto porcentual de su valor verdadero, 7/3. El porcentaje de error es ■

$$(2.34375 - 7/3)/(7/3) \approx 0.00446.$$

Podríamos haber predicho que la regla del trapecio sobreestimaría la integral del ejemplo 1, considerando la geometría de la gráfica de la figura 8.11. Ya que la parábola es cóncava *hacia arriba*, los segmentos que la aproximan están por arriba de la curva, dando un trapecio ligeramente de mayor área que la correspondiente franja debajo de la curva. En la figura 8.10 vemos que los segmentos de recta están *debajo* de la curva en aquellos intervalos en donde la curva es cóncava *hacia abajo*, lo cual tiene como consecuencia que la regla del trapecio *estime por abajo o subestime* la integral sobre esos intervalos.

EJEMPLO 2 Temperatura promedio

Un observador mide la temperatura exterior cada hora, desde el mediodía hasta la medianoche, registrándola en la tabla siguiente.

Hora	N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	M
Temp	63	65	66	68	70	69	68	68	65	64	62	58	55

¿Cuál fue la temperatura promedio durante el periodo de 12 horas?

Solución Estamos buscando el valor promedio de una función continua (temperatura) para la cual conocemos los valores en tiempos discretos que están separados una unidad. Necesitamos determinar

$$\text{av}(f) = \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)\,dx,$$

sin tener una fórmula para $f(x)$. Sin embargo, la integral puede aproximarse por medio de la regla del trapecio, utilizando las temperaturas de la tabla como valores de la función en los puntos de una partición del intervalo de 12 horas, con 12 subintervalos (haciendo $\Delta x = 1$).

$$\begin{aligned} T &= \frac{\Delta x}{2}\left(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{11} + y_{12}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(63 + 2\cdot 65 + 2\cdot 66 + \cdots + 2\cdot 58 + 55\right) \\ &= 782 \end{aligned}$$

Utilizando T para aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$, tenemos

$$\text{promedio}(f) \approx \frac{1}{b-a} \cdot T = \frac{1}{12} \cdot 782 \approx 65.17.$$

Si se redondea para dar precisión a los datos dados, estimamos la temperatura en 65 grados. ■

Estimación del error para la regla del trapecio

Cuando n aumenta y el tamaño del paso $\Delta x = (b-a)/n$ tiende a cero, T tiende al valor exacto de $\int_a^b f(x)\,dx$. Para ver por qué, escribimos

$$\begin{aligned} T &= \Delta x \left(\frac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \frac{1}{2} y_n \right) \\ &= (y_1 + y_2 + \cdots + y_n)\Delta x + \frac{1}{2}(y_0 - y_n)\,\Delta x \\ &= \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x + \frac{1}{2}[f(a) - f(b)]\,\Delta x. \end{aligned}$$

Cuando $n \to \infty$ y $\Delta x \to 0$,

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x \to \int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{2}[f(a) - f(b)]\Delta x \to 0.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} T = \int_a^b f(x)\,dx + 0 = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Esto significa que, en teoría, podemos hacer la diferencia entre T y la integral tan pequeña como queramos, tomando n suficientemente grande y suponiendo solamente que f sea integrable. Sin embargo, ¿qué tan grande debemos hacer a n en la práctica para una tolerancia dada?

Responderemos esta pregunta con un resultado del cálculo avanzado, que dice: si f'' es continua en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = T - \frac{b-a}{12} \cdot f''(c)(\Delta x)^2$$

para algún número c entre a y b. Así, cuando Δx tiende a cero, el error definido por

$$E_T = -\frac{b-a}{12} \cdot f''(c)(\Delta x)^2$$

se aproxima a cero como el *cuadrado* de Δx.

La desigualdad

$$|E_T| \le \frac{b-a}{12} \text{máx}|f''(x)|(\Delta x)^2,$$

en donde máx se refiere al intervalo $[a, b]$, proporciona una cota superior para la magnitud del error. En la práctica, por lo regular no podemos determinar el valor exacto de máx$|f''(x)|$ y en su lugar tenemos que estimar una cota superior o valor para el "peor caso". Si M es cualquier cota superior para los valores de $|f''(x)|$ en $[a, b]$, de modo que $|f''(x)| \le M$ en $[a, b]$, entonces

$$|E_T| \le \frac{b-a}{12} M(\Delta x)^2.$$

Si sustituimos $(b - a)/n$ por Δx, obtenemos

$$|E_T| \leq \frac{M(b-a)^3}{12n^2}.$$

Ésta es una desigualdad que utilizamos normalmente para estimar $|E_T|$. Determinamos la mejor M que podamos y con ella estimamos $|E_T|$. Esto puede parecer poco formal, pero funciona. Para hacer $|E_T|$ pequeño para una M dada, sólo hacemos n grande.

Estimación del error para la regla del trapecio

Si f'' es continua y M es cualquier cota superior para los valores de $|f''|$ en $[a, b]$, entonces el error E_T en la aproximación trapezoidal de la integral de f, desde a hasta b, para n pasos, satisface la desigualdad

$$|E_T| \leq \frac{M(b-a)^3}{12n^2}.$$

EJEMPLO 3 Cota para el error de la regla del trapecio

Determine una cota superior para el error en que se incurre al estimar

$$\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} x\, dx$$

con la regla del trapecio, con $n = 10$ pasos (figura 8.12).

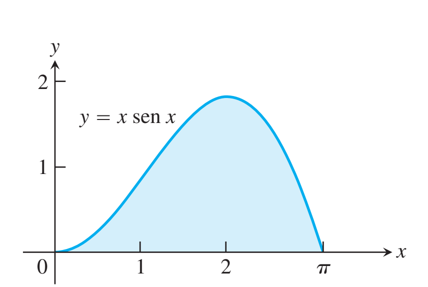


FIGURA 8.12 Gráfica del integrando del ejemplo 3.

Solución Con $a = 0$, $b = \pi$, y $n = 10$, la estimación del error da

$$|E_T| \leq \frac{M(b-a)^3}{12n^2} = \frac{\pi^3}{1200} M.$$

El número M puede ser cualquier cota superior para la magnitud de la segunda derivada de $f(x) = x \operatorname{sen} x$ en $[0, \pi]$. Un cálculo rutinario da

$$f''(x) = 2\cos x - x \operatorname{sen} x,$$

de modo que

$$\begin{aligned} |f''(x)| &= |2\cos x - x \operatorname{sen} x| \\ &\leq 2|\cos x| + |x||\operatorname{sen} x| \\ &\leq 2 \cdot 1 + \pi \cdot 1 = 2 + \pi. \end{aligned}$$

$|\cos x|$ y $|\operatorname{sen} x|$ nunca exceden a 1, y $0 \leq x \leq \pi$.

Podemos tomar sin problema $M = 2 + \pi$. Por lo tanto,

$$|E_T| \leq \frac{\pi^3}{1200} M = \frac{\pi^3(2+\pi)}{1200} < 0.133.$$

Redondeamos hacia arriba por prudencia.

El error absoluto no es mayor que 0.133.

Para obtener mayor precisión, no intentaríamos mejorar M sino tomar mayor cantidad de pasos. Por ejemplo, con $n = 100$ pasos obtenemos

$$|E_T| \leq \frac{(2+\pi)\pi^3}{120{,}000} < 0.00133 = 1.33 \times 10^{-3}.$$

■

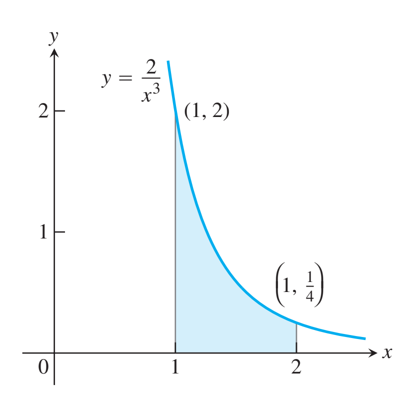


FIGURA 8.13 La función continua $y = 2/x^3$ tiene un valor máximo sobre $[1, 2]$ en $x = 1$.

EJEMPLO 4 Determinación de la cantidad de pasos necesarios para una precisión específica

¿Cuántas subdivisiones deben utilizarse en la regla del trapecio para aproximar

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$$

con un error cuyo valor absoluto sea menor que 10^{-4}?

Solución Con $a = 1$ y $b = 2$, la estimación del error es

$$|E_T| \le \frac{M(2-1)^3}{12n^2} = \frac{M}{12n^2}.$$

Éste es uno de los casos raros en los que encontramos realmente máx$|f''|$ en lugar de tener que establecer una cota superior M. Con $f(x) = 1/x$, encontramos

$$f''(x) = \frac{d^2}{dx^2}(x^{-1}) = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}.$$

En $[1, 2]$, $y = 2/x^3$ decrece continuamente desde un máximo de $y = 2$ a un mínimo de $y = 1/4$ (figura 8.13). Por consiguiente, $M = 2$ y

$$|E_T| \le \frac{2}{12n^2} = \frac{1}{6n^2}.$$

Por lo tanto, el valor absoluto del error será menor que 10^{-4} si

$$\frac{1}{6n^2} < 10^{-4}, \qquad \frac{10^4}{6} < n^2, \qquad \frac{100}{\sqrt{6}} < n, \qquad \text{o} \qquad 40.83 < n.$$

El primer entero mayor a 40.83 es $n = 41$. Con $n = 41$ subdivisiones podemos garantizar que el cálculo de ln 2 será con un error de magnitud menor a 10^{-4}. Cualquier n mayor también funcionará. ■

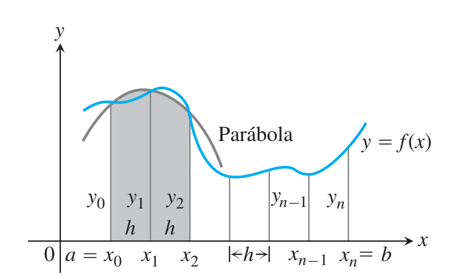


FIGURA 8.14 La regla de Simpson aproxima pequeñas secciones de la curva por medio de parábolas.

Regla de Simpson:* Aproximaciones por medio de parábolas

Las sumas de Riemann y la regla del trapecio son aproximaciones razonables a la integral de una función continua en un intervalo cerrado. La regla del trapecio es más eficiente, da una mejor aproximación para valores pequeños de n, lo cual proporciona un algoritmo más rápido para integración numérica.

Otra regla para aproximar la integral definida de una función continua resulta de utilizar parábolas en lugar de segmentos de recta que producen trapecios. Como antes, hacemos una partición del intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual longitud $h = \Delta x = (b - a)/n$, pero esta vez requerimos que n sea un número *par*. En cada par de intervalos consecutivos aproximamos la curva $y = f(x) \ge 0$ por medio de una parábola, como se muestra en la figura 8.14. Un parábola típica pasa por los tres puntos consecutivos (x_{i-1}, y_{i-1}), (x_i, y_i), y (x_{i+1}, y_{i+1}) de la curva.

Calculemos el área de la región sombreada que tiene una parábola que pasa por tres puntos consecutivos. Para simplificar nuestros cálculos, primero tomamos el caso en donde $x_0 = -h$, $x_1 = 0$ y $x_2 = h$ (figura 8.15), donde $h = \Delta x = (b - a)/n$. El área debajo de la parábola será la misma si desplazamos el eje y hacia la izquierda o hacia la derecha. La parábola tiene una ecuación de la forma

$$y = Ax^2 + Bx + C,$$

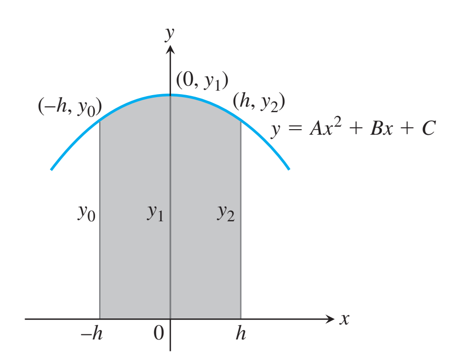


FIGURA 8.15 Al integrar de $-h$ a h, determinamos que el área sombreada es

$$\frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

* Utilizaremos de manera consistente *Regla de Simpson*, aunque la que se estudia aquí es la *Regla de Simpson 1/3*, ya que existe otra que es la de *3/8*. Por otra parte, en métodos numéricos si se utiliza una parábola se denomina Regla de Simpson, si se utilizan varias parábolas se denomina Regla compuesta o extendida de Simpson 1/3. (N. del T.)

por lo que el área debajo de ella, de $x = -h$ a $x = h$ es

$$A_p = \int_{-h}^{h} (Ax^2 + Bx + C)\, dx$$

$$= \frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^2}{2} + Cx\bigg]_{-h}^{h}$$

$$= \frac{2Ah^3}{3} + 2Ch = \frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C).$$

Como la curva pasa por los tres puntos, $(-h, y_0)$, $(0, y_1)$ y (h, y_2), también tenemos

$$y_0 = Ah^2 - Bh + C, \qquad y_1 = C, \qquad y_2 = Ah^2 + Bh + C,$$

de lo cual obtenemos

$$C = y_1,$$

$$Ah^2 - Bh = y_0 - y_1,$$

$$Ah^2 + Bh = y_2 - y_1,$$

$$2Ah^2 = y_0 + y_2 - 2y_1.$$

De aquí que, expresando el área A_p en términos de las ordenadas y_0, y_1 y y_2, tenemos

$$A_p = \frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C) = \frac{h}{3}((y_0 + y_2 - 2y_1) + 6y_1) = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Ahora bien, si desplazamos la parábola de manera horizontal a su posición sombreada en la figura 8.14, el área debajo de ella no cambia. Así, el área debajo de la parábola que pasa por (x_0, y_0), (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en la figura 8.14 sigue siendo

$$\frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

De forma similar, el área debajo de la parábola que pasa por los puntos (x_2, y_2), (x_3, y_3) y (x_4, y_4) es

$$\frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4).$$

Calculando las áreas bajo todas las parábolas y sumando los resultados se obtiene la aproximación

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \cdots$$

$$+ \frac{h}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

$$= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n).$$

El resultado se conoce como regla de Simpson, y es válida para cualquier función continua $y = f(x)$ (ejercicio 38). La función no necesita ser positiva, como en nuestra deducción. El número de subintervalos n debe ser par para aplicar la regla, ya que cada arco parabólico utiliza dos subintervalos.

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

Thomas Simpson
(1720-1761)

Regla de Simpson

Para aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$, utilice

$$S = \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n).$$

Las y son los valores de f en los puntos de la partición

$$x_0 = a, x_1 = a + \Delta x, x_2 = a + 2\Delta x, \ldots, x_{n-1} = a + (n-1)\Delta x, x_n = b.$$

El número n es par y $\Delta x = (b - a)/n$.

TABLA 8.4

x	$y = 5x^4$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{16}$
1	5
$\frac{3}{2}$	$\frac{405}{16}$
2	80

Observe el patrón de coeficientes en la regla anterior: 1, 4, 2, 4, 2, 4, 2, . . . , 4, 2, 1.

EJEMPLO 5 Aplicación de la regla de Simpson

Utilice la regla de Simpson con $n = 4$ para aproximar $\int_0^2 5x^4\,dx$.

Solución Dividimos [0, 2] en cuatro subintervalos y evaluamos $y = 5x^4$ en los puntos de la partición (tabla 8.4). Después aplicamos la regla de Simpson con $n = 4$ y $\Delta x = 1/2$:

$$\begin{aligned} S &= \frac{\Delta x}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4\right) \\ &= \frac{1}{6}\left(0 + 4\left(\frac{5}{16}\right) + 2(5) + 4\left(\frac{405}{16}\right) + 80\right) \\ &= 32\frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Esta estimación difiere del valor exacto (32) en sólo 1/12, un error porcentual de menos de tres décimos de uno por ciento, y esto fue con sólo cuatro subintervalos. ■

Estimación del error en la regla de Simpson

Para estimar el error en la regla de Simpson, iniciamos con un resultado de cálculo avanzado que dice que si la cuarta derivada, $f^{(4)}$ es continua entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = S - \frac{b-a}{180}\cdot f^{(4)}(c)(\Delta x)^4$$

para algún punto c entre a y b. Así, cuando Δx tiende a cero, el error,

$$E_S = -\frac{b-a}{180}\cdot f^{(4)}(c)(\Delta x)^4,$$

tiende a cero como la *cuarta potencia* de Δx. (Esto ayuda a explicar por qué es muy probable que la regla de Simpson dé mejores resultados que la regla del trapecio).

La desigualdad

$$|E_S| \le \frac{b-a}{180}\,\text{máx}\,|f^{(4)}(x)|\,(\Delta x)^4$$

en donde máx se refiere al intervalo $[a, b]$, proporciona una cota superior para la magnitud del error. Como con máx$|f''|$ en la fórmula del error para la regla del trapecio, por lo re-

gular no podemos determinar el valor exacto de máx$|f^{(4)}(x)|$ y tenemos que reemplazarlo con una cota superior. Si M es cualquier cota superior para los valores de $|f^{(4)}|$ en $[a, b]$, entonces

$$|E_S| \leq \frac{b - a}{180} M(\Delta x)^4.$$

Sustituyendo $(b - a)/n$ por Δx en la expresión anterior, se tiene

$$|E_S| \leq \frac{M(b - a)^5}{180n^4}.$$

Ésta es la fórmula que utilizamos usualmente para estimar el error en la regla de Simpson. Determinamos un valor razonable para M y estimamos $|E_S|$ a partir de él.

Estimación del error para la regla de Simpson

Si $f^{(4)}$ es continua y M es cualquier cota superior para los valores de $|f^{(4)}|$ en $[a, b]$, entonces el error E_S en la aproximación a la integral de f, desde a hasta b, por medio de la regla de Simpson para n pasos, satisface la desigualdad

$$|E_S| \leq \frac{M(b - a)^5}{180n^4}.$$

Como con la regla del trapecio, con frecuencia no podemos determinar el valor más pequeño posible de M. Sólo encontramos el mejor valor que podamos y partimos de allí.

EJEMPLO 6 Cota del error en la regla de Simpson

Determine una cota superior para el error al estimar $\int_0^2 5x^4\,dx$ usando la regla de Simpson con $n = 4$ (ejemplo 5).

Solución Para estimar el error, primero encontramos una cota superior M para la magnitud de la cuarta derivada de $f(x) = 5x^4$ en el intervalo $0 \leq x \leq 2$. Como la cuarta derivada tiene el valor constante $f^{(4)}(x) = 120$, tomamos $M = 120$. Con $b - a = 2$ y $n = 4$, la estimación del error para la regla de Simpson da

$$|E_S| \leq \frac{M(b - a)^5}{180n^4} = \frac{120(2)^5}{180 \cdot 4^4} = \frac{1}{12}.$$ ■

EJEMPLO 7 Comparación de las aproximaciones de la regla del trapecio y la regla de Simpson

Como vimos en el capítulo 7, el valor de ln 2 puede calcularse a partir de la integral

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx.$$

La tabla 8.5 muestra los valores T y S para las aproximaciones de $\int_1^2 (1/x)\,dx$ utilizando varios valores de n. Observe que la regla de Simpson mejora radicalmente los valores de la regla del trapecio. En particular, observe que cuando duplicamos el valor de n (y por lo tanto se divide entre dos el valor de $h = \Delta x$), el error para T se divide entre 2 *al cuadrado*, mientras que el error para S se divide entre 2 *a la cuarta*).

TABLA 8.5 Aproximaciones de la regla del trapecio (T_n) y de la regla de Simpson (S_n) para $\ln 2 = \int_1^2 (1/x)\,dx$

n	T_n	|Error| menos que ...	S_n	|Error| menos que ...
10	0.6937714032	0.0006242227	0.6931502307	0.0000030502
20	0.6933033818	0.0001562013	0.6931473747	0.0000001942
30	0.6932166154	0.0000694349	0.6931472190	0.0000000385
40	0.6931862400	0.0000390595	0.6931471927	0.0000000122
50	0.6931721793	0.0000249988	0.6931471856	0.0000000050
100	0.6931534305	0.0000062500	0.6931471809	0.0000000004

Esto tiene un efecto radical cuando $\Delta x = (2 - 1)/n$ se hace pequeño. La aproximación de Simpson para $n = 50$ aproxima a siete decimales y para $n = 100$ coincide con nueve decimales (¡una aproximación de mil millonésimas!). ■

Si $f(x)$ es un polinomio de grado menor que cuatro, entonces su cuarta derivada será cero, y

$$E_S = -\frac{b-a}{180} f^{(4)}(c)(\Delta x)^4 = -\frac{b-a}{180}(0)(\Delta x)^4 = 0.$$

En consecuencia, no habrá error en la aproximación de Simpson de cualquier integral de f. En otras palabras, si f es una constante, una función lineal, o un polinomio cuadrático o cúbico, la regla de Simpson dará el valor exacto de cualquier integral de f, sin importar el número de subdivisiones. De manera similar, si f es una constante o una función lineal, su segunda derivada es cero y

$$E_T = -\frac{b-a}{12} f''(c)(\Delta x)^2 = -\frac{b-a}{12}(0)(\Delta x)^2 = 0.$$

Por lo tanto, la regla del trapecio dará el valor exacto de cualquier integral de f. Esto no es de sorprender, ya que los trapecios se ajustan perfectamente a la gráfica. Aunque, en teoría, la disminución del tamaño del paso, Δx, reduce el error en las aproximaciones de Simpson y del trapecio, en la práctica podría no ser así.

Cuando Δx es muy pequeña, digamos $\Delta x = 10^{-5}$, los errores de redondeo de las computadoras y calculadoras en la aritmética que se requiere para calcular S y T pueden acumularse a tal grado que las fórmulas de error podrían dejar de describir lo que pasa. La reducción de Δx por debajo de cierto tamaño podría empeorar las cosas. Éste no es tema de este libro, si tiene problemas con el redondeo, debe consultar algún texto de análisis numérico para encontrar métodos alternativos.

EJEMPLO 8 Estimar

$$\int_0^2 x^3\,dx$$

con la regla de Simpson.

Solución La cuarta derivada de $f(x) = x^3$ es cero, así que esperamos que la regla de Simpson proporcione el valor exacto de la integral con cualquier número (par) de pasos. En efecto, con $n = 2$ y $\Delta x = (2 - 0)/2 = 1$,

$$\begin{aligned} S &= \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) \\ &= \frac{1}{3}((0)^3 + 4(1)^3 + (2)^3) = \frac{12}{3} = 4, \end{aligned}$$

mientras que

$$\int_0^2 x^3\, dx = \frac{x^4}{4}\bigg]_0^2 = \frac{16}{4} - 0 = 4.$$

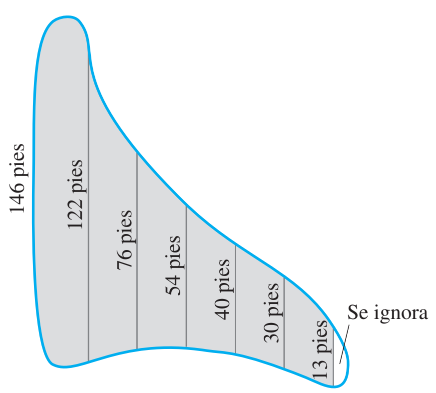


FIGURA 8.16 Dimensiones del pantano del ejemplo 9.

EJEMPLO 9 Drenar un pantano

Un pueblo quiere drenar y rellenar un pequeño pantano contaminado (figura 8.16). El pantano tiene, en promedio, 5 pies de profundidad. ¿Aproximadamente cuántas yardas cúbicas de tierra se necesitarán para llenar el área después de desecar el pantano?

Solución Para calcular el volumen del pantano, estimamos el área de la superficie y la multiplicamos por 5. Para estimar el área, utilizamos la regla de Simpson con $\Delta x = 20$ pies y las y iguales a las distancias medidas a lo largo del pantano, como se muestra en la figura 8.16.

$$\begin{aligned} S &= \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + y_6) \\ &= \frac{20}{3}(146 + 488 + 152 + 216 + 80 + 120 + 13) = 8100 \end{aligned}$$

El volumen es aproximadamente de $(8100)(5) = 40{,}500$ pies^3 o 1500 yd^3.

EJERCICIOS 8.7

Estimación de integrales

En los ejercicios 1 a 10, las instrucciones para las integrales tienen dos partes, una para la regla del trapecio y otra para la regla de Simpson.

I. Uso de la regla del trapecio

a. Estime la integral con $n = 4$ pasos y determine una cota superior para $|E_T|$.

b. Evalúe la integral directamente y determine $|E_T|$.

c. Utilice la fórmula $(|E_T|/(\text{valor real})) \times 100$ para expresar $|E_T|$ como un porcentaje del valor real de la integral.

II. Uso de la regla de Simpson

a. Estime la integral con $n = 4$ pasos y determine una cota superior para $|E_S|$.

b. Evalúe la integral directamente y determine $|E_S|$.

c. Utilice la fórmula $(|E_S|/(\text{valor real})) \times 100$ para expresar $|E_S|$ como un porcentaje del valor real de la integral.

1. $\int_1^2 x\, dx$

2. $\int_1^3 (2x - 1)\, dx$

3. $\int_{-1}^1 (x^2 + 1)\, dx$

4. $\int_{-2}^0 (x^2 - 1)\, dx$

5. $\int_0^2 (t^3 + t)\, dt$

6. $\int_{-1}^1 (t^3 + 1)\, dt$

7. $\int_1^2 \frac{1}{s^2}\, ds$

8. $\int_2^4 \frac{1}{(s - 1)^2}\, ds$

9. $\int_0^\pi \operatorname{sen} t\, dt$

10. $\int_0^1 \operatorname{sen} \pi t\, dt$

En los ejercicios 11 a 14, utilice los valores tabulados del integrando para estimar la integral con **(a)** la regla del trapecio, y **(b)** la regla de Simpson, ambas con $n = 8$ pasos. Redondee sus respuestas a cinco decimales. Luego **(c)** determine el valor exacto de la integral y el error de la aproximación E_T y E_S.

11. $\int_0^1 x\sqrt{1 - x^2}\, dx$

x	$x\sqrt{1 - x^2}$
0	0.0
0.125	0.12402
0.25	0.24206
0.375	0.34763
0.5	0.43301
0.625	0.48789
0.75	0.49608
0.875	0.42361
1.0	0

12. $\int_0^3 \frac{\theta}{\sqrt{16 + \theta^2}}\, d\theta$

θ	$\theta/\sqrt{16 + \theta^2}$
0	0.0
0.375	0.09334
0.75	0.18429
1.125	0.27075
1.5	0.35112
1.875	0.42443
2.25	0.49026
2.625	0.58466
3.0	0.6

13. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{3\cos t}{(2 + \operatorname{sen} t)^2}\, dt$

t	$(3\cos t)/(2 + \operatorname{sen} t)^2$
−1.57080	0.0
−1.17810	0.99138
−0.78540	1.26906
−0.39270	1.05961
0	0.75
0.39270	0.48821
0.78540	0.28946
1.17810	0.13429
1.57080	0

14. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} (\csc^2 y)\sqrt{\cot y}\, dy$

y	$(\csc^2 y)\sqrt{\cot y}$
0.78540	2.0
0.88357	1.51606
0.98175	1.18237
1.07992	0.93998
1.17810	0.75402
1.27627	0.60145
1.37445	0.46364
1.47262	0.31688
1.57080	0

Número mínimo de subintervalos

En los ejercicios 15 a 26, estime el número mínimo de subintervalos necesarios para aproximar las integrales con un error de magnitud menor que 10^{-4} por medio de **(a)** la regla del trapecio, y **(b)** la regla de Simpson. (Las integrales de los ejercicios 15 a 22 son las mismas que las de ejercicios 1 a 8).

15. $\int_1^2 x\, dx$

16. $\int_1^3 (2x - 1)\, dx$

17. $\int_{-1}^1 (x^2 + 1)\, dx$

18. $\int_{-2}^0 (x^2 - 1)\, dx$

19. $\int_0^2 (t^3 + t)\, dt$

20. $\int_{-1}^1 (t^3 + 1)\, dt$

21. $\int_1^2 \frac{1}{s^2}\, ds$

22. $\int_2^4 \frac{1}{(s - 1)^2}\, ds$

23. $\int_0^3 \sqrt{x + 1}\, dx$

24. $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x + 1}}\, dx$

25. $\int_0^2 \operatorname{sen}(x + 1)\, dx$

26. $\int_{-1}^1 \cos(x + \pi)\, dx$

Aplicaciones

27. Volumen de agua en una alberca Una alberca mide 30 pies de ancho por 50 pies de largo. La tabla muestra la profundidad $h(x)$ del agua a intervalos de 5 pies desde un extremo de la alberca al otro. Estime el volumen del agua en la alberca por medio de la regla del trapecio con $n = 10$, aplicada a la integral

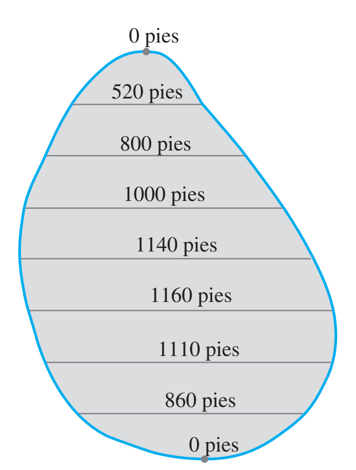
$$V = \int_0^{50} 30 \cdot h(x)\, dx.$$

Posición (pies) x	**Profundidad (pies)** $h(x)$	**Posición (pies)** x	**Profundidad (pies)** $h(x)$
0	6.0	30	11.5
5	8.2	35	11.9
10	9.1	40	12.3
15	9.9	45	12.7
20	10.5	50	13.0
25	11.0		

28. Abastecimiento de un estanque de peces Como guardia de pesca y cacería de su población, usted es responsable del abastecimiento del estanque de peces del pueblo, antes de que inicie la temporada de pesca. La profundidad promedio del estanque es de 20 pies. Por medio de un mapa a escala, mide la distancia que cruza el estanque a intervalos de 200 pies, como se muestra en el diagrama siguiente.

a. Utilice la regla del trapecio para estimar el volumen del estanque.

b. Usted planea iniciar la temporada con un pez por cada 1000 pies cúbicos. Espera tener, al final de la temporada, al menos 25% de la población inicial de peces. Si la captura promedio es de 20 peces por licencia, ¿cuál es el número máximo de permisos que puede extender?



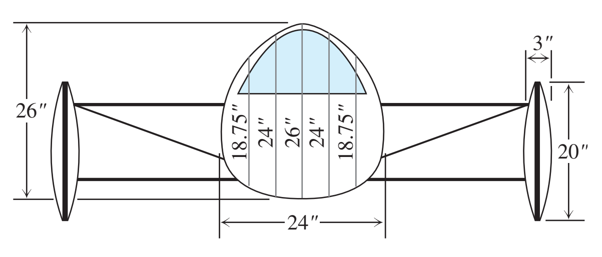
Espaciamiento vertical = 200 pies

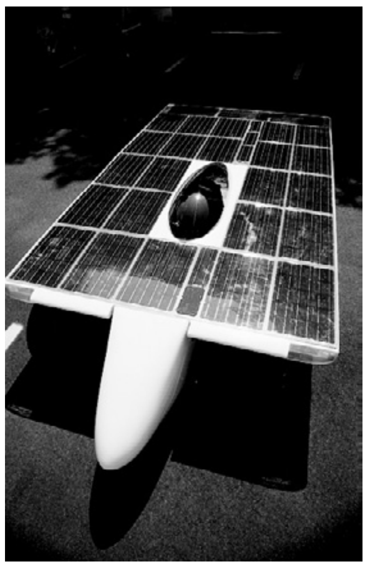
29. Ford® Mustang Cobra™ La tabla siguiente muestra los datos de tiempo y velocidad para un Ford Mustang Cobra 1994 que acelera del reposo hasta 130 mph. ¿Qué distancia ha cubierto el Mustang cuando alcanza esta velocidad? (Utilice trapecios para estimar el área debajo de la curva de velocidad, pero tenga cuidado: los intervalos de tiempo no son de la misma longitud).

Cambio de velocidad	Tiempo (seg)
Cero a 30 mph	2.2
40 mph	3.2
50 mph	4.5
60 mph	5.9
70 mph	7.8
80 mph	10.2
90 mph	12.7
100 mph	16.0
110 mph	20.6
120 mph	26.2
130 mph	37.1

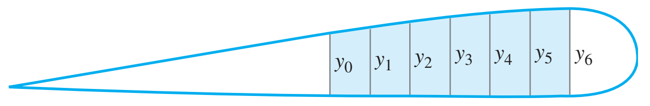
Fuente: Car and Driver, abril de 1994.

30. Resistencia aerodinámica La resistencia aerodinámica de un vehículo se determina en parte por el área de su sección transversal, de manera que, si todos los demás elementos permanecen constantes, los ingenieros tratan de hacer esta área lo más pequeña posible. Utilice la regla de Simpson para estimar el área de la sección transversal del cuerpo del automóvil ilustrado en el diagrama, un Solectria® impulsado por celdas solares, diseñado por James Worden, del MIT (Instituto Tecnológico de Massachussets.





31. Diseño de un ala El diseño de un nuevo aeroplano requiere incluir un tanque para gasolina de área de sección transversal constante en cada ala. Un dibujo a escala de la sección transversal se muestra enseguida. El tanque debe tener capacidad para 5000 lb de gasolina, que tiene una densidad de 42 lb/pies³. Estime la longitud del tanque.



$y_0 = 1.5$ pies, $y_1 = 1.6$ pies, $y_2 = 1.8$ pies, $y_3 = 1.9$ pies,
$y_4 = 2.0$ pies, $y_5 = y_6 = 2.1$ pies   Espaciamiento horizontal = 1 pie

32. Consumo de petróleo en la isla Pathfinder Un generador diesel funciona de manera continua, consumiendo petróleo a una razón que aumenta poco a poco hasta que debe ser detenido temporalmente para reemplazar los filtros.

Utilice la regla del trapecio para estimar la cantidad de petróleo consumido por el generador durante una semana.

Día	**Razón de consumo de petróleo (litros/h)**
Dom	0.019
Lun	0.020
Mar	0.021
Mié	0.023
Jue	0.025
Vie	0.028
Sáb	0.031
Dom	0.035

Teoría y ejemplos

33. Valores utilizables de la función integral del seno *La función integral del seno,*

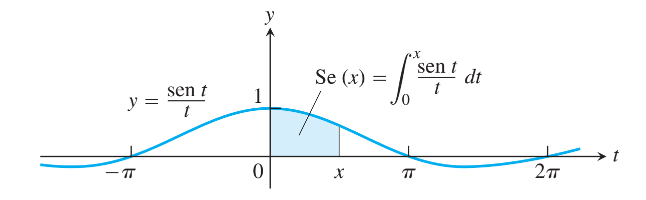
$$\text{Se}(x) = \int_0^x \frac{\text{sen}\, t}{t}\, dt, \quad \text{“Integral del seno de x”}$$

es una de las muchas funciones en ingeniería cuyas fórmulas no pueden simplificarse. No existe una fórmula elemental para la antiderivada de $(\text{sen}\, t)/t$. Sin embargo, los valores de $\text{Se}(x)$ se estiman con facilidad por medio de integración numérica.

Aunque la notación no lo muestra de manera explícita, la función que debe integrase es

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen}\, t}{t}, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0, \end{cases}$$

la extensión continua de $(\text{sen}\, t)/t$ al intervalo $[0, x]$. La función tiene derivadas de todos los órdenes en todo punto de su dominio. Su gráfica es suave, y podemos esperar buenos resultados de la regla de Simpson.



a. Utilice el hecho de que $|f^{(4)}| \leq 1$ en $[0, \pi/2]$ para dar una cota superior del error que ocurre si

$$\text{Se}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{\text{sen}\, t}{t}\, dt$$

se estima por medio de la regla de Simpson con $n = 4$.

b. Estime $\text{Se}(\pi/2)$ por medio de la regla de Simpson con $n = 4$.

c. Exprese la cota del error que encontró en el inciso (a), como un porcentaje del valor que encontró en el inciso (b).

34. La función error *La función error,*

$$\text{erf}\,(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt,$$

es importante en probabilidad y en las teorías de flujo de calor y transmisión de señales, y debe evaluarse numéricamente, ya que no existe expresión elemental para la antiderivada de e^{-t^2}.

a. Utilice la regla de Simpson con $n = 10$ para estimar erf(1).

b. En [0, 1],

$$\left| \frac{d^4}{dt^4}\left(e^{-t^2}\right) \right| \leq 12.$$

Proporcione una cota superior para la magnitud del error de la estimación en el inciso (a).

35. (*Continuación del ejemplo 3*). Las cotas de error para E_T y E_S son estimaciones para "el peor caso", y las reglas del trapecio y de Simpson con frecuencia son más precisas de lo que las cotas sugieren. La aproximación con la regla del trapecio para

$$\int_0^\pi x \,\text{sen}\, x\, dx$$

del ejemplo 3 es una muestra de esto.

a. Utilice la regla del trapecio con $n = 10$ para aproximar el valor de la integral. La tabla a la derecha proporciona los valores necesarios de y.

x	$x \,\text{sen}\, x$
0	0
$(0.1)\pi$	0.09708
$(0.2)\pi$	0.36932
$(0.3)\pi$	0.76248
$(0.4)\pi$	1.19513
$(0.5)\pi$	1.57080
$(0.6)\pi$	1.79270
$(0.7)\pi$	1.77912
$(0.8)\pi$	1.47727
$(0.9)\pi$	0.87372
π	0

b. Determine la magnitud de la diferencia entre π, el valor de la integral, y su aproximación en el inciso (a). Encontrará que la diferencia es considerablemente menor que la cota superior de 0.133, calculado con $n = 10$ en el ejemplo 3.

T **c.** La cota superior de 0.133 para $|E_T|$ en el ejemplo 3 podría haberse mejorado un poco obteniendo una mejor cota para

$$|f''(x)| = |2 \cos x - x \,\text{sen}\, x|$$

en $[0, \pi]$. La cota superior que usamos fue $2 + \pi$. Grafique f'' en $[0, \pi]$ y utilice las funciones *Trace* o *Zoom* de su calculadora grafica para mejorar esta cota superior.

Utilice la cota superior mejorada como M para obtener una mejor estimación de $|E_T|$. Observe que la aproximación con la regla del trapecio del inciso (a) también es mejor que lo que sugiere esta nueva estimación.

T **36.** (*Continuación del ejercicio 35*).

a. Demuestre que la cuarta derivada de $f(x) = x \,\text{sen}\, x$ es

$$f^{(4)}(x) = -4 \cos x + x \,\text{sen}\, x.$$

Utilice las funciones *Trace* o *Zoom* para determinar una cota superior M para los valores de $|f^{(4)}|$ en $[0, \pi]$.

b. Utilice el valor de M del inciso (a) para obtener una cota superior para la magnitud del error al estimar el valor de

$$\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} x \, dx$$

con la regla de Simpson con $n = 10$ pasos.

c. Utilice la información de la tabla del ejercicio 35 para estimar $\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} x \, dx$ con la regla de Simpson con $n = 10$ pasos.

d. Determine, a seis decimales, la magnitud de la diferencia entre su estimación del inciso (c) y el valor real de la integral, π. Verá que la estimación del error obtenida en el inciso (b) es muy buena.

37. Demuestre que la suma T en la regla del trapecio para $\int_a^b f(x)\,dx$ es una suma de Riemann para f continua en $[a, b]$. (*Sugerencia:* Utilice el Teorema del Valor Intermedio para mostrar la existencia de c_k en el subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ que satisface $f(c_k) = (f(x_{k-1}) + f(x_k))/2$).

38. Demuestre que la suma S en la regla de Simpson para $\int_a^b f(x)\,dx$ es una suma de Riemann para f continua en $[a, b]$. (Vea el ejercicio 37).

T Integración numérica

Como mencionamos al inicio de la sección, las integrales definidas de muchas funciones continuas no pueden evaluarse con el Teorema Fundamental del Cálculo, ya que sus antiderivadas carecen de fórmulas elementales. La integración numérica ofrece una manera práctica para estimar los valores de éstas, denominadas, *integrales no elementales*. Si su calculadora o computadora tiene una rutina de integración numérica, pruébela con las integrales en los ejercicios 39 a 42.

39. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 + x^4}\, dx$

Una integral no elemental que encontró Newton en sus investigaciones.

40. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$

La integral del ejercicio 33. Para evitar la división entre cero, podría iniciar la integración en un número positivo pequeño, como 10^{-6} en lugar de 0.

41. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(x^2)\, dx$

Una integral asociada con la difracción de la luz.

42. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} 40\sqrt{1 - 0.64\cos^2 t}\, dt$

La longitud de la elipse $(x^2/25) + (y^2/9) = 1$

T 43. Considere la integral $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx$.

a. Determine las aproximaciones por medio de la regla del trapecio para $n = 10$, 100 y 1000.

b. Registre los errores con tantos decimales de precisión como pueda.

c. ¿Qué patrón ve?

d. Explique cómo se relaciona el patrón con la cota del error para E_T.

T 44. (*Continuación del ejercicio 43*). Repita el ejercicio 43 con la regla de Simpson y E_S.

45. Considere la integral $\int_{-1}^{1} \operatorname{sen}(x^2)\, dx$.

a. Determine f'' para $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$.

b. Trace la gráfica de $y = f''(x)$ en una ventana de $[-1, 1]$ por $[-3, 3]$.

c. Explique por qué la gráfica del inciso (b) sugiere que $|f''(x)| \le 3$ para $-1 \le x \le 1$.

d. Demuestre que la estimación del error para la regla del trapecio en este caso es

$$|E_T| \le \frac{(\Delta x)^2}{2}.$$

e. Demuestre que la magnitud del error de la regla del trapecio será menor o igual a 0.01, si $\Delta x \le 0.1$.

f. ¿Qué tan grande debe ser n para que $\Delta x \le 0.1$?

46. Considere la integral $\int_{-1}^{1} \operatorname{sen}(x^2)\, dx$.

a. Determine $f^{(4)}$ para $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$. (Podría verificar su trabajo con un software matemático, si cuenta con él).

b. Trace la gráfica de $y = f^{(4)}(x)$ en una ventana de $[-1, 1]$ por $[-30, 10]$.

c. Explique por qué la gráfica del inciso (b) sugiere que $|f^{(4)}(x)| \le 30$ para $-1 \le x \le 1$.

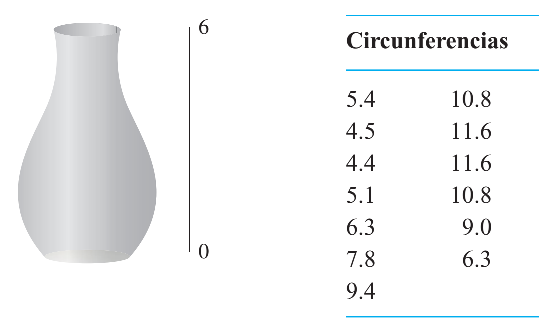
d. Demuestre que la estimación del error para la regla de Simpson en este caso es

$$|E_S| \le \frac{(\Delta x)^4}{3}.$$

e. Demuestre que la magnitud del error de la regla de Simpson será menor o igual a 0.01, si $\Delta x \le 0.4$.

f. ¿Qué tan grande debe ser n para que $\Delta x \le 0.4$?

T 47. Un florero Deseamos estimar el volumen de un florero, por medio de una calculadora, una cuerda y una regla. Medimos la altura del florero y fue 6 pulgadas. Después utilizamos la cuerda y la regla para determinar las circunferencias del florero (en pulgadas) a intervalos de media pulgada. (Los listamos de arriba hacia abajo para que correspondan con la figura del florero).



Circunferencias	
5.4	10.8
4.5	11.6
4.4	11.6
5.1	10.8
6.3	9.0
7.8	6.3
9.4	

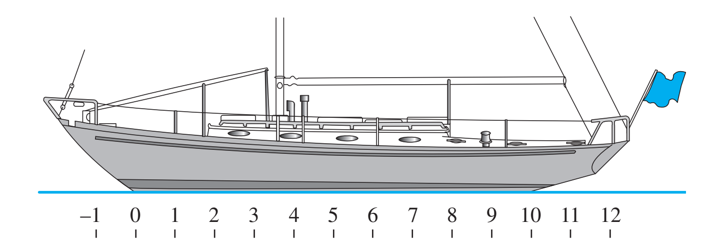
a. Determine el área de cada sección transversal que corresponde a las circunferencias dadas.

b. Exprese el volumen del florero como una integral respecto de y en el intervalo $[0, 6]$.

c. Aproxime la integral por medio de la regla del trapecio con $n = 12$.

d. Aproxime la integral por medio de la regla de Simpson con $n = 12$. ¿Cuál resultado cree que es más preciso? Justifique su respuesta.

48. Desplazamiento de un velero Para determinar el volumen de agua que desplaza un velero, la práctica común es dividir la línea de flotación en 10 subintervalos de igual longitud, medir el área de la sección transversal $A(x)$ de la parte sumergida del casco en cada punto de la partición, y luego utilizar la regla de Simpson para estimar la integral de $A(x)$ desde un extremo al otro de la línea de flotación. La tabla siguiente lista el área de las medidas en las "Estaciones" 0 a 10, como se denominan los puntos de la partición, para el balandro del crucero *Pipedream*, que se muestra en la figura. La longitud común de los subintervalos (distancia entre estaciones consecutivas) es $\Delta x = 2.54$ pies (aproximadamente 2 pies 6 1/2 pulgadas, elegido por conveniencia del constructor).



a. Estime el volumen de desplazamiento del *Pipedream* al pie cúbico más cercano.

Estación	Área sumergida (pies^2)
0	0
1	1.07
2	3.84
3	7.82
4	12.20
5	15.18
6	16.14
7	14.00
8	9.21
9	3.24
10	0

b. Las cifras de la tabla son para agua de mar, que pesa 64 lb/pie^3. ¿Cuántas libras de agua desplaza el *Pipedream*? (El desplazamiento se da en libras para naves pequeñas, y en toneladas largas (1 tonelada larga = 2240 lb) para grandes navíos). (Datos tomados de *Skene's Elements of Yacht Design*, por Francis S. Kinney, Dodd, Mead, 1962).

c. Coeficiente prismático El coeficiente prismático de un bote es la razón del volumen de desplazamiento al volumen de un prisma cuya altura es igual a la longitud de la línea de flotación y cuya base es igual al área de la mayor sección transversal sumergida. Los mejores veleros tienen coeficientes prismáticos de entre 0.51 y 0.54. Determine el coeficiente prismático del *Pipedream*, dado que la longitud de la línea de flotación es de 25.4 pies y la mayor sección transversal sumergida es de 16.14 pies^2 (en la estación 6).

49. Integrales elípticas La longitud de la elipse

$$x = a\cos t, \quad y = b\,\mathrm{sen}\,t, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

resulta ser

$$\text{Longitud} = 4a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2\cos^2 t}\,dt,$$

donde e es la excentricidad de la elipse. La integral en esta fórmula se denomina *integral elíptica* y es no elemental, salvo cuando $e = 0$ o 1.

a. Utilice la regla del trapecio con $n = 10$ para estimar la longitud de la elipse cuando $a = 1$ y $e = 1/2$.

b. Utilice el hecho de que el valor absoluto de la segunda derivada de $f(t) = \sqrt{1 - e^2\cos^2 t}$ es menor que 1, para determinar una cota superior para el error en la aproximación que obtuvo en el inciso (a).

50. La longitud de un arco de la curva $y = \mathrm{sen}\,x$ está dado por

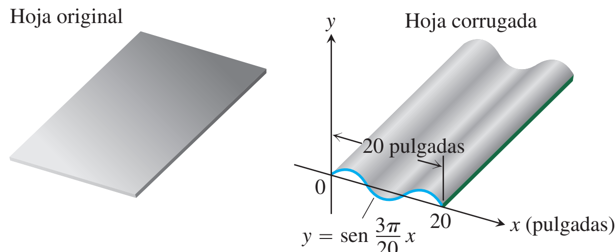
$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos^2 x}\,dx.$$

Estime L por medio de la regla de Simpson con $n = 8$.

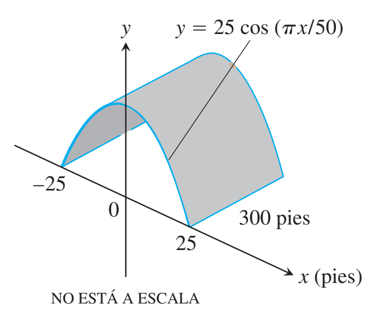
51. La compañía metalúrgica en donde usted trabaja tiene una oferta para producir hojas de acero corrugado para techo, como el que se muestra a continuación. Las secciones transversales de las hojas corrugadas tienen la forma de la curva

$$y = \mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{20}x, \quad 0 \le x \le 20 \text{ pulgadas}.$$

Si el techo se forja a partir de las hojas planas por medio de un proceso que no estira el material, ¿cuál debe ser el ancho del material original? Con el propósito de determinarlo, utilice integración numérica para aproximar la longitud de la curva seno a dos decimales.



52. Una empresa tiene un contrato para construir el túnel que se muestra a continuación. Éste tiene una longitud de 300 pies de largo y 50 pies de ancho en la base. Las secciones transversales tienen la forma de un arco de la curva $y = 25\cos(\pi x/50)$. Hasta su terminación, la superficie interna del túnel (excluyendo el camino) será tratada con un sellador resistente al agua, que tiene un costo de \$1.75 por pie cuadrado. ¿Cuánto cuesta aplicar el sellador? (*Sugerencia:* Utilice integración numérica para determinar la longitud de la curva coseno).



Área de una superficie

Determine, con dos decimales, las áreas de las superficies generadas al hacer girar, alrededor del eje x, las curvas de los ejercicios 53 a 56.

53. $y = \operatorname{sen} x, \quad 0 \leq x \leq \pi$

54. $y = x^2/4, \quad 0 \leq x \leq 2$

55. $y = x + \operatorname{sen} 2x, \quad -2\pi/3 \leq x \leq 2\pi/3$ (la curva del ejercicio 5, sección 4.4).

56. $y = \dfrac{x}{12}\sqrt{36 - x^2}, 0 \leq x \leq 6$ (la superficie de la plomada del ejercicio 56, sección 6.1).

Aproximación de valores de funciones

57. Utilice integración numérica para aproximar el valor de

$$\operatorname{sen}^{-1} 0.6 = \int_0^{0.6} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

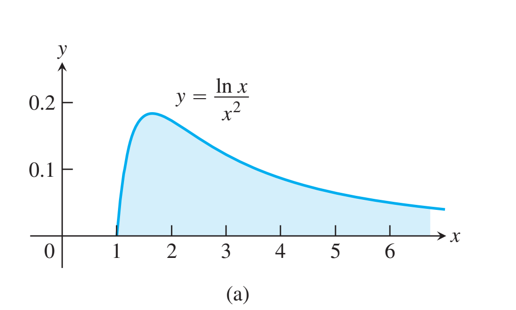
Como referencia, $\operatorname{sen}^{-1} 0.6 = 0.64350$ redondeado a cinco decimales.

58. Utilice integración numérica para aproximar el valor de

$$\pi = 4\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}\, dx.$$

8.8 Integrales impropias

Hasta el momento, a las integrales definidas se les ha requerido que tengan dos propiedades. Primera, que el dominio de integración $[a, b]$ sea finito. Segunda, que el rango del integrando sea finito en este dominio. En la práctica, podemos encontrar problemas que no cumplen una o ambas de estas condiciones. La integral para el área debajo de la curva $y = (\ln x)/x^2$ desde $x = 1$ hasta $x = \infty$ es un ejemplo en el que el dominio es infinito (figura 8.17a). La integral para el área debajo de la curva $y = 1/\sqrt{x}$ entre $x = 0$ y $x = 1$ es un ejemplo en el que el rango del integrando es infinito (figura 8.17b). En cualquier caso, se dice que las integrales son *impropias* y se calculan como límites. Veremos que las integrales impropias desempeñan un papel importante cuando investiguemos la convergencia de ciertas series infinitas en el capítulo 11.



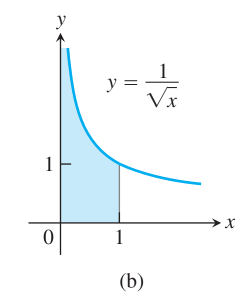
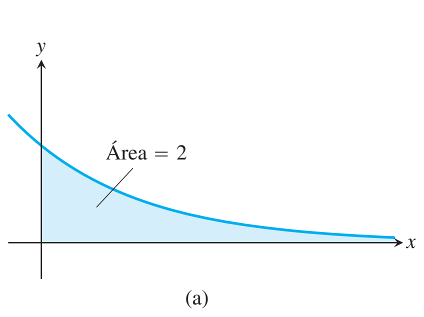


FIGURA 8.17 ¿Son finitas las áreas debajo de estas curvas infinitas?



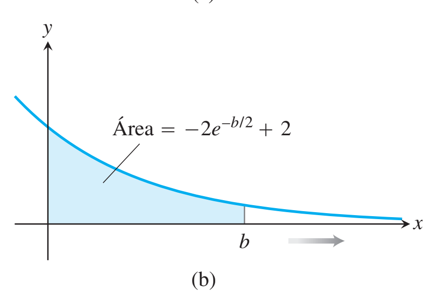


FIGURA 8.18 El área en el primer cuadrante de la curva $y = e^{-x/2}$ es (b) una integral impropia del primer tipo.

Límites de integración infinitos

Considere la región infinita que está debajo de la curva $y = e^{-x/2}$ en el primer cuadrante (figura 8.18a). Podría pensarse que esta región tiene área infinita, pero veremos que el valor natural para asignarle es finito. Veamos cómo asignar un valor al área. Primero determinaremos el área $A(b)$ de la parte de la región que está acotada a la derecha por $x = b$ (figura 8.18b).

$$A(b) = \int_0^b e^{-x/2}\, dx = -2e^{-x/2}\Big]_0^b = -2e^{-b/2} + 2$$

Después determinamos el límite de $A(b)$ cuando $b \to \infty$

$$\lim_{b\to\infty} A(b) = \lim_{b\to\infty} (-2e^{-b/2} + 2) = 2.$$

El valor que asignamos al área bajo la curva, de 0 a ∞, es

$$\int_0^{\infty} e^{-x/2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{-x/2}\,dx = 2.$$

DEFINICIÓN Integrales impropias del tipo I

Las integrales con límites de integración infinitos son **integrales impropias del tipo I**.

1. Si $f(x)$ es continua en $[a, \infty)$, entonces

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^{b} f(x)\,dx.$$

2. Si $f(x)$ es continua en $(-\infty, b]$, entonces

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^{b} f(x)\,dx.$$

3. Si $f(x)$ es continua en $(-\infty, \infty)$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{\infty} f(x)\,dx,$$

en donde c es cualquier número real.

En cada caso, si el límite es finito decimos que la integral impropia **converge** y que el límite es el **valor** de la integral impropia. Si el límite no existe, la integral impropia **diverge**.

Puede mostrarse que la elección de c en la parte 3 de la definición no es importante. Podemos evaluar o determinar la convergencia o divergencia de $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ con cualquier elección adecuada.

Cualquiera de las integrales de la definición anterior puede interpretarse como un área si $f \geq 0$ en el intervalo de integración. Por ejemplo, interpretamos la integral impropia en la figura 8.18 como un área. En ese caso, el área tiene el valor finito 2. Si $f \geq 0$ y la integral impropia diverge, y decimos que el área bajo la curva es **infinita**.

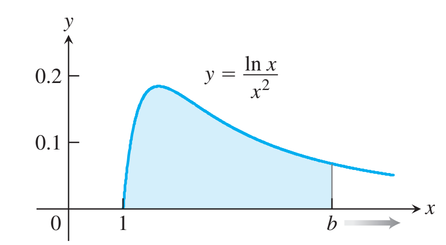


FIGURA 8.19 El área debajo de esta curva es una integral impropia (ejemplo 1).

EJEMPLO 1 Evaluación de una integral impropia en $[1, \infty)$

¿El área bajo la curva $y = (\ln x)/x^2$ de $x = 1$ a $x = \infty$ es finita? De ser así, ¿cuál es?

Solución Determinamos el área bajo la curva, de $x = 1$ a $x = b$, y examinamos el límite cuando $b \to \infty$. Si el límite es finito, lo tomamos como el área bajo la curva (figura 8.19). De 1 a b el área es

$$\int_1^{b} \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \left[(\ln x)\left(-\frac{1}{x}\right)\right]_1^{b} - \int_1^{b}\left(-\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)dx$$

Integración por partes con $u = \ln x$, $dv = dx/x^2$, $du = dx/x$, $v = -1/x$.

$$= -\frac{\ln b}{b} - \left[\frac{1}{x}\right]_1^{b}$$

$$= -\frac{\ln b}{b} - \frac{1}{b} + 1.$$

El límite del área cuando $b \to \infty$ es

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx &= \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{\ln x}{x^2}\,dx \\
&= \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{\ln b}{b} - \frac{1}{b} + 1\right] \\
&= -\left[\lim_{b\to\infty} \frac{\ln b}{b}\right] - 0 + 1 \\
&= -\left[\lim_{b\to\infty} \frac{1/b}{1}\right] + 1 = 0 + 1 = 1. \qquad \text{Regla de L'Hôpital.}
\end{aligned}$$

En consecuencia, la integral impropia converge y el área tiene un valor finito de 1. ■

EJEMPLO 2 Evaluación de una integral en $(-\infty, \infty)$

Evaluar

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2}.$$

Solución De acuerdo con la definición (parte 3), podemos escribir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1 + x^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2}.$$

Ahora evaluamos cada integral impropia del lado derecho de la ecuación anterior.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1 + x^2} &= \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \frac{dx}{1 + x^2} \\
&= \lim_{a\to-\infty} \tan^{-1} x\Big]_a^0 \\
&= \lim_{a\to-\infty} (\tan^{-1} 0 - \tan^{-1} a) = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2} &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{dx}{1 + x^2} \\
&= \lim_{b\to\infty} \tan^{-1} x\Big]_0^b \\
&= \lim_{b\to\infty} (\tan^{-1} b - \tan^{-1} 0) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Desde que $1/(1 + x^2) > 0$, la integral impropia puede interpretarse como el área (finita) por abajo de la curva y por arriba del eje x (figura 8.20). ■

BIOGRAFÍA HISTÓRICA



Lejeune Dirichlet
(1805-1859)

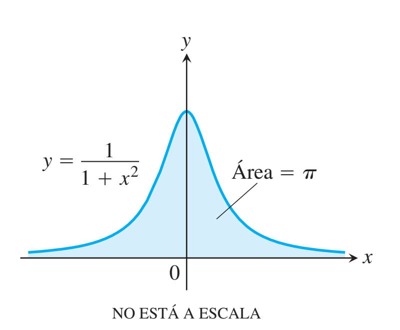


FIGURA 8.20 El área debajo de esta curva es finita (ejemplo 2).

La integral $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$

La función $y = 1/x$ es la frontera entre las integrales convergentes y divergentes con integrandos de la forma $y = 1/x^p$. Como muestra el ejemplo siguiente, la integral impropia converge si $p > 1$ y diverge si $p \leq 1$.

EJEMPLO 3 Determinación de la convergencia

¿Para qué valores de p la integral $\int_1^{\infty} dx/x^p$ converge? Cuando la integral converge, ¿a qué valor lo hace?

Solución Si $p \neq 1$,

$$\int_1^b \frac{dx}{x^p} = \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big]_1^b = \frac{1}{1-p}\left(b^{-p+1} - 1\right) = \frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{b^{p-1}} - 1\right).$$

Así,

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p}$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{b^{p-1}} - 1\right)\right] = \begin{cases} \dfrac{1}{p-1}, & p > 1 \\ \infty, & p < 1 \end{cases}$$

ya que

$$\lim_{b\to\infty} \frac{1}{b^{p-1}} = \begin{cases} 0, & p > 1 \\ \infty, & p < 1. \end{cases}$$

Por lo tanto, la integral converge al valor $1/(p-1)$ si $p > 1$ y diverge si $p < 1$.

Si $p = 1$, la integral también diverge:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \ln x\Big]_1^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} (\ln b - \ln 1) = \infty.$$ ■

Integrandos con asíntotas verticales

Otro tipo de integrales impropias surge cuando el integrando tiene una asíntota vertical —una discontinuidad infinita— en un límite de integración o en algún punto entre los límites de integración. Si el integrando f es positivo en el intervalo de integración, nuevamente podemos interpretar la integral impropia como el área debajo de la gráfica de f y por arriba del eje x, entre los límites de integración.

FIGURA 8.21 El área debajo de esta curva es

$$\lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = 2,$$

una integral impropia de segundo tipo.

Considere la región en el primer cuadrante que está debajo de la curva $y = 1/\sqrt{x}$, de $x = 0$ a $x = 1$ (figura 8.17b). Primero determinamos el área de la parte de a a 1 (figura 8.21).

$$\int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big]_a^1 = 2 - 2\sqrt{a}$$

Después determinamos el límite de esta área cuando $a \to 0^+$:

$$\lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a\to 0^+}\left(2 - 2\sqrt{a}\right) = 2.$$

El área debajo de la curva de 0 a 1 es finita e igual a

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2.$$

DEFINICIÓN Integrales impropias del tipo II

Las integrales de funciones que se vuelven infinitas en un punto dentro del intervalo de integración son **integrales impropias del tipo II**.

1. Si $f(x)$ es continua en $(a, b]$ y discontinua en a, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)\,dx.$$

2. Si $f(x)$ es continua en $[a, b)$ y discontinua en b, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)\,dx.$$

3. Si $f(x)$ es discontinua en c, donde $a < c < b$, y continua en $[a, c) \cup (c, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

En cada caso, si el límite es finito decimos que la integral impropia **converge** y que el límite es el **valor** de la integral impropia. Si el límite no existe, la integral **diverge**.

En la parte 3 de la definición, la integral del lado izquierdo de la ecuación converge si *ambas* integrales del lado derecho convergen; de otra forma, diverge.

EJEMPLO 4 Una integral impropia divergente

Investigue la convergencia de

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,dx.$$

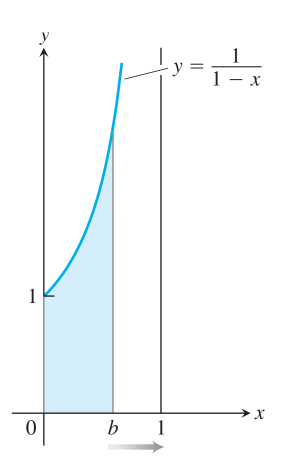


FIGURA 8.22 El límite no existe:

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{1-x}\right) dx = \lim_{b\to 1^-} \int_0^b \frac{1}{1-x}\, dx = \infty.$$

El área debajo de la curva y arriba del eje x para $[0, 1)$ no es un número real (ejemplo 4).

Solución El integrando $f(x) = 1/(1 - x)$ es continuo en $[0, 1)$, pero discontinuo en $x = 1$, y se vuelve infinito cuando $x \to 1^-$ (figura 8.22). Evaluamos la integral como

$$\begin{aligned}\lim_{b\to 1^-} \int_0^b \frac{1}{1-x}\, dx &= \lim_{b\to 1^-} \Big[-\ln|1 - x|\Big]_0^b \\ &= \lim_{b\to 1^-} [-\ln(1 - b) + 0] = \infty.\end{aligned}$$

El límite es infinito, por lo que la integral diverge. ■

EJEMPLO 5 Asíntota vertical en un punto interior

Evaluar

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}.$$

Solución El integrando tiene una asíntota vertical en $x = 1$ y es continua en $[0, 1)$ y $(1, 3]$ (figura 8.23). Por lo tanto, de acuerdo con la parte 3 de la definición anterior,

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} + \int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}.$$

Ahora evaluamos cada integral impropia del lado derecho de esta ecuación.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} &= \lim_{b\to 1^-} \int_0^b \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} \\ &= \lim_{b\to 1^-} 3(x-1)^{1/3}\Big]_0^b \\ &= \lim_{b\to 1^-} [3(b-1)^{1/3} + 3] = 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} &= \lim_{c\to 1^+} \int_c^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} \\ &= \lim_{c\to 1^+} 3(x-1)^{1/3}\Big]_c^3 \\ &= \lim_{c\to 1^+} \Big[3(3-1)^{1/3} - 3(c-1)^{1/3}\Big] = 3\sqrt[3]{2}\end{aligned}$$

Concluimos que

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = 3 + 3\sqrt[3]{2}.$$ ■

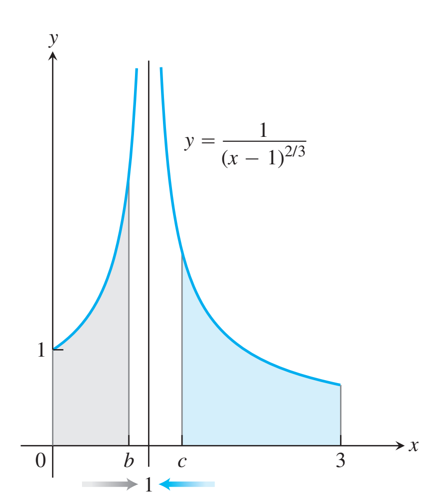


FIGURA 8.23 El ejemplo 5 muestra la convergencia de

$$\int_0^3 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\, dx = 3 + 3\sqrt[3]{2},$$

por lo que el área debajo de la curva existe (es un número real).

EJEMPLO 6 Una integral impropia convergente

Evaluar

$$\int_2^\infty \frac{x+3}{(x-1)(x^2+1)}\, dx.$$

Solución

$$\int_2^{\infty} \frac{x + 3}{(x - 1)(x^2 + 1)}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_2^b \frac{x + 3}{(x - 1)(x^2 + 1)}\, dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} \int_2^b \left(\frac{2}{x - 1} - \frac{2x + 1}{x^2 + 1} \right) dx \qquad \text{Fracciones parciales}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[2 \ln (x - 1) - \ln (x^2 + 1) - \tan^{-1} x \right]_2^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\ln \frac{(x - 1)^2}{x^2 + 1} - \tan^{-1} x \right]_2^b \qquad \text{Combinar los logaritmos.}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\ln \left(\frac{(b - 1)^2}{b^2 + 1} \right) - \tan^{-1} b \right] - \ln \left(\frac{1}{5} \right) + \tan^{-1} 2$$

$$= 0 - \frac{\pi}{2} + \ln 5 + \tan^{-1} 2 \approx 1.1458$$

Observe que combinamos los logaritmos en la antiderivada *antes* de calcular el límite cuando $b \to \infty$. De no haberlo hecho, habríamos encontrado la forma indeterminada

$$\lim_{b\to\infty} (2 \ln (b - 1) - \ln (b^2 + 1)) = \infty - \infty.$$

Por supuesto, la manera de evaluar la forma indeterminada consiste en combinar los logaritmos de modo que, al final, habríamos llegado a la misma respuesta. ■

Los sistemas de cómputo con funciones algebraicas pueden evaluar muchas integrales impropias convergentes. Para evaluar la integral del ejemplo 6 por medio de Maple, introduzca

```
> f:= (x + 3)/((x - 1) * (x^2 + 1));
```

Después utilice el comando de integración

```
> int(f, x = 2..infinity);
```

Maple da como respuesta

$$-\frac{1}{2}\pi + \ln (5) + \arctan (2).$$

Para obtener un resultado numérico, utilice el comando para evaluar **evalf** y especifique el número de dígitos como sigue:

```
> evalf(%, 6);
```

El símbolo % indica a la computadora que evalúe la última expresión en la pantalla, en este caso $(-1/2)\pi + \ln (5) + \arctan (2)$. Maple da como resultado 1.14579.

Utilizando Mathematica, si introducimos

```
In [1]:= Integrate [(x + 3)/((x - 1)(x^2 + 1)), {x, 2, Infinity}]
```

el programa responde

$$Out\ [1]= \frac{-\text{Pi}}{2} + \text{ArcTan}\,[2] + \text{Log}\,[5].$$

Para obtener un resultado con seis dígitos, utilice el comando "N[%,6]"; nuevamente, el resultado es 1.14579.

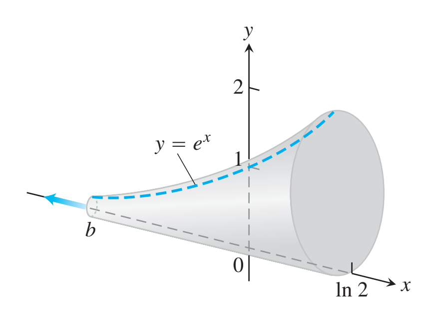


FIGURA 8.24 El cálculo del ejemplo 7 muestra que este cuerno infinito tiene volumen finito.

EJEMPLO 7 Determinación del volumen de un sólido infinito

Las secciones transversales, perpendiculares al eje x, del cuerno sólido en la figura 8.24 son discos circulares de diámetros que van del eje x a la curva $y = e^x$, $-\infty < x \leq \ln 2$. Determine el volumen del cuerno.

Solución El área de una sección transversal típica es

$$A(x) = \pi(\text{radio})^2 = \pi\left(\frac{1}{2}y\right)^2 = \frac{\pi}{4}e^{2x}.$$

Definimos el volumen del cuerno como el límite cuando $b \to -\infty$ del volumen de la parte que va de b a $\ln 2$. Como en la sección 6.1 (método de las rebanadas), el volumen de esta parte es

$$V = \int_b^{\ln 2} A(x)\,dx = \int_b^{\ln 2} \frac{\pi}{4}e^{2x}\,dx = \frac{\pi}{8}e^{2x}\bigg]_b^{\ln 2}$$

$$= \frac{\pi}{8}(e^{\ln 4} - e^{2b}) = \frac{\pi}{8}(4 - e^{2b}).$$

Cuando $b \to -\infty$, $e^{2b} \to 0$ y $V \to (\pi/8)(4 - 0) = \pi/2$. El volumen del cuerno es $\pi/2$. ■

EJEMPLO 8 Un cálculo incorrecto

Evaluar

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1}.$$

Solución Suponga que no observa la discontinuidad del integrando en $x = 1$, interior al intervalo de integración. Si evaluamos la integral como una integral ordinaria obtenemos

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1|\bigg]_0^3 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

Este resultado es *incorrecto*, ya que la integral es impropia. La evaluación correcta utiliza límites:

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \int_0^1 \frac{dx}{x-1} + \int_1^3 \frac{dx}{x-1}$$

donde

$$\int_0^1 \frac{dx}{x-1} = \lim_{b\to 1^-}\int_0^b \frac{dx}{x-1} = \lim_{b\to 1^-} \ln|x-1|\bigg]_0^b$$

$$= \lim_{b\to 1^-}(\ln|b-1| - \ln|-1|)$$

$$= \lim_{b\to 1^-}\ln(1-b) = -\infty. \qquad 1 - b \to 0^+ \text{ cuando } b \to 1^-$$

Como $\int_0^1 dx/(x-1)$ es divergente, la integral original $\int_0^3 dx/(x-1)$ es divergente. ■

El ejemplo 8 ilustra que puede equivocarse si confunde una integral impropia por una integral ordinaria. Siempre que encuentre una integral $\int_a^b f(x)\,dx$ debe examinar la función f en $[a, b]$ y después decidir si la integral es impropia. Si f es continua en $[a, b]$, será propia, es decir, una integral ordinaria.

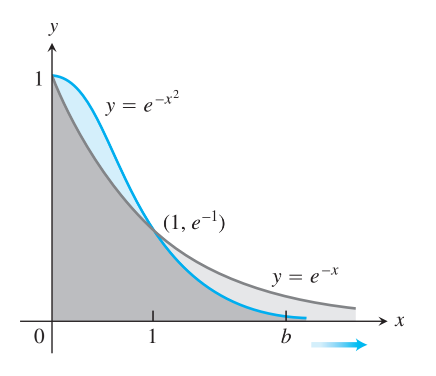


FIGURA 8.25 La gráfica de e^{-x^2} está por debajo de la gráfica de e^{-x} para $x > 1$ (ejemplo 9).

Criterios para convergencia y divergencia

Cuando no podemos evaluar de manera directa una integral impropia, tratamos de determinar si converge o diverge. Si la integral diverge, acaba el problema. Si converge, podemos utilizar métodos numéricos para aproximar su valor. Los principales criterios para convergencia o divergencia son la comparación directa y la comparación de límite.

EJEMPLO 9 Investigación de convergencia

¿La integral $\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$ converge?

Solución Por definición,

$$\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b e^{-x^2}\,dx.$$

No podemos evaluar de forma directa la última integral, ya que no es elemental. Pero *podemos* mostrar que su límite es finito cuando $b\to\infty$. Sabemos que $\int_1^b e^{-x^2}\,dx$ es una función creciente de b, por lo tanto se vuelve infinita cuando $b\to\infty$ o tiene un límite finito cuando $b\to\infty$. No se vuelve infinita: para todo valor de $x \geq 1$, tenemos $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ (figura 8.25), de modo que

$$\int_1^b e^{-x^2}\,dx \leq \int_1^b e^{-x}\,dx = -e^{-b} + e^{-1} < e^{-1} \approx 0.36788.$$

De aquí que

$$\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b e^{-x^2}\,dx$$

converge a algún valor finito definido. Aunque no sabemos exactamente cuál es ese valor, sí sabemos que es positivo y menor que 0.37. En este caso dependemos de la propiedad de completitud de los números reales, analizada en el Apéndice 4. ■

La comparación de e^{-x^2} y e^{-x} en el ejemplo 9 es un caso especial del criterio siguiente.

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

Karl Weierstrass
(1815-1897)

TEOREMA 1 **Criterio de comparación directa**

Sean f y g continuas en $[a, \infty)$ con $0 \leq f(x) \leq g(x)$ para toda $x \geq a$. Entonces

1. $\int_a^\infty f(x)\,dx$ converge si $\int_a^\infty g(x)\,dx$ converge

2. $\int_a^\infty g(x)\,dx$ diverge si $\int_a^\infty f(x)\,dx$ diverge.

El razonamiento que sustenta el argumento establecido en el teorema 1 es similar al del ejemplo 9.

Si $0 \leq f(x) \leq g(x)$ para $x \geq a$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx, \qquad b > a.$$

Con base en esto puede argumentarse, como en el ejemplo 9, que

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx \text{ converge si } \int_a^{\infty} g(x)\,dx \text{ converge}.$$

Y a la inversa, podemos decir que

$$\int_a^{\infty} g(x)\,dx \text{ diverge si } \int_a^{\infty} f(x)\,dx \text{ diverge}.$$

EJEMPLO 10 Uso del criterio de comparación directa

(a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\,dx$ converge, ya que

$$0 \leq \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \quad \text{en} \quad [1, \infty) \quad \text{y} \quad \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx \text{ converge}.$$ Ejemplo 3

(b) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 0.1}}\,dx$ diverge, ya que

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 0.1}} \geq \frac{1}{x} \quad \text{en} \quad [1, \infty) \quad \text{y} \quad \int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx \text{ diverge}.$$ Ejemplo 3

TEOREMA 2 Criterio de comparación del límite
Si las funciones positivas f y g son continua en $[a, \infty)$ y si

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L, \qquad 0 < L < \infty,$$

entonces tanto

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx \qquad \text{como} \qquad \int_a^{\infty} g(x)\,dx$$

convergen, o bien, ambas divergen.

Una demostración del teorema 22 se da en cálculo avanzado.

Aunque las integrales impropias de dos funciones, de a a ∞, pueden converger, esto no significa que sus integrales necesariamente tengan el mismo valor, como se muestra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 11 Uso del criterio de comparación del límite

Mostrar que

$$\int_1^\infty \frac{dx}{1 + x^2}$$

converge, comparando con $\int_1^\infty (1/x^2)\, dx$. Determine y compare los dos valores de las integrales.

Solución Las funciones $f(x) = 1/x^2$ y $g(x) = 1/(1 + x^2)$ son positivas y continuas en $[1, \infty)$. Además,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x^2}{1/(1 + x^2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + x^2}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x^2} + 1\right) = 0 + 1 = 1,$$

un límite positivo finito (figura 8.26). Por lo tanto, $\int_1^\infty \frac{dx}{1 + x^2}$ converge, ya que $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ converge.

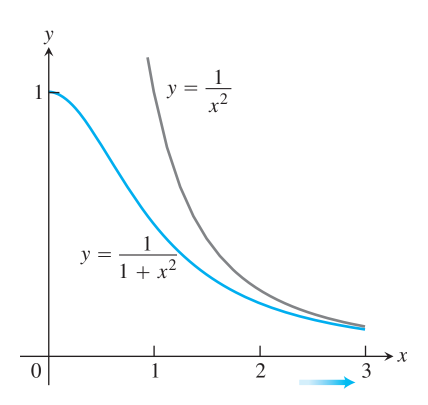


FIGURA 8.26 Las funciones del ejemplo 11.

Sin embargo, las integrales convergen a valores diferentes.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{2 - 1} = 1 \qquad \text{Ejemplo 3}$$

y

$$\int_1^\infty \frac{dx}{1 + x^2} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{1 + x^2}$$

$$= \lim_{b\to\infty} [\tan^{-1} b - \tan^{-1} 1] = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

■

EJEMPLO 12 Uso del criterio de comparación de límite

Mostrar que

$$\int_1^\infty \frac{3}{e^x + 5}\, dx$$

converge.

Solución De acuerdo con el ejemplo 9, es fácil ver que $\int_1^\infty e^{-x}\, dx = \int_1^\infty (1/e^x)\, dx$ converge. Además,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1/e^x}{3/(e^x + 5)} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x + 5}{3e^x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{5}{3e^x}\right) = \frac{1}{3},$$

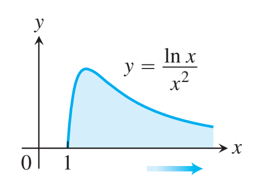
aque es un límite positivo y finito. En lo que concierne a la convergencia de la integral impropia, $3/(e^x + 5)$ se comporta como $1/e^x$. ■

Tipos de integrales impropias analizados en esta sección

LÍMITES INFINITOS DE INTEGRACIÓN: TIPO I

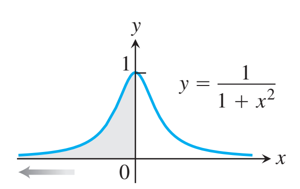
1. Límite superior

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{\ln x}{x^2}\,dx$$



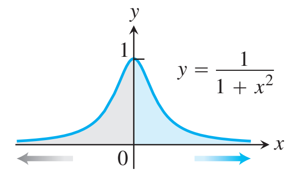
2. Límite inferior

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 \frac{dx}{1+x^2}$$



3. Ambos límites

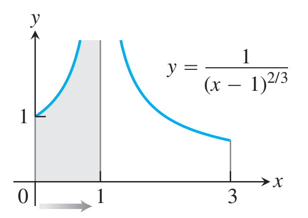
$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to-\infty}\int_b^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{c\to\infty}\int_0^c \frac{dx}{1+x^2}$$



EL INTEGRANDO SE VUELVE INFINITO: TIPO II

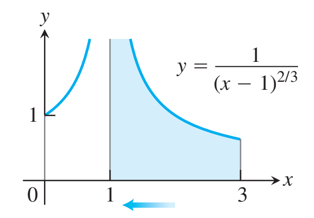
4. Extremo superior

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{b\to1^-}\int_0^b \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$



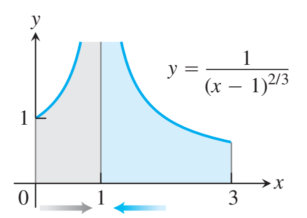
5. Extremo inferior

$$\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{d\to1^+}\int_d^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$



6. Punto interior

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} + \int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$



EJERCICIOS 8.8

Evaluación de integrales impropias

Evalúe las integrales en los ejercicios 1 a 34 sin utilizar tablas.

1. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$

2. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{1.001}}$

3. $\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

4. $\int_0^{4} \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$

5. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^{2/3}}$

6. $\int_{-8}^{1} \frac{dx}{x^{1/3}}$

7. $\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

8. $\int_0^{1} \frac{dr}{r^{0.999}}$

9. $\int_{-\infty}^{-2} \frac{2\,dx}{x^2-1}$

10. $\int_{-\infty}^{2} \frac{2\,dx}{x^2+4}$

11. $\int_2^{\infty} \frac{2}{v^2-v}\,dv$

12. $\int_2^{\infty} \frac{2\,dt}{t^2-1}$

13. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x\,dx}{(x^2+1)^2}$

14. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+4)^{3/2}}$

15. $\int_0^{1} \frac{\theta+1}{\sqrt{\theta^2+2\theta}}\,d\theta$

16. $\int_0^{2} \frac{s+1}{\sqrt{4-s^2}}\,ds$

17. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$

18. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$

19. $\int_0^{\infty} \frac{dv}{(1+v^2)(1+\tan^{-1} v)}$

20. $\int_0^{\infty} \frac{16\tan^{-1} x}{1+x^2}\,dx$

21. $\int_{-\infty}^{0} \theta e^{\theta}\,d\theta$

22. $\int_0^{\infty} 2e^{-\theta} \operatorname{sen}\theta\,d\theta$

23. $\int_{-\infty}^{0} e^{-|x|}\,dx$

24. $\int_{-\infty}^{\infty} 2xe^{-x^2}\,dx$

25. $\int_0^{1} x\ln x\,dx$

26. $\int_0^{1} (-\ln x)\,dx$

27. $\int_0^{2} \frac{ds}{\sqrt{4-s^2}}$

28. $\int_0^{1} \frac{4r\,dr}{\sqrt{1-r^4}}$

29. $\int_1^{2} \frac{ds}{s\sqrt{s^2-1}}$

30. $\int_2^{4} \frac{dt}{t\sqrt{t^2-4}}$

31. $\int_{-1}^{4} \frac{dx}{\sqrt{|x|}}$

32. $\int_0^{2} \frac{dx}{\sqrt{|x-1|}}$

33. $\int_{-1}^{\infty} \frac{d\theta}{\theta^2+5\theta+6}$

34. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$

Criterio de convergencia

En los ejercicios 35 a 64, utilice integración, criterio de comparación directa o criterio de comparación del límite para averiguar la convergencia de las integrales. Si se puede aplicar más de un método, utilice el que usted prefiera.

35. $\int_0^{\pi/2} \tan\theta\,d\theta$

36. $\int_0^{\pi/2} \cot\theta\,d\theta$

37. $\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}\theta\,d\theta}{\sqrt{\pi-\theta}}$

38. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos\theta\,d\theta}{(\pi-2\theta)^{1/3}}$

39. $\int_0^{\ln 2} x^{-2}e^{-1/x}\,dx$

40. $\int_0^{1} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

41. $\int_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{t}+\operatorname{sen} t}$

42. $\int_0^{1} \frac{dt}{t-\operatorname{sen} t}$ (*Sugerencia:* $t \geq \operatorname{sen} t$ para $t \geq 0$)

43. $\int_0^{2} \frac{dx}{1-x^2}$

44. $\int_0^{2} \frac{dx}{1-x}$

45. $\int_{-1}^{1} \ln|x|\,dx$

46. $\int_{-1}^{1} -x\ln|x|\,dx$

47. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3+1}$

48. $\int_4^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$

49. $\int_2^{\infty} \frac{dv}{\sqrt{v-1}}$

50. $\int_0^{\infty} \frac{d\theta}{1+e^{\theta}}$

51. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^6+1}}$

52. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$

53. $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x^2}\,dx$

54. $\int_2^{\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4-1}}$

55. $\int_{\pi}^{\infty} \frac{2+\cos x}{x}\,dx$

56. $\int_{\pi}^{\infty} \frac{1+\operatorname{sen} x}{x^2}\,dx$

57. $\int_4^{\infty} \frac{2\,dt}{t^{3/2}-1}$

58. $\int_2^{\infty} \frac{1}{\ln x}\,dx$

59. $\int_1^{\infty} \frac{e^x}{x}\,dx$

60. $\int_{e^e}^{\infty} \ln(\ln x)\,dx$

61. $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x-x}}\,dx$

62. $\int_1^{\infty} \frac{1}{e^x-2^x}\,dx$

63. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}$

64. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

Teoría y ejemplos

65. Determine los valores de p para los cuales converge cada integral.

a. $\int_1^{2} \frac{dx}{x(\ln x)^p}$ **b.** $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p}$

66. **$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ podría no ser igual a $\lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} f(x)\,dx$** Demuestre que

$$\int_0^{\infty} \frac{2x\,dx}{x^2+1}$$

diverge y, en consecuencia, que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x\,dx}{x^2+1}$$

diverge. Después demuestre que

$$\lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} \frac{2x\,dx}{x^2 + 1} = 0.$$

Los ejercicios 67 a 70 están relacionados con la región infinita en el primer cuadrante entre la curva $y = e^{-x}$ y el eje x.

67. Determine el área de la región.

68. Determine el centroide de la región.

69. Determine el volumen del sólido generado al hacer girar la región alrededor del eje y.

70. Determine el volumen del sólido generado al hacer girar la región alrededor del eje x.

71. Determine el área de la región que está entre las curvas $y = \sec x$ y $y = \tan x$, de $x = 0$ a $x = \pi/2$.

72. La región del ejercicio 71 se hace girar alrededor del eje x para generar un sólido.

a. Determine el volumen del sólido.

b. Demuestre que las superficies interior y exterior del sólido tienen área infinita.

73. Estimación del valor de una integral impropia convergente cuyo dominio es infinito

a. Demuestre que

$$\int_3^{\infty} e^{-3x}\,dx = \frac{1}{3}e^{-9} < 0.000042,$$

y que, por lo tanto, $\int_3^{\infty} e^{-x^2}\,dx < 0.000042$. Explique por qué esto significa que $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ puede reemplazarse por $\int_0^{3} e^{-x^2}\,dx$ sin introducir un error de magnitud mayor a 0.000042.

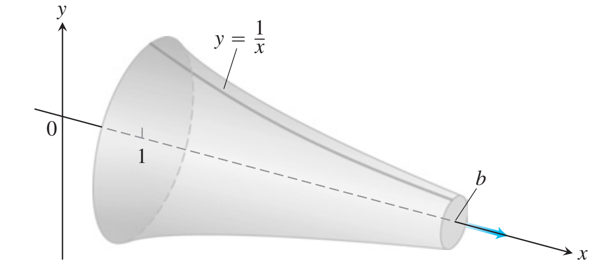
T **b.** Evalúe numéricamente $\int_0^{3} e^{-x^2}\,dx$.

74. La lata de pintura infinita o la trompeta de Gabriel Como muestra el ejemplo 3, la integral $\int_1^{\infty} (dx/x)$ diverge. Esto significa que la integral

$$\int_1^{\infty} 2\pi \frac{1}{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\,dx,$$

que mide el *área de la superficie* del sólido de rotación generado al hacer girar, alrededor del eje x, la curva $y = 1/x$, $1 \le x$, también diverge. Comparando las dos integrales, vemos que, para todo valor finito $b > 1$,

$$\int_1^{b} 2\pi \frac{1}{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\,dx > 2\pi \int_1^{b} \frac{1}{x}\,dx.$$



Sin embargo, la integral

$$\int_1^{\infty} \pi\left(\frac{1}{x}\right)^2 dx$$

para el *volumen* del sólido converge. **(a)** Calcúlelo. **(b)** Este sólido de rotación se describe con frecuencia como una lata que no puede contener pintura suficiente para cubrir su propio interior. Piense en ello por un momento. El sentido común nos dice que una cantidad finita de pintura no puede cubrir una superficie infinita. Pero si llenamos la lata con pintura (una cantidad finita), entonces *sí habremos* cubierto una superficie infinita. Explique la aparente contradicción.

75. Función integral del seno La integral

$$\text{Si}(x) = \int_0^{x} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt,$$

se llama *función integral del seno*, y tiene aplicaciones importantes en óptica.

T **a.** Trace la gráfica del integrando $(\operatorname{sen} t)/t$ para $t > 0$. La función Se(x), ¿es creciente o decreciente? ¿Cree que Se(x) = 0 para $x > 0$? Compruebe sus respuestas graficando la función Se(x) para $0 \le x \le 25$.

b. Explore la convergencia de

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt.$$

Si converge, ¿a qué valor lo hace?

76. Función error La función

$$\operatorname{erf}(x) = \int_0^{x} \frac{2e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}}\,dt,$$

denominada *función error*, tiene aplicaciones importantes en probabilidad y estadística.

T **a.** Trace la gráfica de la función error para $0 \le x \le 25$.

b. Explore la convergencia de

$$\int_0^{\infty} \frac{2e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}}\,dt.$$

Si converge, ¿a qué valor lo hace? Verá como confirmar su estimación en el ejercicio 37 de la sección 15.3.

77. Función de distribución normal La función

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

se denomina *función de probabilidad de densidad normal* con media μ y desviación estándar σ. El número μ indica en donde está centrada la distribución, y σ mide la "dispersión" alrededor de la media.

De acuerdo con la teoría de probabilidad, se sabe que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$$

En lo que sigue, sea $\mu = 0$ y $\sigma = 1$.

T **a.** Dibuje la gráfica de f. Determine los intervalos en los que f es creciente, los intervalos en que f es decreciente y los valores extremos locales y en dónde ocurren.

b. Evalúe

$$\int_{-n}^{n} f(x)\,dx$$

para $n = 1, 2, 3$.

c. Proporcione un argumento convincente de que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$$

(*Sugerencia:* Demuestre que $0 < f(x) < e^{-x/2}$ para $x > 1$, y para $b > 1$,

$$\int_{b}^{\infty} e^{-x/2}\,dx \to 0 \quad \text{cuando} \quad b \to \infty).$$

78. El siguiente argumento concluye que ln 3 es igual a $\infty - \infty$. ¿Cuál es el error en el argumento? Justifique su respuesta.

$$\begin{aligned}
\ln 3 &= \ln 1 + \ln 3 = \ln 1 - \ln\frac{1}{3}\\
&= \lim_{b\to\infty} \ln\left(\frac{b-2}{b}\right) - \ln\frac{1}{3}\\
&= \lim_{b\to\infty}\left[\ln\frac{x-2}{x}\right]_3^b\\
&= \lim_{b\to\infty}\left[\ln(x-2) - \ln x\right]_3^b\\
&= \lim_{b\to\infty}\int_3^b\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x}\right)dx\\
&= \int_3^{\infty}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x}\right)dx\\
&= \int_3^{\infty}\frac{1}{x-2}\,dx - \int_3^{\infty}\frac{1}{x}\,dx\\
&= \lim_{b\to\infty}\left[\ln(x-2)\right]_3^b - \lim_{b\to\infty}\left[\ln x\right]_3^b\\
&= \infty - \infty.
\end{aligned}$$

79. Demuestre que si $f(x)$ es integrable en todo intervalo de números reales, y a y b son números reales con $a < b$, entonces

a. Tanto $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ como $\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ convergen si y sólo si $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ y $\int_{b}^{\infty} f(x)\,dx$ convergen.

b. $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx + \int_{b}^{\infty} f(x)\,dx$ cuando todas las integrales convergen.

80. **a.** Demuestre que si f es par y existen las integrales necesarias, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{\infty} f(x)\,dx.$$

b. Muestre que si f es impar y existen las integrales necesarias, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 0.$$

Utilice la evaluación directa, criterios de comparación y los resultados del ejercicio 80, según sea adecuado, para determinar la convergencia o divergencia de las integrales en los ejercicios 81 a 88. Si se puede aplicar más de un método, emplee el que usted prefiera.

81. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$

82. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^6+1}}$

83. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

84. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x}\,dx}{x^2+1}$

85. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\,dx$

86. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x+1)^2}$

87. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\operatorname{sen} x| + |\cos x|}{|x|+1}\,dx$

(*Sugerencia:* $|\operatorname{sen}\theta| + |\cos\theta| \geq \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta$).

88. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+1)(x^2+2)}$

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

Exploración de las integrales de $x^p \ln x$

En los ejercicios 89 a 92, utilice un software matemático para explorar las integrales para diferentes valores de p (incluyendo números no enteros). ¿Para cuáles valores de p la integral converge? ¿Cuál es el valor de la integral cuando converge? Trace la gráfica del integrando para varios valores de p.

89. $\displaystyle\int_{0}^{e} x^p \ln x\,dx$

90. $\displaystyle\int_{e}^{\infty} x^p \ln x\,dx$

91. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} x^p \ln x\,dx$

92. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^p \ln|x|\,dx$

Capítulo 8 Preguntas de repaso

1. ¿Qué fórmulas básicas de integración conoce?
2. ¿Cuáles procedimientos conoce para transformar integrales en fórmulas básicas de integración?
3. ¿Qué es la integración por partes? ¿De dónde surge? ¿Por qué podríamos necesitarla?
4. Cuando se aplica la fórmula de integración por partes, ¿cómo se selecciona u y dv? ¿Cómo puede aplicar la integración por partes a una integral de la forma $\int f(x)\,dx$?
5. ¿Qué es la integración tabular? Proporcione un ejemplo.
6. ¿Cuál es el objetivo del método de las fracciones parciales?

7. Cuando el grado de un polinomio $f(x)$ es menor que el grado de un polinomio $g(x)$, ¿cómo se escribe $f(x)/g(x)$ como una suma de fracciones parciales, si $g(x)$
   a. es un producto de factores lineales distintos?
   b. consiste de un factor lineal repetido?
   c. contiene un factor cuadrático irreducible?
   ¿Qué debe hacer si el grado de f *no* es menor que el grado de g?
8. Si un integrando es un producto de la forma $\operatorname{sen}^n x \cos^m x$, en donde m y n son enteros no negativos, ¿cómo se evalúa la integral? Proporcione un ejemplo específico de cada caso.
9. ¿Qué sustituciones se hacen para evaluar integrales de $\operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx$, $\operatorname{sen} mx \cos nx$ y $\cos mx \operatorname{sen} nx$? Proporcione un ejemplo de cada caso.
10. ¿Qué sustituciones se utilizan en ocasiones para transformar integrales que incluyen $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$ y $\sqrt{x^2 - a^2}$ en integrales que puedan evaluarse de manera directa? Proporcione un ejemplo de cada caso.
11. ¿Qué restricciones puede poner a las variables que se incluyen en las tres sustituciones trigonométricas básicas, para asegurarse de que las sustituciones sean reversibles (es decir, que tengan inversas)?
12. ¿Cómo se utilizan las tablas típicas de integrales? ¿Qué hacer si una integral particular que se quiere evaluar no está en la tabla?
13. ¿Qué es una fórmula de reducción? ¿Cómo se deducen las fórmulas de reducción típicas? ¿Cómo se utilizan las fórmulas de reducción? Proporcione un ejemplo.
14. Usted está colaborando para producir un breve manual de cómo hacer integración numérica, y está escribiendo acerca de la regla del trapecio. **(a)** ¿Qué diría acerca de la regla y cómo usarla? ¿Cómo alcanzar una precisión deseada? **(b)** ¿Qué diría si estuviese escribiendo acerca de la regla de Simpson?
15. ¿Cómo se comparan los méritos relativos de la regla de Simpson y de la regla del trapecio?
16. ¿Qué es una integral impropia del tipo I? ¿Del tipo II? ¿Cómo se definen los valores de los diferentes tipos de integrales impropias? Proporcione ejemplos.
17. ¿Qué criterios están disponibles para determinar la convergencia y divergencia de integrales impropias que no pueden evaluarse de manera directa? Proporcione ejemplos de su uso.

Capítulo 8 Ejercicios de práctica

Integración por medio de sustituciones

Evalúe las integrales en los ejercicios 1 a 82. Para transformar cada integral en una forma básica, podría ser necesario utilizar una o más de las técnicas de sustitución algebraica, completar el cuadrado, separación de fracciones, división larga o sustitución trigonométrica.

1. $\int x\sqrt{4x^2 - 9}\, dx$
2. $\int 6x\sqrt{3x^2 + 5}\, dx$
3. $\int x(2x + 1)^{1/2}\, dx$
4. $\int x(1 - x)^{-1/2}\, dx$
5. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{8x^2 + 1}}$
6. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{9 - 4x^2}}$
7. $\int \frac{y\, dy}{25 + y^2}$
8. $\int \frac{y^3\, dy}{4 + y^4}$
9. $\int \frac{t^3\, dt}{\sqrt{9 - 4t^4}}$
10. $\int \frac{2t\, dt}{t^4 + 1}$
11. $\int z^{2/3}(z^{5/3} + 1)^{2/3}\, dz$
12. $\int z^{-1/5}(1 + z^{4/5})^{-1/2}\, dz$
13. $\int \frac{\operatorname{sen} 2\theta\, d\theta}{(1 - \cos 2\theta)^2}$
14. $\int \frac{\cos\theta\, d\theta}{(1 + \operatorname{sen}\theta)^{1/2}}$
15. $\int \frac{\operatorname{sen} t}{3 + 4\cos t}\, dt$
16. $\int \frac{\cos 2t}{1 + \operatorname{sen} 2t}\, dt$
17. $\int \operatorname{sen} 2x\, e^{\cos 2x}\, dx$
18. $\int \sec x \tan x\, e^{\sec x}\, dx$
19. $\int e^\theta \operatorname{sen}(e^\theta)\cos^2(e^\theta)\, d\theta$
20. $\int e^\theta \sec^2(e^\theta)\, d\theta$
21. $\int 2^{x-1}\, dx$
22. $\int 5^{x\sqrt{2}}\, dx$
23. $\int \frac{dv}{v \ln v}$
24. $\int \frac{dv}{v(2 + \ln v)}$
25. $\int \frac{dx}{(x^2 + 1)(2 + \tan^{-1} x)}$
26. $\int \frac{\operatorname{sen}^{-1} x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$
27. $\int \frac{2\, dx}{\sqrt{1 - 4x^2}}$
28. $\int \frac{dx}{\sqrt{49 - x^2}}$
29. $\int \frac{dt}{\sqrt{16 - 9t^2}}$
30. $\int \frac{dt}{\sqrt{9 - 4t^2}}$
31. $\int \frac{dt}{9 + t^2}$
32. $\int \frac{dt}{1 + 25t^2}$
33. $\int \frac{4\, dx}{5x\sqrt{25x^2 - 16}}$
34. $\int \frac{6\, dx}{x\sqrt{4x^2 - 9}}$
35. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2}}$
36. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2 - 3}}$
37. $\int \frac{dy}{y^2 - 4y + 8}$
38. $\int \frac{dt}{t^2 + 4t + 5}$
39. $\int \frac{dx}{(x - 1)\sqrt{x^2 - 2x}}$
40. $\int \frac{dv}{(v + 1)\sqrt{v^2 + 2v}}$
41. $\int \operatorname{sen}^2 x\, dx$
42. $\int \cos^2 3x\, dx$

43. $\int \operatorname{sen}^3 \frac{\theta}{2}\, d\theta$

44. $\int \operatorname{sen}^3 \theta \cos^2 \theta\, d\theta$

45. $\int \tan^3 2t\, dt$

46. $\int 6 \sec^4 t\, dt$

47. $\int \frac{dx}{2 \operatorname{sen} x \cos x}$

48. $\int \frac{2\, dx}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}$

49. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{\csc^2 y - 1}\, dy$

50. $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sqrt{\cot^2 t + 1}\, dt$

51. $\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos^2 2x}\, dx$

52. $\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}}\, dx$

53. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 - \cos 2t}\, dt$

54. $\int_{\pi}^{2\pi} \sqrt{1 + \cos 2t}\, dt$

55. $\int \frac{x^2}{x^2 + 4}\, dx$

56. $\int \frac{x^3}{9 + x^2}\, dx$

57. $\int \frac{4x^2 + 3}{2x - 1}\, dx$

58. $\int \frac{2x}{x - 4}\, dx$

59. $\int \frac{2y - 1}{y^2 + 4}\, dy$

60. $\int \frac{y + 4}{y^2 + 1}\, dy$

61. $\int \frac{t + 2}{\sqrt{4 - t^2}}\, dt$

62. $\int \frac{2t^2 + \sqrt{1 - t^2}}{t\sqrt{1 - t^2}}\, dt$

63. $\int \frac{\tan x\, dx}{\tan x + \sec x}$

64. $\int \frac{\cot x}{\cot x + \csc x}\, dx$

65. $\int \sec (5 - 3x)\, dx$

66. $\int x \csc (x^2 + 3)\, dx$

67. $\int \cot \left(\frac{x}{4}\right) dx$

68. $\int \tan (2x - 7)\, dx$

69. $\int x\sqrt{1 - x}\, dx$

70. $\int 3x\sqrt{2x + 1}\, dx$

71. $\int \sqrt{z^2 + 1}\, dz$

72. $\int (16 + z^2)^{-3/2}\, dz$

73. $\int \frac{dy}{\sqrt{25 + y^2}}$

74. $\int \frac{dy}{\sqrt{25 + 9y^2}}$

75. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1 - x^2}}$

76. $\int \frac{x^3\, dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

77. $\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

78. $\int \sqrt{4 - x^2}\, dx$

79. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 9}}$

80. $\int \frac{12\, dx}{(x^2 - 1)^{3/2}}$

81. $\int \frac{\sqrt{w^2 - 1}}{w}\, dw$

82. $\int \frac{\sqrt{z^2 - 16}}{z}\, dz$

Integración por partes

Evalúe las integrales en los ejercicios 83 a 90 por medio de integración por partes.

83. $\int \ln (x + 1)\, dx$

84. $\int x^2 \ln x\, dx$

85. $\int \tan^{-1} 3x\, dx$

86. $\int \cos^{-1} \left(\frac{x}{2}\right) dx$

87. $\int (x + 1)^2 e^x\, dx$

88. $\int x^2 \operatorname{sen} (1 - x)\, dx$

89. $\int e^x \cos 2x\, dx$

90. $\int e^{-2x} \operatorname{sen} 3x\, dx$

Fracciones parciales

En los ejercicios 91 a 110, evalúe las integrales. Podría ser necesario utilizar primero una sustitución.

91. $\int \frac{x\, dx}{x^2 - 3x + 2}$

92. $\int \frac{x\, dx}{x^2 + 4x + 3}$

93. $\int \frac{dx}{x(x + 1)^2}$

94. $\int \frac{x + 1}{x^2(x - 1)}\, dx$

95. $\int \frac{\operatorname{sen} \theta\, d\theta}{\cos^2 \theta + \cos \theta - 2}$

96. $\int \frac{\cos \theta\, d\theta}{\operatorname{sen}^2 \theta + \operatorname{sen} \theta - 6}$

97. $\int \frac{3x^2 + 4x + 4}{x^3 + x}\, dx$

98. $\int \frac{4x\, dx}{x^3 + 4x}$

99. $\int \frac{v + 3}{2v^3 - 8v}\, dv$

100. $\int \frac{(3v - 7)\, dv}{(v - 1)(v - 2)(v - 3)}$

101. $\int \frac{dt}{t^4 + 4t^2 + 3}$

102. $\int \frac{t\, dt}{t^4 - t^2 - 2}$

103. $\int \frac{x^3 + x^2}{x^2 + x - 2}\, dx$

104. $\int \frac{x^3 + 1}{x^3 - x}\, dx$

105. $\int \frac{x^3 + 4x^2}{x^2 + 4x + 3}\, dx$

106. $\int \frac{2x^3 + x^2 - 21x + 24}{x^2 + 2x - 8}\, dx$

107. $\int \frac{dx}{x\left(3\sqrt{x + 1}\right)}$

108. $\int \frac{dx}{x\left(1 + \sqrt[3]{x}\right)}$

109. $\int \frac{ds}{e^s - 1}$

110. $\int \frac{ds}{\sqrt{e^s + 1}}$

Sustituciones trigonométricas

En los ejercicios 111 a 114, evalúe las integrales, **(a)** sin utilizar una sustitución trigonométrica, **(b)** por medio de una sustitución trigonométrica.

111. $\int \frac{y\, dy}{\sqrt{16 - y^2}}$

112. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{4 + x^2}}$

113. $\int \frac{x\, dx}{4 - x^2}$

114. $\int \frac{t\, dt}{\sqrt{4t^2 - 1}}$

Términos cuadráticos

En los ejercicios 115 a 118, evalúe las integrales.

115. $\int \frac{x\, dx}{9 - x^2}$

116. $\int \frac{dx}{x(9 - x^2)}$

117. $\int \frac{dx}{9 - x^2}$

118. $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}$

Integrales trigonométricas

Evalúe las integrales de los ejercicios 119 a 126.

119. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x\, dx$

120. $\int \cos^5 x \operatorname{sen}^5 x\, dx$

121. $\int \tan^4 x \sec^2 x\, dx$

122. $\int \tan^3 x \sec^3 x\, dx$

123. $\int \operatorname{sen} 5\theta \cos 6\theta\, d\theta$

124. $\int \cos 3\theta \cos 3\theta\, d\theta$

125. $\int \sqrt{1 + \cos(t/2)}\, dt$

126. $\int e^t \sqrt{\tan^2 e^t + 1}\, dt$

Integración numérica

127. De acuerdo con la fórmula para la cota del error para la regla de Simpson, ¿cuántos subintervalos utilizaría para asegurar que el valor de la estimación de

$$\ln 3 = \int_1^3 \frac{1}{x}\, dx$$

por medio de la regla de Simpson tenga un error absoluto no mayor a 10^{-4}? (Recuerde que para la regla de Simpson el número de subintervalos tiene que ser par).

128. Un cálculo rápido muestra que si $0 \le x \le 1$, la segunda derivada de $f(x) = \sqrt{1 + x^4}$ está entre 0 y 8. Con base en esto, si utiliza la regla del trapecio, ¿aproximadamente cuántas subdivisiones necesitaría para aproximar la integral de f, de 0 a 1, con un error absoluto no mayor a 10^{-3}?

129. Un cálculo directo muestra que

$$\int_0^{\pi} 2 \operatorname{sen}^2 x\, dx = \pi.$$

¿Qué tan cercana es la aproximación de la regla del trapecio con $n = 6$? ¿Con la regla de Simpson con $n = 6$? Inténtelo y averígüelo.

130. Usted planea utilizar la regla de Simpson para aproximar el valor de la integral

$$\int_1^2 f(x)\, dx$$

con una magnitud de error menor que 10^{-5}. Usted determinó que $|f^{(4)}(x)| \le 3$ en el intervalo de integración. ¿Cuántos subintervalos debe utilizar para asegurarse de tener la precisión que se requiere? (Recuerde que para la regla de Simpson el número de subinterales tiene que ser par).

131. Temperatura media Calcule el valor promedio de la función de temperatura

$$f(x) = 37 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{365}(x - 101)\right) + 25$$

para un año de 365 días. Ésta es una manera de estimar la temperatura media anual del aire en Fairbanks, Alaska. La cifra oficial del Servicio Meteorológico Nacional de Estados Unidos, un promedio numérico de la media normal diaria del aire durante el año, es 25.7°F, medición ligeramente mayor que el valor promedio de $f(x)$.

132. Calor específico de un gas El calor específico, C_v es la cantidad de calor requerido para elevar 1°C la temperatura de una masa de gas dada con volumen constante, se mide en unidades de cal/grado-mol (calorías por grado gramo peso molecular). La capacidad calorífica del oxígeno depende de su temperatura T y satisface la fórmula

$$C_v = 8.27 + 10^{-5}(26T - 1.87T^2).$$

Determine el valor promedio de C_v para $20° \le T \le 675°$C y la temperatura en la que se alcanza.

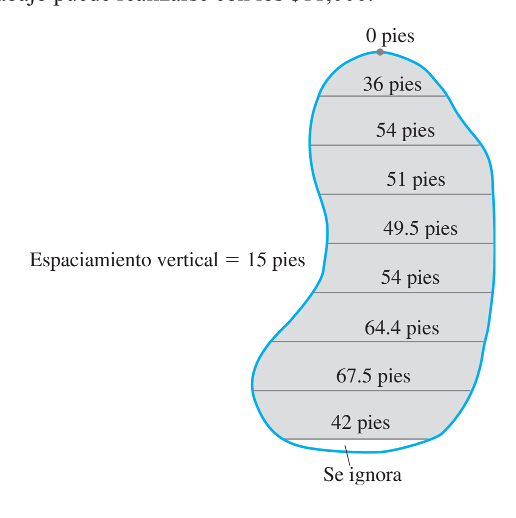
133. Eficiencia de gasolina La computadora de un automóvil da una lectura digital del consumo de gasolina en galones por hora. Durante un viaje, un pasajero registró el consumo de gasolina cada 5 minutos durante una hora completa de viaje.

Tiempo	Gal/h	Tiempo	Gal/h
0	2.5	35	2.5
5	2.4	40	2.4
10	2.3	45	2.3
15	2.4	50	2.4
20	2.4	55	2.4
25	2.5	60	2.3
30	2.6		

a. Utilice la regla del trapecio para aproximar el consumo total de gasolina durante la hora.

b. Si el automóvil recorre 60 millas en la hora, ¿cuál fue la eficiencia de la gasolina (en millas por galón) para esa parte del recorrido?

134. Un nuevo estacionamiento Para satisfacer la demanda, la localidad en donde usted vive ha asignado el área que se muestra aquí para instalar un nuevo estacionamiento. Como ingeniero de la ciudad, el ayuntamiento le pidió que averiguara si el lote se puede construir con $11,000. El costo para limpiar el terreno será de $0.10 por pie cuadrado, y el pavimentado costará $2.00 por pie cuadrado. Utilice la regla de Simpson para determinar si el trabajo puede realizarse con los $11,000.



Integrales impropias

Evalúe las integrales impropias de los ejercicios 135 a 144.

135. $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}$

136. $\int_0^1 \ln x\, dx$

137. $\int_{-1}^1 \frac{dy}{y^{2/3}}$

138. $\int_{-2}^0 \frac{d\theta}{(\theta + 1)^{3/5}}$

139. $\int_3^\infty \frac{2\, du}{u^2 - 2u}$

140. $\int_1^\infty \frac{3v - 1}{4v^3 - v^2}\, dv$

141. $\int_0^\infty x^2 e^{-x}\, dx$

142. $\int_{-\infty}^0 xe^{3x}\, dx$

143. $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{4x^2 + 9}$

144. $\int_{-\infty}^\infty \frac{4dx}{x^2 + 16}$

Convergencia o divergencia

¿Cuáles de las integrales impropias en los ejercicios 145 a 150 convergen y cuáles divergen?

145. $\int_6^\infty \frac{d\theta}{\sqrt{\theta^2 + 1}}$

146. $\int_0^\infty e^{-u} \cos u\, du$

147. $\int_1^\infty \frac{\ln z}{z}\, dz$

148. $\int_1^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt$

149. $\int_{-\infty}^\infty \frac{2\, dx}{e^x + e^{-x}}$

150. $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2(1 + e^x)}$

Miscelánea de integrales

Evalúe las integrales en los ejercicios 151 a 218. Las integrales aparecen en orden aleatorio.

151. $\int \frac{x\, dx}{1 + \sqrt{x}}$

152. $\int \frac{x^3 + 2}{4 - x^2}\, dx$

153. $\int \frac{dx}{x(x^2 + 1)^2}$

154. $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

155. $\int \frac{dx}{\sqrt{-2x - x^2}}$

156. $\int \frac{(t - 1)\, dt}{\sqrt{t^2 - 2t}}$

157. $\int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}}$

158. $\int e^t \cos e^t\, dt$

159. $\int \frac{2 - \cos x + \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x}\, dx$

160. $\int \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{\cos^2 \theta}\, d\theta$

161. $\int \frac{9\, dv}{81 - v^4}$

162. $\int \frac{\cos x\, dx}{1 + \operatorname{sen}^2 x}$

163. $\int \theta \cos (2\theta + 1)\, d\theta$

164. $\int_2^\infty \frac{dx}{(x - 1)^2}$

165. $\int \frac{x^3\, dx}{x^2 - 2x + 1}$

166. $\int \frac{d\theta}{\sqrt{1 + \sqrt{\theta}}}$

167. $\int \frac{2 \operatorname{sen} \sqrt{x}\, dx}{\sqrt{x} \sec \sqrt{x}}$

168. $\int \frac{x^5\, dx}{x^4 - 16}$

169. $\int \frac{dy}{\operatorname{sen} y \cos y}$

170. $\int \frac{d\theta}{\theta^2 - 2\theta + 4}$

171. $\int \frac{\tan x}{\cos^2 x}\, dx$

172. $\int \frac{dr}{(r + 1)\sqrt{r^2 + 2r}}$

173. $\int \frac{(r + 2)\, dr}{\sqrt{-r^2 - 4r}}$

174. $\int \frac{y\, dy}{4 + y^4}$

175. $\int \frac{\operatorname{sen} 2\theta\, d\theta}{(1 + \cos 2\theta)^2}$

176. $\int \frac{dx}{(x^2 - 1)^2}$

177. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{1 + \cos 4x}\, dx$

178. $\int (15)^{2x+1}\, dx$

179. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{2 - x}}$

180. $\int \frac{\sqrt{1 - v^2}}{v^2}\, dv$

181. $\int \frac{dy}{y^2 - 2y + 2}$

182. $\int \ln \sqrt{x - 1}\, dx$

183. $\int \theta^2 \tan (\theta^3)\, d\theta$

184. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{8 - 2x^2 - x^4}}$

185. $\int \frac{z + 1}{z^2(z^2 + 4)}\, dz$

186. $\int x^3 e^{(x^2)}\, dx$

187. $\int \frac{t\, dt}{\sqrt{9 - 4t^2}}$

188. $\int_0^{\pi/10} \sqrt{1 + \cos 5\theta}\, d\theta$

189. $\int \frac{\cot \theta\, d\theta}{1 + \operatorname{sen}^2 \theta}$

190. $\int \frac{\tan^{-1} x}{x^2}\, dx$

191. $\int \frac{\tan \sqrt{y}}{2\sqrt{y}}\, dy$

192. $\int \frac{e^t\, dt}{e^{2t} + 3e^t + 2}$

193. $\int \frac{\theta^2 d\theta}{4 - \theta^2}$

194. $\int \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}\, dx$

195. $\int \frac{\cos (\operatorname{sen}^{-1} x)}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$

196. $\int \frac{\cos x\, dx}{\operatorname{sen}^3 x - \operatorname{sen} x}$

197. $\int \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}\, dx$

198. $\int \frac{x^2 - x + 2}{(x^2 + 2)^2}\, dx$

199. $\int \frac{e^t\, dt}{1 + e^t}$

200. $\int \tan^3 t\, dt$

201. $\int_1^\infty \frac{\ln y}{y^3}\, dy$

202. $\int \frac{3 + \sec^2 x + \operatorname{sen} x}{\tan x}\, dx$

203. $\int \frac{\cot v\, dv}{\ln \operatorname{sen} v}$

204. $\int \frac{dx}{(2x - 1)\sqrt{x^2 - x}}$

205. $\int e^{\ln \sqrt{x}}\, dx$

206. $\int e^\theta \sqrt{3 + 4e^\theta}\, d\theta$

207. $\int \frac{\operatorname{sen} 5t\, dt}{1 + (\cos 5t)^2}$

208. $\int \frac{dv}{\sqrt{e^{2v} - 1}}$

209. $\int (27)^{3\theta+1} d\theta$

210. $\int x^5 \operatorname{sen} x\, dx$

211. $\int \frac{dr}{1 + \sqrt{r}}$

212. $\int \frac{4x^3 - 20x}{x^4 - 10x^2 + 9}\, dx$

213. $\int \frac{8\, dy}{y^3(y + 2)}$

214. $\int \frac{(t + 1)\, dt}{(t^2 + 2t)^{2/3}}$

215. $\int \frac{8\, dm}{m\sqrt{49m^2 - 4}}$

216. $\displaystyle\int \frac{dt}{t(1+\ln t)\sqrt{(\ln t)(2+\ln t)}}$

217. $\displaystyle\int_0^1 3(x-1)^2\left(\int_0^x \sqrt{1+(t-1)^4}\,dt\right)dx$

218. $\displaystyle\int_2^\infty \frac{4v^3+v-1}{v^2(v-1)(v^2+1)}\,dv$

219. Suponga que para cierta función f se sabe que

$$f'(x)=\frac{\cos x}{x},\quad f(\pi/2)=a \quad \text{y} \quad f(3\pi/2)=b.$$

Utilice integración por partes para evaluar

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2} f(x)\,dx.$$

220. Determine un número positivo a que satisfaga

$$\int_0^a \frac{dx}{1+x^2}=\int_a^\infty \frac{dx}{1+x^2}.$$

Capítulo 8 Ejercicios adicionales y avanzados

Integrales difíciles

Evalúe las integrales de los ejercicios 1 a 10.

1. $\displaystyle\int (\operatorname{sen}^{-1} x)^2\,dx$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+m)}$

3. $\displaystyle\int x\operatorname{sen}^{-1} x\,dx$

4. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^{-1}\sqrt{y}\,dy$

5. $\displaystyle\int \frac{d\theta}{1-\tan^2\theta}$

6. $\displaystyle\int \ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{1+x}\right)dx$

7. $\displaystyle\int \frac{dt}{t-\sqrt{1-t^2}}$

8. $\displaystyle\int \frac{(2e^{2x}-e^x)\,dx}{\sqrt{3e^{2x}-6e^x-1}}$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+4}$

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^6-1}$

Límites

En los ejercicios 11 y 12, evalúe los límites.

11. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\int_{-x}^{x} \operatorname{sen} t\,dt$

12. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\int_x^1 \frac{\cos t}{t^2}\,dt$

En los ejercicios 13 y 14 evalúe los límites, identificándolos con integrales definidas y evaluando las integrales.

13. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\sqrt[n]{1+\frac{k}{n}}$

14. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}$

Teoría y aplicaciones

15. Determinación de longitud de arco Determine la longitud de la curva

$$y=\int_0^x \sqrt{\cos 2t}\,dt,\quad 0\le x\le \pi/4.$$

16. Determinación de longitud de arco Determine la longitud de la curva $y=\ln(1-x^2)$, $0\le x\le 1/2$.

17. Determinación de un volumen La región en el primer cuadrante acotada por el eje x y la curva $y=3x\sqrt{1-x}$ se hace girar alrededor del eje y para generar un sólido. Determine el volumen del sólido.

18. Determinación de un volumen La región en el primer cuadrante acotada por el eje x, la curva $y=5/\left(x\sqrt{5-x}\right)$, y las rectas $x=1$ y $x=4$, se hace girar alrededor del eje x para generar un sólido. Determine el volumen del sólido.

19. Determinación de un volumen La región en el primer cuadrante acotada por los ejes coordenados, la curva $y=e^x$ y la recta $x=1$, se hace girar alrededor del eje y para generar un sólido. Determine el volumen del sólido.

20. Determinación de un volumen La región en el primer cuadrante acotada por arriba por la curva $y=e^x-1$, por abajo por el eje x y a la derecha por la recta $x=\ln 2$, se hace girar alrededor de la recta $x=\ln 2$ para generar un sólido. Determine el volumen del sólido.

21. Determinación de un volumen Sea R la región "triangular" en el primer cuadrante acotada por arriba por la recta $y=1$, por abajo por la curva $y=\ln x$ y a la izquierda por la recta $x=1$. Determine el volumen del sólido generado al hacer girar R alrededor de

a. el eje x. **b.** la recta $y=1$.

22. Determinación de un volumen (*Continuación del ejercicio 21.*) Determine el volumen del sólido generado al hacer girar la región R alrededor de

a. el eje y. **b.** la recta $x=1$.

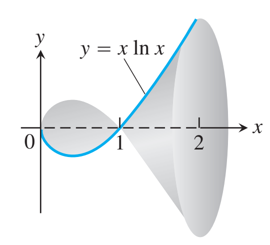
23. Determinación de un volumen La región entre el eje x y la curva

$$y=f(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ x\ln x, & 0<x\le 2\end{cases}$$

se hace girar alrededor del eje x para generar el sólido que se muestra a continuación.

a. Demuestre que f es continua en $x=0$.

b. Determine el volumen del sólido



24. Determinación de un volumen La región infinita acotada por los ejes coordenados y la curva $y = -\ln x$ en el primer cuadrante, se hace girar alrededor del eje x para generar un sólido. Determine el volumen del sólido.

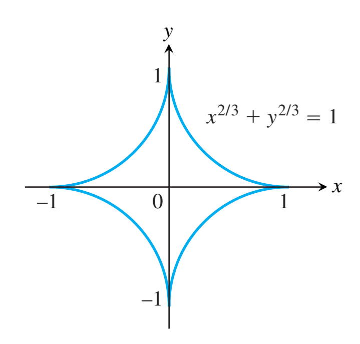
25. Centroide de una región Determine el centroide de la región en el primer cuadrante acotada por abajo por el eje x, por arriba por la curva $y = \ln x$ y a la derecha por la recta $x = e$.

26. Centroide de una región Determine el centroide de la región en el plano acotada por las curvas $y = \pm(1 - x^2)^{-1/2}$ y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

27. Longitud de una curva Determine la longitud de la curva $y = \ln x$, de $x = 1$ a $x = e$.

28. Determinación del área de una superficie Determine el área de la superficie generada al hacer girar la curva del ejercicio 27 alrededor del eje y.

29. Longitud de una astroide La gráfica de la ecuación $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ forma parte de una familia de curvas llamadas *astroides* (no "asteroides"), por su parecido a una estrella (vea la figura siguiente).



30. Superficie generada por una astroide Determine el área de la superficie generada al hacer girar la curva del ejercicio 29 alrededor del eje x.

31. Determine una curva que pase por el origen, cuya longitud es

$$\int_0^4 \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\, dx.$$

32. Sin evaluar ninguna de las integrales, explique por qué

$$2\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

T **33. a.** Grafique la función $f(x) = e^{(x - e^x)}$, $-5 \le x \le 3$.

b. Demuestre que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ converge, y encuentre su valor.

34. Determine $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{ny^{n-1}}{1 + y}\, dy$.

35. Deduzca la fórmula de la integral

$$\int x\left(\sqrt{x^2 - a^2}\right)^n dx = \frac{\left(\sqrt{x^2 - a^2}\right)^{n+2}}{n + 2} + C, \quad n \neq -2.$$

36. Demuestre que

$$\frac{\pi}{6} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2 - x^3}} < \frac{\pi\sqrt{2}}{8}.$$

(*Sugerencia:* Observe que para $0 < x < 1$, tenemos $4 - x^2 > 4 - x^2 - x^3 > 4 - 2x^2$, donde el lado izquierdo se vuelve igualdad para $x = 0$ y el lado derecho se vuelve igualdad para $x = 1$).

37. ¿Para qué valor o valores de a

$$\int_1^{\infty} \left(\frac{ax}{x^2 + 1} - \frac{1}{2x}\right) dx$$

converge? Evalúe la(s) integrale(s) correspondiente(s).

38. Para cada $x > 0$, sea $G(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt}\, dt$. Demuestre que $xG(x) = 1$ para toda $x > 0$.

39. Área infinita y volumen finito ¿Qué valores de p tienen la propiedad siguiente: el área de la región entre la curva $y = x^{-p}$, $-1 \le x < \infty$, y el eje x es infinita, pero el volumen del sólido generado al hacer girar la región alrededor del eje x es finito.

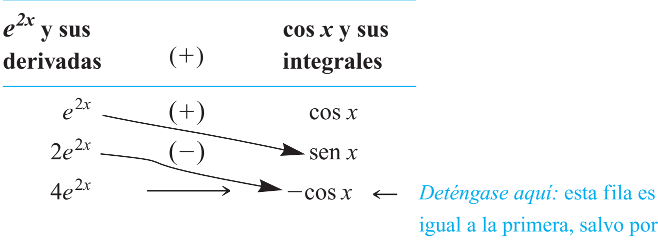
40. Área infinita y volumen finito ¿Qué valores de p tienen la propiedad siguiente: el área de la región en el primer cuadrante acotada por la curva $y = x^{-p}$, el eje y , la recta $x = 1$, y el intervalo $[0, 1]$ en el eje x es infinita, pero el volumen del sólido generado al hacer girar la región alrededor de uno de los ejes coordenados es finito.

Integración tabular

La técnica de integración tabular también se aplica a integrales de la forma $\int f(x)g(x)\, dx$ cuando ninguna de las funciones puede derivarse de manera repetida hasta convertirse en cero. Por ejemplo, para evaluar

$$\int e^{2x} \cos x\, dx$$

iniciamos como antes, con una tabla listando las derivadas sucesivas de e^{2x} y las integrales de cos x:



e^{2x} y sus derivadas		cos x y sus integrales
e^{2x}	$(+)$	$\cos x$
$2e^{2x}$	$(-)$	$\operatorname{sen} x$
$4e^{2x}$		$-\cos x$ ← *Deténgase aquí:* esta fila es igual a la primera, salvo por factores constantes (4 a la izquierda, –1 a la derecha)

Detenemos la derivación y la integración tan pronto como lleguemos a una fila que sea igual a la primera, excepto por factores constantes. Interpretamos la tabla como

$$\int e^{2x} \cos x\, dx = +(e^{2x} \operatorname{sen} x) - (2e^{2x}(-\cos x)) + \int (4e^{2x})(-\cos x)\, dx.$$

Tomamos los productos con su signo, unidos por las flechas diagonales, y una integral con su signo para la última flecha horizontal. Al transponer la integral de la derecha al lado izquierdo se obtiene

$$5\int e^{2x}\cos x\,dx = e^{2x}\operatorname{sen} x + 2e^{2x}\cos x$$

o bien

$$\int e^{2x}\cos x\,dx = \frac{e^{2x}\operatorname{sen} x + 2e^{2x}\cos x}{5} + C,$$

después de dividir entre 5 y sumar la constante de integración.

Utilice la integración tabular para evaluar las integrales en los ejercicios 41 a 48.

41. $\int e^{2x}\cos 3x\,dx$

42. $\int e^{3x}\operatorname{sen} 4x\,dx$

43. $\int \operatorname{sen} 3x\operatorname{sen} x\,dx$

44. $\int \cos 5x\operatorname{sen} 4x\,dx$

45. $\int e^{ax}\operatorname{sen} bx\,dx$

46. $\int e^{ax}\cos bx\,dx$

47. $\int \ln(ax)\,dx$

48. $\int x^2\ln(ax)\,dx$

La función gama y la fórmula de Stirling

La función gama de Euler $\Gamma(x)$ ("gama de x"; Γ es la g griega mayúscula) utiliza una integral para ampliar la función factorial de los enteros no negativos a otros valores reales. La fórmula es

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt, \qquad x > 0.$$

Para cada x positiva, el número $\Gamma(x)$ es la integral de $t^{x-1}e^{-t}$ respecto de t, de 0 a ∞. La figura 8.27 muestra la gráfica de Γ cerca del origen. Verá cómo calcular $\Gamma(1/2)$ si hace el ejercicio adicional 31 del capítulo 15.

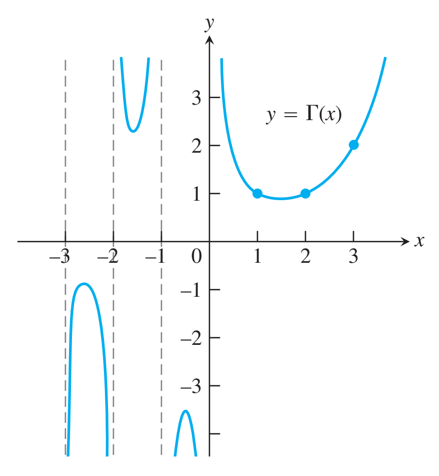


FIGURA 8.27 La función gama de Euler, $\Gamma(x)$ es una función continua de x, cuyo valor en cada entero positivo $n + 1$ es $n!$ La fórmula por medio de una integral definida para Γ es válida sólo para $x > 0$, pero Γ puede extenderse a valores negativos no enteros de x con la fórmula $\Gamma(x) = (\Gamma(x+1))/x$, que es tema del ejercicio 49.

49. Si n es un entero no negativo, $\Gamma(n+1) = n!$

a. Demuestre que $\Gamma(1) = 1$.

b. Después aplique integración por partes a la integral para $\Gamma(x+1)$ para demostrar que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

$$\begin{aligned}\Gamma(2) &= 1\Gamma(1) = 1\\ \Gamma(3) &= 2\Gamma(2) = 2\\ \Gamma(4) &= 3\Gamma(3) = 6\\ &\vdots\\ \Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) = n! \end{aligned} \tag{1}$$

c. Utilice inducción matemática para verificar la ecuación (1) para todo entero no negativo n.

50. Fórmula de Stirling El matemático escocés James Stirling (1692-1770) demostró que

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{e}{x}\right)^x\sqrt{\frac{x}{2\pi}}\,\Gamma(x) = 1,$$

de manera que, para x grande,

$$\Gamma(x) = \left(\frac{x}{e}\right)^x\sqrt{\frac{2\pi}{x}}(1 + \epsilon(x)), \qquad \epsilon(x)\to 0 \text{ cuando } x\to\infty. \tag{2}$$

Al despreciar $\epsilon(x)$ llegamos a la aproximación

$$\Gamma(x) \approx \left(\frac{x}{e}\right)^x\sqrt{\frac{2\pi}{x}} \qquad \textbf{(fórmula de Stirling)}. \tag{3}$$

a. Aproximación de Stirling para n! Utilice la ecuación (3) y el hecho de que $n! = n\Gamma(n)$ para demostrar que

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2n\pi} \qquad \textbf{(fórmula de Stirling)}. \tag{4}$$

Como verá si resuelve el ejercicio 64 de la sección 11.1, la ecuación lleva a la aproximación

$$\sqrt[n]{n!} \approx \frac{n}{e}. \tag{5}$$

T **b.** Compare el valor que da su calculadora para $n!$ con el valor dado por la aproximación de Stirling para $n = 10, 20, 30, \ldots,$ y así sucesivamente hasta alcanzar la capacidad de su calculadora.

T **c.** Un refinamiento de la ecuación (2) da

$$\Gamma(x) = \left(\frac{x}{e}\right)^x\sqrt{\frac{2\pi}{x}}\,e^{1/(12x)}(1 + \epsilon(x)),$$

o

$$\Gamma(x) \approx \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{\frac{2\pi}{x}}\, e^{1/(12x)}$$

lo cual nos dice que

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi}\, e^{1/(12n)}. \qquad (6)$$

Compare los valores dados para 10! por su calculadora, por la aproximación de Stirling y por la ecuación (6).

Capítulo 8 Proyectos de aplicación tecnológica

Módulo Mathematica/Maple

Aproximaciones de Riemann, trapecios y Simpson

Parte I: Visualice el error en que se incurre al usar sumas de Riemann para aproximar el área debajo de una curva.

Parte II: Construya una tabla de valores y calcule la magnitud relativa del error como una función del tamaño del paso Δx.

Parte III: Investigue el efecto de la función derivada sobre el error.

Partes IV y **V:** Aproximaciones por medio de trapecios.

Parte VI: Aproximaciones por medio de la regla de Simpson.

Módulo Mathematica/Maple

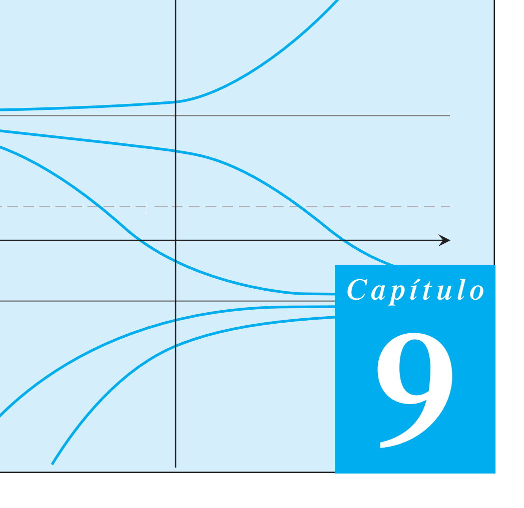
Juegos de elección: Exploración de la técnica probabilística Monte Carlo para integración numérica

Explore graficamente el método Monte Carlo para aproximar integrales definidas.

Módulo Mathematica/Maple

Cálculo de probabilidades con integrales impropias

Explore, de forma gráfica, el método Monte Carlo para aproximar integrales definidas.



Capítulo 9

Aplicaciones adicionales de integración

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

Carl Friedrich Gauss
(1777-1855)

INTRODUCCIÓN En la sección 4.8 hablamos de las ecuaciones diferenciales de la forma $dy/dx = f(x)$, donde y es una función desconocida que se está derivando. Para una función continua f, encontramos la solución general $y(x)$ por medio de integración: $y(x) = \int f(x)\, dx$. (Recuerde que la integral indefinida representa a *todas* las antiderivadas de f, por lo que contiene una constante arbitraria C que debe sumarse una vez que se determina una antiderivada). Muchas aplicaciones en la ciencia, la ingeniería y la economía incluyen un modelo formulado por ecuaciones diferenciales aún más generales. Por ejemplo, en la sección 7.5, encontramos que el crecimiento y el decrecimiento exponencial se modelan por medio de una ecuación diferencial de la forma $dy/dx = ky$, para alguna constante $k \neq 0$. Todavía no hemos considerado ecuaciones diferenciales como $dy/dx = y - x$, aunque tales ecuaciones aparecen con frecuencia en aplicaciones. En este capítulo analizaremos varias ecuaciones diferenciales que tienen la forma $dy/dx = f(x, y)$, en donde f es una función *tanto* de la variable dependiente *como* de la variable independiente. Utilizaremos la teoría de integración indefinida para resolver estas ecuaciones diferenciales, e investigaremos métodos de solución analíticos, gráficos y numéricos.

9.1 Campos de pendientes y ecuaciones diferenciables separables

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

Jules Henri Poincaré
(1854-1912)

Al calcular las derivadas por derivación implícita (sección 3.6), encontramos que la expresión para la derivada dy/dx con frecuencia contiene ambas variables, x y y, y no sólo a la variable independiente x. Iniciaremos esta sección considerando la ecuación diferencial general $dy/dx = f(x, y)$ y lo que se entenderá por una solución para ella. Después examinaremos ecuaciones que tienen una forma especial para la cual la función f puede expresarse como un producto de una función de x y una función de y.

Ecuación diferencial general de primer orden y su solución

Una **ecuación diferencial de primer orden** es una ecuación

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

en la que $f(x, y)$ es una función de dos variables definida en una región del plano xy. La ecuación es de *primer* orden, ya que sólo incluye la primera derivada dy/dx (y no a derivadas de orden superior). Observe que las ecuaciones

$$y' = f(x, y) \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx}y = f(x, y),$$

son equivalentes a la ecuación (1); emplearemos las tres indistintamente en el texto.

Una **solución** de la ecuación (1) es una función diferenciable $y = y(x)$ definida en un intervalo I (tal vez infinito) de valores de x, tal que

$$\frac{d}{dx}y(x) = f(x, y(x))$$

en ese intervalo. Esto es, cuando $y(x)$ y su derivada $y'(x)$ se sustituyen en la ecuación (1), la ecuación resultante es verdadera para todos los valores de x en el intervalo I. La **solución general** para la ecuación diferencial de primer orden incluye todas las soluciones posibles. La solución general siempre incluye una constante arbitraria, pero el que tenga esta propiedad no significa que dicha solución sea la solución general. Es decir, una solución puede incluir una constante arbitraria sin ser la solución general. Para establecer que una solución *es* la solución general, podrían necesitarse resultados más profundos de la teoría de ecuaciones diferenciales; dichos resultados se estudian en un curso de cálculo avanzado.

EJEMPLO 1 Verificación de funciones solución

Demostrar que cada miembro de la familia de funciones

$$y = \frac{C}{x} + 2$$

es una solución de la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}(2 - y)$$

en el intervalo $(0, \infty)$, en donde C es cualquier constante.

Solución Derivando $y = C/x + 2$ se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = C\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) + 0 = -\frac{C}{x^2}.$$

En consecuencia, sólo necesitamos verificar que para toda $x \in (0, \infty)$,

$$-\frac{C}{x^2} = \frac{1}{x}\left[2 - \left(\frac{C}{x} + 2\right)\right].$$

Esta última ecuación se obtiene inmediatamente, desarrollando la expresión del lado derecho:

$$\frac{1}{x}\left[2 - \left(\frac{C}{x} + 2\right)\right] = \frac{1}{x}\left(-\frac{C}{x}\right) = -\frac{C}{x^2}.$$

Por lo tanto, para todo valor de C, la función $y = C/x + 2$ es una solución de la ecuación diferencial. ■

Como en el caso de hallar antiderivadas, con frecuencia necesitamos una solución *particular* en lugar de la solución general de la ecuación diferencial de primer orden $y' = f(x, y)$. La **solución particular** que satisface la condición inicial $y(x_0) = y_0$ es la solución $y = y(x)$, cuyo valor es y_0 cuando $x = x_0$. Así, la gráfica de la solución particular pasa por el punto (x_0, y_0) en el plano xy. Un **problema de primer orden con valor inicial** es una ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ cuya solución debe satisfacer una condición inicial $y(x_0) = y_0$.

EJEMPLO 2 Verificación de que una función es una solución particular

Demostrar que la función

$$y = (x + 1) - \frac{1}{3}e^x$$

es una solución del problema de primer orden con valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = y - x, \qquad y(0) = \frac{2}{3}.$$

Solución La ecuación

$$\frac{dy}{dx} = y - x$$

es una ecuación diferencial de primer orden con $f(x, y) = y - x$.

Del lado izquierdo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x + 1 - \frac{1}{3}e^x\right) = 1 - \frac{1}{3}e^x.$$

Del lado derecho:

$$y - x = (x + 1) - \frac{1}{3}e^x - x = 1 - \frac{1}{3}e^x.$$

La función satisface la condición inicial, ya que

$$y(0) = \left[(x + 1) - \frac{1}{3}e^x\right]_{x=0} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

La gráfica de la función se muestra en la figura 9.1. ■

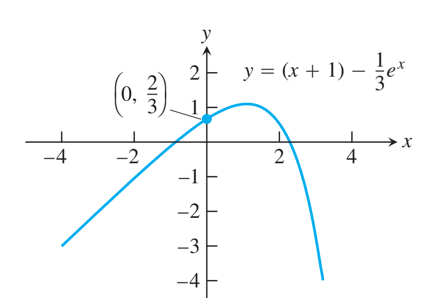


FIGURA 9.1 Gráfica de la solución $y = (x + 1) - \frac{1}{3}e^x$ para la ecuación diferencial $dy/dx = y - x$, con condición inicial $y(0) = \frac{2}{3}$ (ejemplo 2).

Campos de pendientes: visualización de las curvas solución

Cada vez que especificamos una condición inicial $y(x_0) = y_0$ para la solución de una ecuación diferencial $y' = f(x, y)$, necesitamos que la **curva solución** (gráfica de la solución) pase por el punto (x_0, y_0) y tenga pendiente $f(x_0, y_0)$ en ese punto. Podemos representar estas pendientes dibujando pequeños segmentos de recta de pendiente $f(x, y)$ en puntos seleccionados (x, y) de la región del plano xy que constituye el dominio de f. Cada segmento tiene la misma pendiente que la curva solución que pasa por (x, y) y, por lo tanto, es tangente a la curva en ese punto. El dibujo resultante se denomina **campo de pendientes** (o **campo de direcciones**), y proporciona una visualización de la forma general de las curvas solución. La figura 9.2a muestra un campo de pendientes, y un bosquejo de una solución particular en la figura 9.2b. Vemos cómo estos segmentos de recta indican la dirección que la curva solución toma en cada punto por donde pasa.

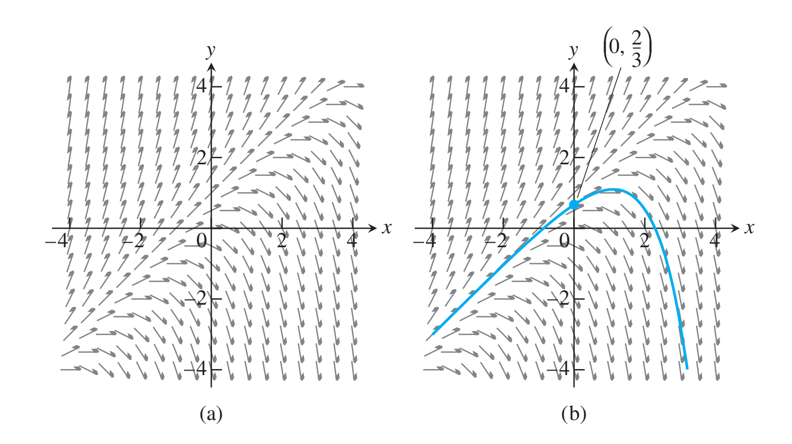


FIGURA 9.2 (a) Campo de pendientes para $\frac{dy}{dx} = y - x$. (b) Curva solución particular que pasa por el punto $\left(0, \frac{2}{3}\right)$ (ejemplo 2).

La figura 9.3 muestra tres campos de pendientes, lo que nos permite ver cómo se comportan las curvas solución siguiendo los segmentos de recta tangentes en estos campos.

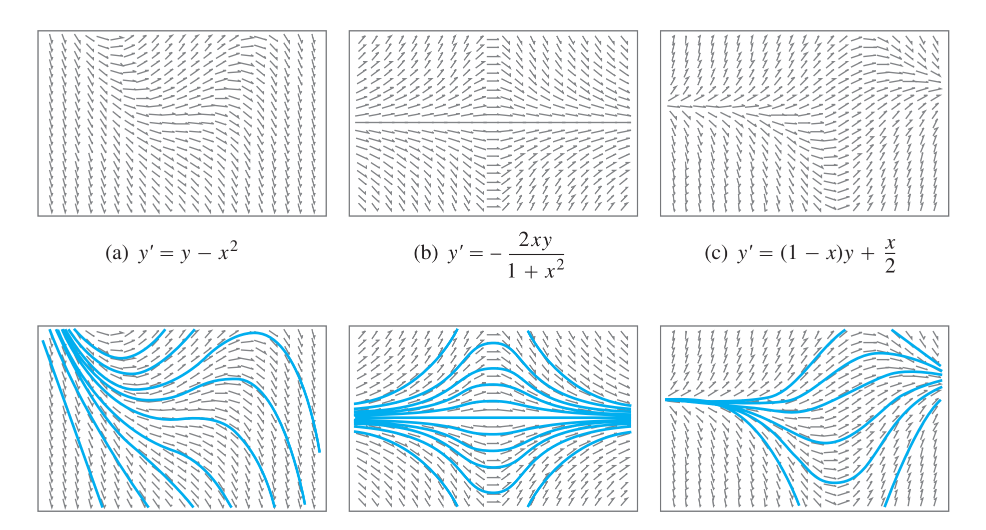


FIGURA 9.3 Campos de pendientes (fila superior) y curvas solución seleccionadas (fila inferior). En computadoras, algunas veces los segmentos de pendiente se representan con flechas, como aquí. Sin embargo, esto no debe interpretarse como una señal de que las pendientes tienen direcciones, porque no es así.

La construcción de un campo de pendientes con lápiz y papel puede ser una tarea muy tediosa. Todos nuestros ejemplos fueron generados por medio de computadora.

Aunque las ecuaciones diferenciales generales son difíciles de resolver, muchas ecuaciones importantes que surgen en ciencia y en aplicaciones tienen formas características que pueden resolverse mediante técnicas especiales. Una de estas técnicas es la de variables separables (ecuaciones separables).

Ecuaciones separables

La ecuación $y' = f(x, y)$ es **separable** si f puede expresarse como un producto de una función de x por una función de y. Entonces la ecuación diferencial tiene la forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x)H(y).$$

Cuando reescribimos esta ecuación en la forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}, \qquad H(y) = \frac{1}{h(y)}$$

su forma diferencial nos permite agrupar todos los términos y con dy, y todos los términos x con dx:

$$h(y)\,dy = g(x)\,dx.$$

Ahora basta con integrar ambos lados de esta ecuación:

$$\int h(y)\,dy = \int g(x)\,dx. \tag{2}$$

Después de hacer las integraciones obtenemos la solución y definida implícitamente como una función de x.

La justificación de que podemos simplemente integrar ambos miembros (lados) de la ecuación (2) tiene como fundamento la regla de sustitución (sección 5.5):

$$\begin{aligned}\int h(y)\,dy &= \int h(y(x))\frac{dy}{dx}\,dx\\ &= \int h(y(x))\frac{g(x)}{h(y(x))}\,dx \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{g(x)}{h(y)}\\ &= \int g(x)\,dx.\end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Resolución de una ecuación separable

Resolver la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = (1+y^2)e^x.$$

Solución Como $1 + y^2$ nunca es cero, podemos resolver la ecuación separando las variables.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= (1+y^2)e^x\\ dy &= (1+y^2)e^x\,dx \qquad \text{Tratar a } dy/dx \text{ como un cociente de diferenciales y multiplicar ambos lados por } dx.\\ \frac{dy}{1+y^2} &= e^x\,dx \qquad \text{Dividir entre } (1+y^2).\\ \int\frac{dy}{1+y^2} &= \int e^x\,dx \qquad \text{Integrar ambos miembros.}\\ \tan^{-1} y &= e^x + C \qquad C \text{ representa las constantes de integración combinadas.}\end{aligned}$$

La ecuación $\tan^{-1} y = e^x + C$ da y como una función implícita de x. Cuando $-\pi/2 < e^x + C < \pi/2$, podemos despejar y como una función explícita de x, tomando la tangente de ambos lados:

$$\begin{aligned}\tan(\tan^{-1} y) &= \tan(e^x + C)\\ y &= \tan(e^x + C).\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 4 Resolver la ecuación

$$(x+1)\frac{dy}{dx} = x(y^2+1).$$

Solución Cambiamos a la forma diferencial, separamos las variables e integramos:

$$\begin{aligned}(x+1)\,dy &= x(y^2+1)\,dx\\ \frac{dy}{y^2+1} &= \frac{x\,dx}{x+1} \qquad x \neq -1\\ \int\frac{dy}{1+y^2} &= \int\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx\\ \tan^{-1} y &= x - \ln|x+1| + C.\end{aligned}$$

■

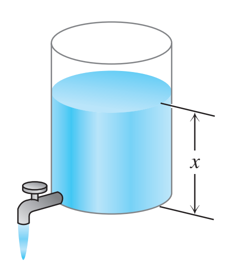


FIGURA 9.4 La razón a la que sale el agua es $k\sqrt{x}$, en donde k es una constante positiva. En el ejemplo 5, $k = 1/2$ y x se mide en pies.

El problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = ky, \qquad y(0) = y_0$$

incluye una ecuación diferencial separable, y la solución $y = y_0 e^{kt}$ da la Ley de Cambio Exponencial (sección 7.5). Encontramos que este problema de valor inicial modela fenómenos como crecimiento poblacional, decrecimiento radiactivo y transferencia de calor. A continuación se presenta una aplicación que implica otra ecuación de primer orden separable.

Ley de Torricelli

La ley de Torricelli establece que si se vacía un tanque como el de la figura 9.4, la razón a la que el agua sale es una constante por la raíz cuadrada de la profundidad, x, del agua. La constante depende del tamaño del agujero de desagüe. En el ejemplo 5 supondremos que la constante es $1/2$.

EJEMPLO 5 Vaciado de un tanque

Un depósito en forma de cilindro circular recto con radio de 5 pies y altura de 16 pies está lleno de agua y se vaciará a razón de $0.5\sqrt{x}$ pies^3/min. Determine una fórmula para calcular la profundidad y la cantidad de agua que hay en el tanque en cualquier instante t. ¿Cuánto tiempo tardará en vaciarse el tanque?

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

Evangelista Torricelli
(1608-1647)

Solución El volumen de un cilindro circular recto con radio r y altura h es $V = \pi r^2 h$, por lo que el volumen de agua en el tanque (figura 9.4) es

$$V = \pi r^2 h = \pi(5)^2 x = 25\pi x.$$

La derivación nos lleva a

$$\frac{dV}{dt} = 25\pi \frac{dx}{dt} \qquad \text{Negativo, ya que } V \text{ disminuye y } dx/dt < 0$$

$$-0.5\sqrt{x} = 25\pi \frac{dx}{dt} \qquad \text{Ley de Torricelli}$$

En consecuencia, tenemos el problema de valor inicial

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\sqrt{x}}{50\pi},$$

$$x(0) = 16 \qquad \text{El agua tiene una profundidad de 16 pies cuando } t = 0.$$

Resolvemos la ecuación diferencial separando las variables.

$$x^{-1/2}\,dx = -\frac{1}{50\pi}\,dt$$

$$\int x^{-1/2}\,dx = -\int \frac{1}{50\pi}\,dt \qquad \text{Integrar ambos lados.}$$

$$2x^{1/2} = -\frac{1}{50\pi}t + C \qquad \text{Combinar las constantes.}$$

La condición inicial $x(0) = 16$ determina el valor de C.

$$2(16)^{1/2} = -\frac{1}{50\pi}(0) + C$$

$$C = 8$$

Con $C = 8$, tenemos

$$2x^{1/2} = -\frac{1}{50\pi}t + 8 \qquad \text{o} \qquad x^{1/2} = 4 - \frac{t}{100\pi}.$$

Las fórmulas que buscamos son

$$x = \left(4 - \frac{t}{100\pi}\right)^2 \qquad \text{y} \qquad V = 25\pi x = 25\pi\left(4 - \frac{t}{100\pi}\right)^2.$$

En cualquier instante t, el agua que hay en el tanque tiene una profundidad de $(4 - t/(100\pi))^2$ pies, y la cantidad de agua es $25\pi(4 - t/(100\pi))^2$ pies^3. En $t = 0$, tenemos $x = 16$ pies y $V = 400\pi$ pies^3, como se pidió. El tanque se vaciará ($V = 0$) en $t = 400\pi$ minutos, que son aproximadamente 21 horas. ■

EJERCICIOS 9.1

Verificación de soluciones

En los ejercicios 1 y 2, demuestre que cada función $y = f(x)$ es una solución de la ecuación diferencial que se presenta.

1. $2y' + 3y = e^{-x}$

a. $y = e^{-x}$ **b.** $y = e^{-x} + e^{-(3/2)x}$

c. $y = e^{-x} + Ce^{-(3/2)x}$

2. $y' = y^2$

a. $y = -\dfrac{1}{x}$ **b.** $y = -\dfrac{1}{x+3}$ **c.** $y = -\dfrac{1}{x+C}$

En los ejercicios 3 y 4, demuestre que la función $y = f(x)$ es una solución de la ecuación diferencial que se da.

3. $y = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt, \quad x^2y' + xy = e^x$

4. $y = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}}\displaystyle\int_1^x \sqrt{1+t^4}\,dt, \quad y' + \frac{2x^3}{1+x^4}y = 1$

En los ejercicios 5 a 8, demuestre que cada función es una solución del problema de valor inicial dado.

	Ecuación diferencial	Condición inicial	Solución propuesta
5.	$y' + y = \dfrac{2}{1+4e^{2x}}$	$y(-\ln 2) = \dfrac{\pi}{2}$	$y = e^{-x}\tan^{-1}(2e^x)$
6.	$y' = e^{-x^2} - 2xy$	$y(2) = 0$	$y = (x-2)e^{-x^2}$
7.	$xy' + y = -\operatorname{sen} x,$ $x > 0$	$y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$	$y = \dfrac{\cos x}{x}$
8.	$x^2y' = xy - y^2,$ $x > 1$	$y(e) = e$	$y = \dfrac{x}{\ln x}$

Ecuaciones separables

En los ejercicios 9 a 18, resuelva la ecuación diferencial.

9. $2\sqrt{xy}\dfrac{dy}{dx} = 1, \quad x, y > 0$

10. $\dfrac{dy}{dx} = x^2\sqrt{y}, \quad y > 0$

11. $\dfrac{dy}{dx} = e^{x-y}$

12. $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2e^{-y}$

13. $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{y}\cos^2\sqrt{y}$

14. $\sqrt{2xy}\dfrac{dy}{dx} = 1$

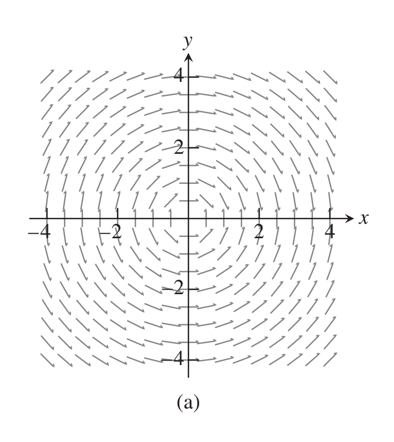
15. $\sqrt{x}\dfrac{dy}{dx} = e^{y+\sqrt{x}}, \quad x > 0$

16. $(\sec x)\dfrac{dy}{dx} = e^{y+\operatorname{sen} x}$

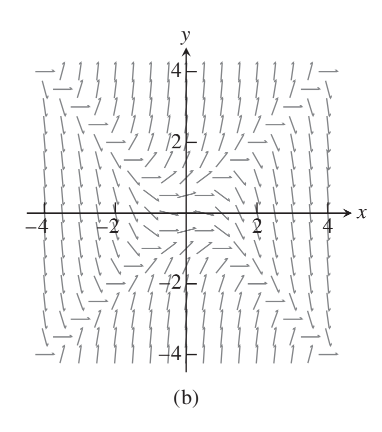
17. $\dfrac{dy}{dx} = 2x\sqrt{1-y^2}, \quad -1 < y < 1$

18. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^{2x-y}}{e^{x+y}}$

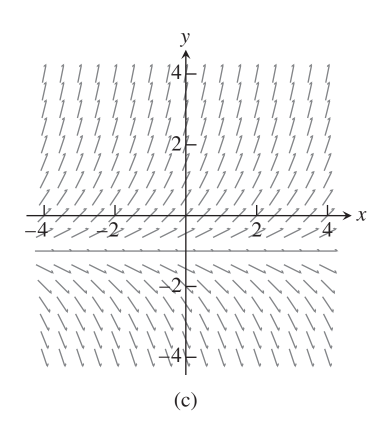
En los ejercicios 19 a 22, haga corresponder las ecuaciones diferenciales con su campo de pendientes.



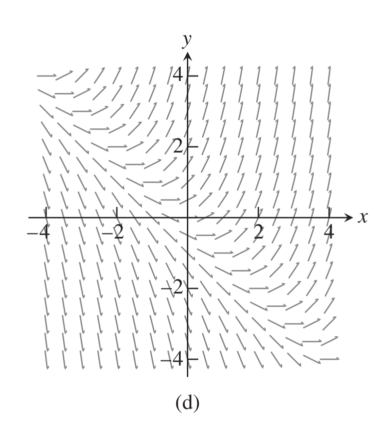
(a)



(b)



(c)



(d)

19. $y' = x + y$

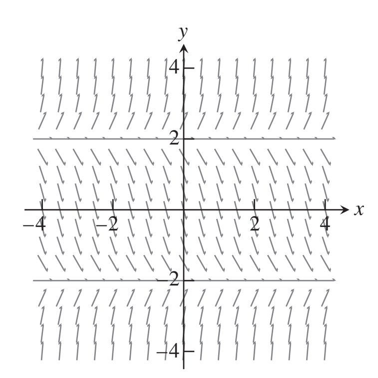
20. $y' = y + 1$

21. $y' = -\frac{x}{y}$

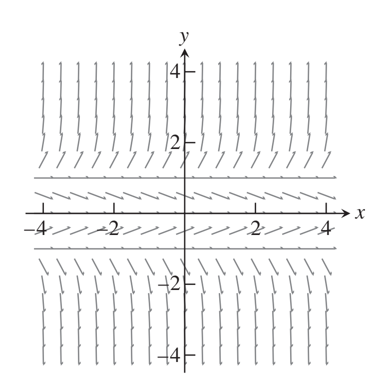
22. $y' = y^2 - x^2$

En los ejercicios 23 y 24, copie los campos de pendientes y haga un bosquejo de algunas de las curvas solución.

23. $y' = (y + 2)(y - 2)$



24. $y' = y(y + 1)(y - 1)$



EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

Campos de pendientes y curvas solución

En los ejercicios 25 a 30, obtenga un campo de pendientes y agréguele las gráficas de las curvas solución que pasan por los puntos dados.

25. $y' = y$ con

a. $(0, 1)$ **b.** $(0, 2)$ **c.** $(0, -1)$

26. $y' = 2(y - 4)$ con

a. $(0, 1)$ **b.** $(0, 4)$ **c.** $(0, 5)$

27. $y' = y(x + y)$ con

a. $(0, 1)$ **b.** $(0, -2)$ **c.** $(0, 1/4)$ **d.** $(-1, -1)$

28. $y' = y^2$ con

a. $(0, 1)$ **b.** $(0, 2)$ **c.** $(0, -1)$ **d.** $(0, 0)$

29. $y' = (y - 1)(x + 2)$ con

a. $(0, -1)$ **b.** $(0, 1)$ **c.** $(0, 3)$ **d.** $(1, -1)$

30. $y' = \dfrac{xy}{x^2 + 4}$ con

a. $(0, 2)$ **b.** $(0, -6)$ **c.** $\left(-2\sqrt{3}, -4\right)$

En los ejercicios 31 y 32, obtenga un campo de pendientes y grafique la solución particular en el intervalo que se especifica. Utilice la función de su software matemático (CAS DE) para determinar la solución general de la ecuación diferencial.

31. Una ecuación logística $y' = y(2 - y)$, $y(0) = 1/2$; $0 \leq x \leq 4$, $0 \leq y \leq 3$

32. $y' = (\operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} y)$, $y(0) = 2$; $-6 \leq x \leq 6$, $-6 \leq y \leq 6$

Los ejercicios 33 y 34 no tienen solución explícita en términos de funciones elementales. Utilice un software matemático para explorar gráficamente cada una de las ecuaciones diferenciales.

33. $y' = \cos(2x - y)$, $y(0) = 2$; $0 \leq x \leq 5$, $0 \leq y \leq 5$; $y(2)$

34. Una ecuación de Gompertz $y' = y(1/2 - \ln y)$, $y(0) = 1/3$; $0 \leq x \leq 4$, $0 \leq y \leq 3$; $y(3)$

35. Utilice un software matemático para determinar las soluciones de $y' + y = f(x)$ sujeta a la condición inicial $y(0) = 0$, si $f(x)$ es

a. $2x$ **b.** $\operatorname{sen} 2x$ **c.** $3e^{x/2}$ **d.** $2e^{-x/2}\cos 2x$.

Grafique las cuatro funciones en el intervalo $-2 \leq x \leq 6$ para poder comparar los resultados.

36. a. Utilice un software matemático para dibujar el campo de pendientes de la ecuación diferencial

$$y' = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y - 1)}$$

en la región $-3 \leq x \leq 3$ y $-3 \leq y \leq 3$.

b. Separe las variables y utilice el integrador del software matemático para determinar la solución general en forma implícita.

c. Por medio del graficador de funciones implícitas de su software matemático, trace las curvas solución para los valores de la constante arbitraria $C = -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6$.

d. Determine y grafique la solución que satisface la condición inicial $y(0) = -1$.

9.2 Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

La ecuación de crecimiento/decrecimiento exponencial $dy/dx = ky$ (sección 7.5) es una ecuación diferencial separable. También es un caso especial de una ecuación diferencial que tiene *forma lineal*. Las ecuaciones diferenciales lineales modelan varios fenómenos del mundo real, que incluyen problemas de circuitos eléctricos y de mezcla de sustancias químicas.

Una ecuación diferencial **lineal** de primer orden es aquella que puede escribirse en la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x), \tag{1}$$

en donde P y Q son funciones continuas de x. La ecuación (1) es la **forma estándar** de la ecuación lineal.

Como la ecuación de crecimiento/decrecimiento exponencial puede ponerse en la forma estándar

$$\frac{dy}{dx} - ky = 0,$$

vemos que es una ecuación lineal con $P(x) = -k$ y $Q(x) = 0$. La ecuación (1) es *lineal* (en y), ya que y y su derivada dy/dx sólo aparecen a la primera potencia, no se multiplican entre sí y no aparecen como el argumento de una función (tal como sen y, e^y o $\sqrt{dy/dx}$).

EJEMPLO 1 Determinación de la forma estándar

Escribir la ecuación siguiente en forma estándar:

$$x\frac{dy}{dx} = x^2 + 3y, \qquad x > 0.$$

Solución

$$x\frac{dy}{dx} = x^2 + 3y$$

$$\frac{dy}{dx} = x + \frac{3}{x}y \qquad \text{Dividir entre } x$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{3}{x}y = x \qquad \text{Forma estándar con } P(x) = -3/x \text{ y } Q(x) = x.$$

Observe que $P(x)$ es $-3/x$, no $+3/x$. La forma estándar es $y' + P(x)y = Q(x)$, por lo que el signo de menos es parte de la fórmula para $P(x)$. ■

Resolución de ecuaciones lineales

Resolvemos la ecuación

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{2}$$

multiplicando ambos lados por una función *positiva* $\upsilon(x)$ que transforme el lado izquierdo en la derivada del producto $\upsilon(x) \cdot y$. Enseguida demostraremos cómo encontrar υ, pero primero queremos mostrar cómo, una vez hallada, proporciona la solución que buscamos

Ésta es la razón por la que multiplicar por $\upsilon(x)$ funciona:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$ La ecuación original está en la forma estándar.

$$\upsilon(x)\frac{dy}{dx} + P(x)\upsilon(x)y = \upsilon(x)Q(x)$$ Multiplicar por $\upsilon(x)$ positiva.

$$\frac{d}{dx}(\upsilon(x) \cdot y) = \upsilon(x)Q(x)$$ Se elige $\upsilon(x)$ para hacer $\upsilon\frac{dy}{dx} + P\upsilon y = \frac{d}{dx}(\upsilon \cdot y)$.

$$\upsilon(x) \cdot y = \int \upsilon(x)Q(x)\,dx$$ Integrar respecto de x.

$$y = \frac{1}{\upsilon(x)}\int \upsilon(x)Q(x)\,dx \tag{3}$$

La ecuación (3) expresa la solución de la ecuación (2) en términos de la función $\upsilon(x)$ y de $Q(x)$. A $\upsilon(x)$ le denominamos **factor integrante** para la ecuación (2), ya que su presencia hace que la ecuación se pueda integrar.

¿Por qué en la fórmula no aparece también $P(x)$? Sí lo hace, pero no directamente, en la construcción de la función positiva $\upsilon(x)$. Tenemos

$$\frac{d}{dx}(\upsilon y) = \upsilon\frac{dy}{dx} + P\upsilon y$$ Condición impuesta a υ.

$$\upsilon\frac{dy}{dx} + y\frac{d\upsilon}{dx} = \upsilon\frac{dy}{dx} + P\upsilon y$$ Regla del producto para derivadas.

$$y\frac{d\upsilon}{dx} = P\upsilon y$$ Se eliminan los términos $\upsilon\frac{dy}{dx}$.

Esta última ecuación se cumple si

$$\frac{d\upsilon}{dx} = P\upsilon$$

$$\frac{d\upsilon}{\upsilon} = P\,dx$$ Variables separadas, $\upsilon > 0$

$$\int \frac{d\upsilon}{\upsilon} = \int P\,dx$$ Integrar ambos lados.

$$\ln \upsilon = \int P\,dx$$ Como $\upsilon > 0$, no necesitamos el valor absoluto de $\ln \upsilon$.

$$e^{\ln \upsilon} = e^{\int P\,dx}$$ Tomar exponenciales en ambos lados para despejar υ.

$$\upsilon = e^{\int P\,dx} \tag{4}$$

Por lo tanto, una fórmula para la solución general de la ecuación (1) está dada por la ecuación (3), en donde $v(x)$ está dada por la ecuación (4). Sin embargo, en lugar de memorizar la fórmula, sólo recuerde cómo encontrar un factor integrante una vez que tiene la forma estándar, con $P(x)$ correctamente identificada.

> Para resolver la ecuación lineal $y' + P(x)y = Q(x)$, multiplique ambos lados por un factor integrante $v(x) = e^{\int P(x)\,dx}$ e integre ambos lados.

En este procedimiento, cuando integre el producto del lado izquierdo siempre obtendrá el producto $v(x)y$ del factor integrante y la función solución y por la forma en que se definió v.

EJEMPLO 2 Resolución de una ecuación diferencial lineal de primer orden

Resolver la ecuación

$$x\frac{dy}{dx} = x^2 + 3y, \qquad x > 0.$$

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

Adrien Marie Legendre (1752-1833)

Solución Primero escribimos la ecuación en la forma estándar (ejemplo 1):

$$\frac{dy}{dx} - \frac{3}{x}y = x,$$

de manera que $P(x) = -3/x$ es identificada.

El factor integrante es

$$\begin{aligned} v(x) = e^{\int P(x)\,dx} &= e^{\int(-3/x)\,dx} \\ &= e^{-3\ln|x|} \\ &= e^{-3\ln x} \\ &= e^{\ln x^{-3}} = \frac{1}{x^3}. \end{aligned}$$

La constante de integración es 0, de manera que v asume un valor lo más sencillo posible. $x > 0$

Ahora multiplicamos ambos lados de la forma estándar por $v(x)$, e integramos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^3}\cdot\left(\frac{dy}{dx} - \frac{3}{x}y\right) &= \frac{1}{x^3}\cdot x \\ \frac{1}{x^3}\frac{dy}{dx} - \frac{3}{x^4}y &= \frac{1}{x^2} \\ \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^3}y\right) &= \frac{1}{x^2} \\ \frac{1}{x^3}y &= \int\frac{1}{x^2}\,dx \\ \frac{1}{x^3}y &= -\frac{1}{x} + C. \end{aligned}$$

El lado izquierdo es $\frac{d}{dx}(v\cdot y)$.

Integrar ambos lados.

Al despejar y en esta última ecuación se obtiene la solución general:

$$y = x^3\left(-\frac{1}{x} + C\right) = -x^2 + Cx^3, \qquad x > 0.$$ ■

EJEMPLO 3 Resolución de un problema lineal de primer orden con valor inicial

Resolver la ecuación

$$xy' = x^2 + 3y, \qquad x > 0,$$

dada la condición inicial $y(1) = 2$.

Solución Primero resolvemos la ecuación diferencial (ejemplo 2), obteniendo

$$y = -x^2 + Cx^3, \qquad x > 0.$$

Luego utilizamos la condición inicial para determinar C:

$$y = -x^2 + Cx^3$$

$$2 = -(1)^2 + C(1)^3 \qquad y = 2 \text{ cuando } x = 1$$

$$C = 2 + (1)^2 = 3.$$

La solución del problema de valor inicial es la función $y = -x^2 + 3x^3$. ■

EJEMPLO 4 Determinar la solución particular de

$$3xy' - y = \ln x + 1, \qquad x > 0,$$

que satisface $y(1) = -2$.

Solución Con $x > 0$, escribimos la ecuación en forma estándar:

$$y' - \frac{1}{3x}y = \frac{\ln x + 1}{3x}.$$

Entonces el factor integrante está dado por

$$v = e^{\int -dx/3x} = e^{(-1/3)\ln x} = x^{-1/3}. \qquad x > 0$$

Así,

$$x^{-1/3}y = \frac{1}{3}\int (\ln x + 1)x^{-4/3}\, dx. \qquad \text{El lado izquierdo es } vy.$$

Al integrar por partes el lado derecho se obtiene

$$x^{-1/3}y = -x^{-1/3}(\ln x + 1) + \int x^{-4/3}\, dx + C.$$

Por lo tanto,

$$x^{-1/3}y = -x^{-1/3}(\ln x + 1) - 3x^{-1/3} + C$$

o, despejando y,

$$y = -(\ln x + 4) + Cx^{1/3}.$$

Cuando $x = 1$ y $y = -2$, esta última ecuación se transforma en

$$-2 = -(0 + 4) + C,$$

por lo que

$$C = 2.$$

La sustitución de C en la ecuación de y produce la solución particular

$$y = 2x^{1/3} - \ln x - 4.$$

Al resolver la ecuación lineal del ejemplo 2, integramos ambos lados de la ecuación después de multiplicar cada lado por el factor integrante. Sin embargo, podemos reducir la cantidad de trabajo, como en el ejemplo 4, recordando que *siempre* que se integra el lado izquierdo se obtiene el producto, $v(x) \cdot y$, del factor integrante por la función solución. Basados en la ecuación (3), esto significa que

$$v(x)y = \int v(x)Q(x)\,dx.$$

Sólo necesitamos integrar el producto del factor integrante $v(x)$ con el lado derecho $Q(x)$ de la ecuación (1), y luego igualar el resultado con $v(x)y$ para obtener la solución general. Sin embargo, suele seguirse el procedimiento completo para hacer hincapié en el papel que juega $v(x)$ en el proceso de solución, como se ilustró en el ejemplo 2.

Observe que si la función $Q(x)$ es idénticamente cero en la forma estándar dada por la ecuación (1), la ecuación lineal es separable:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \qquad Q(x) \equiv 0$$

$$dy = -P(x)\,dx \qquad \text{Separación de variables}$$

A continuación analizaremos dos problemas aplicados que se modelan por medio de una ecuación diferencial lineal de primer orden.

Circuitos *RL*

El diagrama de la figura 9.5 representa un circuito eléctrico cuya resistencia total es una constante de R ohms, y cuya autoinductancia, mostrada como una bobina de L henries, también es constante. Hay un interruptor cuyas terminales en a y b pueden cerrarse para conectar una fuente eléctrica constante de V voltios.

La ley de Ohm, $V = RI$, tiene que modificarse para ese circuito. La forma modificada es

$$L\frac{di}{dt} + Ri = V, \tag{5}$$

donde i es la intensidad de la corriente, en amperes, y t es el tiempo, en segundos. Resolviendo esta ecuación, podemos predecir cómo fluirá la corriente después de cerrar el circuito.

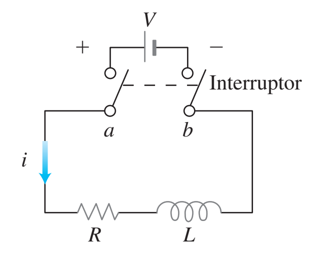


FIGURA 9.5 El circuito *RL* del ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Flujo de corriente eléctrica

El interruptor del circuito *RL*, ilustrado en la figura 9.5, se cierra en el instante $t = 0$. ¿Cómo será el flujo de la corriente (intensidad) como una función del tiempo?

Solución La ecuación (5) es una ecuación diferencial lineal de primer orden para i como una función de t. Su forma estándar es

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{V}{L}, \tag{6}$$

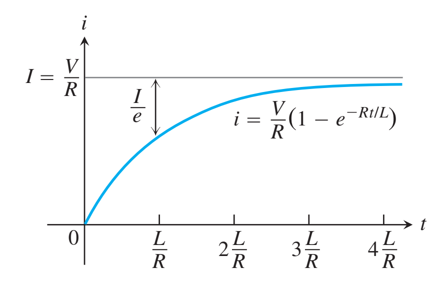


FIGURA 9.6 El crecimiento de la corriente en el circuito RL del ejemplo 5. I es el valor de estado estacionario de la corriente. El número $t = L/R$ es la constante de tiempo del circuito. La corriente alcanza un nivel, dentro del 5%, de su valor de estado estacionario en 3 constantes de tiempo (ejercicio 31).

y la correspondiente solución, dado que $i = 0$ cuando $t = 0$, es

$$i = \frac{V}{R} - \frac{V}{R}e^{-(R/L)t} \tag{7}$$

(ejercicio 32). Como R y L son positivas, $-(R/L)$ es negativo y $e^{-(R/L)t} \to 0$ cuando $t \to \infty$. En consecuencia,

$$\lim_{t\to\infty} i = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{V}{R} - \frac{V}{R}e^{-(R/L)t}\right) = \frac{V}{R} - \frac{V}{R}\cdot 0 = \frac{V}{R}.$$

En cualquier instante dado, la intensidad de corriente es teóricamente menor que V/R, pero conforme pasa el tiempo, se aproxima al **valor de estado estacionario** V/R. De acuerdo con la ecuación

$$L\frac{di}{dt} + Ri = V,$$

$I = V/R$ es la corriente que fluye por el circuito, si $L = 0$ (no hay inductancia) o $di/dt = 0$ (corriente estacionaria, $i =$ constante) (figura 9.6).

La ecuación (7) expresa la solución de la ecuación (6) como la suma de dos términos: una **solución de estado estacionario** V/R, y una **solución transitoria** $-(V/R)e^{-(R/L)t}$, que tiende a cero cuando $t \to \infty$. ■

Problemas de mezclas

Una sustancia química en una solución líquida (o dispersa en un gas) entra a un contenedor que tiene el líquido (o gas) con, posiblemente, una cantidad específica del químico disuelto. La mezcla se mantiene uniforme revolviéndola y fluye del contenedor a una velocidad conocida. En este proceso, con frecuencia es importante conocer la concentración del químico en el contenedor en cualquier instante dado. La ecuación diferencial que describe el proceso tiene como base la fórmula

$$\begin{matrix}\text{Tasa de cambio}\\ \text{de la cantidad}\\ \text{en el contenedor}\end{matrix} = \begin{pmatrix}\text{tasa a la que se}\\ \text{introduce la}\\ \text{sustancia química}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{tasa a la que se}\\ \text{expulsa la}\\ \text{sustancia química}\end{pmatrix} \tag{8}$$

Si $y(t)$ es la cantidad de sustancia química que hay en el contenedor en el instante t, y $V(t)$ es el volumen total de líquido en el contenedor en el instante t, entonces la velocidad de salida de la sustancia en el instante t es

$$\begin{aligned}\text{Velocidad de salida} &= \frac{y(t)}{V(t)}\cdot(\text{tasa de flujo de salida})\\ &= \begin{pmatrix}\text{concentración en el}\\ \text{contenedor en el instante } t\end{pmatrix}\cdot(\text{tasa de flujo de salida}).\end{aligned} \tag{9}$$

De acuerdo con esto, la ecuación (8) se transforma en

$$\frac{dy}{dt} = (\text{tasa a la que se introduce la sustancia}) - \frac{y(t)}{V(t)}\cdot(\text{tasa de flujo de salida}). \tag{10}$$

Si, digamos, y se mide en libras, V en galones y t en minutos, las unidades de la ecuación (10) son

$$\frac{\text{libras}}{\text{minutos}} = \frac{\text{libras}}{\text{minutos}} - \frac{\text{libras}}{\text{galones}}\cdot\frac{\text{galones}}{\text{minutos}}.$$

EJEMPLO 6 Tanque de almacenamiento en una refinería

En una refinería de petróleo, un tanque de almacenamiento contiene 2000 galones de gasolina; al principio hay 100 libras de un aditivo disuelto en el fluido. Antes de la tem-

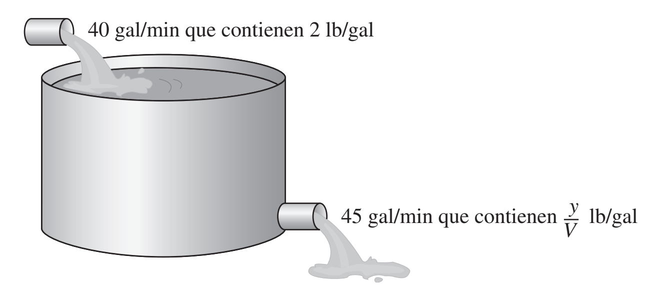


FIGURA 9.7 El tanque de almacenamiento del ejemplo 6 mezcla el líquido que entra con el almacenado para producir un líquido que sale.

porada invernal, se bombea al tanque gasolina que contiene 2 lb de aditivo por galón, a razón de 40 gal/min. La solución bien mezclada se bombea hacia afuera a una razón de 45 gal/min. ¿Cuánto aditivo está en el tanque 20 minutos después de que inicia el proceso? (figura 9.7)

Solución Sea y la cantidad (en libras) de aditivo que está en el tanque en el instante t. Sabemos que $y = 100$ cuando $t = 0$. El número de galones de gasolina y aditivo en la solución en el tanque en cualquier instante t es

$$\begin{aligned} V(t) &= 2000 \text{ gal} + \left(40 \frac{\text{gal}}{\text{min}} - 45 \frac{\text{gal}}{\text{min}}\right)(t \text{ min}) \\ &= (2000 - 5t) \text{ gal}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \text{Razón de entrada} &= \frac{y(t)}{V(t)} \cdot \text{razón de salida} && \text{Ecuación (9)} \\ &= \left(\frac{y}{2000 - 5t}\right) 45 && \text{La razón de salida es 45 gal/min y } v = 2000 - 5t. \\ &= \frac{45y}{2000 - 5t} \frac{\text{lb}}{\text{min}}. \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} \text{Razón de entrada} &= \left(2 \frac{\text{lb}}{\text{gal}}\right)\left(40 \frac{\text{gal}}{\text{min}}\right) \\ &= 80 \frac{\text{lb}}{\text{min}}. && \text{Ecuación (10)} \end{aligned}$$

La ecuación diferencial que modela el proceso de mezclado es

$$\frac{dy}{dt} = 80 - \frac{45y}{2000 - 5t}$$

en libras por minuto.

Para resolver esta ecuación diferencial, primero la escribimos en la forma estándar:

$$\frac{dy}{dt} + \frac{45}{2000 - 5t} y = 80.$$

En consecuencia, $P(t) = 45/(2000 - 5t)$ y $Q(t) = 80$.

El factor integrante es

$$\begin{aligned} v(t) &= e^{\int P\,dt} = e^{\int \frac{45}{2000-5t}\,dt} \\ &= e^{-9\ln(2000-5t)} \qquad 2000 - 5t > 0 \\ &= (2000 - 5t)^{-9}. \end{aligned}$$

Al multiplicar ambos lados de la ecuación estándar por $v(t)$ e integrando ambos lados se obtiene,

$$(2000 - 5t)^{-9} \cdot \left(\frac{dy}{dt} + \frac{45}{2000 - 5t}\,y\right) = 80(2000 - 5t)^{-9}$$

$$(2000 - 5t)^{-9}\frac{dy}{dt} + 45(2000 - 5t)^{-10}\,y = 80(2000 - 5t)^{-9}$$

$$\frac{d}{dt}\left[(2000 - 5t)^{-9}y\right] = 80(2000 - 5t)^{-9}$$

$$(2000 - 5t)^{-9}y = \int 80(2000 - 5t)^{-9}\,dt$$

$$(2000 - 5t)^{-9}y = 80 \cdot \frac{(2000 - 5t)^{-8}}{(-8)(-5)} + C.$$

La solución general es

$$y = 2(2000 - 5t) + C(2000 - 5t)^9.$$

Ya que $y = 100$ cuando $t = 0$, podemos determinar el valor de C:

$$100 = 2(2000 - 0) + C(2000 - 0)^9$$

$$C = -\frac{3900}{(2000)^9}.$$

La solución particular del problema de valor inicial es

$$y = 2(2000 - 5t) - \frac{3900}{(2000)^9}(2000 - 5t)^9.$$

La cantidad de aditivo 20 minutos después de que inicie el bombeo es

$$y(20) = 2[2000 - 5(20)] - \frac{3900}{(2000)^9}[2000 - 5(20)]^9 \approx 1342 \text{ lb}.$$ ■

EJERCICIOS 9.2

Ecuaciones lineales de primer orden

Resuelva las ecuaciones diferenciales de los ejercicios 1 a 14.

1. $x\dfrac{dy}{dx} + y = e^x, \quad x > 0$

2. $e^x\dfrac{dy}{dx} + 2e^x y = 1$

3. $xy' + 3y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2}, \quad x > 0$

4. $y' + (\tan x)y = \cos^2 x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$

5. $x\dfrac{dy}{dx} + 2y = 1 - \dfrac{1}{x}, \quad x > 0$

6. $(1 + x)y' + y = \sqrt{x}$

7. $2y' = e^{x/2} + y$

8. $e^{2x}y' + 2e^{2x}y = 2x$

9. $xy' - y = 2x\ln x$

10. $x\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos x}{x} - 2y, \quad x > 0$

11. $(t - 1)^3\dfrac{ds}{dt} + 4(t - 1)^2 s = t + 1, \quad t > 1$

12. $(t + 1)\dfrac{ds}{dt} + 2s = 3(t + 1) + \dfrac{1}{(t + 1)^2}, \quad t > -1$

13. $\operatorname{sen}\theta \dfrac{dr}{d\theta} + (\cos\theta)r = \tan\theta, \quad 0 < \theta < \pi/2$

14. $\tan\theta \dfrac{dr}{d\theta} + r = \operatorname{sen}^2\theta, \quad 0 < \theta < \pi/2$

Resolución de problemas de valor inicial

Resuelva los problemas de valor inicial de los ejercicios 15 a 20.

15. $\dfrac{dy}{dt} + 2y = 3, \quad y(0) = 1$

16. $t\dfrac{dy}{dt} + 2y = t^3, \quad t > 0, \quad y(2) = 1$

17. $\theta\dfrac{dy}{d\theta} + y = \operatorname{sen}\theta, \quad \theta > 0, \quad y(\pi/2) = 1$

18. $\theta\dfrac{dy}{d\theta} - 2y = \theta^3 \sec\theta\tan\theta, \quad \theta > 0, \quad y(\pi/3) = 2$

19. $(x + 1)\dfrac{dy}{dx} - 2(x^2 + x)y = \dfrac{e^{x^2}}{x + 1}, \quad x > -1, \quad y(0) = 5$

20. $\dfrac{dy}{dx} + xy = x, \quad y(0) = -6$

21. Resuelva el problema de valor inicial de crecimiento/decaimiento exponencial para y como función de t, considerando la ecuación diferencial como una ecuación lineal de primer orden con $P(x) = -k$ y $Q(x) = 0$:

$$\frac{dy}{dt} = ky \quad (k \text{ constante}), \quad y(0) = y_0$$

22. Resuelva el siguiente problema de valor inicial para u como función de t:

$$\frac{du}{dt} + \frac{k}{m}u = 0 \quad (k \text{ y } m \text{ constantes positivas}), \quad u(0) = u_0$$

a. como una ecuación lineal de primer orden.

b. como una ecuación separable.

Teoría y ejemplos

23. ¿Alguna de las ecuaciones siguientes es correcta? Justifique sus respuestas.

a. $x\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = x\ln|x| + C$ **b.** $x\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = x\ln|x| + Cx$

24. ¿Alguna de las ecuaciones siguientes es correcta? Justifique sus respuestas.

a. $\dfrac{1}{\cos x}\displaystyle\int \cos x\,dx = \tan x + C$

b. $\dfrac{1}{\cos x}\displaystyle\int \cos x\,dx = \tan x + \dfrac{C}{\cos x}$

25. **Mezcla de sal** Un depósito contiene inicialmente 100 galones de salmuera en la que están disueltas 50 lb de sal. Al depósito entra salmuera, que contiene 2 lb/gal de sal, a una razón de 5 gal/min. La mezcla se mantiene uniforme mezclándola, y sale del tanque a razón de 4 gal/min.

a. ¿A qué razón entra sal (libras por minuto) al depósito en el instante t?

b. ¿Cuál es el volumen de salmuera en el depósito en el instante t?

c. ¿A qué razón (libras por minuto) sale la sal del depósito en el instante t?

d. Plantee y resuelva un problema de valor inicial que describa el proceso de mezclado.

e. Determine la concentración de sal en el depósito 25 minutos después de iniciado el proceso.

26. **Problema de mezcla** Un tanque, con capacidad de 200 galones, está lleno hasta la mitad con agua destilada. En el instante $t = 0$, se introduce al tanque una solución a razón de 0.5 lb/gal de concentrado, a razón de 5 gal/min, y la mezcla, revuelta perfectamente, se extrae a razón de 3 gal/min.

a. ¿En que instante se llena el tanque?

b. En el instante en que el tanque está lleno, ¿cuántas libras de concentrado habrá en él?

27. **Mezcla de fertilizante** Un depósito contiene 100 galones de agua pura. Se introduce al tanque una solución, que contiene 1 lb/gal de fertilizante soluble para césped, a razón de 1 gal/min, y la mezcla es bombeada fuera del tanque a razón de 3 gal/min. Determine la cantidad máxima de fertilizante en el tanque y el instante en que se alcanza ese máximo.

28. **Contaminación con monóxido de carbono** En un inicio, la sala de conferencias de una compañía tiene 4500 pies^3 de aire libre de monóxido de carbono. Empezando en el instante $t = 0$,el humo de cigarro, que contiene 4% de monóxido de carbono, se lanza a la sala, a razón de 0.3 pies^3/min. Un ventilador en el techo mantiene el aire de la sala con buena circulación, y el aire deja la sala a la misma velocidad de 0.3 pies^3/min. Determine el tiempo en que la concentración de monóxido de carbono en la sala llega a 0.01%.

29. **Corriente en un circuito *RL* cerrado** ¿Cuántos segundos, después de que se cierra un circuito RL, le tomará a la corriente, i, alcanzar la mitad de su valor de estado estacionario? Observe que el tiempo depende de R y L, y no del voltaje que se aplique.

30. **Corriente en un circuito *RL* abierto** Si en un circuito RL el interruptor se abre cuando el circuito alcanza su estado estacionario, $I = V/R$, el decrecimiento de la corriente (graficada a continuación) satisface la ecuación

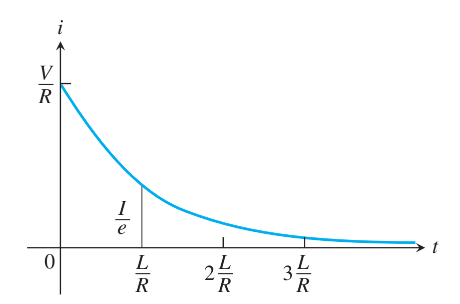
$$L\frac{di}{dt} + Ri = 0,$$

que es la ecuación (5) con $V = 0$.

a. Resuelva la ecuación para expresar i como una función de t.

b. ¿Cuánto tiempo después de que se abrió el circuito la corriente caerá a la mitad de su valor original?

c. Demuestre que el valor de la corriente es I/e cuando $t = L/R$. (El significado de este tiempo se explica en el ejercicio siguiente).



31. Constantes de tiempo Al número L/R del circuito RL de la figura 9.6, los ingenieros le llaman *constante de tiempo*. El significado de la constante de tiempo es que la corriente alcanzará 95% de su valor final dentro de 3 constantes de tiempo a partir de que el circuito se cierra (figura 9.6). De esta manera, la constante de tiempo proporciona una medida de qué tan rápido alcanzará su equilibrio un circuito.

a. Determine el valor de i en la ecuación (7) que corresponda a $t = 3L/R$, y demuestre que es alrededor de 95% del valor estacionario $I = V/R$.

b. ¿Aproximadamente qué porcentaje de la corriente en estado estacionario fluirá en el circuito 2 constantes de tiempo a partir de que se cierre el interruptor (digamos, cuando $t = 2L/R$)?

32. Deducción de la ecuación (7) del ejemplo 5

a. Demuestre que la solución de la ecuación

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{V}{L}$$

es

$$i = \frac{V}{R} + Ce^{-(R/L)t}.$$

b. Después utilice la condición inicial $i(0) = 0$ para determinar el valor de C. Esto completa la deducción de la ecuación (7).

c. Demuestre que $i = V/R$ es una solución de la ecuación (6) y que $i = Ce^{-(R/L)t}$ satisface la ecuación

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0.$$

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

James Bernoulli
(1654-1705)

Una **ecuación diferencial de Bernoulli** tiene la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n.$$

Observe que, si $n = 0$ o 1, la ecuación de Bernoulli es lineal. Para otros valores de n, la sustitución $u = y^{1-n}$ transforma la ecuación de Bernoulli en la ecuación lineal

$$\frac{du}{dx} + (1 - n)P(x)u = (1 - n)Q(x).$$

Por ejemplo, en la ecuación

$$\frac{dy}{dx} - y = e^{-x}y^2$$

tenemos $n = 2$, de modo que $u = y^{1-2} = y^{-1}$ y $du/dx = -y^{-2}\,dy/dx$. Entonces, $dy/dx = -y^2\,du/dx = -u^{-2}\,du/dx$. Al sustituir en la ecuación original se obtiene

$$-u^{-2}\frac{du}{dx} - u^{-1} = e^{-x}u^{-2}$$

o, de manera equivalente,

$$\frac{du}{dx} + u = -e^{-x}.$$

Esta última ecuación es lineal en la variable dependiente (desconocida) u.

Resuelva las ecuaciones diferenciales de los ejercicios 33 a 36.

33. $y' - y = -y^2$

34. $y' - y = xy^2$

35. $xy' + y = y^{-2}$

36. $x^2y' + 2xy = y^3$

9.3 Método de Euler

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

Leonhard Euler
(1703-1783)

Si no se necesita o no se puede determinar una solución *exacta* para un problema de valor inicial $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$, con frecuencia podemos utilizar una computadora para generar una tabla de valores numéricos aproximados de y para valores de x en un intervalo apropiado. Tal tabla se denomina **solución numérica** del problema, y el método por medio del cual la generamos se llama **método numérico.** Por lo general, los métodos numéricos son rápidos y precisos, y suelen representar una alternativa útil cuando las fórmulas exactas no son necesarias, no están disponibles o son demasiado complicadas. En esta sección estudiaremos uno de esos métodos numéricos, denominado método de Euler, en el cual se basan muchos otros del mismo tipo.

Método de Euler

Dada una ecuación diferencial $dy/dx = f(x, y)$ y una condición inicial $y(x_0) = y_0$, podemos aproximar la solución exacta $y = y(x)$ por medio de su linealización

$$L(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) \qquad \text{o} \qquad L(x) = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0).$$

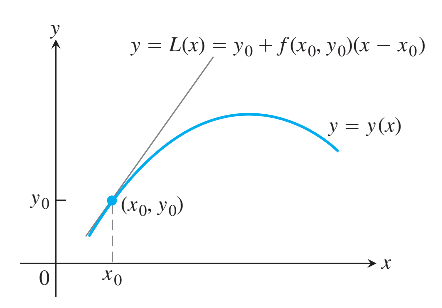


FIGURA 9.8 Linealización $L(x)$ de $y = y(x)$ en $x = x_0$.

La función $L(x)$ proporciona una buena aproximación a la solución $y(x)$ en un intervalo pequeño alrededor de x_0 (figura 9.8). La base del método de Euler es colocar una cadena de linealizaciones para aproximar la curva en un intervalo de mayor longitud. A continuación vemos cómo funciona este método.

Sabemos que el punto (x_0, y_0) está en la curva solución. Suponga que especificamos un nuevo valor para la variable independiente, como $x_1 = x_0 + dx$. (Recuerde que $dx = \Delta x$ en la definición de diferenciales). Si el incremento dx es pequeño, entonces

$$y_1 = L(x_1) = y_0 + f(x_0, y_0)\, dx$$

es una buena aproximación al valor exacto $y = y(x_1)$. Así, a partir del punto (x_0, y_0), que está *exactamente* en la curva solución, hemos obtenido el punto (x_1, y_1), que está muy cercano al punto $(x_1, y(x_1))$ en la curva solución (figura 9.9).

Por medio del punto (x_1, y_1) y la pendiente $f(x_1, y_1)$ de la curva solución que pasa por (x_1, y_1), tomamos un segundo paso. Haciendo $x_2 = x_1 + dx$, utilizamos la linealización de la curva que pasa por (x_1, y_1) para calcula

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)\, dx.$$

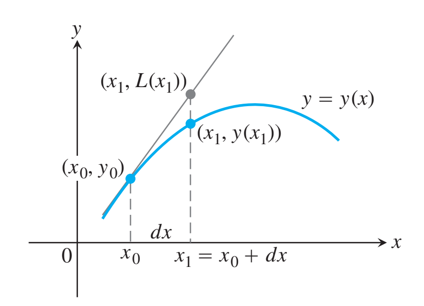


FIGURA 9.9 El primer paso de Euler aproxima $y(x_1)$ con $y_1 = L(x_1)$.

Esto proporciona la siguiente aproximación, (x_2, y_2), para valores a lo largo de la curva solución $y = y(x)$ (figura 9.10). Continuando de esta manera, tomamos un tercer paso desde el punto (x_2, y_2) con pendiente $f(x_2, y_2)$ para obtener la tercera aproximación

$$y_3 = y_2 + f(x_2, y_2)\, dx,$$

y así una y otra vez. Literalmente estamos construyendo una aproximación a una de las soluciones, siguiendo la dirección del campo de pendientes de la ecuación diferencial.

En la figura 9.10, los pasos se dibujaron en una escala mayor para ilustrar el proceso de construcción, de modo que la aproximación parece muy burda. En la práctica dx sería suficientemente pequeña para hacer que la recta superior sea muy cercana a la curva en color azul y proporcione una buena aproximación.

EJEMPLO 1 Uso del método de Euler

Determinar las primeras tres aproximaciones y_1, y_2 y y_3 por medio del método de Euler para el problema de valor inicial

$$y' = 1 + y, \qquad y(0) = 1,$$

iniciando en $x_0 = 0$ y $dx = 0.1$.

Solución Tenemos $x_0 = 0, y_0 = 1, x_1 = x_0 + dx = 0.1, x_2 = x_0 + 2dx = 0.2$, y $x_3 = x_0 + 3dx = 0.3$.

$$\begin{aligned}
\textit{Primero:}\quad y_1 &= y_0 + f(x_0, y_0)\, dx \\
&= y_0 + (1 + y_0)\, dx \\
&= 1 + (1 + 1)(0.1) = 1.2 \\
\textit{Segundo:}\quad y_2 &= y_1 + f(x_1, y_1)\, dx \\
&= y_1 + (1 + y_1)\, dx \\
&= 1.2 + (1 + 1.2)(0.1) = 1.42 \\
\textit{Tercero:}\quad y_3 &= y_2 + f(x_2, y_2)\, dx \\
&= y_2 + (1 + y_2)\, dx \\
&= 1.42 + (1 + 1.42)(0.1) = 1.662
\end{aligned}$$

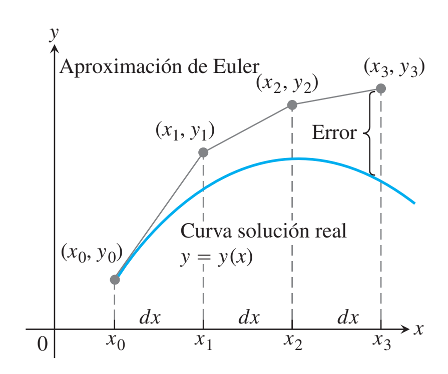


FIGURA 9.10 Tres pasos en la aproximación de Euler a la solución del problema de valor inicial $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$. Cuando hacemos más pasos, por lo común los errores se acumulan, pero no en la forma exagerada en que se muestra aquí.

El proceso paso a paso que se utilizó en el ejemplo 1 puede continuarse con facilidad. Por medio de valores igualmente espaciados para la variable independiente en la tabla, y generando n de ellos, se hace

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_0 + dx \\
x_2 &= x_1 + dx \\
&\vdots \\
x_n &= x_{n-1} + dx.
\end{aligned}$$

Después se calculan las aproximaciones a la solución,

$$
\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + f(x_0, y_0)\,dx \\
y_2 &= y_1 + f(x_1, y_1)\,dx \\
&\vdots \\
y_n &= y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})\,dx.
\end{aligned}
$$

El número de pasos, n, puede ser tan grande como se quiera, pero los errores pueden acumularse si n es demasiado grande.

El método de Euler es fácil de implementar en una computadora o en una calculadora. Un programa de computadora genera una tabla de soluciones numéricas para un problema de valor inicial, permitiéndonos introducir x_0 y y_0, el número de pasos n y el tamaño del paso, dx. Después calcula los valores aproximados de la solución $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de manera iterativa, como se acaba de describir.

Al resolver la ecuación separable del ejemplo 1, encontramos que la solución exacta al problema de valor inicial es $y = 2e^x - 1$. Utilicemos esta información en el ejemplo 2.

EJEMPLO 2 Investigación de la precisión del método de Euler

Utilizar el método de Euler para resolver

$$y' = 1 + y, \qquad y(0) = 1,$$

en el intervalo $0 \le x \le 1$, iniciando en $x_0 = 0$ y tomando

(a) $dx = 0.1$

(b) $dx = 0.05$.

Compare las aproximaciones con los valores de la solución exacta $y = 2e^x - 1$.

Solución

(a) Usamos una computadora para generar los valores aproximados de la tabla 9.1. La columna “Error” se obtuvo restando lo valores de Euler de los valores obtenidos con la solución exacta, ambos sin redondear. Después todas las entradas se redondearon a cuatro decimales.

TABLA 9.1 Solución de Euler para $y' = 1 + y$, $y(0) = 1$, tamaño del paso $dx = 0.1$

x	y (Euler)	y (exacta)	Error
0	1	1	0
0.1	1.2	1.2103	0.0103
0.2	1.42	1.4428	0.0228
0.3	1.662	1.6997	0.0377
0.4	1.9282	1.9836	0.0554
0.5	2.2210	2.2974	0.0764
0.6	2.5431	2.6442	0.1011
0.7	2.8974	3.0275	0.1301
0.8	3.2872	3.4511	0.1639
0.9	3.7159	3.9192	0.2033
1.0	4.1875	4.4366	0.2491

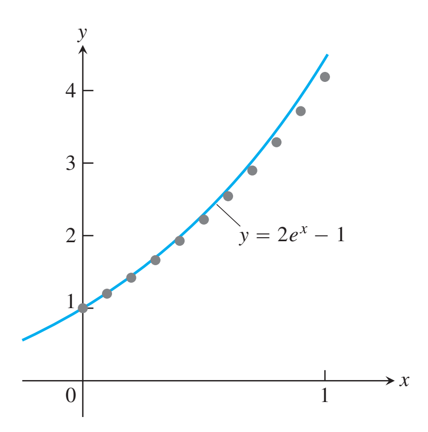


FIGURA 9.11 La gráfica de $y = 2e^x - 1$ sobrepuesta en un diagrama de las aproximaciones de Euler que se muestran en la tabla 9.1 (ejemplo 2).

Cuando se llega a $x = 1$ (después de 10 pasos), el error relativo porcentual es de casi 5.6%. En la figura 9.11 se muestra una gráfica de la curva de la solución exacta con un diagrama de dispersión de los puntos de Euler de la tabla 9.1.

(b) Una forma de tratar de reducir el error consiste en disminuir el tamaño del paso. La tabla 9.2 muestra los resultados y sus comparaciones con la solución exacta cuando disminuimos el tamaño del paso a 0.05, duplicando el número de pasos a 20. Como en la tabla 9.1, todos los cálculos se realizan antes de redondear. Esta vez, cuando se llega a $x = 1$, el error relativo porcentual es sólo de aproximadamente 2.9%.

TABLA 9.2 Solución de Euler de $y' = 1 + y$, $y(0) = 1$, tamaño del paso $dx = 0.05$

x	y (Euler)	y (exacto)	Error
0	1	1	0
0.05	1.1	1.1025	0.0025
0.10	1.205	1.2103	0.0053
0.15	1.3153	1.3237	0.0084
0.20	1.4310	1.4428	0.0118
0.25	1.5526	1.5681	0.0155
0.30	1.6802	1.6997	0.0195
0.35	1.8142	1.8381	0.0239
0.40	1.9549	1.9836	0.0287
0.45	2.1027	2.1366	0.0340
0.50	2.2578	2.2974	0.0397
0.55	2.4207	2.4665	0.0458
0.60	2.5917	2.6442	0.0525
0.65	2.7713	2.8311	0.0598
0.70	2.9599	3.0275	0.0676
0.75	3.1579	3.2340	0.0761
0.80	3.3657	3.4511	0.0853
0.85	3.5840	3.6793	0.0953
0.90	3.8132	3.9192	0.1060
0.95	4.0539	4.1714	0.1175
1.00	4.3066	4.4366	0.1300

■

En el ejemplo 2, podríamos haber intentado reducir el tamaño del paso aún más para obtener una precisión mayor. Sin embargo, cada cálculo extra no sólo requiere de tiempo adicional de cálculo sino, lo más importante, agrega errores de redondeo debido a las representaciones aproximadas de los números dentro de la computadora.

El análisis del error y la investigación de los métodos para reducirlo cuando hacemos cálculos numéricos son importantes, pero son propios de un curso más avanzado. Existen métodos numéricos más precisos que el de Euler, como podremos ver en un estudio posterior de ecuaciones diferenciales. A continuación analizaremos una mejora del mismo.

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

Carl Runge
(1856-1927)

Método de Euler mejorado

Podemos mejorar el método de Euler tomando un promedio de dos pendientes. Primero estimamos y_n como en el método de Euler original, pero la denotamos mediante z_n. Luego, en el siguiente paso tomamos el promedio de $f(x_{n-1}, y_{n-1})$ y $f(x_n, z_n)$ en lugar de $f(x_{n-1}, y_{n-1})$. Así, calculamos la siguiente aproximación y_n usando

$$z_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})\, dx$$

$$y_n = y_{n-1} + \left[\frac{f(x_{n-1}, y_{n-1}) + f(x_n, z_n)}{2}\right] dx.$$

EJEMPLO 3 Investigación de la precisión del método de Euler mejorado

Utilizar el método de Euler mejorado para resolver

$$y' = 1 + y, \qquad y(0) = 1,$$

en el intervalo $0 \leq x \leq 1$, comenzando en $x_0 = 0$ y tomando $dx = 0.1$. Compare las aproximaciones con los valores de la solución exacta $y = 2e^x - 1$.

Solución Utilizamos una computadora para generar los valores aproximados de la tabla 9.3. La columna “Error” se obtiene restando los valores del método de Euler mejorado, de los valores obtenidos con la solución exacta, ambos sin redondear. Después, todas las entradas se redondean a cuatro decimales.

TABLA 9.3 Solución con Euler mejorado para $y' = 1 + y$, $y(0) = 1$, tamaño del paso $dx = 0.1$

x	y (Euler mejorado)	y (exacta)	Error
0	1	1	0
0.1	1.21	1.2103	0.0003
0.2	1.4421	1.4428	0.0008
0.3	1.6985	1.6997	0.0013
0.4	1.9818	1.9836	0.0018
0.5	2.2949	2.2974	0.0025
0.6	2.6409	2.6442	0.0034
0.7	3.0231	3.0275	0.0044
0.8	3.4456	3.4511	0.0055
0.9	3.9124	3.9192	0.0068
1.0	4.4282	4.4366	0.0084

Para el momento en que llegamos a $x = 1$ (después de 10 pasos), el error relativo es aproximadamente de 0.19%. ■

Comparando las tablas 9.1 y 9.3, vemos que el método de Euler mejorado es considerablemente más preciso que el método de Euler regular, al menos para el problema de valor inicial $y' = 1 + y$, $y(0) = 1$.

EJEMPLO 4 Revisión del tanque de almacenamiento en una refinería

En el ejemplo 6, sección 9.2, vimos un problema que incluía un depósito de gasolina de 2000 galones, al que entraba una mezcla de aditivo, la cual se bombeaba simultáneamente. El análisis produjo el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 80 - \frac{45y}{2000 - 5t}, \qquad y(0) = 100$$

en donde $y(t)$ es la cantidad de aditivo que hay en el tanque en el instante t. En ese ejemplo se pidió encontrar $y(20)$. Por medio del método de Euler con un incremento de $dt = 0.2$ (o 100 pasos), se obtienen las aproximaciones

$$y(0.2) \approx 115.55, \qquad y(0.4) \approx 131.0298, \ldots$$

efinalizando con $y(20) \approx 1344.3616$. El error relativo a la solución exacta $y(20) = 1342$, es aproximadamente de 0.18%. ■

EJERCICIOS 9.3

Cálculo de aproximaciones de Euler

En los ejercicios 1 a 6, utilice el método de Euler para calcular las primeras tres aproximaciones al problema de valor inicial dado, para el tamaño de incremento dado. Calcule la solución exacta e investigue la precisión de sus aproximaciones. Redondee sus resultados a cuatro decimales.

1. $y' = 1 - \frac{y}{x}, \quad y(2) = -1, \quad dx = 0.5$
2. $y' = x(1 - y), \quad y(1) = 0, \quad dx = 0.2$
3. $y' = 2xy + 2y, \quad y(0) = 3, \quad dx = 0.2$
4. $y' = y^2(1 + 2x), \quad y(-1) = 1, \quad dx = 0.5$
5. T $y' = 2xe^{x^2}, \quad y(0) = 2, \quad dx = 0.1$
6. T $y' = y + e^x - 2, \quad y(0) = 2, \quad dx = 0.5$
7. Utilice el método de Euler con $dx = 0.2$ para estimar $y(1)$, si $y' = y$ y $y(0) = 1$. ¿Cuál es el valor exacto de $y(1)$?
8. Utilice el método de Euler con $dx = 0.2$ para estimar $y(2)$, si $y' = y/x$ y $y(1) = 2$. ¿Cuál es el valor exacto de $y(2)$?
9. T Utilice el método de Euler con $dx = 0.5$ para estimar $y(5)$, si $y' = y^2/\sqrt{x}$ y $y(1) = -1$. ¿Cuál es el valor exacto de $y(5)$?
10. T Utilice el método de Euler con $dx = 1/3$ para estimar $y(2)$, si $y' = y - e^{2x}$ y $y(0) = 1$. ¿Cuál es el valor exacto de $y(2)$?

Método de Euler mejorado

En los ejercicios 11 y 12, use el método de Euler mejorado para calcular las primeras tres aproximaciones al problema de valor inicial. Compare las aproximaciones con los valores de la solución exacta.

11. $y' = 2y(x + 1), \quad y(0) = 3, \quad dx = 0.2$
    (Vea el ejercicio 3 para la solución exacta).
12. $y' = x(1 - y), \quad y(1) = 0, \quad dx = 0.2$
    (Vea el ejercicio 2 para la solución exacta).

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

Método de Euler

En los ejercicios 13 a 16, utilice el método de Euler con el tamaño de paso especificado para estimar el valor de la solución en el punto dado, x^*. Determine el valor de la solución exacta en x^*.

13. $y' = 2xe^{x^2}, \quad y(0) = 2, \quad dx = 0.1, \quad x^* = 1$
14. $y' = y + e^x - 2, \quad y(0) = 2, \quad dx = 0.5, \quad x^* = 2$
15. $y' = \sqrt{x}/y, \quad y > 0, \quad y(0) = 1, \quad dx = 0.1, \quad x^* = 1$
16. $y' = 1 + y^2, \quad y(0) = 0, \quad dx = 0.1, \quad x^* = 1$

En los ejercicios 17 y 18, **(a)** determine la solución exacta del problema de valor inicial. Luego compare la precisión de la aproximación con $y(x^*)$ usando el método de Euler e iniciando en x_0 con el tamaño del paso **(b)** 0.2, **(c)** 0.1 y **(d)** 0.05.

17. $y' = 2y^2(x - 1), \quad y(2) = -1/2, \quad x_0 = 2, \quad x^* = 3$
18. $y' = y - 1, \quad y(0) = 3, \quad x_0 = 0, \quad x^* = 1$

Método de Euler mejorado

En los ejercicios 19 y 20, compare la precisión de la aproximación con $y(x^*)$ usando el método de Euler mejorado, comenzando en x_0 con tamaño del paso

a. 0.2 **b.** 0.1 **c.** 0.05

d. Describa qué le sucede al error cuando disminuye el tamaño del paso.

19. $y' = 2y^2(x - 1), \quad y(2) = -1/2, \quad x_0 = 2, \quad x^* = 3$
    (Vea el ejercicio 17 para obtener la solución exacta).
20. $y' = y - 1, \quad y(0) = 3, \quad x_0 = 0, \quad x^* = 1$
    (Vea el ejercicio 18 para obtener la solución exacta).

Exploración gráfica de ecuaciones diferenciales

Utilice un software matemático para investigar de manera gráfica cada una de las ecuaciones diferenciales de los ejercicios 21 a 24. Realice los pasos siguientes en su investigación.

a. Trace un campo de pendientes para la ecuación diferencial en la ventana *xy* dada.

b. Determine la solución general de la ecuación diferencial por medio de la función para solucionar ecuaciones diferenciales de su software matemático.

c. Grafique las soluciones para los valores de la constante arbitraria $C = -2, -1, 0, 1, 2$ superpuestas en su diagrama de campo de pendientes.

d. Determine y grafique la solución que satisface la condición inicial especificada en el intervalo $[0, b]$.

e. Determine la aproximación numérica de Euler a la solución del problema de valor inicial con 4 subintervalos del intervalo en *x*, y trace la aproximación de Euler para la gráfica que obtuvo en el inciso (d).

f. Repita el inciso (e) para 8, 16 y 32 subintervalos. Trace estas tres aproximaciones de Euler superpuestas en la gráfica del inciso (e).

g. Determine el error (y(exacta) – y(Euler)) en el punto especificado $x = b$ para cada una de sus cuatro aproximaciones de Euler. Analice la mejora en el error porcentual.

21. $y' = x + y, \quad y(0) = -7/10; \quad -4 \leq x \leq 4, \quad -4 \leq y \leq 4;$ $b = 1$

22. $y' = -x/y, \quad y(0) = 2; \quad -3 \leq x \leq 3, \quad -3 \leq y \leq 3; \quad b = 2$

23. **Una ecuación logística** $y' = y(2 - y), \quad y(0) = 1/2;$ $0 \leq x \leq 4, \quad 0 \leq y \leq 3; \quad b = 3$

24. $y' = (\operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} y), \quad y(0) = 2; \quad -6 \leq x \leq 6, \quad -6 \leq y \leq 6$ $b = 3\pi/2$

9.4 Soluciones gráficas de ecuaciones diferenciales autónomas

En el capítulo 4 aprendimos que el signo de la primera derivada indica en qué parte es creciente la gráfica de una función y en dónde es decreciente. El signo de la segunda derivada indica la concavidad de la gráfica. Podemos fundamentar nuestro conocimiento de cómo las derivadas determinan la forma de una gráfica para resolver, de manera gráfica, una ecuación diferencial. Las ideas iniciales para hacerlo así, son las nociones de la *línea de fase* y el *valor de equilibrio*. Llegamos a estas nociones con la investigación de lo que sucede cuando la derivada de una función diferenciable es cero desde un punto de vista diferente al estudiado en el capítulo 4.

Valores de equilibrio y líneas de fase

Cuando derivamos de manera implícita la ecuación

$$\frac{1}{5}\ln(5y - 15) = x + 1$$

obtenemos

$$\frac{1}{5}\left(\frac{5}{5y - 15}\right)\frac{dy}{dx} = 1.$$

Al despejar $y' = dy/dx$ encontramos $y' = 5y - 15 = 5(y - 3)$. En este caso la derivada y' es una función de y (la variable dependiente) únicamente, y es cero cuando $y = 3$.

Una ecuación diferencial para la que dy/dx sólo es función de y se denomina ecuación diferencial **autónoma**. Investigue qué sucede cuando la derivada en una ecuación autónoma es cero.

DEFINICIÓN Valores de equilibrio

Si $dy/dx = g(y)$ (ecuación diferencial autónoma), los valores de y para los que $dy/dx = 0$ se denominan **valores de equilibrio** o **puntos de reposo**.

De esta manera, los valores de equilibrio son aquellos en los que no ocurre cambio en la variable dependiente, por lo que y está en *reposo*. El hincapié se hace en el valor de y en donde $dy/dx = 0$, no en el valor de x, como estudiamos en el capítulo 4.

EJEMPLO 1 Determinación de valores de equilibrio

Los valores de equilibrio para la ecuación diferencial autónoma

$$\frac{dy}{dx} = (y + 1)(y - 2)$$

son $y = -1$ y $y = 2$. ■

A fin de construir una solución gráfica para una ecuación diferencial autónoma como la del ejemplo 1, primero hacemos una **línea de fase** para la ecuación, una gráfica en el eje y que muestre los valores de equilibrio junto con los intervalos en donde dy/dx y d^2y/dx^2 son positivos y negativos. Entonces, sabemos en dónde son crecientes y decrecientes las soluciones, y cuál es la concavidad de las curvas solución. Éstas son las características esenciales que encontramos en la sección 4.4, de manera que podemos determinar las formas de las curvas solución sin tener que determinar las fórmulas para ellas.

EJEMPLO 2 Cómo dibujar una línea de fase y bosquejar las curvas solución

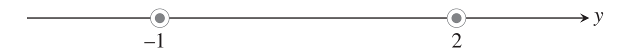
Dibujar una línea de fase para la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = (y + 1)(y - 2)$$

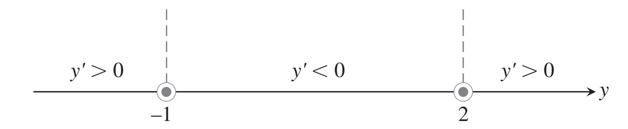
y utilizarla para bosquejar las soluciones de la ecuación.

Solución

1. *Dibuje una recta numérica para y y marque los valores de equilibrio y = –1 y y = 2, en donde $dy/dx = 0$.*



2. *Identifique y marque los intervalos en donde* $y' > 0$ y $y' < 0$. Este paso se parece al que hicimos en la sección 4.3, sólo que ahora marcamos el eje y en lugar del eje x.



Podemos concentrar la información acerca del signo de y' en la misma línea de fase. Como $y' > 0$ en el intervalo a la izquierda de $y = -1$, una solución de la ecuación diferencial con valor de y menor que –1 crecerá hacia $y = -1$. Mostramos esta información dibujando una flecha en el intervalo que apunta hacia –1.



De manera similar, $y' < 0$ entre $y = –1$ y $y = 2$, de modo que cualquier solución con un valor en este intervalo disminuirá hacia $y = –1$.

Para $y > 2$, tenemos $y' > 0$, así que una solución con un valor de y mayor que 2 aumentará desde allí y sin cota.

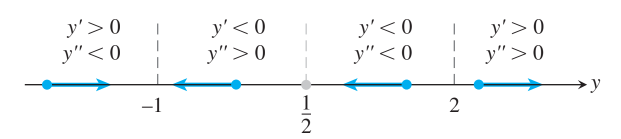
En resumen, las curvas solución por debajo de la recta horizontal $y = -1$ en el plano xy ascienden hacia $y = -1$. Las curvas solución entre las rectas $y = -1$ y $y = 2$ descienden de $y = 2$ hacia $y = -1$. Las curvas solución por arriba de $y = 2$ ascienden desde $y = 2$ y se mantienen creciendo.

3. *Calcule y'' y marque los intervalos en donde $y'' > 0$ y $y'' < 0$*. Para determinar y'', derivamos y' *respecto de* x, por medio de diferenciación implícita.

$$y' = (y + 1)(y - 2) = y^2 - y - 2 \qquad \text{Fórmula para } y' \ldots$$

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{d}{dx}(y') = \frac{d}{dx}(y^2 - y - 2) \\ &= 2yy' - y' \qquad \text{derivada implícitamente respecto de } x. \\ &= (2y - 1)y' \\ &= (2y - 1)(y + 1)(y - 2). \end{aligned}$$

A partir de esta fórmula, vemos que y'' cambia de signo en $y = -1, y = 1/2$, y $y = 2$. Agregamos la información del signo a la línea de fase.



4. *Bosqueje una colección de curvas solución en el plano xy*. Las rectas horizontales $y = -1, y = 1/2$ y $y = 2$ dividen el plano en bandas horizontales en las que conocemos los signos de y' y y''. En cada banda, esta información nos dice si las curvas solución ascienden o descienden y cuál es su curvatura cuando x aumenta (figura 9.12).

Las “líneas de equilibrio” $y = -1$ y $y = 2$ también son curvas solución. (Las funciones constantes $y = -1$ y $y = 2$ satisfacen la ecuación diferencial). Las curvas solución que cruzan la recta $y = 1/2$ tienen un punto de inflexión allí. La concavidad cambia de cóncava hacia abajo (arriba de la recta) a cóncava hacia arriba (abajo de la recta).

Como se dijo en el paso 2, las soluciones en las bandas central e inferior se aproximan al valor de equilibrio $y = -1$ cuando x aumenta. Las soluciones en la banda superior ascienden constantemente, alejándose del valor $y = 2$. ■

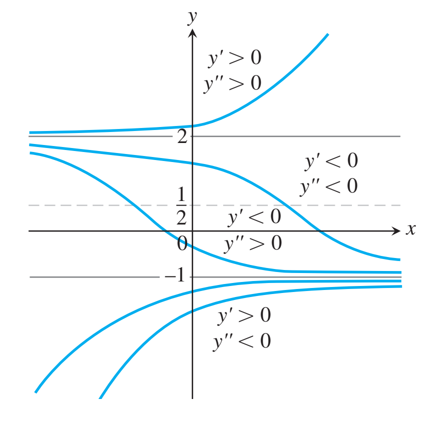


FIGURA 9.12 Soluciones gráficas del ejemplo 2, incluyendo las rectas horizontales $y = -1$ y $y = 2$, que pasan por los valores de equilibrio.

Equilibrio estable y equilibrio inestable

Vea la figura 9.12 y fíjese, sobre todo, en el comportamiento de las curvas solución cerca de los valores de equilibrio. Una vez que una curva solución tiene un valor cercano a $y = -1$, tiende de manera asintótica hacia ese valor; $y = -1$ es un **equilibrio estable**. El comportamiento cerca de $y = 2$ es justamente lo opuesto; todas las soluciones, excepto la solución de equilibrio $y = 2$ se mueven *alejándose* de ella conforme x aumenta. Llamamos a $y = 2$ un **equilibrio inestable**. Si la solución está *en* ese valor, allí permanece, pero si está fuera por cualquier cantidad, no importa qué tan pequeña, se aleja de él. (En ocasiones un valor de equilibrio es inestable porque una solución se aleja de ella sólo por uno de los lados del punto).

Ahora que sabemos lo que buscamos, podemos ver el comportamiento en la línea de fase inicial. Las flechas se alejan de $y = 2$ y, una vez que están a la izquierda de $y = 2$, se dirigen hacia $y = -1$.

A continuación se presentan varios ejemplos aplicados para los que podemos bosquejar una familia de curvas solución para la ecuación diferencial por medio del método del ejemplo 2.

En la sección 7.5 resolvimos de manera analítica la ecuación diferencial

$$\frac{dH}{dt} = -k(H - H_S), \qquad k > 0$$

que modela la ley de enfriamiento de Newton. Aquí, H es la temperatura (cantidad de calor) de un objeto en el instante t, y H_S es la temperatura constante del entorno que rodea al objeto. Nuestro primer ejemplo utiliza un análisis de línea de fase para ilustrar el comportamiento gráfico de este modelo de temperatura sobre el tiempo.

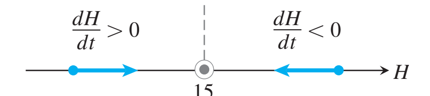


FIGURA 9.13 Primer paso en la construcción de la línea de fase para la ley de enfriamiento de Newton del ejemplo 3. A la larga, la temperatura tiende al valor de equilibrio (la del medio que lo rodea).

EJEMPLO 3 Enfriando la sopa

¿Qué le sucede a la temperatura de la sopa cuando un tazón de sopa caliente se coloca sobre una mesa en una habitación? Sabemos que la sopa se enfría, pero, ¿cómo se ve una curva típica de la temperatura como una función del tiempo?

Solución Suponga que el medio ambiente tiene una temperatura constante de 15°C. Entonces podemos expresar la diferencia de temperaturas como $H(t) - 15$. Suponiendo que H es una función diferenciable del tiempo t, de acuerdo con la ley de enfriamiento de Newton existe una constante de proporcionalidad $k > 0$ tal que

$$\frac{dH}{dt} = -k(H - 15) \tag{1}$$

(*menos* k para obtener una derivada negativa cuando $H > 15$).

Como $dH/dt = 0$ en $H = 15$, la temperatura 15°C es un valor de equilibrio. Si $H > 15$, la ecuación (1) indica que $(H - 15) > 0$ y $dH/dt < 0$. Si el objeto está más caliente que la habitación, se enfriará. De manera similar, si $H < 15$ entonces $(H - 15) < 0$ y $dH/dt > 0$. Un objeto más frío que la habitación se calentará. Así, el comportamiento descrito por medio de la ecuación (1) coincide con nuestra intuición respecto a cómo debe comportase la temperatura. Estas observaciones se capturan en el diagrama de línea de fase inicial de la figura 9.13. El valor $H = 15$ es un equilibrio estable.

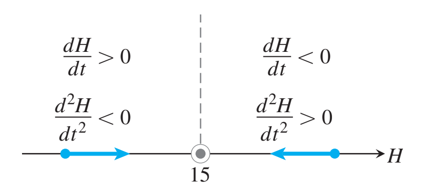


FIGURA 9.14 La línea de fase completa para la ley de enfriamiento de Newton (ejemplo 3).

Determinamos la concavidad de las curvas solución, derivando ambos lados de la ecuación (1) respecto de t:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dH}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(-k(H - 15))$$

$$\frac{d^2H}{dt^2} = -k\frac{dH}{dt}.$$

Como $-k$ es negativa, vemos que d^2H/dt^2 es positiva cuando $dH/dt < 0$, y negativa cuando $dH/dt > 0$. La figura 9.14 agrega esta información a la línea de fase.

La línea de fase completa, muestra que si la temperatura del objeto está por arriba del valor de equilibrio de 15°C, la gráfica de $H(t)$ disminuirá y será cóncava hacia arriba. Si la temperatura está por abajo de 15°C (la temperatura del medio ambiente), la gráfica de $H(t)$ aumentará y será cóncava hacia abajo. Utilizamos esta información para bosquejar curvas solución típicas (figura 9.15).

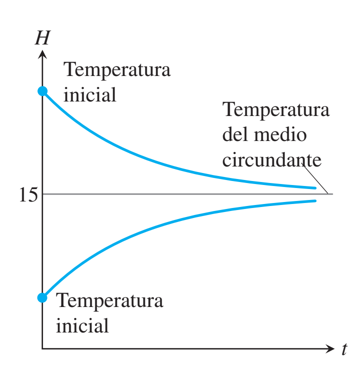


FIGURA 9.15 Temperatura contra tiempo. Sin importar la temperatura inicial, la temperatura del objeto, $H(t)$, tiende hacia 15°C, la temperatura del medio que lo rodea.

Con base en la curva solución superior de la figura 9.15, vemos que cuando el objeto se enfría, la razón a la que lo hace disminuye, ya que dH/dt se aproxima a cero. Esta observación está implícita en la ley de enfriamiento de Newton, y forma parte de la ecuación diferencial, pero el aplanamiento de la gráfica cuando el tiempo avanza proporciona una representación visual inmediata del fenómeno. La capacidad para discernir sobre el comportamiento físico de las gráficas es una herramienta poderosa para la comprensión de sistemas reales. ■

EJEMPLO 4 Análisis de la caída de un cuerpo que enfrenta una fuerza de resistencia

Galileo y Newton observaron que la razón de cambio en el momento (o *momentum*) encontrado por un objeto móvil es igual a la fuerza neta aplicada a él. En términos matemáticos,

$$F = \frac{d}{dt}(mv) \tag{2}$$

donde F es la fuerza y m y v la masa y la velocidad del objeto. Si m varía con el tiempo, como cuando el objeto es un cohete que quema combustible, el lado derecho de la ecuación (2) se expande a

$$m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt}$$

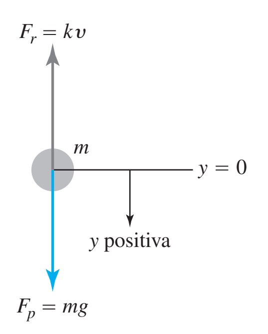


FIGURA 9.16 Un objeto que cae bajo la influencia de la gravedad con fuerza de resistencia, que se supone es proporcional a la velocidad.

utilizando la regla del producto. Sin embargo, en muchas situaciones, m es constante, $dm/dt = 0$, y la ecuación (2) toma la forma más sencilla

$$F = m\frac{dv}{dt} \qquad \text{o} \qquad F = ma, \tag{3}$$

conocida como la *segunda ley de movimiento de Newton*.

En caída libre, la aceleración constante debida a la gravedad se denota mediante g, y la fuerza que actúa hacia abajo en el cuerpo que cae es

$$F_p = mg,$$

la propulsión debida a la gravedad. Sin embargo, si consideramos un objeto real que cae en el aire, digamos una moneda que cae desde una gran altura o un paracaidista que desciende de una altura aún mayor, sabemos que la resistencia del aire es un factor que afecta la velocidad de la caída. Un modelo más realista de la caída libre incluiría la resistencia al aire, mostrada como una fuerza F_r en el diagrama de la figura 9.16.

Para velocidades bajas, por debajo de la velocidad del sonido, los experimentos físicos han demostrado que F_r es aproximadamente proporcional a la velocidad del cuerpo. Por lo tanto, la fuerza neta sobre el objeto que cae es

$$F = F_p - F_r,$$

con lo que se obtiene,

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv$$

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v. \tag{4}$$

Podemos utilizar la línea de fase para analizar las funciones de velocidad que resuelven esta ecuación diferencial.

El punto de equilibrio, obtenido haciendo el lado derecho de la ecuación (4) igual a cero, es

$$v = \frac{mg}{k}.$$

Si, en un inicio, el cuerpo se está moviendo más rápido que esto, dv/dt es negativa y el cuerpo aminora la velocidad. Si el cuerpo se mueve a una velocidad por debajo de mg/k, entonces $dv/dt > 0$ y el cuerpo aumenta su velocidad. Estas observaciones se capturaron en el diagrama inicial de línea de fase de la figura 9.17.

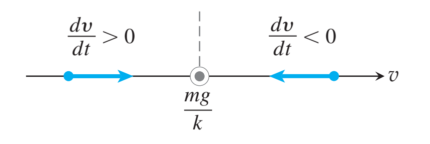


FIGURA 9.17 Línea de fase inicial para el ejemplo 4.

Determinamos la concavidad de las curvas solución por medio de la derivación de ambos lados de la ecuación (4) respecto de t:

$$\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(g - \frac{k}{m}v\right) = -\frac{k}{m}\frac{dv}{dt}.$$

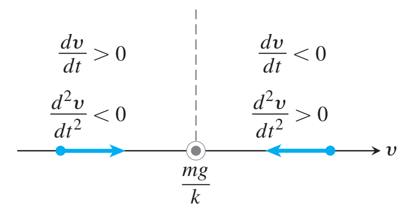


FIGURA 9.18 Línea de fase completa para el ejemplo 4.

Vemos que $d^2v/dt^2 < 0$ cuando $v < mg/k$ y $d^2v/dt^2 > 0$ cuando $v > mg/k$. La figura 9.18 añade esta información a la línea de fase. Observe la similitud que tiene esta línea de fase con la de la ley de enfriamiento de Newton (figura 9.14). Las curvas solución también son similares (figura 9.19).

La figura 9.19 muestra dos curvas solución típicas. Sin importar la velocidad inicial, vemos que la velocidad del cuerpo tiende al valor límite $v = mg/k$. Este valor, un punto de equilibrio estable, se denomina **velocidad límite** del cuerpo. Los paracaidistas pueden variar su velocidad terminal de 95 mph a 180 mph cambiando la cantidad del área del cuerpo que se opone a la caída

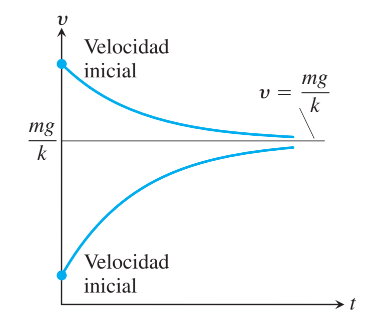


FIGURA 9.19 Curvas típicas de velocidad del ejemplo 4. El valor $v = mg/k$ es la velocidad terminal.

EJEMPLO 5 Análisis del crecimiento poblacional en un ambiente limitado

En la sección 7.5 examinamos el crecimiento poblacional por medio del modelo de cambio exponencial. Esto es, si P representa el número de individuos y no consideramos las salidas y las llegadas, entonces

$$\frac{dP}{dt} = kP, \tag{5}$$

donde $k > 0$ es la tasa de nacimiento menos la tasa de mortalidad por individuo por unidad de tiempo.

Como el ambiente natural sólo tiene un número limitado de recursos para sustentar la vida, es razonable suponer que sólo una población máxima M puede alojarse en él. Cuando la población se aproxima a esta **población límite** o **capacidad de sustentación**, los recursos se vuelven menos abundantes y la tasa de crecimiento k disminuye. Una relación sencilla que exhibe este comportamiento es

$$k = r(M - P),$$

donde $r > 0$ es una constante. Observe que k disminuye cuando P aumenta hacia M, y que k es negativa si P es mayor que M. Sustituyendo k por $r(M - P)$ en la ecuación (5) se obtiene la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = r(M - P)P = rMP - rP^2. \tag{6}$$

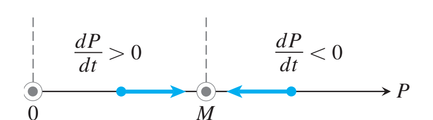


FIGURA 9.20 Línea de fase inicial para la ecuación 6.

El modelo dado por la ecuación (6) se conoce como **crecimiento logístico.**

Podemos pronosticar el comportamiento de la población durante el tiempo analizando la línea de fase para la ecuación (6). Los valores de equilibrio son $P = M$ y $P = 0$, y podemos ver que $dP/dt > 0$ si $0 < P < M$ y $dP/dt < 0$ si $P > M$. Estas observaciones se registraron en la línea de fase en la figura 9.20.

Determinamos la concavidad de las curvas de población derivando ambos lados de la ecuación (6) respecto de t:

$$\begin{aligned}\frac{d^2P}{dt^2} &= \frac{d}{dt}(rMP - rP^2)\\ &= rM\frac{dP}{dt} - 2rP\frac{dP}{dt}\\ &= r(M - 2P)\frac{dP}{dt}.\end{aligned} \tag{7}$$

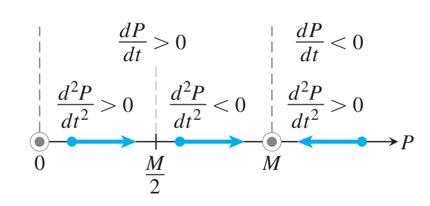


FIGURA 9.21 Línea de fase terminada para el crecimiento logístico (ecuación 6).

Si $P = M/2$, entonces $d^2P/dt^2 = 0$. Si $P < M/2$, entonces $(M - 2P)$ y dP/dt son positivas y $d^2P/dt^2 > 0$. Si $M/2 < P < M$, entonces $(M - 2P) < 0$, $dP/dt > 0$, y $d^2P/dt^2 < 0$. Si $P > M$, entonces tanto $(M - 2P)$ como dP/dt son negativas y $d^2P/dt^2 > 0$. Agregamos esta información a la línea de fase (figura 9.21).

Las rectas $P = M/2$ y $P = M$ dividen al primer cuadrante del plano tP en bandas horizontales en las que conocemos los signos de dP/dt y d^2P/dt^2. En cada banda, sabemos cómo ascienden y descienden las curvas solución y como es su concavidad conforme pasa el tiempo. Las rectas de equilibrio $P = 0$ y $P = M$ son curvas de población. Las curvas de población cruzan la recta $P = M/2$ tienen un punto de inflexión allí, dándoles una forma **sigmoidea** (curvadas en dos direcciones como una letra S). La figura 9.22 muestra curvas típicas de población. ■

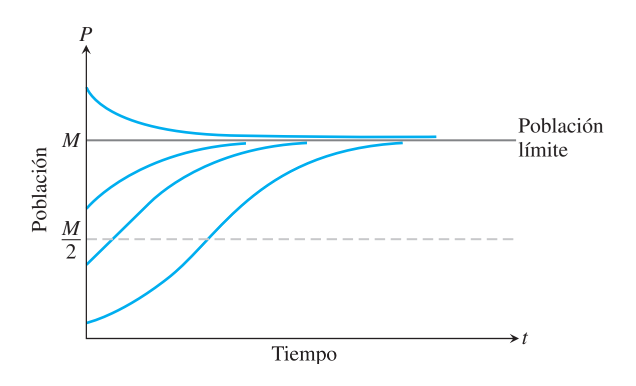


FIGURA 9.22 Curvas de población del ejemplo 5.

EJERCICIOS 9.4

Líneas de fase y curvas solución

En los ejercicios 1 a 8, realice lo que se pida.

a. Identifique los valores de equilibrio. ¿Cuáles son estables y cuáles son inestables?

b. Construya una línea de fase. Identifique los signos de y' y y''.

c. Haga un bosquejo de las curvas solución.

1. $\dfrac{dy}{dx} = (y + 2)(y - 3)$

2. $\dfrac{dy}{dx} = y^2 - 4$

3. $\dfrac{dy}{dx} = y^3 - y$

4. $\dfrac{dy}{dx} = y^2 - 2y$

5. $y' = \sqrt{y}, \quad y > 0$

6. $y' = y - \sqrt{y}, \quad y > 0$

7. $y' = (y - 1)(y - 2)(y - 3)$

8. $y' = y^3 - y^2$

Modelos de crecimiento poblacional

Las ecuaciones diferenciales autónomas de los ejercicios 9 a 12 representan modelos para crecimiento poblacional. Para cada ejercicio, utilice un análisis de línea de fase para hacer un bosquejo de las curvas solución para $P(t)$, seleccionando diferentes valores de inicio, $P(0)$ (como en el ejemplo 5). ¿Cuáles equilibrios son estables y cuáles son inestables?

9. $\dfrac{dP}{dt} = 1 - 2P$

10. $\dfrac{dP}{dt} = P(1 - 2P)$

11. $\dfrac{dP}{dt} = 2P(P - 3)$

12. $\dfrac{dP}{dt} = 3P(1 - P)\left(P - \dfrac{1}{2}\right)$

13. Catastrófica continuación del ejemplo 5 Suponga que una población saludable de alguna especie crece en una ambiente limitado y que la población actual, P_0, está bastante cercana a la capacidad de sustentación M_0. Tal situación podría presentarse, por ejemplo, en una población de peces que viven en un lago de agua dulce en un parque natural. Repentinamente, una catástrofe, como la erupción volcánica del monte Santa Elena, contamina el lago y destruye una parte significativa del alimento y el oxígeno de los que dependen los peces. El resultado es un nuevo ambiente con una capacidad de sustentación M_1, es decir, considerablemente menor que M_0 y, de hecho, menor que la población actual, P_0. Iniciando en algún instante antes de la catástrofe, haga un bosquejo de una curva "antes y después" para ilustrar la manera en que la población de peces responde al cambio en el ambiente.

14. Control de una población El departamento de caza y pesca deportivas de cierto estado planea emitir permisos de caza para controlar la población de venados (un ciervo por permiso). Se sabe que si la población de venados cae por debajo de cierto nivel m, la especie se extinguirá. También se sabe que si la población de venados crece por arriba de la capacidad de sustentación M, la población se reducirá a M, a consecuencia de enfermedades y mala nutrición.

a. Analice la sensatez del modelo siguiente para calcular la tasa de crecimiento de la población de venados como una función del tiempo:

$$\frac{dP}{dt} = rP(M - P)(P - m),$$

donde P es la población de venados y r es una constante de proporcionalidad positiva. Incluya una línea de fase.

b. Explique cómo difiere este modelo del modelo logístico $dP/dt = rP(M - P)$. ¿Es mejor o peor que el modelo logístico?

c. Muestre que si $P > M$ para toda t, entonces $\lim_{t\to\infty} P(t) = M$.

d. ¿Qué sucede si $P < m$ para toda t?

e. Analice las soluciones de la ecuación diferencial. ¿Cuáles son los puntos de equilibrio del modelo? Explique la dependencia del valor de estado estacionario de P sobre los valores iniciales de P. ¿Aproximadamente cuántos permisos deben emitirse?

Aplicaciones y ejemplos

15. Paracaidismo Si un cuerpo de masa m que cae desde el reposo bajo la acción de la gravedad encuentra una resistencia del aire proporcional al cuadrado de la velocidad, entonces la velocidad del cuerpo a t segundos de caída satisface la ecuación

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2, \qquad k > 0$$

donde k es una constante que depende de las propiedades aerodinámicas del cuerpo y de la densidad del aire. (Suponga que la caída es demasiado corta para verse afectada por cambios en la densidad del aire).

a. Dibuje una línea de fase para la ecuación.

b. Haga un bosquejo de una curva típica de velocidad.

c. Para un paracaidista de 160 lb ($mg = 160$) y con tiempo en segundos y distancia en pies, un valor típico de k es 0.005. ¿Cuál es la velocidad terminal del paracaidista?

16. Resistencia proporcional a $\sqrt{v}$ Un cuerpo de masa m es lanzado verticalmente hacia abajo con una velocidad inicial v_0. Suponga que la fuerza de resistencia es proporcional a la raíz cuadrada de la velocidad y determine la velocidad terminal desde un análisis gráfico.

17. Navegación Un velero se dirige a lo largo de un curso recto, con el viento proporcionando una fuerza constante hacia adelante de 50 lb. La única fuerza adicional que actúa sobre el bote es la resistencia cuando éste se mueve en el agua. La fuerza de resistencia es numéricamente igual a cinco veces la velocidad del bote, y la velocidad inicial es de 1 pie/segundo. ¿Cuál es la velocidad máxima, en pies por segundo, del bote con este viento?

18. Difusión de información Los sociólogos reconocen un fenómeno denominado *difusión social*, que es la propagación de información, innovación tecnológica o una moda cultural entre una población. Los miembros de la población pueden dividirse en dos clases: aquellos que conocen la información y aquellos que la desconocen. En una población fija cuyo tamaño se conoce, es razonable suponer que la velocidad de difusión es proporcional al número de personas que conocen la información por el número de individuos que aún no la conocen. Si X denota el número de individuos que tienen la información en una población con N personas, entonces un modelo matemático para la difusión social está dado por

$$\frac{dX}{dt} = kX(N - X),$$

donde t representa el tiempo en días y k es una constante positiva.

a. Analice la sensatez del modelo.

b. Construya una línea de fase identificando los signos de X' y X''.

c. Haga un bosquejo de curvas solución representativas.

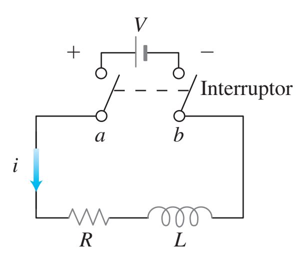
d. Prediga el valor de X para el que la información se esté propagando más rápidamente. ¿Cuántas personas recibirán, tarde o temprano, la información?

19. Corriente en un circuito *RL* El diagrama siguiente representa un circuito eléctrico cuya resistencia total es una constante de R ohms y cuya autoinductancia, mostrada como una bobina en L henries, también es constante. Hay un interruptor cuyas terminales en a y b pueden cerrarse para conectar una fuente eléctrica constante de V voltios.

La ley de Ohm, $V = Ri$, tiene que modificarse para este circuito. La forma modificada es

$$L\frac{di}{dt} + Ri = V,$$

donde i es la intensidad de la corriente en amperes, y t es el tiempo en segundos. Resolviendo esta ecuación, podemos predecir cómo fluye la corriente después de que el interruptor se cierre.



Utilice un análisis de línea de fase para bosquejar la curva solución, suponiendo que el interruptor en el circuito *RL* se cierra en el instante $t = 0$. ¿Qué le sucede a la corriente cuando $t \to \infty$? Este valor se denomina *solución de estado estacionario* o *solución estacionaria*.

20. Una perla en el champú Suponga que una perla está hundiéndose en un fluido viscoso, como el champú, sujeta a una fuerza de fricción que se opone a que caiga y es proporcional a su velocidad. Suponga también que hay una fuerza de resistencia de flotación ejercida por el champú. De acuerdo con el *principio de Arquímedes*, la fuerza de flotación es igual al peso del fluido desplazado por la perla. Utilizando m para la masa de la perla y P para la masa del champú desplazado por la perla al descender, complete los pasos siguientes.

a. Haga un diagrama que muestre las fuerzas que actúan sobre la perla al hundirse, como en la figura 9.16.

b. Utilizando $v(t)$ para la velocidad de la perla como una función del tiempo t, escriba una ecuación diferencial que modele la velocidad de la perla como un cuerpo que cae.

c. Construya una línea de fase que muestre los signos de v' y v''.

d. Haga un bosquejo de curvas solución típicas.

e. ¿Cuál es la velocidad terminal de la perla?

9.5 Aplicaciones de ecuaciones diferenciales de primer orden

En esta sección examinaremos tres aplicaciones de las ecuaciones diferenciales que hemos estudiado. La primera aplicación analiza un objeto que se mueve a lo largo de una línea recta mientras está sujeto a una fuerza que se opone al movimiento. El segundo es un modelo de crecimiento de población que toma en cuenta factores del medio ambiente que limitan el crecimiento, tal como la disponibilidad de alimento u otros recursos vitales. La última aplicación considera una curva o curvas que intersectan *ortogonalmente* (esto es, en ángulo recto) a cada curva de una segunda familia de curvas.

Resistencia proporcional a la velocidad

En algunos casos es razonable suponer que la resistencia encontrada por un objeto en movimiento, tal como un automóvil que se va a detener, es proporcional a su velocidad. Mientras más rápido se mueva el objeto, mayor es la resistencia que presenta el aire que lo circunda. Para describir esto en términos matemáticos, representamos el objeto como una masa m que se mueve a lo largo de una recta coordenada con función de posición s y velocidad v en el instante t. De acuerdo con la segunda ley de movimiento de Newton, la fuerza de resistencia que se opone al movimiento es

$$\text{Fuerza} = \text{masa} \times \text{aceleración} = m\frac{dv}{dt}.$$

Podemos expresar la hipótesis de que la fuerza de resistencia es proporcional a la velocidad escribiendo

$$m\frac{dv}{dt} = -kv \qquad \text{o} \qquad \frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}v \qquad (k > 0).$$

Ésta es una ecuación diferencial separable que representa un cambio exponencial. La solución para la ecuación con condición inicial $v = v_0$ en $t = 0$ es (sección 7.5).

$$v = v_0 e^{-(k/m)t}. \tag{1}$$

¿Qué podemos aprender de la ecuación (1)? Por una parte, si m es grande, como la masa de un buque minero de 20,000 toneladas en el lago Erie, tardará mucho tiempo para que la velocidad se aproxime a cero (ya que t debe ser grande en el exponente de la ecuación para hacer kt/m suficientemente grande para que v se haga pequeña). Podemos aprender aún más si integramos la ecuación (1) para determinar la posición s como una función del tiempo t.

Suponga que el cuerpo se desliza hasta detenerse, y que la única fuerza que actúa sobre él es una resistencia proporcional a su velocidad. ¿Cuánto se desplaza? Para determinarlo, iniciamos con la ecuación (1) y resolvemos el problema de valor inicial

$$\frac{ds}{dt} = v_0 e^{-(k/m)t}, \qquad s(0) = 0.$$

Integrando respecto a t se obtiene

$$s = -\frac{v_0 m}{k} e^{-(k/m)t} + C.$$

Sustituyendo $s = 0$ cuando $t = 0$ se obtiene

$$0 = -\frac{v_0 m}{k} + C \qquad \text{y} \qquad C = \frac{v_0 m}{k}.$$

Por lo tanto, la posición del cuerpo en el instante t es

$$s(t) = -\frac{v_0 m}{k} e^{-(k/m)t} + \frac{v_0 m}{k} = \frac{v_0 m}{k}\left(1 - e^{-(k/m)t}\right). \qquad (2)$$

Para determinar la distancia que el cuerpo se deslizará, determinamos el límite de $s(t)$ cuando $t \to \infty$. Como $-(k/m) < 0$, sabemos que $e^{-(k/m)t} \to 0$ cuando $t \to \infty$, de modo que

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} s(t) &= \lim_{t\to\infty} \frac{v_0 m}{k}\left(1 - e^{-(k/m)t}\right)\\ &= \frac{v_0 m}{k}(1 - 0) = \frac{v_0 m}{k}.\end{aligned}$$

Así,

$$\text{Distancia recorrida} = \frac{v_0 m}{k}. \qquad (3)$$

Por supuesto, ésta es una cifra ideal. Sólo en matemáticas podemos extender el tiempo a infinito. El número $v_0 m/k$ es únicamente una cota superior (aunque una muy útil). Esto es cierto en la vida real por lo menos en un sentido: si m es grande, detener el cuerpo requerirá un gran consumo de energía. Ésta es la razón por la que los transatlánticos tienen que ser fondeados por medio de remolcadores. Cualquier transatlántico convencional que entrara a puerto con suficiente velocidad para navegar, chocaría contra el muelle antes de poderse detener.

En el sistema de unidades inglés, en donde el peso se mide en libras, la masa se mide en **slugs**. Así,

$$\text{Libras} = \text{slugs} \times 32,$$

suponiendo que la constante gravitacional es 32 pies/s^2.

EJEMPLO 1 Deslizamiento de un patinador sobre hielo

Para un patinador de 192 lb, la k en la ecuación (1) es aproximadamente 1/3 slug/s y $m = 192/32 = 6$ slugs. ¿Cuánto tardará el patinador en deslizarse de 11 pies/s (7.5 mph) a 1 pie/s? ¿Cuánto recorrerá antes de detenerse por completo?

Solución Respondemos la primera pregunta despejando t de la ecuación (1):

$$\begin{aligned}11e^{-t/18} &= 1 && \text{Ecuación (1) cuando } k = 1/3,\ m = 6,\ v_0 = 11,\ v = 1\\ e^{-t/18} &= 1/11\\ -t/18 &= \ln(1/11) = -\ln 11\\ t &= 18 \ln 11 \approx 43 \text{ segundos.}\end{aligned}$$

Respondemos la segunda pregunta con la ecuación (3):

$$\begin{aligned}\text{Distancia recorrida} &= \frac{v_0 m}{k} = \frac{11 \cdot 6}{1/3}\\ &= 198 \text{ pies.}\end{aligned}$$

■

Modelación de crecimiento poblacional

En la sección 7.5 modelamos el crecimiento de la población por medio de la ley de cambio exponencial:

$$\frac{dP}{dt} = kP, \qquad P(0) = P_0$$

donde P es la población en el instante t, $k > 0$ es una tasa constante de crecimiento y P_0 es el tamaño de la población en el instante $t = 0$. En la sección 7.5 encontramos la solución $P = P_0e^{kt}$ para este modelo. Sin embargo, no podemos evitar preguntarnos ¿qué tan bueno es el modelo?

Para iniciar una valoración del modelo, observe que la ecuación diferencial de crecimiento exponencial indica que

$$\frac{dP/dt}{P} = k \tag{4}$$

es constante. Esta razón se denomina **tasa de crecimiento relativo**. Ahora bien, la tabla 9.4 proporciona la población mundial, a mitad de año, para los años 1980 a 1989. Tomando $dt = 1$ y $dP \approx \Delta P$, de acuerdo con la tabla vemos que la tasa de crecimiento relativo en la ecuación (4) es aproximadamente la constante 0.017. En consecuencia y con base en los datos tabulados, con $t = 0$ representando 1980, $t = 1$ representando 1981 y así sucesivamente, la población mundial podría modelarse por medio de

Ecuación diferencial: $\dfrac{dP}{dt} = 0.017P$

Condición inicial: $P(0) = 4454.$

TABLA 9.4 Población mundial (medio año)

Año	Población (millones)	$\Delta P/P$
1980	4454	$76/4454 \approx 0.0171$
1981	4530	$80/4530 \approx 0.0177$
1982	4610	$80/4610 \approx 0.0174$
1983	4690	$80/4690 \approx 0.0171$
1984	4770	$81/4770 \approx 0.0170$
1985	4851	$82/4851 \approx 0.0169$
1986	4933	$85/4933 \approx 0.0172$
1987	5018	$87/5018 \approx 0.0173$
1988	5105	$85/5105 \approx 0.0167$
1989	5190	

Fuente: Oficina de Censos de los Estados Unidos (septiembre de 1999): www.census.gov/ipc/www/worldpop.html.

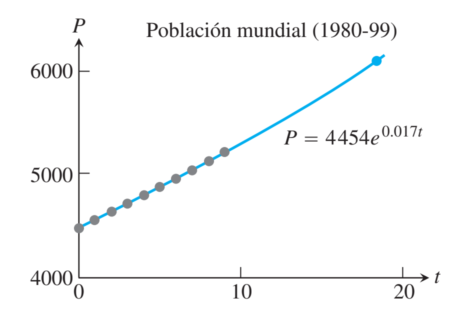


FIGURA 9.23 Observe que el valor de la solución $P = 4454e^{0.017t}$ es 6152.16 cuando $t = 19$, cifra que es ligeramente superior a la población real en 1999.

La solución a este problema de valor inicial proporciona la función de población $P = 4454e^{0.017t}$. En el año 1999 (con $t = 19$), la solución predice que la población mundial a mitad de año será de 6152 millones (figura 9.23), cifra superior a la de la población real, que es de 6001 millones, según la Oficina de Censos de los Estados Unidos (tabla 9.5). Examinemos información más reciente para ver si existe un cambio en la tasa de crecimiento).

La tabla 9.5 muestra la población mundial para los años 1990 a 2002. De acuerdo con los datos de la tabla, vemos que la tasa de crecimiento relativo es positiva pero disminuye

conforme la población aumenta debido a factores ambientales, económicos y otros. En promedio, la tasa de crecimiento disminuyó casi 0.0003 por año entre 1990 y 2002. Esto es, la gráfica de k en la ecuación (4) es casi una recta con pendiente negativa $-r = -0.0003$. En el ejemplo 5 de la sección 9.4 propusimos el **modelo de crecimiento logístico** más realista

$$\frac{dP}{dt} = r(M - P)P, \tag{5}$$

donde M es la población máxima, o **capacidad de sustentación**, que el medio es capaz de sustentar a la larga. Comparando la ecuación (5) con el modelo exponencial, vemos que $k = r(M - P)$ es una función linealmente decreciente de la población, en lugar de ser constante. Las curvas solución para el modelo logístico de la ecuación (5) se obtuvieron en la sección 9.4, y se muestran (nuevamente) en la figura 9.24. Observe en las gráficas que si $P < M$, la población crece hacia M; si $P > M$, la tasa de crecimiento será negativa (pues $r\ r > 0$, $M > 0$) y la población disminuye.

TABLA 9.5 Población mundial reciente

Año	Población (millones)	$\Delta P/P$
1990	5275	$84/5275 \approx 0.0159$
1991	5359	$84/5359 \approx 0.0157$
1992	5443	$81/5443 \approx 0.0149$
1993	5524	$81/5524 \approx 0.0147$
1994	5605	$80/5605 \approx 0.0143$
1995	5685	$79/5685 \approx 0.0139$
1996	5764	$80/5764 \approx 0.0139$
1997	5844	$79/5844 \approx 0.0135$
1998	5923	$78/5923 \approx 0.0132$
1999	6001	$78/6001 \approx 0.0130$
2000	6079	$73/6079 \approx 0.0120$
2001	6152	$76/6152 \approx 0.0124$
2002	6228	?
2003	?	

Fuente: Oficina de Censos de los Estados Unidos (septiembre de 2003): www.census.gov/ipc/www/worldpop.html.

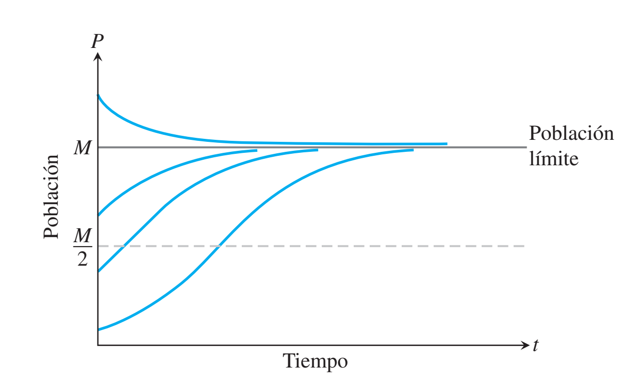


FIGURA 9.24 Curvas solución para el modelo logístico de población $dP/dt = r(M - P)P$.

EJEMPLO 2 Modelado de una población de osos

Se sabe que un parque nacional es capaz de sustentar 100 osos pardos, pero no más. Actualmente diez osos habitan en el parque. Modelamos la población con una ecuación diferencial logística con $r = 0.001$ (aunque el modelo podría no dar resultados confiables para niveles de población pequeños).

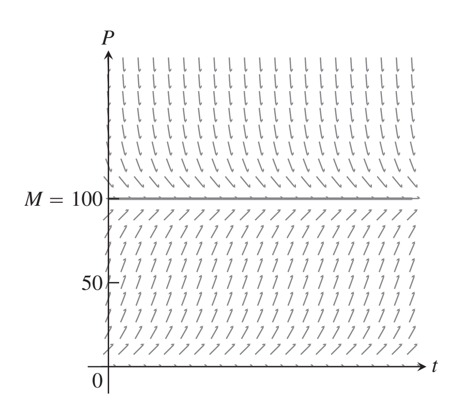


FIGURA 9.25 Un campo de pendientes para la ecuación diferencial logística $dP/dt = 0.001(100 - P)P$ (ejemplo 2).

(a) Dibuje y describa un campo de pendientes para la ecuación diferencial.

(b) Utilice el método de Euler con tamaño del paso $dt = 1$ para estimar el tamaño de la población en 20 años.

(c) Determine una solución analítica del crecimiento logístico, $P(t)$, para la población, y dibuje su gráfica.

(d) ¿En qué momento la población de osos llegará a 50 miembros?

Solución

(a) *Campo de pendientes*. La capacidad de sustentación es 100, por lo que $M = 100$. La solución que buscamos es una solución a la ecuación diferencial siguiente.

$$\frac{dP}{dt} = 0.001(100 - P)P$$

La figura 9.25 muestra un campo de pendientes para esta ecuación diferencial. Parece que tiene una asíntota horizontal en $P = 100$. Por arriba, estas curvas solución descienden hacia este nivel y por abajo ascienden a él.

(b) *Método de Euler.* Con tamaño del paso $dt = 1$, $t_0 = 0$, $P(0) = 10$ y

$$\frac{dP}{dt} = f(t, P) = 0.001(100 - P)P,$$

obtenemos la aproximación de la tabla 9.6 por medio de la fórmula de iteración

$$P_n = P_{n-1} + 0.001(100 - P_{n-1})P_{n-1}.$$

TABLA 9.6 Solución de Euler para $dP/dt = 0.001(100 - P)P$, $P(0) = 10$, tamaño del paso $dt = 1$

t	*P* (Euler)	*t*	*P* (Euler)
0	10		
1	10.9	11	24.3629
2	11.8712	12	26.2056
3	12.9174	13	28.1395
4	14.0423	14	30.1616
5	15.2493	15	32.2680
6	16.5417	16	34.4536
7	17.9222	17	36.7119
8	19.3933	18	39.0353
9	20.9565	19	41.4151
10	22.6130	20	43.8414

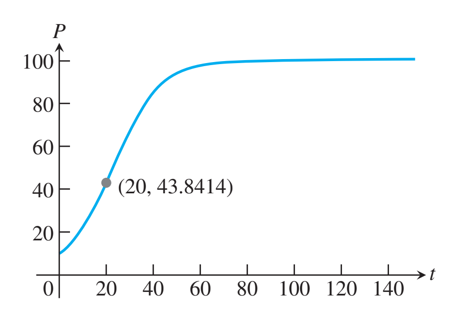


FIGURA 9.26 Aproximaciones de Euler de la solución para $dP/dt = 0.001(100 - P)P$, $P(0) = 10$, tamaño del paso $dt = 1$.

Al cabo de 20 años habrá aproximadamente 44 osos pardos. La figura 9.26 muestra una gráfica de la aproximación de Euler en el intervalo $0 \leq t \leq 150$ con el tamaño del paso $dt = 1$. Esta gráfica se parece a las curvas inferiores que bosquejamos en la figura 9.24.

(c) *Solución analítica.* Podemos suponer que $t = 0$ cuando la población de osos es 10, por lo que $P(0) = 10$. El modelo de crecimiento logístico que buscamos es la solución del problema de valor inicial siguiente.

$$\text{Ecuación diferencial:} \quad \frac{dP}{dt} = 0.001(100 - P)P$$

$$\text{Condición inicial:} \quad P(0) = 10$$

Para preparar la integración, reescribimos la ecuación diferencial en la forma

$$\frac{1}{P(100 - P)}\frac{dP}{dt} = 0.001.$$

Usando la descomposición en fracciones parciales en el lado izquierdo y multiplicando ambos lados por 100, obtenemos

$$\left(\frac{1}{P} + \frac{1}{100 - P}\right)\frac{dP}{dt} = 0.1$$

$$\ln|P| - \ln|100 - P| = 0.1t + C \qquad \text{Integrar respecto de } t.$$

$$\ln\left|\frac{P}{100 - P}\right| = 0.1t + C$$

$$\ln\left|\frac{100 - P}{P}\right| = -0.1t - C \qquad \ln\frac{a}{b} = -\ln\frac{b}{a}$$

$$\left|\frac{100 - P}{P}\right| = e^{-0.1t - C} \qquad \text{Exponenciar.}$$

$$\frac{100 - P}{P} = (\pm e^{-C})e^{-0.1t}$$

$$\frac{100}{P} - 1 = Ae^{-0.1t} \qquad \text{Hacer } A = \pm e^{-c}.$$

$$P = \frac{100}{1 + Ae^{-0.1t}}. \qquad \text{Despejar } P.$$

Ésta es la solución general de la ecuación diferencial. Cuando $t = 0$, $P = 10$ y obtenemos

$$10 = \frac{100}{1 + Ae^0}$$

$$1 + A = 10$$

$$A = 9.$$

Así, el modelo de crecimiento logístico es

$$P = \frac{100}{1 + 9e^{-0.1t}}.$$

Su gráfica (figura 9.27) está sobrepuesta en el campo de pendientes de la figura 9.25.

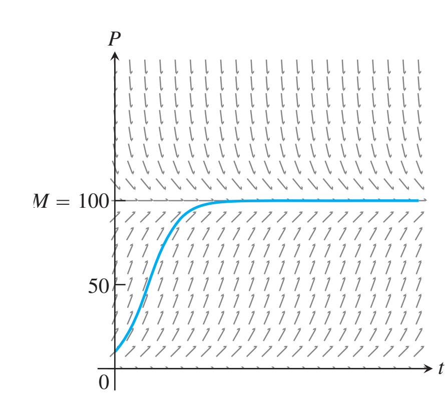


FIGURA 9.27 La gráfica de

$$P = \frac{100}{1 + 9e^{-0.1t}}$$

superpuesta sobre el campo de pendientes en la figura 9.25 (ejemplo 2).

(d) ¿En qué momento la población de osos llegará a 50 miembros? Para este modelo,

$$50 = \frac{100}{1 + 9e^{-0.1t}}$$
$$1 + 9e^{-0.1t} = 2$$
$$e^{-0.1t} = \frac{1}{9}$$
$$e^{0.1t} = 9$$
$$t = \frac{\ln 9}{0.1} \approx 22 \text{ años}.$$

La solución de la ecuación diferencial logística general

$$\frac{dP}{dt} = r(M - P)P$$

puede obtenerse como en el ejemplo 2. En el ejercicio 10 se le pedirá demostrar que la solución es

$$P = \frac{M}{1 + Ae^{-rMt}}.$$

El valor de A está determinado por una condición inicial apropiada.

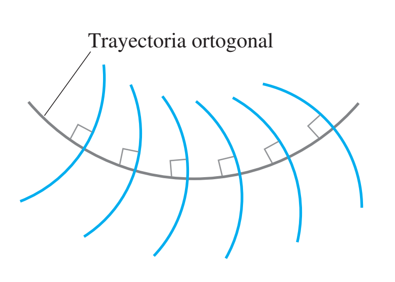


FIGURA 9.28 Una trayectoria ortogonal intersecta a la familia de curvas en ángulo recto, u ortogonalmente.

Trayectorias ortogonales

Una **trayectoria ortogonal** de una familia de curvas, es una curva que interseca en ángulo recto, u *ortogonalmente*, a cada curva de la familia (figura 9.28). Por ejemplo, cada recta que pasa por el origen es una trayectoria ortogonal de la familia de circunferencias con centro en el origen, $x^2 + y^2 = a^2$, (figura 9.29). Esos sistemas de curvas mutuamente ortogonales son de particular importancia en problemas físicos relacionados con potencial eléctrico, en donde las curvas de una familia corresponden al flujo de corriente eléctrica y las de la otra familia corresponden a curvas de potencial constante. También aparecen en problemas de hidrodinámica y de flujo de calor.



EJEMPLO 3 Determinación de trayectorias ortogonales

Determine las trayectorias ortogonales de la familia de curvas $xy = a$, donde $a \neq 0$ es una constante arbitraria.

Solución Las curvas $xy = a$ forman una familia de hipérbolas con asíntotas $y = \pm x$. Primero encontramos las pendientes de cada curva en esta familia, o sus valores dy/dx. Derivando $xy = a$ de manera implícita, se obtiene

$$x\frac{dy}{dx} + y = 0 \qquad \text{o} \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}.$$

Así, la pendiente de la recta tangente en cualquier punto (x, y) en una de las hipérbolas $xy = a$ es $y' = -y/x$. En una trayectoria ortogonal la pendiente de la recta tangente en este mismo punto debe ser el recíproco negativo, o x/y. Por lo tanto, las trayectorias ortogonales deben satisfacer la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}.$$

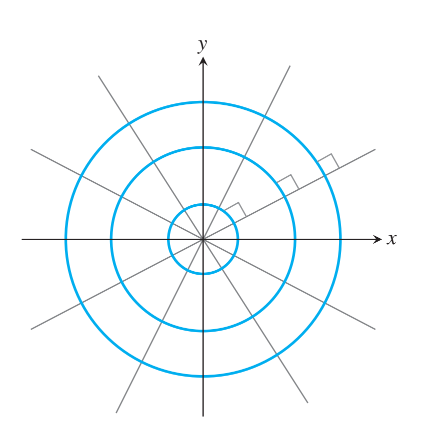


FIGURA 9.29 Cada recta que pasa por el origen es ortogonal a la familia de circunferencias con centro en el origen.

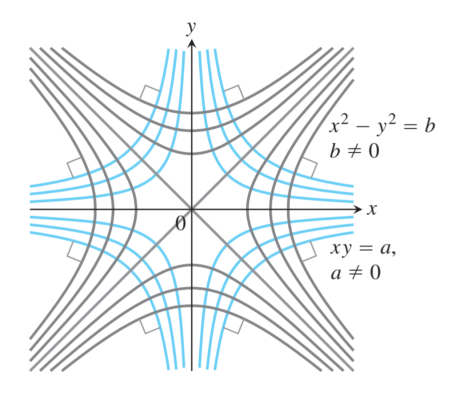


FIGURA 9.30 Cada curva es ortogonal a toda curva que pertenece a la otra familia (ejemplo 3).

Esta ecuación diferencial es separable y la resolvimos en la sección 9.1:

$$y\,dy = x\,dx \qquad \text{Variables separables.}$$

$$\int y\,dy = \int x\,dx \qquad \text{Integrar ambos lados.}$$

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$y^2 - x^2 = b, \tag{6}$$

en donde $b = 2C$ es una constante arbitraria. Las trayectorias ortogonales conforman la familia de hipérbolas dada por la ecuación (6) y bosquejada en la figura 9.30. ■

EJERCICIOS 9.5

1. **Deslizamiento de una bicicleta** Un ciclista de 66 kg en una bicicleta de 7 kg deja de pedalear y se desliza a 9 m/s al nivel del suelo. La k en la ecuación (1) es aproximadamente 3.9 kg/s.
   a. ¿Cuánto avanza el ciclista antes de detenerse por completo?
   b. ¿Cuánto tarda el ciclista en reducir su velocidad a 1 m/s?
2. **Deslizamiento de un acorazado** Suponga que un acorazado de la clase Iowa tiene una masa aproximada de 51,000 toneladas métricas (51,000,000 kg) y un valor de k en la ecuación (1) de más o menos 59,000 kg/s. Suponga que la nave pierde la potencia cuando se está moviendo a una velocidad de 9 m/s.
   a. ¿Cuánto se alejará la nave de la costa antes de que quede a la deriva en el mar?
   b. ¿Cuánto tardará la velocidad de la nave en reducirse a 1 m/s?
3. Los datos de la tabla 9.7 fueron recolectados por Valerie Sharrits mediante un detector de movimiento y una CBL™; Valerie es profesora de matemáticas de la Escuela St. Francis DeSales High School de Columbus, Ohio. La tabla muestra la distancia s (metros) que se deslizó en patines de línea en t segundos, su hija Ashley, cuando tenía 10 años de edad. Encuentre un modelo para la posición de Ashley, en la forma de la ecuación (2), basándose en la información de la tabla 9.7. Su velocidad inicial fue $v_0 = 2.75$ m/s, su masa 39.93 kg (ella pesaba 88 lb), y la distancia total que se deslizó hasta detenerse fue 4.91 m.

TABLA 9.7 Datos del patinaje de Ashley Sharritts

t (seg)	*s* (m)	*t* (seg)	*s* (m)	*t* (seg)	*s* (m)
0	0	2.24	3.05	4.48	4.77
0.16	0.31	2.40	3.22	4.64	4.82
0.32	0.57	2.56	3.38	4.80	4.84
0.48	0.80	2.72	3.52	4.96	4.86
0.64	1.05	2.88	3.67	5.12	4.88
0.80	1.28	3.04	3.82	5.28	4.89
0.96	1.50	3.20	3.96	5.44	4.90
1.12	1.72	3.36	4.08	5.60	4.90
1.28	1.93	3.52	4.18	5.76	4.91
1.44	2.09	3.68	4.31	5.92	4.90
1.60	2.30	3.84	4.41	6.08	4.91
1.76	2.53	4.00	4.52	6.24	4.90
1.92	2.73	4.16	4.63	6.40	4.91
2.08	2.89	4.32	4.69	6.56	4.91

4. **Deslizamiento hasta detenerse** La tabla 9.8 muestra la distancia s (metros) en términos del tiempo t, que se deslizó Kelly Schmitzer, en patines de línea. Determine un modelo para su posición, en la forma de la ecuación (2). Su velocidad inicial fue $v_0 = 0.80$ m/s, su masa $m = 49.90$ kg (110 lb), y la distancia total que se deslizó hasta detenerse fue 1.32 m.
5. **Población de carpas** Un tanque para peces con capacidad para 2000 galones puede sustentar no más de 150 carpas. Se introducen 6 carpas al tanque. Suponga que la tasa de crecimiento de la población es
$$\frac{dP}{dt} = 0.0015(150 - P)P,$$
en donde el tiempo t está en semanas
   a. Determine una fórmula para la población de carpas en términos de t.
   b. ¿Cuánto tiempo pasará para que la población de carpas sea de 100? ¿Cuánto tiempo transcurrirá para que la población llegue a 125 carpas?
6. **Población de gorilas** Cierta reserva para vida salvaje puede sustentar no más de 250 gorilas de tierras bajas. Se sabe que en la reserva había 28 gorilas en 1970. Suponga que la tasa de crecimiento de la población es
$$\frac{dP}{dt} = 0.0004(250 - P)P,$$
en donde el tiempo t está en años.

TABLA 9.8 Datos del patinaje de Kelly Schmitzer

t (seg)	s (m)	t (seg)	s (m)	t (seg)	s (m)
0	0	1.5	0.89	3.1	1.30
0.1	0.07	1.7	0.97	3.3	1.31
0.3	0.22	1.9	1.05	3.5	1.32
0.5	0.36	2.1	1.11	3.7	1.32
0.7	0.49	2.3	1.17	3.9	1.32
0.9	0.60	2.5	1.22	4.1	1.32
1.1	0.71	2.7	1.25	4.3	1.32
1.3	0.81	2.9	1.28	4.5	1.32

a. Determine una fórmula para la población de gorilas en términos de t.

b. ¿Cuánto tiempo tardará la población de gorilas en llegar a la capacidad de sustentación de la reserva?

7. Cría de atún del Pacífico La cría de atún del Pacífico se ha modelado por medio de la ecuación logística

$$\frac{dy}{dt} = r(M - y)y$$

donde $y(t)$ es el peso de la población total de atún en kilogramos en el instante t (medido en años), se estima que la capacidad de sustentación es $M = 8 \times 10^7$ kg, y $r = 0.08875 \times 10^{-7}$ por año.

a. Si $y(0) = 1.6 \times 10^7$ kg, ¿cuál es el peso total de la población de atún al cabo de 1 año?

b. ¿En qué momento el peso total del criadero de atún llegará a 4×10^7 kg?

8. Modelo logístico modificado Suponga que la ecuación diferencial logística del ejemplo 2 se modifica a

$$\frac{dP}{dt} = 0.001(100 - P)P - c$$

para alguna constante c.

a. Explique el significado de la constate c. ¿Qué valores de c podrían ser realistas para la población de osos pardos?

T **b.** Dibuje un campo de direcciones para la ecuación diferencial cuando $c = 1$. ¿Cuáles son las soluciones de equilibrio (sección 9.4)?

c. Haga un bosquejo de varias curvas solución en el campo de direcciones de la parte (a). Describa lo que le sucede a la población de osos pardos para diferentes poblaciones iniciales.

9. Soluciones exactas Determine las soluciones exactas de los siguientes problemas de valor inicial.

a. $y' = 1 + y, \quad y(0) = 1$

b. $y' = 0.5(400 - y)y, \quad y(0) = 2$

10. Ecuación diferencial logística Demuestre que la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = r(M - P)P$$

es

$$P = \frac{M}{1 + Ae^{-rMt}},$$

donde A es una constante arbitraria.

11. Solución catastrófica Sean k y P_0 constantes positivas.

a. Resuelva el problema de valor inicial

$$\frac{dP}{dt} = kP^2, \quad P(0) = P_0$$

T **b.** Demuestre que la gráfica de la solución del inciso (a) tiene una asíntota vertical en un valor positivo de t. ¿Cuál es ese valor de t?

12. Extinción de una población Considere el modelo poblacional

$$\frac{dP}{dt} = r(M - P)(P - m),$$

donde $r > 0$, M es la población máxima sustentable, y m es la población mínima por debajo de la cual las especies se extinguen.

a. Sean $m = 100$, $M = 1200$, y suponga que $m < P < M$. Demuestre que la ecuación diferencial puede reescribirse en la forma

$$\left[\frac{1}{1200 - P} + \frac{1}{P - 100}\right]\frac{dP}{dt} = 1100r$$

y resuelva esta ecuación separable.

b. Determine la solución al inciso (a) que satisface $P(0) = 300$.

c. Resuelva la ecuación diferencial con la restricción $m < P < M$.

Trayectorias ortogonales

En los ejercicios 13 a 18, determine las trayectorias ortogonales de la familia de curvas. Haga un bosquejo de varios miembros de cada familia.

13. $y = mx$

14. $y = cx^2$

15. $kx^2 + y^2 = 1$

16. $2x^2 + y^2 = c^2$

17. $y = ce^{-x}$

18. $y = e^{kx}$

19. Demuestre que las curvas $2x^2 + 3y^2 = 5$ y $y^2 = x^3$ son ortogonales.

20. Determine la familia de soluciones de la ecuación diferencial dada y la familia de trayectorias ortogonales. Haga un bosquejo de ambas familias.

a. $x\,dx + y\,dy = 0$ **b.** $x\,dy - 2y\,dx = 0$

21. Suponga que a y b son números positivos. Haga un bosquejo de las parábolas

$$y^2 = 4a^2 - 4ax \quad \text{y} \quad y^2 = 4b^2 + 4bx$$

en el mismo diagrama. Demuestre que se intersecan en $\left(a - b, \pm 2\sqrt{ab}\right)$, y que cada "parábola a" es ortogonal a toda "parábola b".

Capítulo 9 Preguntas de repaso

1. ¿Qué es una ecuación diferencial de primer orden? ¿Cuándo una función es una solución de tal ecuación?
2. ¿Cómo se resuelven las ecuaciones diferenciales de primer orden con variables separables?
3. ¿Cuál es la ley de cambio exponencial? ¿Cómo puede deducirse a partir de un problema de valor inicial? ¿Cuáles son algunas de las aplicaciones de la ley?
4. ¿Qué es el campo de pendientes de una ecuación diferencial $y' = f(x, y)$? ¿Qué se puede aprender de tales campos?
5. ¿Cómo se resuelven las ecuaciones diferenciales de primer orden?
6. Describa el método de Euler para resolver numéricamente el problema de valor inicial $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$. Proporcione un ejemplo. Comente la precisión del método. ¿Por qué podría necesitar resolver de manera numérica un problema de valor inicial?
7. Describa el método de Euler mejorado para resolver numéricamente el problema de valor inicial $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$ ¿Cómo se compara con el método de Euler?
8. ¿Qué es una ecuación diferencial autónoma? ¿Qué son los valores de equilibrio? ¿En qué difieren de los puntos críticos? ¿Qué es un valor de equilibrio estable? ¿Qué es un valor de equilibrio inestable?
9. ¿Cómo se construye la línea de fase para una ecuación diferencial autónoma? ¿De qué manera nos ayuda la línea de fase para producir una gráfica que muestre cualitativamente una solución de la ecuación diferencial?
10. ¿Por qué el modelo exponencial no es realista para predecir crecimiento poblacional a largo plazo? ¿Cómo corrige el modelo logístico la deficiencia del modelo exponencial para el crecimiento poblacional? ¿Qué es la ecuación diferencial logística? ¿Cuál es la forma de su solución? Describa la gráfica de la solución logística.

Capítulo 9 Ejercicios de práctica

En los ejercicios 1 a 20 resuelva la ecuación diferencial.

1. $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{y}\cos^2\sqrt{y}$
2. $y' = \dfrac{3y(x+1)^2}{y-1}$
3. $yy' = \sec y^2 \sec^2 x$
4. $y\cos^2 x\, dy + \operatorname{sen} x\, dx = 0$
5. $y' = xe^y\sqrt{x-2}$
6. $y' = xye^{x^2}$
7. $\sec x\, dy + x\cos^2 y\, dx = 0$
8. $2x^2\, dx - 3\sqrt{y}\csc x\, dy = 0$
9. $y' = \dfrac{e^y}{xy}$
10. $y' = xe^{x-y}\csc y$
11. $x(x-1)\, dy - y\, dx = 0$
12. $y' = (y^2 - 1)x^{-1}$
13. $2y' - y = xe^{x/2}$
14. $\dfrac{y'}{2} + y = e^{-x}\operatorname{sen} x$
15. $xy' + 2y = 1 - x^{-1}$
16. $xy' - y = 2x\ln x$
17. $(1 + e^x)\, dy + (ye^x + e^{-x})\, dx = 0$
18. $e^{-x}\, dy + (e^{-x}y - 4x)\, dx = 0$
19. $(x + 3y^2)\, dy + y\, dx = 0$ (*Sugerencia:* $d(xy) = y\, dx + x\, dy$)
20. $x\, dy + (3y - x^{-2}\cos x)\, dx = 0, \quad x > 0$

Problemas de valor inicial

En los ejercicios 21 a 30 resuelva el problema de valor inicial.

21. $\dfrac{dy}{dx} = e^{-x-y-2}, \quad y(0) = -2$
22. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y\ln y}{1+x^2}, \quad y(0) = e^2$
23. $(x+1)\dfrac{dy}{dx} + 2y = x, \quad x > -1, \quad y(0) = 1$
24. $x\dfrac{dy}{dx} + 2y = x^2 + 1, \quad x > 0, \quad y(1) = 1$
25. $\dfrac{dy}{dx} + 3x^2 y = x^2, \quad y(0) = -1$
26. $x\, dy + (y - \cos x)\, dx = 0, \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$
27. $x\, dy - \left(y + \sqrt{y}\right) dx = 0, \quad y(1) = 1$
28. $y^{-2}\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{e^x}{e^{2x}+1}, \quad y(0) = 1$
29. $xy' + (x-2)y = 3x^3e^{-x}, \quad y(1) = 0$
30. $y\, dx + (3x - xy + 2)\, dy = 0, \quad y(2) = -1, \quad y < 0$

Método de Euler

En los ejercicios 31 y 32, utilice el método que se indica para resolver el problema de valor inicial, en el intervalo dado, iniciando en x_0 con $dx = 0.1$.

T 31. **Euler:** $y' = y + \cos x, \quad y(0) = 0; \quad 0 \le x \le 2; \quad x_0 = 0$

T 32. **Euler mejorado:** $y' = (2 - y)(2x + 3), \quad y(-3) = 1; \quad -3 \le x \le -1; \quad x_0 = -3$

En los ejercicios 33 y 34, utilice el método que se indica con $dx = 0.05$ para estimar $y(c)$, donde y es la solución al problema de valor inicial.

T 33. **Euler mejorado:**

$$c = 3; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x - 2y}{x + 1}, \quad y(0) = 1$$

T **34. Euler:**

$$c = 4; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - 2y + 1}{x}, \quad y(1) = 1$$

En los ejercicios 35 y 36, utilice el método que se indica para resolver de manera gráfica el problema con condición inicial, iniciando en $x_0 = 0$ con

a. $dx = 0.1$. **b.** $dx = -0.1$.

T **35. Euler:**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^{x+y+2}}, \quad y(0) = -2$$

T **36. Euler mejorado:**

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2 + y}{e^y + x}, \quad y(0) = 0$$

Campos de pendientes

En los ejercicios 37 a 40, haga un bosquejo del campo de pendientes de la ecuación. Luego agregue a su bosquejo la curva solución que pase por el punto $P(1, -1)$. Utilice el método de Euler con $x_0 = 1$ y $dx = 0.2$ para estimar $y(2)$. Redondee su respuesta a cuatro decimales. Determine por comparación el valor exacto de $y(2)$.

37. $y' = x$ **38.** $y' = 1/x$

39. $y' = xy$ **40.** $y' = 1/y$

Ecuaciones diferenciales autónomas y líneas de fase

En los ejercicios 41 y 42,

a. identifique los valores de equilibrio. ¿Cuáles son estables y cuáles son inestables?

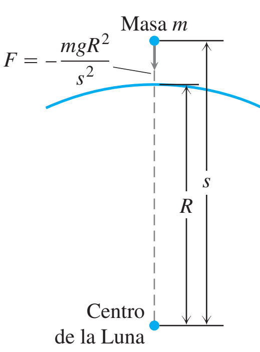
b. construya una línea de fase. Identifique los signos de y' y y''.

c. haga un bosquejo de una selección representativa de curvas solución.

41. $\frac{dy}{dx} = y^2 - 1$ **42.** $\frac{dy}{dx} = y - y^2$

Aplicaciones

43. Velocidad de escape La atracción gravitacional F ejercida por una Luna sin atmósfera sobre un cuerpo de masa m a una distancia s del centro de la Luna, está dada por la ecuación $F = -mg\,R^2 s^{-2}$, donde g es la aceleración debida a la gravedad en la superficie de la Luna y R es su radio (vea la figura siguiente). La fuerza F es negativa, ya que actúa en la dirección que disminuye s.



a. Si el cuerpo se proyecta verticalmente hacia arriba desde la superficie de la Luna con una velocidad inicial v_0 en el instante $t = 0$, utilice la segunda ley de Newton, $F = ma$, para demostrar que la velocidad del cuerpo en la posición s está dada mediante la ecuación

$$v^2 = \frac{2gR^2}{s} + v_0{}^2 - 2gR.$$

Así, la velocidad permanece positiva mientras $v_0 \geq \sqrt{2gR}$. La velocidad $v_0 = \sqrt{2gR}$ es la **velocidad de escape** de la Luna. Un cuerpo lanzado hacia arriba con esta velocidad o una mayor escapará de la atracción gravitacional de la Luna.

b. Demuestre que si $v_0 = \sqrt{2gR}$, entonces

$$s = R\left(1 + \frac{3v_0}{2R}t\right)^{2/3}.$$

44. Deslizamiento hasta detenerse La tabla 9.9 muestra la distancia s (metros) que se deslizó en patines de línea en t segundos Johnathon Krueger. Determine un modelo para su posición en la forma de la ecuación (2) de la sección 9.5. Su velocidad inicial era $v_0 = 0.86$ m/s, su masa $m = 30.84$ kg (él pesa 68 lb), y la distancia total que se deslizó fue 0.97 m.

TABLA 9.9 Datos del patinaje de Johnathon Krueger

t (seg)	*s* (m)	*t* (seg)	*s* (m)	*t* (seg)	*s* (m)
0	0	0.93	0.61	1.86	0.93
0.13	0.08	1.06	0.68	2.00	0.94
0.27	0.19	1.20	0.74	2.13	0.95
0.40	0.28	1.33	0.79	2.26	0.96
0.53	0.36	1.46	0.83	2.39	0.96
0.67	0.45	1.60	0.87	2.53	0.97
0.80	0.53	1.73	0.90	2.66	0.97

Capítulo 9 Ejercicios adicionales y avanzados

Teoría y aplicaciones

1. Transporte a través de la membrana de una célula Bajo ciertas condiciones, el resultado del movimiento de una sustancia disuelta que atraviesa la membrana de una célula se describe mediante la ecuación.

$$\frac{dy}{dt} = k\frac{A}{V}(c - y).$$

En esta ecuación, y es la concentración de la sustancia dentro de la célula, dy/dt es la razón a la que cambia y respecto al tiempo. Las letras k, A, V y c representan constantes, k es el *coeficiente de per-*

meabilidad (una propiedad de la membrana), A el área de la superficie de la membrana, V el volumen de la célula, y c la concentración de la sustancia fuera de la célula. La ecuación dice que la razón a la que cambia la concentración dentro de la célula es proporcional a la diferencia entre la concentración en ella y la concentración en el exterior.

a. Resuelva la ecuación para $y(t)$, usando y_0 para denotar $y(0)$.

b. Determine la concentración de estado estacionario, $\lim_{t\to\infty} y(t)$. (Basado en *Some Mathematical Models in Biology*, editado por R. M. Thrall, J. A. Mortimer, K. R. Rebman y R. F. Baum, ed. rev., diciembre de 1967, PB-202 364, págs. 101-103; distribuido por N.T.I.S., Departamento de Comercio de Estados Unidos).

2. Flujo de mezcla de oxígeno El oxígeno fluye a través de un tubo hasta un matraz de un litro con aire, y la mezcla de oxígeno y aire (que se considera perfectamente mezclada) escapa hacia otro tubo. Suponiendo que el aire contiene 21% de oxígeno, ¿qué porcentaje de oxígeno contendrá el matraz después de que 5 litros hayan pasado a través del tubo de entrada?

3. Bióxido de carbono en un salón de clase Si una persona promedio respira 20 veces por minuto, exhalando cada vez 100 pulgadas^3 de aire que contiene 4% de bióxido de carbono, determine el porcentaje de bióxido de carbono en el aire que hay en una habitación cerrada de 10,000 pies^3, 1 hora después de que un grupo de 30 estudiantes entra en ella. Suponga que al principio el aire está fresco, que los ventiladores dejan entrar 1000 pies^3 de aire puro por minuto, y que el aire puro contiene 0.04% de bióxido de carbono.

4. Altura de un cohete Si una fuerza externa F actúa sobre un sistema cuya masa varía con el tiempo, la ley de movimiento de Newton es

$$\frac{d(mv)}{dt} = F + (v + u)\frac{dm}{dt}.$$

En esta ecuación, m es la masa del sistema en el instante t, v su velocidad y $v + u$ es la velocidad de la masa que está entrando (o saliendo) del sistema a una velocidad de dm/dt. Suponga que un cohete de masa inicial m_0 parte del reposo, pero se conduce hacia arriba por medio de la combustión de parte de su masa, a una razón constante de $dm/dt = -b$ unidades por segundo y a una velocidad relativa del cohete de $u = -c$. La única fuerza externa que actúa sobre el cohete es $F = -mg$, debida a la gravedad. Bajo estas suposiciones, demuestre que la altura del cohete por arriba del suelo al cabo de t segundos (t pequeño comparado con m_0/b) es

$$y = c\left[t + \frac{m_0 - bt}{b}\ln\frac{m_0 - bt}{m_0}\right] - \frac{1}{2}gt^2.$$

5. a. Suponga que $P(x)$ y $Q(x)$ son continuas en el intervalo $[a, b]$. Utilice la primera parte del teorema fundamental del cálculo, para demostrar que cualquier función y satisface la ecuación

$$v(x)y = \int v(x)Q(x)\,dx + C$$

para $v(x) = e^{\int P(x)\,dx}$ es una solución de la ecuación lineal de primer orden

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x).$$

b. Si $C = y_0 v(x_0) - \int_{x_0}^{x} v(t)Q(t)\,dt$, demuestre que cualquier solución y en el inciso (a) satisface la condición inicial $y(x_0) = y_0$.

6. (*Continuación del ejercicio 5*). Suponga las hipótesis del ejercicio 5 y que $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son soluciones de la ecuación lineal de primer orden que satisfacen la condición inicial $y(x_0) = y_0$.

a. Verifique que $y(x) = y_1(x) - y_2(x)$ satisface el problema de valor inicial

$$y' + P(x)y = 0, \quad y(x_0) = 0.$$

b. Para el factor integrante $v(x) = e^{\int P(x)\,dx}$, demuestre que

$$\frac{d}{dx}(v(x)[y_1(x) - y_2(x)]) = 0.$$

Concluya que $v(x)[y_1(x) - y_2(x)] \equiv$ consonante.

c. Con base en la parte (a), tenemos $y_1(x_0) - y_2(x_0) = 0$. Como $v(x) > 0$ para $a < x < b$, utilice el inciso (b) para establecer que $y_1(x) - y_2(x) \equiv 0$ en el intervalo (a, b). Por lo tanto, $y_1(x) = y_2(x)$ para $a < x < b$.

Capítulo 9 Proyectos de aplicación tecnológica

Módulo Mathematica/Maple

Dosis de medicamentos: ¿Son efectivas? ¿Son seguras?

Formule y resuelva un modelo de valor inicial para la absorción de medicamentos en el torrente sanguíneo.

Módulo Mathematica/Maple

Ecuaciones diferenciales de primer orden y campos de pendientes

Trace los campos de pendientes y las curvas solución para varias condiciones iniciales de ecuaciones diferenciales de primer orden seleccionadas.

RESPUESTAS

CAPÍTULO 1

Sección 1.1, páginas 7-8

1. $0.\bar{1}, 0.\bar{2}, 0.\bar{3}, 0.\bar{8}, 0.\bar{9}$ o 1

3. **(a)** No es necesariamente cierta **(b)** Cierta **(c)** Cierta **(d)** Cierta **(e)** Cierta **(f)** Cierta **(g)** Cierta **(h)** Cierta

5. $x < -2$

7. $x \leq \frac{5}{4}$

9. $x \leq -\frac{1}{3}$

11. $x < -\frac{6}{7}$

13. ± 3 **15.** $-\frac{1}{2}, -\frac{9}{2}$ **17.** $\frac{7}{6}, \frac{25}{6}$

19. $-2 < x < 2$

21. $-2 \leq t \leq 4$

23. $1 < y < \frac{11}{3}$

25. $0 \leq z \leq 10$

27. $\frac{2}{7} < x < \frac{2}{5}$ o $\frac{10}{35} < x < \frac{14}{35}$

29. $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

31. $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$

33. $(-\infty, -3] \cup [1, \infty)$

35. $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ **37.** $(-3, -2) \cup (2, 3)$ **39.** $(-1, 3)$

41. $(0, 1)$ **43.** $a \geq 0$; cualquier número real negativo

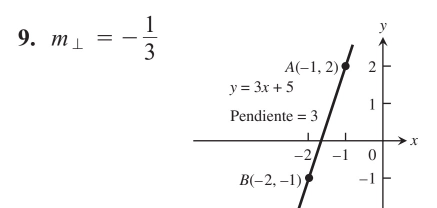
47. $-\frac{1}{2} < x \leq 3$

Sección 1.2, páginas 16-19

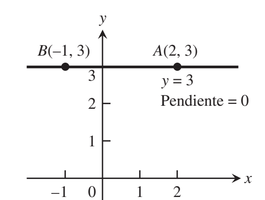
1. $2, -4; 2\sqrt{5}$ **3.** $-4.9, 0; 4.9$ **5.** Círculo unitario

7. El círculo con centro en el origen y puntos menores que un radio de $\sqrt{3}$ y su interior

9. $m_\perp = -\frac{1}{3}$



11. $m_\perp$ indefinida.



13. **(a)** $x = -1$ **(b)** $y = 4/3$

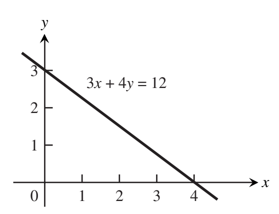
15. **(a)** $x = 0$ **(b)** $y = -\sqrt{2}$

17. $y = -x$ **19.** $y = -\frac{x}{5} + \frac{23}{5}$ **21.** $y = -\frac{5}{4}x + 6$

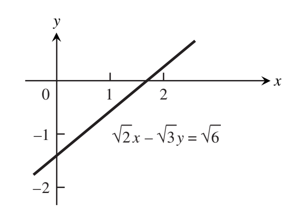
23. $y = -9$ **25.** $y = 4x + 4$ **27.** $y = -\frac{2}{5}x + 1$

29. $y = -\frac{x}{2} + 12$

31. Intersección $x = 4$; intersección $y = 3$



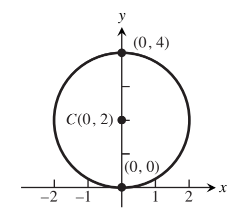
33. Intersección $x = \sqrt{3}$, intersección $y = -\sqrt{2}$



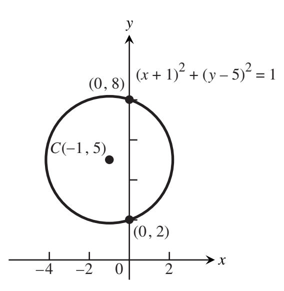
35. Sí. Las rectas son perpendiculares, porque sus pendientes $-A/B$ y B/A son recíprocas negativas una de la otra.

37. $(3, -3)$ **39.** $(-2, -9)$

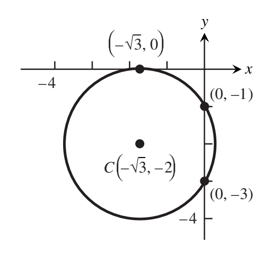
41. $x^2 + (y - 2)^2 = 4$



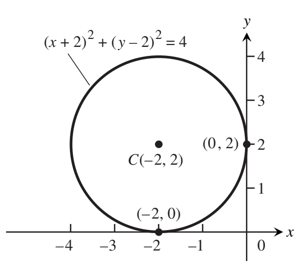
43. $(x + 1)^2 + (y - 5)^2 = 10$



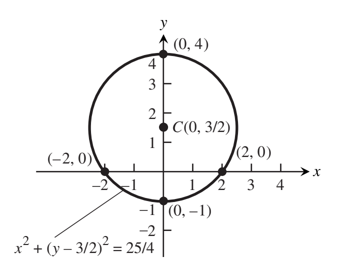
45. $(x + \sqrt{3})^2 + (y + 2)^2 = 4$



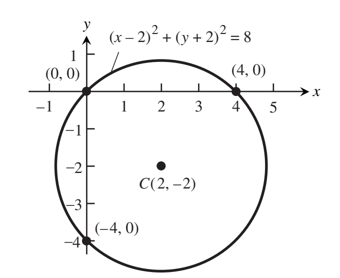
47. $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$



49. $x^2 + (y - 3/2)^2 = 25/4$

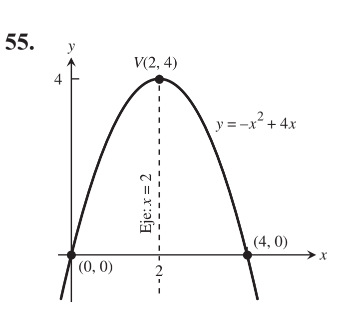


51. $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 8$

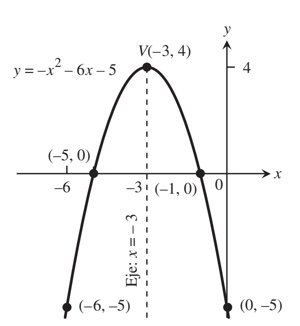


53.

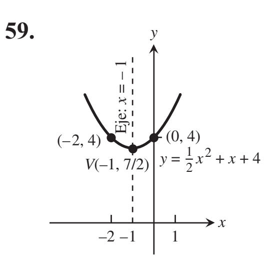
55.



57.



59.



61. Puntos exteriores de un círculo con centro en el origen y radio $\sqrt{7}$.

63. Un círculo de radio 2 con centro en (1, 0), junto con su interior.

65. La región entre los círculos $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$ (puntos con distancia desde el origen está entre 1 y 2).

67. Los puntos interiores de un círculo con centro en $(0, -3)$ y radio 3, que está debajo de la recta $y = -3$.

69. $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 < 6$ **71.** $x^2 + y^2 \leq 2, \quad x \geq 1$

73. $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right), \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

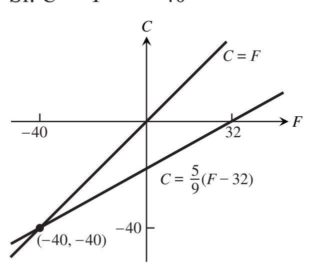
75. $\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right), \quad \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)$

77. $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{3}\right), \quad \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{3}\right)$

79. $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

81. **(a)** ≈ -2.5 grados/pulgada **(b)** ≈ -16.1 grados/pulgada **(c)** ≈ -8.3 grados/pulgada **83.** 5.97 atm.

85. Sí: $C = F = -40°$



91.

93. $k = -8, \quad k = 1/2$

Sección 1.3, páginas 26-28

1. $D: (-\infty, \infty), \quad R: [1, \infty)$ **3.** $D: (0, \infty), \quad R: (0, \infty)$

5. $D: [-2, 2], \quad R: [0, 2]$

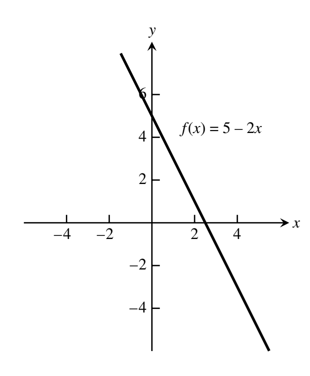
7. **(a)** No es una función de x, ya que algunos valores de x tienen dos valores de y **(b)** Es una función de x, ya que para cada x hay sólo una y posible.

9. **(a)** No **(b)** No **(c)** No **(d)** $(0, 1]$

11. $A = \dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2, \quad p = 3x$

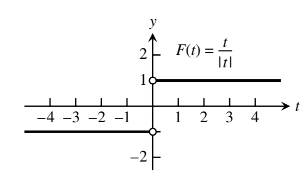
13. $x = \dfrac{d}{\sqrt{3}}, \quad A = 2d^2, \quad V = \dfrac{d^3}{3\sqrt{3}}$

15. $(-\infty, \infty)$ **17.** $(-\infty, \infty)$

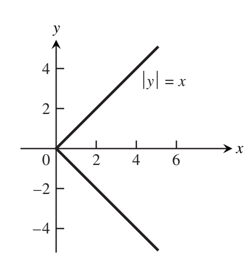


$g(x) = \sqrt{|x|}$

19. $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

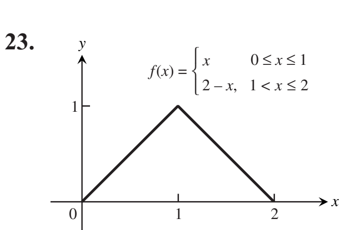


21. **(a)** Por cada valor positivo de x hay dos valores de y. **(b)** Por cada valor de $x \neq 0$, hay dos valores de y.

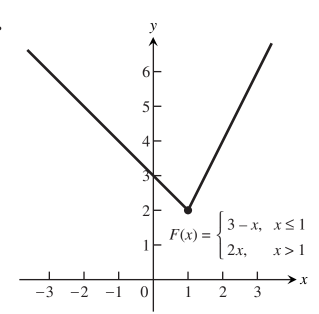


$y^2 = x^2$

23.



25.



27. **(a)** $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ -x + 2, & 1 < x \le 2 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} 2, & 0 \le x < 1 \\ 0, & 1 \le x < 2 \\ 2, & 2 \le x < 3 \\ 0, & 3 \le x \le 4 \end{cases}$

29. **(a)** $f(x) = \begin{cases} -x, & -1 \le x < 0 \\ 1, & 0 < x \le 1 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}, & 1 < x < 3 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & -2 \le x \le 0 \\ -2x + 2, & 0 < x \le 1 \\ -1, & 1 < x \le 3 \end{cases}$

31. **(a)** $(-2, 0) \cup (4, \infty)$

33. **(a)** $0 \le x < 1$ **(b)** $-1 < x \le 0$

35. Sí **37.** $V = x(14 - 2x)(22 - 2x)$

39. **(a)** Porque la circunferencia del círculo original era 8π y se quitó una pieza de longitud x.

(b) $r = \dfrac{8\pi - x}{2\pi} = 4 - \dfrac{x}{2\pi}$

(c) $h = \sqrt{16 - r^2} = \dfrac{\sqrt{16\pi x - x^2}}{2\pi}$

(d) $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{(8\pi - x)^2\sqrt{16\pi x - x^2}}{24\pi^2}$

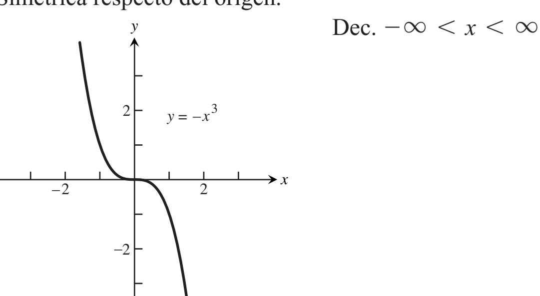
Sección 1.4, páginas 37-38

1. **(a)** lineal, algebraica, polinomial de grado 1 **(b)** de potencia, algebraica **(c)** racional, algebraica **(d)** exponencial

3. **(a)** racional, algebraica **(b)** algebraica **(c)** trigonométrica **(d)** logarítmica.

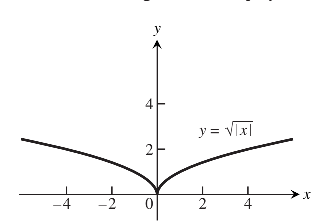
5. **(a)** h **(b)** f **(c)** g

7. Simétrica respecto del origen.



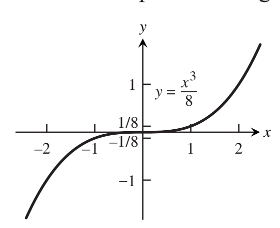
9. Simétrica respecto del origen

Inc. $-\infty < x < 0$ y $0 < x < \infty$



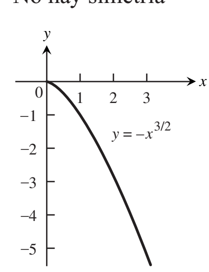
11. Simétrica respecto del eje y

Dec. $-\infty < x \le 0$;
inc. $0 \le x < \infty$



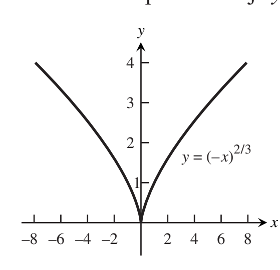
13. Simétrica respecto del origen

Inc. $-\infty < x < \infty$



15. No hay simetría

Dec. $0 \le x < \infty$



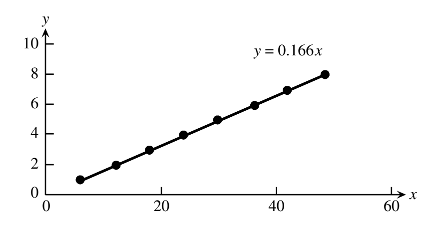
17. Simétrica respecto del eje y

Dec. $-\infty < x \le 0$;
inc. $0 \le x < \infty$

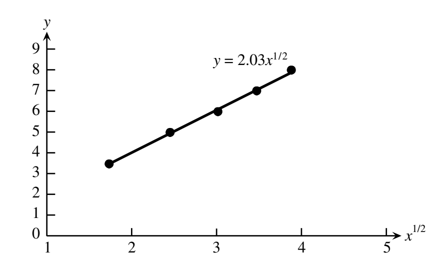
$y = (-x)^{2/3}$

19. Par **21.** Par **23.** Impar **25.** Par **27.** Ninguna
29. Ninguna

31. **(a)** La gráfica sostiene la suposición de que y es proporcional a x. La constante de proporcionalidad es estimada a partir de la pendiente de la recta, que es 0.166.

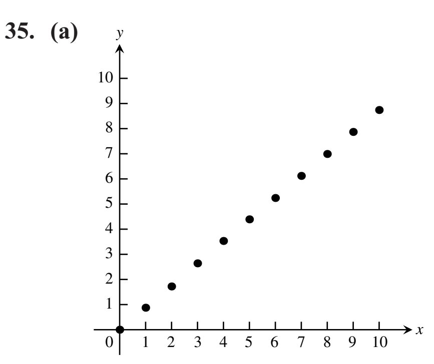


(b) La gráfica sostiene la suposición de que y es proporcional a $x^{1/2}$. La constante de proporcionalidad es estimada a partir de la pendiente de la recta, que es 2.03.



33. **(a)** $k \approx 1.1$ **(b)** $k \approx 0.059$

35. **(a)**



(b) $k \approx 0.87$

(c) Usando $y = 0.87x$ con $x = 13$, obtenemos $y = 11.31$.

Sección 1.5, páginas 45-48

1. $D_f: -\infty < x < \infty$, $D_g: x \ge 1$, $R_f: -\infty < y < \infty$, $R_g: y \ge 0$, $D_{f+g} = D_{f\cdot g} = D_g$, $R_{f+g}: y \ge 1$, $R_{f\cdot g}: y \ge 0$

3. $D_f: -\infty < x < \infty$, $D_g: -\infty < x < \infty$, $R_f: y = 2$, $R_g: y \ge 1$, $D_{f/g}: -\infty < x < \infty$, $R_{f/g}: 0 < y \le 2$, $D_{g/f}: -\infty < x < \infty$, $R_{g/f}: y \ge 1/2$

5. **(a)** 2 **(b)** 22 **(c)** $x^2 + 2$ **(d)** $x^2 + 10x + 22$ **(e)** 5 **(f)** -2 **(g)** $x + 10$ **(h)** $x^4 - 6x^2 + 6$

7. **(a)** $\frac{4}{x^2} - 5$ **(b)** $\frac{4}{x^2} - 5$ **(c)** $\left(\frac{4}{x} - 5\right)^2$ **(d)** $\left(\frac{1}{4x - 5}\right)^2$

(e) $\frac{1}{4x^2 - 5}$ **(f)** $\frac{1}{(4x - 5)^2}$

9. **(a)** $f(g(x))$ **(b)** $j(g(x))$ **(c)** $g(g(x))$ **(d)** $j(j(x))$
(e) $g(h(f(x)))$ **(f)** $h(j(f(x)))$

11.

	$g(x)$	$f(x)$	$f \circ g(x)$
(a)	$x - 7$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{x - 7}$
(b)	$x + 2$	$3x$	$3x + 6$
(c)	x^2	$\sqrt{x - 5}$	$\sqrt{x^2 - 5}$
(d)	$\frac{x}{x - 1}$	$\frac{x}{x - 1}$	x
(e)	$\frac{1}{x - 1}$	$1 + \frac{1}{x}$	x
(f)	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$	x

13. **(a)** $f(g(x)) = \sqrt{\frac{1}{x} + 1}, g(f(x)) = \frac{1}{\sqrt{x + 1}}$

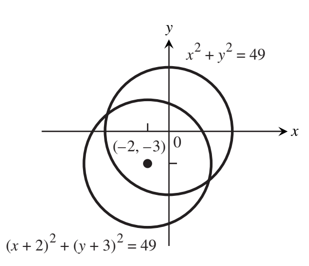
(b) $D_{f \circ g} = (0, \infty), D_{g \circ f} = (-1, \infty)$

(c) $R_{f \circ g} = (1, \infty), R_{g \circ f} = (0, \infty)$

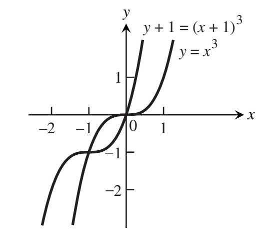
15. **(a)** $y = -(x + 7)^2$ **(b)** $y = -(x - 4)^2$

17. **(a)** Posición 4 **(b)** Posición 1 **(c)** Posición 2
(d) Posición 3

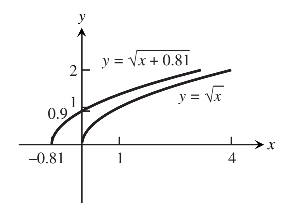
19. $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 49$



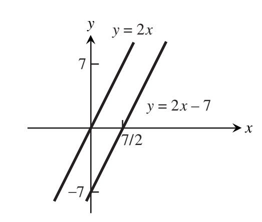
21. $y + 1 = (x + 1)^3$



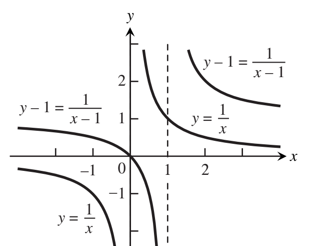
23. $y = \sqrt{x + 0.81}$



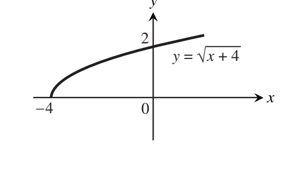
25. $y = 2x$



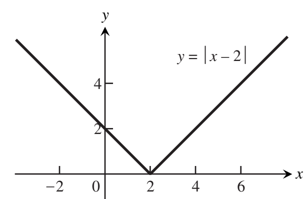
27. $y - 1 = \frac{1}{x - 1}$



29.



31.



33.

35.

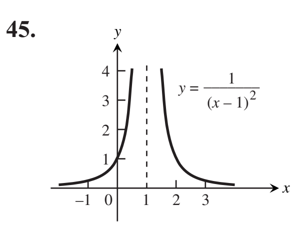
37.

39.

41.

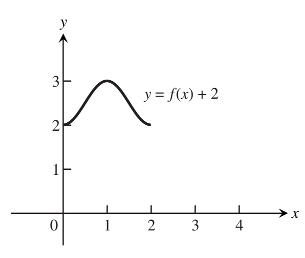
43.

45.

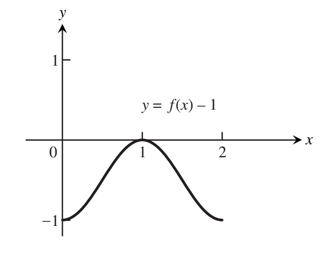


47.

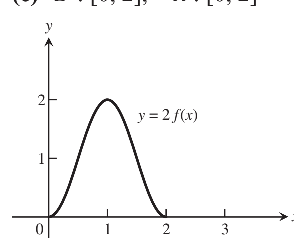
49. **(a)** $D: [0, 2], \quad R: [2, 3]$



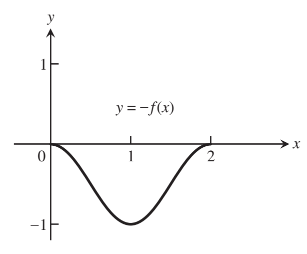
(b) $D: [0, 2], \quad R: [-1, 0]$



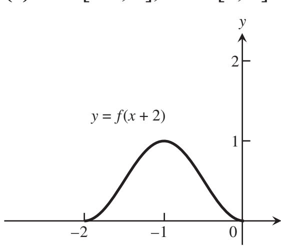
(c) $D : [0, 2], \quad R : [0, 2]$



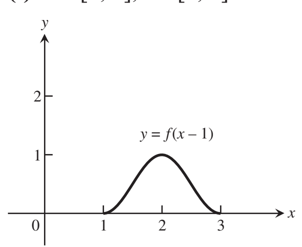
(d) $D : [0, 2], \quad R : [-1, 0]$



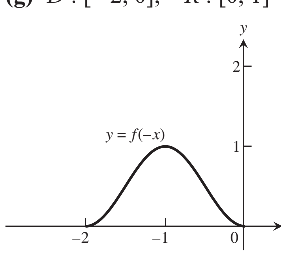
(e) $D : [-2, 0], \quad R : [0, 1]$



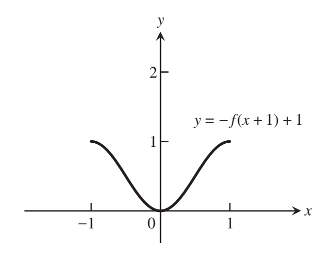
(f) $D : [1, 3], R : [0, 1]$



(g) $D : [-2, 0], \quad R : [0, 1]$



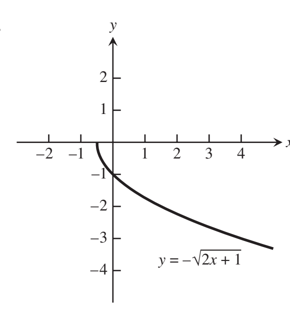
(h) $D : [-1, 1], \quad R : [0, 1]$



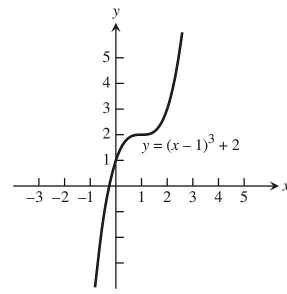
51. $y = 3x^2 - 3$ **53.** $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2}$ **55.** $y = \sqrt{4x + 1}$

57. $y = \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}$ **59.** $y = 1 - 27x^3$

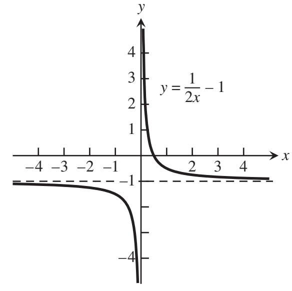
61.



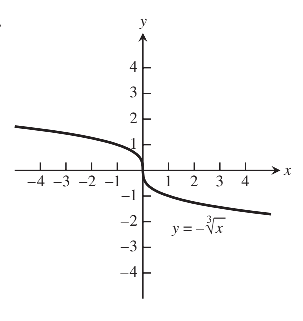
63.



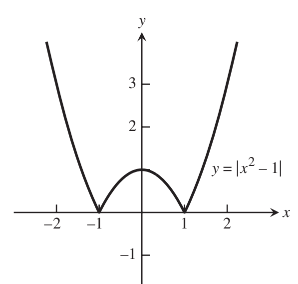
65.



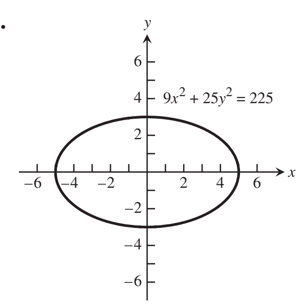
67.



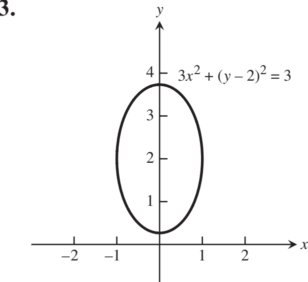
69.



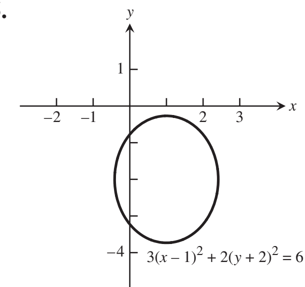
71.



73.

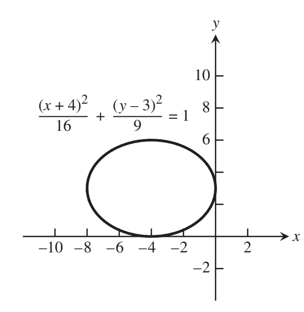


75.



77. $\frac{(x + 4)^2}{16} + \frac{(y - 3)^2}{9} = 1$ Centro: $(-4, 3)$

El eje mayor es el segmento de recta entre $(-8, 3)$ y $(0, 3)$.



79. **(a)** Impar **(b)** Impar **(c)** Impar **(d)** Par **(e)** Par **(f)** Par **(g)** Par **(h)** Par **(i)** Impar

Sección 1.6, páginas 56-58

1. **(a)** 8π m **(b)** $\frac{55\pi}{9}$ m **3.** 8.4 pulg.

5.

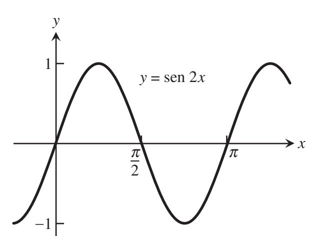
θ	$-\pi$	$-2\pi/3$	0	$\pi/2$	$3\pi/4$
$\operatorname{sen}\theta$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\cos\theta$	-1	$-\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\tan\theta$	0	$\sqrt{3}$	0	IND	-1
$\cot\theta$	IND	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	IND	0	-1
$\sec\theta$	-1	-2	1	IND	$-\sqrt{2}$
$\csc\theta$	IND	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	IND	1	$\sqrt{2}$

7. $\cos x = -4/5, \tan x = -3/4$

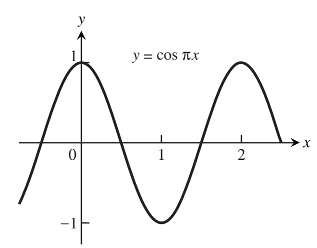
9. $\operatorname{sen} x = -\dfrac{\sqrt{8}}{3}, \tan x = -\sqrt{8}$

11. $\operatorname{sen} x = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \cos x = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

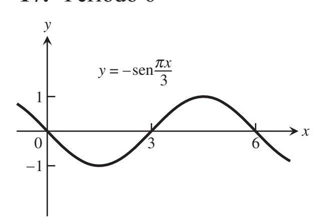
13. Periodo π



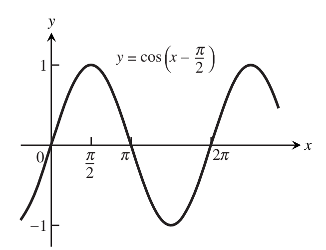
15. Periodo 2



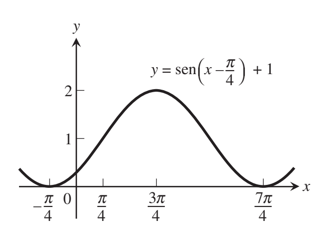
17. Periodo 6



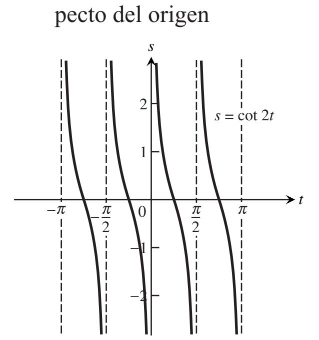
19. Periodo 2π



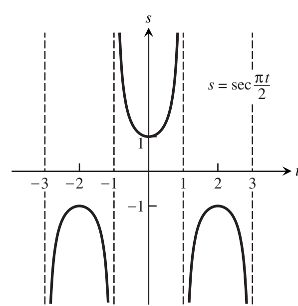
21. Periodo 2π



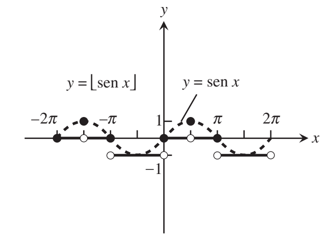
23. Periodo $\pi/2$, simétrica respecto del origen

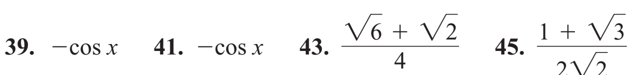


25. De Periodo 4; simétrica respecto del eje y.



29. $D: (-\infty, \infty)$, $R: y = -1, 0, 1$



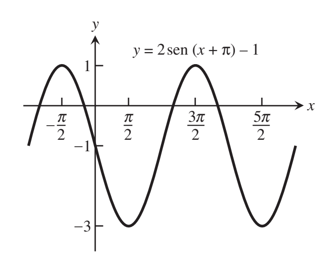


39. $-\cos x$ **41.** $-\cos x$ **43.** $\dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ **45.** $\dfrac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

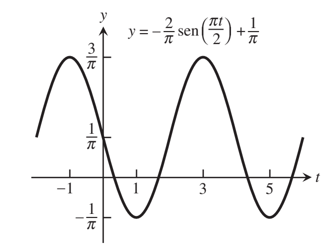
47. $\dfrac{2 + \sqrt{2}}{4}$ **49.** $\dfrac{2 - \sqrt{3}}{4}$ **55.** $c = \sqrt{7} \approx 2.646$

59. $a = 1.464$

61. $A = 2, B = 2\pi, C = -\pi, D = -1$



63. $A = -\dfrac{2}{\pi}, B = 4, C = 0, D = \dfrac{1}{\pi}$

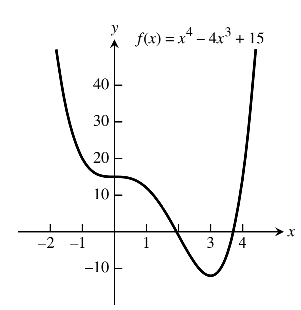


65. **(a)** 37 **(b)** 365 **(c)** 101 a la derecha **(d)** 25 hacia arriba

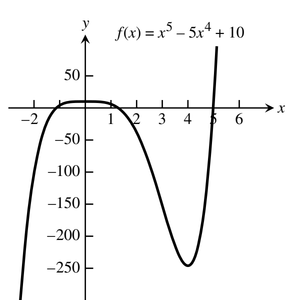
Sección 1.7, páginas 66-68

1. **d)** **3.** **d)**

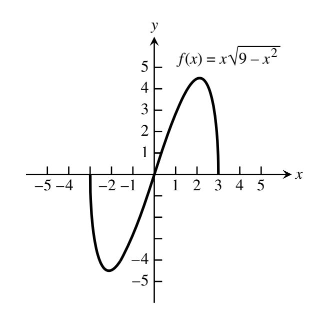
5. $[-3, 5]$ por $[-15, 40]$



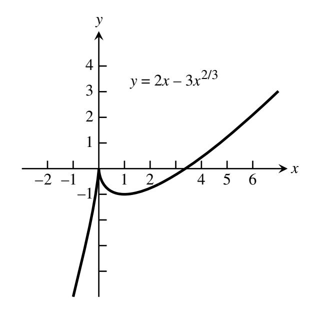
7. $[-3, 6]$ por $[-250, 50]$



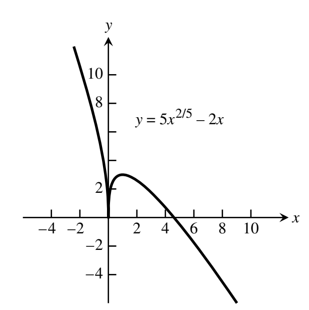
9. $[-3, 3]$ por $[-6, 6]$



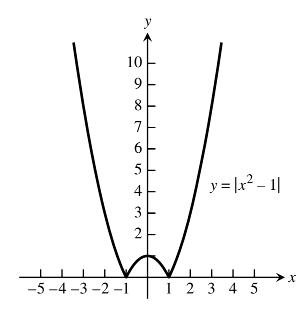
11. $[-2, 6]$ por $[-5, 4]$



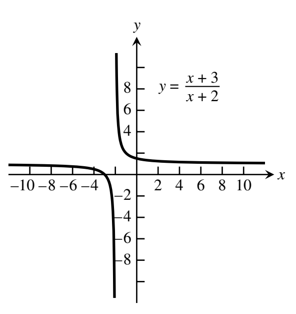
13. $[-2, 8]$ por $[-5, 10]$



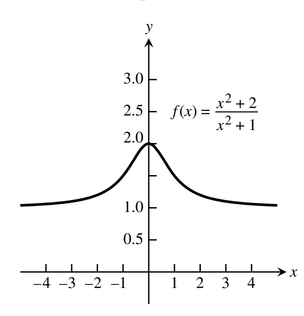
15. $[-3, 3]$ por $[0, 10]$



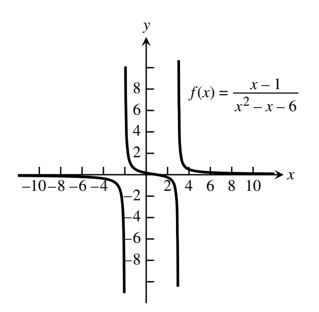
17. $[-15, 5]$ por $[-10, 10]$



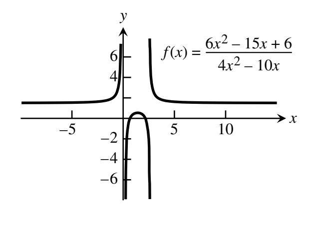
19. $[-4, 4]$ por $[0, 3]$



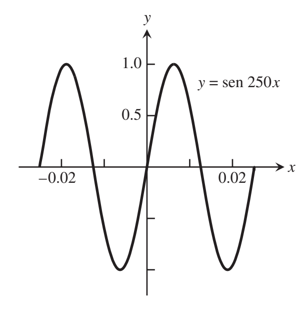
21. $[-10, 10]$ por $[-6, 6]$



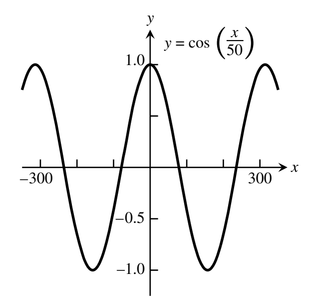
23. $[-6, 10]$ por $[-6, 6]$



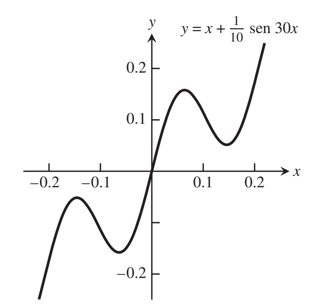
25. $\left[-\frac{\pi}{125}, \frac{\pi}{125}\right]$ por $[-1.25, 1.25]$



27. $[-100\pi, 100\pi]$ por $[-1.25, 1.25]$



29. $\left[-\frac{\pi}{15}, \frac{\pi}{15}\right]$ por $[-0.25, 0.25]$

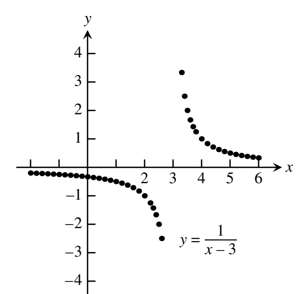


31.

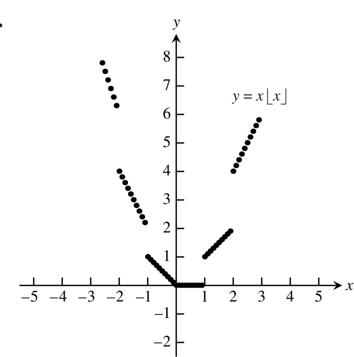
33.

35.

37.



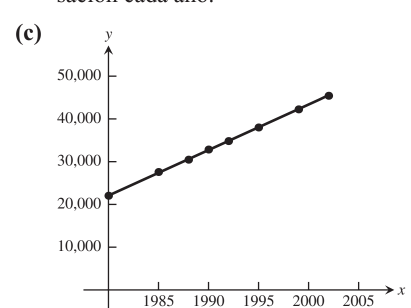
39.



41. **(a)** $y = 1059.14x - 2074972.23$

(b) $m = 1059.14$; ésta es la cantidad que aumentará la compensación cada año.

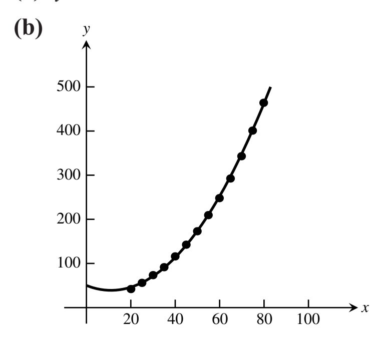
(c)



(d) $53,899.17

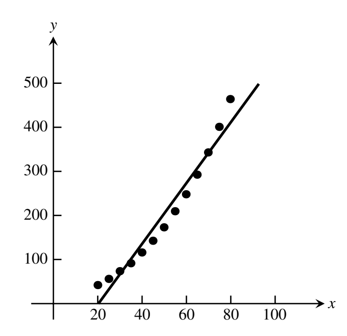
43. **(a)** $y = 0.0866x^2 - 1.9701x + 50.0594$

(b)



(c) Si la rapidez es de 72 millas/hora, la distancia aproximada para detenerse es de 367.50 pies. Si la rapidez es de 85 millas/hora, la distancia aproximada para detenerse es de 522.67 pies.

(d) $y = -140.4121 + 6.889x$



Si la rapidez es de 72 millas/hora, la distancia aproximada para detenerse es de 355.60 pies. Si la rapidez es de 85 millas/hora, la distancia aproximada para detenerse es de 445.15 pies.
La ecuación de regresión cuadrática ofrece el mejor ajuste.

Ejercicios prácticos, páginas 69-70

1. $x \geq -2$

3. $x > 6$

5. $-8, 6$ **7.** $x < -1$ o $x > 5$ **9.** $(0, 11)$

11. No, porque no tiene dos lados de la misma longitud; no, porque no tiene dos lados perpendiculares.

13. $y = 3x - 9$ **15.** $x = 0$ **17.** $y = 2$ **19.** $y = -3x + 3$

21. $y = -\frac{4}{3}x - \frac{20}{3}$ **23.** $y = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$

25. $A = \pi r^2, C = 2\pi r, A = \frac{C^2}{4\pi}$ **27.** $x = \tan\theta, y = \tan^2\theta$

29. Respecto del origen **31.** Ninguno **33.** Par **35.** Par

37. Impar **39.** Ninguno

41. **(a)** Dominio: todos los reales **(b)** Rango: $[-2, \infty]$

43. **(a)** Dominio: $[-4, 4]$ **(b)** Rango: $[0, 4]$

45. **(a)** Dominio: todos los reales **(b)** Rango: $(-3, \infty)$

47. **(a)** Dominio: todos los reales **(b)** Rango: $[-3, 1]$

49. **(a)** Dominio: $(3, \infty)$ **(b)** Rango: todos los reales

51. **(a)** Dominio: $[-4, 4]$ **(b)** Rango: $[2, 0]$

53. $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & 0 \leq x < 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

55. **(a)** 1 **(b)** $\frac{1}{\sqrt{2.5}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$ **(c)** $x, x \neq 0$

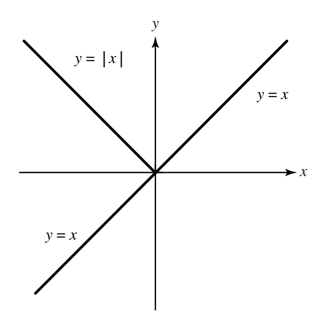
(d) $\frac{1}{\sqrt{1/\sqrt{x+2} + 2}}$

57. **(a)** $(f \circ g)(x) = -x, x \geq -2, (g \circ f)(x) = \sqrt{4 - x^2}$

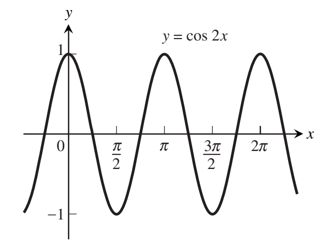
(b) Dominio $(f \circ g)$: $[-2, \infty)$, dominio $(g \circ f)$: $[-2, 2]$

(c) Rango $(f \circ g)$: $(-\infty, 2]$, rango $(g \circ f)$: $[0, 2]$

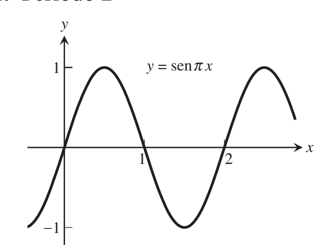
59. Reemplaza la porción para $x < 0$ con la imagen espejo de la porción para $x > 0$ para hacer una gráfica nueva, simétrica respecto del eje y.



61. No se ve afectada.
63. Añade la imagen espejo de la porción para $x > 0$ para hacer una gráfica nueva, simétrica respecto del eje y.
65. Refleja la porción para $y < 0$ a lo largo del eje x.
67. Refleja la porción para $y < 0$ a lo largo del eje x.
69. Periodo π



71. Periodo 2



73.

$y = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

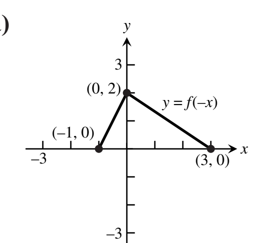
75. **(a)** $a = 1 \quad b = \sqrt{3}$ **(b)** $a = 2\sqrt{3}/3 \quad c = 4\sqrt{3}/3$

77. **(a)** $a = \dfrac{b}{\tan B}$ **(b)** $c = \dfrac{a}{\operatorname{sen} A}$

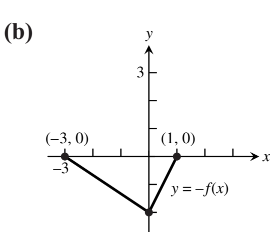
79. ≈ 16.98 m **81.** **(b)** 4π

Ejercicios adicionales y avanzados, páginas 71-72

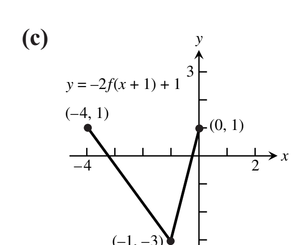
1. **(a)**



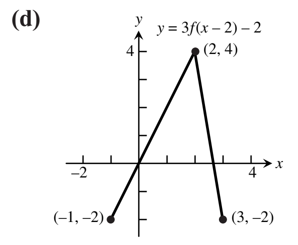
(b)



(c)



(d)



3. Sí. Por ejemplo: $f(x) = 1/x$ y $g(x) = 1/x$, o $f(x) = 2x$ y $g(x) = x/2$, o $f(x) = e^x$ y $g(x) = \ln x$.

5. Si $f(x)$ es impar, entonces $g(x) = f(x) - 2$ no es impar. Tampoco $g(x)$ es par, a menos que $f(x) = 0$ para toda x. Si f es par, entonces $g(x) = f(x) - 2$ también es par.

7.

$|x| + |y| = 1 + x$

9. $\sqrt{2}$ **11.** $3/4$ **13.** $3\sqrt{15}/16$ **27.** $-4 < m < 0$

CAPÍTULO 2

Sección 2.1, páginas 81-84

1. **(a)** No existen. Conforme x se aproxima a 1 por la derecha, $g(x)$ se aproxima a 0. A medida que x se aproxima a 1 por la izquierda, $g(x)$ se aproxima a 1. No hay un número único L para el que todos los valores de $g(x)$ estén arbitrariamente cerca conforme $x \rightarrow 1$. **(b)** 1 **(c)** 0

3. **(a)** Verdadera **(b)** Falsa **(c)** Falsa
(d) Falsa **(e)** Falsa **(f)** Verdadera

5. A medida que x se aproxima a 0 por la izquierda, $x/|x|$ se aproxima a –1. Conforme x se aproxima a 0 por la derecha, $x/|x|$ se aproxima a 1. No hay un número único L para el que todos los valores de la función estén arbitrariamente cerca conforme $x \rightarrow 0$.

7. No puede decirse nada. **9.** No; no; no.

11. **(a)** $f(x) = (x^2 - 9)/(x + 3)$

x	-3.1	-3.01	-3.001	-3.0001	-3.00001	-3.000001
$f(x)$	-6.1	-6.01	-6.001	-6.0001	-6.00001	-6.000001

x	-2.9	-2.99	-2.999	-2.9999	-2.99999	-2.999999
$f(x)$	-5.9	-5.99	-5.999	-5.9999	-5.99999	-5.999999

(c) $\lim_{x \to -3} f(x) = -6$

13. **(a)** $G(x) = (x + 6)/(x^2 + 4x - 12)$

x	-5.9	-5.99	-5.999	-5.9999	-5.99999	-5.999999
$G(x)$	$-.126582$	$-.1251564$	$-.1250156$	$-.1250015$	$-.1250001$	$-.1250000$

x	-6.1	-6.01	-6.001	-6.0001	-6.00001	-6.000001
$G(x)$	$-.123456$	$-.124843$	$-.124984$	$-.124998$	$-.124999$	$-.124999$

(c) $\lim_{x \to -6} G(x) = -1/8 = -0.125$

15. **(a)** $f(x) = (x^2 - 1)/(|x| - 1)$

x	-1.1	-1.01	-1.001	-1.0001	-1.00001	-1.000001
$f(x)$	2.1	2.01	2.001	2.0001	2.00001	2.000001

x	$-.9$	$-.99$	$-.999$	$-.9999$	$-.99999$	$-.999999$
$f(x)$	1.9	1.99	1.999	1.9999	1.99999	1.999999

(c) $\lim_{x \to -1} f(x) = 2$

17. **(a)** $g(\theta) = (\operatorname{sen} \theta)/\theta$

θ	.1	.01	.001	.0001	.00001	.000001
$g(\theta)$	.998334	.999983	.999999	.999999	.999999	.999999

θ	$-.1$	$-.01$	$-.001$	$-.0001$	$-.00001$	$-.000001$
$g(\theta)$	.998334	.999983	.999999	.999999	.999999	.999999

$\lim_{\theta \to 0} g(\theta) = 1$

19. **(a)** $f(x) = x^{1/(1-x)}$

x	.9	.99	.999	.9999	.99999	.999999
$f(x)$	.348678	.366032	.367695	.367861	.367877	.367879

x	1.1	1.01	1.001	1.0001	1.00001	1.000001
$f(x)$	.385543	.369711	.368063	.367897	.367881	.367878

$\lim_{x \to 1} f(x) \approx 0.36788$

21. 4 **23.** 0 **25.** 9 **27.** $\pi/2$ **29.** **(a)** 19 **(b)** 1

31. **(a)** $-\dfrac{4}{\pi}$ **(b)** $-\dfrac{3\sqrt{3}}{\pi}$ **33.** 1

35. Las gráficas pueden desplazarse a consecuencia de la impresión, así que sus estimaciones podrían no coincidir exactamente con las que se presentan aquí.

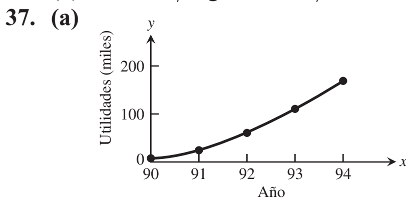
(a)

PQ_1	PQ_2	PQ_3	PQ_4
43	46	49	50

Las unidades apropiadas son m/seg.

(b) $\approx$ 50 m/seg o 180 km/h

37. **(a)**



(b) $\approx$ \$56,000/año
(c) $\approx$ \$42,000/año

39. **(a)** 0.414213, 0.449489, $(\sqrt{1 + h} - 1)/h$ **(b)** $g(x) = \sqrt{x}$

$1 + h$	1.1	1.01	1.001	1.0001	1.00001	1.000001
$\sqrt{1 + h}$	1.04880	1.004987	1.0004998	1.0000499	1.000005	1.0000005
$(\sqrt{1 + h} - 1)/h$	0.4880	0.4987	0.4998	0.499	0.5	0.5

(c) 0.5 **(d)** 0.5

Sección 2.2, páginas 88-91

1. -9 **3.** 4 **5.** -8 **7.** 5/8 **9.** 5/2 **11.** 27 **13.** 16 **15.** 3/2 **17.** 3/2 **19.** 1/10 **21.** -7 **23.** 3/2 **25.** $-1/2$ **27.** 4/3 **29.** 1/6 **31.** 4 **33.** 1/2 **35.** 3/2 **37.** **(a)** Regla del cociente **(b)** Reglas de la diferencia y la potencia **(c)** Reglas de la suma y el múltiplo constante. **39.** **(a)** -10 **(b)** -20 **(c)** -1 **(d)** 5/7 **41.** **(a)** 4 **(b)** -21 **(c)** -12 **(d)** $-7/3$ **43.** 2 **45.** 3 **47.** $1/(2\sqrt{7})$ **49.** $\sqrt{5}$ **51.** **(a)** El límite es 1. **53.** $c = 0, 1, -1$; el límite es 0 en $c = 0$ y 1 en $c = 1, -1$. **55.** 7 **57.** **(a)** 5 **(b)** 5

Sección 2.3, páginas 98-101

1. $\delta = 2$ (1, 5, 7 sobre el eje x)

3. $\delta = 1/2$ ($-7/2$, -3, $-1/2$ sobre el eje x)

5. $\delta = 1/18$ (4/9, 1/2, 4/7 sobre el eje x)

7. $\delta = 0.1$ **9.** $\delta = 7/16$ **11.** $\delta = \sqrt{5} - 2$ **13.** $\delta = 0.36$ **15.** $(3.99, 4.01)$, $\delta = 0.01$ **17.** $(-0.19, 0.21)$, $\delta = 0.19$ **19.** $(3, 15)$, $\delta = 5$ **21.** $(10/3, 5)$, $\delta = 2/3$ **23.** $(-\sqrt{4.5}, -\sqrt{3.5})$, $\delta = \sqrt{4.5} - 2 \approx 0.12$ **25.** $(\sqrt{15}, \sqrt{17})$, $\delta = \sqrt{17} - 4 \approx 0.12$

27. $\left(2 - \dfrac{0.03}{m}, 2 + \dfrac{0.03}{m}\right), \quad \delta = \dfrac{0.03}{m}$

29. $\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{c}{m}, \dfrac{c}{m} + \dfrac{1}{2}\right), \quad \delta = \dfrac{c}{m}$

31. $L = -3, \quad \delta = 0.01$ **33.** $L = 4, \quad \delta = 0.05$

35. $L = 4, \quad \delta = 0.75$

55. [3.384, 3.387]. Para asegurar la respuesta, el extremo izquierdo fue redondeado hacia arriba y el extremo derecho hacia abajo.

59. El límite no existe conforme x se aproxima a 3.

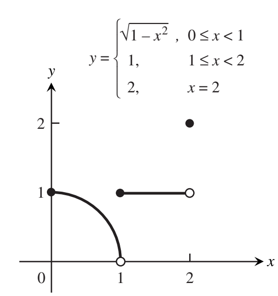
Sección 2.4, páginas 111-114

1. **(a)** Verdadera **(b)** Verdadera **(c)** Falsa **(d)** Verdadera **(e)** Verdadera Verdadera **(g)** Falsa **(h)** Falsa **(i)** Falsa **(j)** Falsa **(k)** Verdadera **(l)** Falsa

3. **(a)** 2, 1 **(b)** No, $\lim_{x\to 2^+} f(x) \neq \lim_{x\to 2^-} f(x)$ **(c)** 3, 3 **(d)** Sí, 3.

5. **(a)** No **(b)** Sí, 0 **(c)** No

7. **(a)**



(b) 1, 1 **(c)** Sí, 1

9. **(a)** $D: 0 \le x \le 2, R: 0 < y \le 1$ y $y = 2$. **(b)** $(0, 1) \cup (1, 2)$ **(c)** $x = 2$ **(d)** $x = 0$

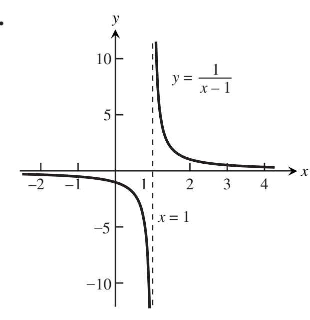
$$y = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2}, & 0 \le x < 1 \\ 1, & 1 \le x < 2 \\ 2, & x = 2 \end{cases}$$

11. $\sqrt{3}$ **13.** 1 **15.** $2/\sqrt{5}$ **17.** **(a)** 1 **(b)** -1
19. **(a)** 1 **(b)** $2/3$ **21.** 1 **23.** $3/4$ **25.** 2 **27.** $1/2$
29. 2 **31.** 1 **33.** $1/2$ **35.** $3/8$ **37.** **(a)** -3 **(b)** -3
39. **(a)** $1/2$ **(b)** $1/2$ **41.** **(a)** $-5/3$ **(b)** $-5/3$ **43.** 0
45. -1 **47.** **(a)** $2/5$ **(b)** $2/5$ **49.** **(a)** 0 **(b)** 0
51. **(a)** 7 **(b)** 7 **53.** **(a)** 0 **(b)** 0 **55.** **(a)** $-2/3$ **(b)** $-2/3$ **57.** 0 **59.** 1 **61.** ∞ **69.** 1
73. $\delta = \epsilon^2, \ \lim_{x\to 5^+} \sqrt{x - 5} = 0$
77. **(a)** 400 **(b)** 399 **(c)** El límite no existe.
79. 1 **81.** $3/2$ **83.** 3

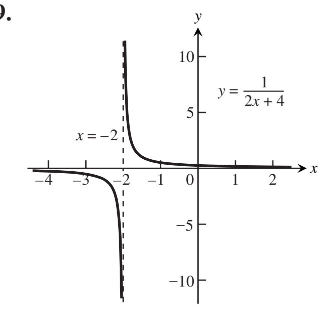
Sección 2.5, páginas 122-123

1. ∞ **3.** $-\infty$ **5.** $-\infty$ **7.** ∞ **9.** **(a)** ∞ **(b)** $-\infty$
11. ∞ **13.** ∞ **15.** $-\infty$ **17.** **(a)** ∞ **(b)** $-\infty$ **(c)** $-\infty$ **(d)** ∞ **19.** **(a)** $-\infty$ **(b)** ∞ **(c)** 0 **(d)** $3/2$ **21.** **(a)** $-\infty$ **(b)** $1/4$ **(c)** $1/4$ **(d)** $1/4$ **(e)** Será $-\infty$. **23.** **(a)** $-\infty$ **(b)** ∞ **25.** **(a)** ∞ **(b)** ∞ **(c)** ∞ **(d)** ∞

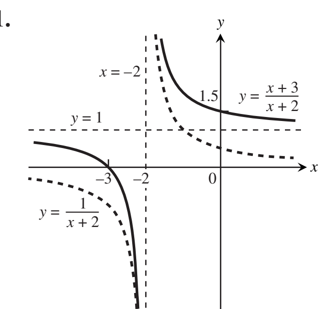
27.



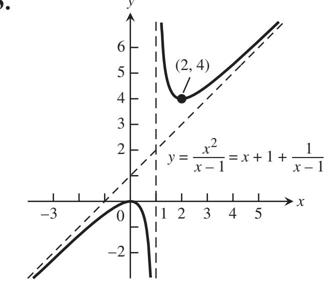
29.



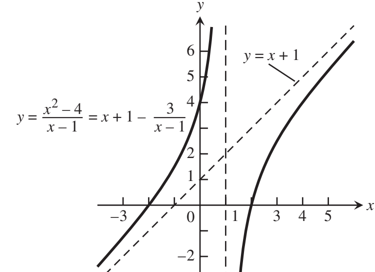
31.



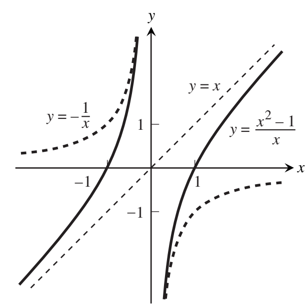
33.



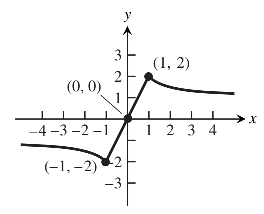
35.



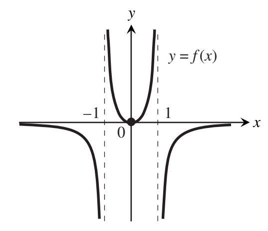
37.



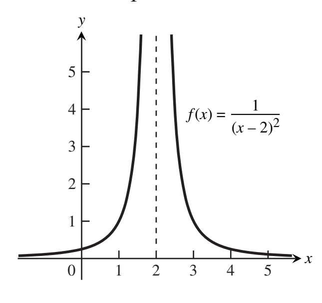
39. Ésta es una posibilidad.



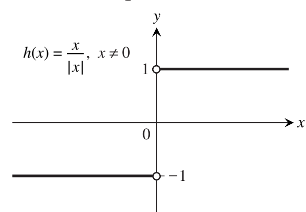
41. Ésta es una posibilidad.



43. Ésta es una posibilidad.



45. Ésta es una posibilidad.



51. (a) Para todo número real positivo B, existe un número correspondiente $\delta > 0$ tal que para toda x

$$x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) > B.$$

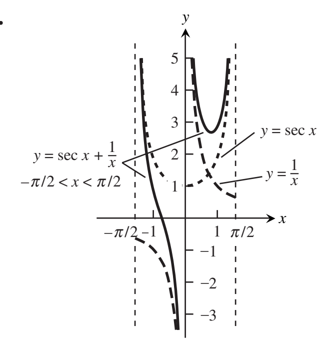
(b) Para todo número real negativo $-B$, existe un número correspondiente $\delta > 0$ tal que para toda x

$$x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow f(x) < -B.$$

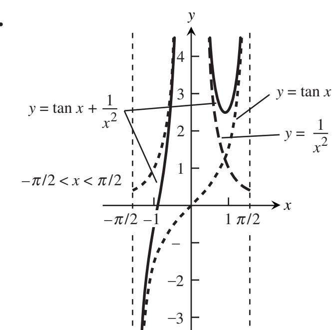
(c) Para todo número real negativo $-B$, existe un número correspondiente $\delta > 0$ tal que para toda x

$$x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) < -B.$$

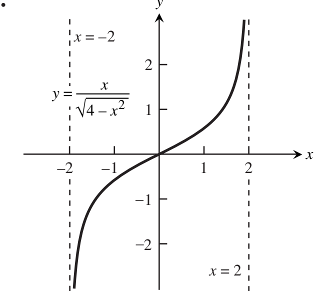
57.



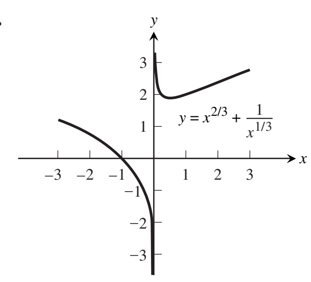
59.



61.



63.

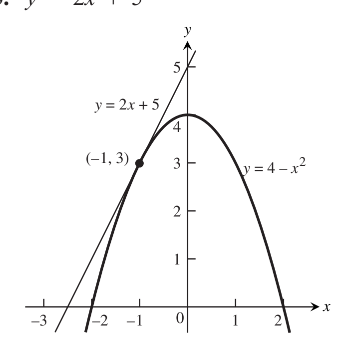


Sección 2.6, páginas 132-134

1. No; es discontinua en $x = 2$; no está definida en $x = 2$.
3. Es continua. **5. (a)** Sí **(b)** Sí **(c)** Sí **(d)** Sí
7. (a) No **(b)** No **9.** 0 **11.** 1, se pueden eliminar; 0, se pueden eliminar **13.** En todos los puntos x, excepto en $x = 2$ **15.** En todos los puntos x, excepto en $x = 3$, $x = 1$ **17.** En todos los puntos x **19.** En todos los puntos x, excepto en $x = 0$
21. En todos los puntos x, excepto en $x = n\pi/2$, siendo n cualquier entero **23.** En todos los puntos x, excepto en $x = n\pi/2$, siendo n un entero impar **25.** En todos los puntos $x \geq -3/2$ **27.** En todos los puntos x
29. 0; continua en $x = \pi$ **31.** 1; es continua en $y = 1$
33. $\sqrt{2}/2$; es continua en $t = 0$ **35.** $g(3) = 6$
37. $f(1) = 3/2$ **39.** $a = 4/3$
63. $x \approx 1.8794, -1.5321, -0.3473$
65. $x \approx 1.7549$ **67.** $x \approx 3.5156$ **69.** $x \approx 0.7391$

Sección 2.7, páginas 140-141

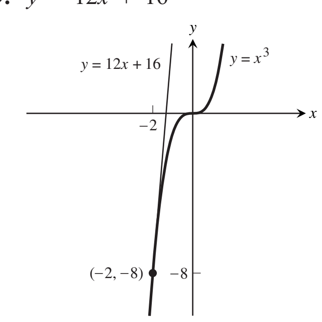
1. P_1: $m_1 = 1$, P_2: $m_2 = 5$ **3.** P_1: $m_1 = 5/2$, P_2: $m_2 = -1/2$
5. $y = 2x + 5$



7. $y = x + 1$

(graph: y = x + 1, y = 2√x, (1, 2))

9. $y = 12x + 16$



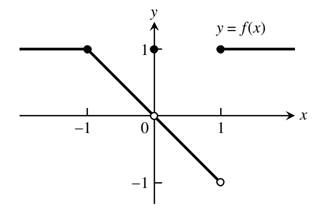
11. $m = 4$, $y - 5 = 4(x - 2)$
13. $m = -2$, $y - 3 = -2(x - 3)$
15. $m = 12$, $y - 8 = 12(t - 2)$
17. $m = \frac{1}{4}$, $y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4)$
19. $m = -10$ **21.** $m = -1/4$ **23.** $(-2, -5)$
25. $y = -(x + 1)$, $y = -(x - 3)$ **27.** 19.6 m/seg
29. 6π **31.** Sí **33.** Sí **35. (a)** En ningún punto
37. (a) En $x = 0$ **39. (a)** En ningún punto **41. (a)** En $x = 1$
43. (a) En $x = 0$

Ejercicios prácticos, páginas 142-143

1. En $x = -1$: $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = 1$, de manera que $\lim_{x\to -1} f(x) = 1 = f(-1)$; la función es continua en $x = -1$

En $x = 0$: $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, de manera que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Sin embargo, $f(0) \neq 0$, así que f es discontinua en $x = 0$. La discontinuidad puede eliminarse redefiniendo $f(0)$ como 0.

En $x = 1$: $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -1$ y $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$, de manera que $\lim_{x\to 1} f(x)$ no existe. La función es discontinua en $x = 1$, y la discontinuidad no puede eliminarse.



3. (a) -21 **(b)** 49 **(c)** 0 **(d)** 1 **(e)** 1 **(f)** 7 **(g)** -7 **(h)** $-\frac{1}{7}$ **5.** 4
7. (a) $(-\infty, +\infty)$ **(b)** $[0, \infty)$ **(c)** $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$ **(d)** $(0, \infty)$
9. (a) No existe **(b)** 0
11. $\frac{1}{2}$ **13.** $2x$ **15.** $-\frac{1}{4}$ **17.** 2 **19.** 0 **21.** $\frac{2}{5}$ **23.** 0
25. $-\infty$ **27.** 0 **29.** 1 **31.** La respuesta es no en ambos casos, ya que $\lim_{x\to 1} f(x)$ no existe y $\lim_{x\to -1} f(x)$ tampoco.
37. (b) 1.324717957

Ejercicios adicionales y avanzados, páginas 144-146

3. 0; el límite lateral izquierdo es necesario porque la función no está definida para $v > c$. **5.** $65 < t < 75$; la temperatura debe alterarse cuando mucho 5°F.

13. **(a)** B **(b)** A **(c)** A **(d)** A

21. **(a)** $\lim_{a\to 0} r_+(a) = 0.5$, $\lim_{a\to -1^+} r_+(a) = 1$

(b) $\lim_{a\to 0} r_-(a)$ no existe $\lim_{a\to -1^+} r_-(a) = 1$

25. 0 **27.** 1 **29.** 4

CAPÍTULO 3

Sección 3.1, páginas 155-159

1. $-2x, 6, 0, -2$ **3.** $-\frac{2}{t^3}, 2, -\frac{1}{4}, -\frac{2}{3\sqrt{3}}$

5. $\frac{3}{2\sqrt{3\theta}}, \frac{3}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2\sqrt{2}}$ **7.** $6x^2$ **9.** $\frac{1}{(2t+1)^2}$

11. $\frac{-1}{2(q+1)\sqrt{q+1}}$ **13.** $1 - \frac{9}{x^2}, 0$ **15.** $3t^2 - 2t, 5$

17. $\frac{-4}{(x-2)\sqrt{x-2}}$, $y - 4 = -\frac{1}{2}(x-6)$ **19.** 6

21. 1/8 **23.** $\frac{-1}{(x+2)^2}$ **25.** $\frac{-1}{(x-1)^2}$ **27.** b **29.** d

31. **(a)** $x = 0, 1, 4$ **(b)**

33.

35. Como $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 1$ mientras que $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0$, $f(x)$ no es diferenciable en $x = 0$.

37. Como $\lim_{x\to 1^+} f'(x) = 2$ mientras que $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = 1/2$, $f(x)$ no es diferenciable en $x = 1$.

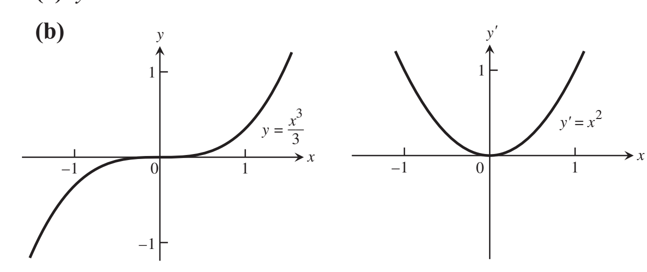
39. **(a)** $-3 \le x \le 2$ **(b)** Ni continua ni diferenciable
(c) Ni continua ni diferenciable

41. **(a)** $-3 \le x < 0, 0 < x \le 3$ **(b)** Ni continua ni diferenciable
(c) $x = 0$

43. **(a)** $-1 \le x < 0, 0 < x \le 2$ **(b)** $x = 0$
(c) Ni continua ni diferenciable

45. **(a)** $y' = -2x$ **(c)** $x < 0, x = 0, x > 0$
(d) $-\infty < x < 0, 0 < x < \infty$

47. **(a)** $y' = x^2$
(b)



(c) $x \neq 0, x = 0$, en ninguno
(d) $-\infty < x < \infty$, en ninguno

49. $y' = 3x^2$ nunca es negativo

51. Sí, $y + 16 = -(x - 3)$ es tangente en $(3, -16)$

53. No, la función $y = \lfloor x \rfloor$ no satisface el teorema del valor intermedio para derivadas.

55. Sí, $(-f)'(x) = -(f'(x))$

57. Para $g(t) = mt$ y $h(t) = t$, $\lim_{t\to 0} \frac{g(t)}{h(t)} = m$, que necesita ser distinto de cero.

Sección 3.2, páginas 169-171

1. $\frac{dy}{dx} = -2x, \frac{d^2y}{dx^2} = -2$

3. $\frac{ds}{dt} = 15t^2 - 15t^4, \frac{d^2s}{dt^2} = 30t - 60t^3$

5. $\frac{dy}{dx} = 4x^2 - 1, \frac{d^2y}{dx^2} = 8x$

7. $\frac{dw}{dz} = -\frac{6}{z^3} + \frac{1}{z^2}, \frac{d^2w}{dz^2} = \frac{18}{z^4} - \frac{2}{z^3}$

9. $\frac{dy}{dx} = 12x - 10 + 10x^{-3}, \frac{d^2y}{dx^2} = 12 - 30x^{-4}$

11. $\frac{dr}{ds} = \frac{-2}{3s^3} + \frac{5}{2s^2}, \frac{d^2r}{ds^2} = \frac{2}{s^4} - \frac{5}{s^3}$

13. $y' = -5x^4 + 12x^2 - 2x - 3$

15. $y' = 3x^2 + 10x + 2 - \frac{1}{x^2}$ **17.** $y' = \frac{-19}{(3x-2)^2}$

19. $g'(x) = \frac{x^2 + x + 4}{(x+0.5)^2}$ **21.** $\frac{dv}{dt} = \frac{t^2 - 2t - 1}{(1+t^2)^2}$

23. $f'(s) = \frac{1}{\sqrt{s}(\sqrt{s}+1)^2}$ **25.** $v' = -\frac{1}{x^2} + 2x^{-3/2}$

27. $y' = \frac{-4x^3 - 3x^2 + 1}{(x^2-1)^2(x^2+x+1)^2}$

29. $y' = 2x^3 - 3x - 1, y'' = 6x^2 - 3, y''' = 12x, y^{(4)} = 12$, $y^{(n)} = 0$ para $n \ge 5$

31. $y' = 2x - 7x^{-2}, y'' = 2 + 14x^{-3}$

33. $\frac{dr}{d\theta} = 3\theta^{-4}, \frac{d^2r}{d\theta^2} = -12\theta^{-5}$

35. $\frac{dw}{dz} = -z^{-2} - 1, \frac{d^2w}{dz^2} = 2z^{-3}$

37. $\frac{dp}{dq} = \frac{1}{6}q + \frac{1}{6}q^{-3} + q^{-5}, \frac{d^2p}{dq^2} = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}q^{-4} - 5q^{-6}$

39. **(a)** 13 **(b)** -7 **(c)** $7/25$ **(d)** 20

41. **(a)** $y = -\dfrac{x}{8} + \dfrac{5}{4}$ **(b)** $m = -4$ en $(0, 1)$
(c) $y = 8x - 15, y = 8x + 17$

43. $y = 4x, y = 2$ **45.** $a = 1, b = 1, c = 0$

47. **(a)** $y = 2x + 2,$ **(c)** $(2, 6)$

49. $P'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2a_2 x + a_1$

51. La regla del producto es entonces la regla del múltiplo constante, de manera que la última es un caso especial de la regla del producto.

53. **(a)** $\dfrac{d}{dx}(uvw) = uvw' + uv'w + u'vw$
(b) $\dfrac{d}{dx}(u_1u_2u_3u_4) = u_1u_2u_3u_4' + u_1u_2u_3'u_4 + u_1u_2'u_3u_4 + u_1'u_2u_3u_4$
(c) $\dfrac{d}{dx}(u_1 \cdots u_n) = u_1u_2 \cdots u_{n-1}u_n' + u_1u_2 \cdots u_{n-2}u_{n-1}'u_n + \cdots + u_1'u_2 \cdots u_n$

55. $\dfrac{dP}{dV} = -\dfrac{nRT}{(V - nb)^2} + \dfrac{2an^2}{V^3}$

Sección 3.3, páginas 179-183

1. **(a)** -2 m, -1 m/seg **(b)** 3 m/seg, 1 m/seg; 2 m/seg^2, 2 m/seg^2 **(c)** la dirección cambiará e $t = 3/2$ seg

3. **(a)** -9 m, -3 m/seg **(b)** 3 m/seg, 12 m/seg; 6 m/seg^2, -12 m/seg^2 **(c)** no hay cambio de dirección

5. **(a)** -20 m, -5 m/seg **(b)** 45 m/seg, (1/5) m/seg; 140 m/seg^2, (4/25) m/seg^2 **(c)** no hay cambio de dirección

7. **(a)** $a(1) = -6$ m/seg^2, $a(3) = 6$ m/seg^2
(b) $v(2) = 3$ m/seg **(c)** 6 m

9. Marte: ≈ 7.5 seg, Júpiter: ≈ 1.2 seg **11.** $g_s = 0.75$ m/seg^2

13. **(a)** $v = -32t, |v| = 32t$ pies/seg, $a = -32$ pies/seg^2
(b) $t \approx 3.3$ seg **(c)** $v \approx -107.0$ pies/seg

15. **(a)** $t = 2, t = 7$ **(b)** $3 \le t \le 6$
(c)
(d)

17. **(a)** 190 pies/seg **(b)** 2 seg **(c)** 8 seg, 0 pies/seg,
(d) 10.8 seg, 90 pies/seg **(e)** 2.8 seg
(f) el cohete alcanza la máxima aceleración a los 2 segundos después del lanzamiento
(g) la aceleración es constante entre los 2 y los 10.8 segundos, -32 pies/seg^2

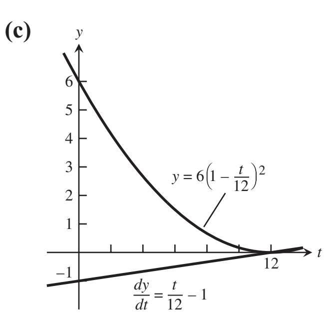
19. **(a)** $\dfrac{4}{7}$ seg, 280 cm/seg **(b)** 560 cm/seg, 980 cm/seg^2
(c) 29.75 disparos/seg

21. $C =$ posición, $A =$ velocidad, $B =$ aceleración

23. **(a)** \$110/lavadora **(b)** \$80 **(c)** \$79.90

25. **(a)** $b'(0) = 10^4$ bacterias/h **(b)** $b'(5) = 0$ bacterias/h
(c) $b'(10) = -10^4$ bacterias/h

27. **(a)** $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{t}{12} - 1$ **(b)** El mayor valor de $\dfrac{dy}{dt}$ es 0 m/h cuando $t = 12$ y el menor valor de $\dfrac{dy}{dt}$ es -1 m/h, cuando $t = 0$.
(c)



29. $t = 25$ seg $D = \dfrac{6250}{9}$ m

31.

(a) $v = 0$ cuando $t = 6.25$ seg. **(b)** $v > 0$ cuando $0 \le t < 6.25 \Rightarrow$ el cuerpo se mueve hacia arriba; $v < 0$ cuando $6.25 < t \le 12.5 \Rightarrow$ el cuerpo se mueve hacia abajo. **(c)** El cuerpo cambia de dirección en $t = 6.25$ seg. **(d)** El cuerpo aumenta su rapidez en (6.25, 12.5] y la disminuye en [0, 6.25). **(e)** El cuerpo se mueve más rápido en los puntos extremos $t = 0$ y $t = 12.5$ cuando viaja a 200 pies/seg. Se mueve más despacio en $t = 6.25$, cuando la rapidez es 0. **(f)** Cuando $t = 6.25$ el cuerpo está a $s = 625$ m del origen, en la posición más lejana respecto de éste.

33.

(a) $v = 0$ cuando $t = \dfrac{6 \pm \sqrt{15}}{3}$ seg.

(b) $v < 0$ cuando $\dfrac{6 - \sqrt{15}}{3} < t < \dfrac{6 + \sqrt{15}}{3} \Rightarrow$ el cuerpo se mueve hacia la izquierda; $v > 0$ cuando $0 \le t < \dfrac{6 - \sqrt{15}}{3}$ $\dfrac{6 + \sqrt{15}}{3} < t \le 4 \Rightarrow$ el cuerpo se mueve hacia la derecha.

(c) El cuerpo cambia de dirección en $t = \dfrac{6 \pm \sqrt{15}}{3}$ seg.

(d) El cuerpo aumenta su rapidez en $\left(\dfrac{6 - \sqrt{15}}{3}, 2\right) \cup \left(\dfrac{6 + \sqrt{15}}{3}, 4\right]$ y la disminuye en $\left[0, \dfrac{6 - \sqrt{15}}{3}\right) \cup \left(2, \dfrac{6 + \sqrt{15}}{3}\right)$.

(e) El cuerpo se mueve más rápido en $t = 0$ y $t = 4$, cuando se desplaza a 7 unidades/seg, y más lento en $t = \dfrac{6 \pm \sqrt{15}}{3}$ seg.

(f) Cuando $t = \dfrac{6 + \sqrt{15}}{3}$ el cuerpo está en la posición $s \approx -6.303$ unidades, en el punto más lejano del origen.

35. **(a)** Tarda 135 seg. **(b)** Rapidez promedio $= \dfrac{\Delta F}{\Delta t} = \dfrac{5 - 0}{73 - 0} = \dfrac{5}{73} \approx 0.068$ estadios/seg. **(c)** Usando un cociente de diferencias centrado, la rapidez del caballo es aproximadamente (sección 3.4, ejercicio 53) $\dfrac{\Delta F}{\Delta t} = \dfrac{4 - 2}{59 - 33} = \dfrac{2}{26} = \dfrac{1}{13} \approx 0.077$ furlongs/seg.

(d) El caballo tiene su máxima aceleración durante el último estadio (entre la novena y décima marcas de estadio). Tarda sólo 11 seg en correr este último estadio, que es la menor cantidad de tiempo para un estadio. **(e)** El caballo acelera al máximo durante el primer estadio (entre las marcas 0 y 1).

Sección 3.4, páginas 188-190

1. $-10 - 3 \operatorname{sen} x$ **3.** $-\csc x \cot x - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ **5.** 0

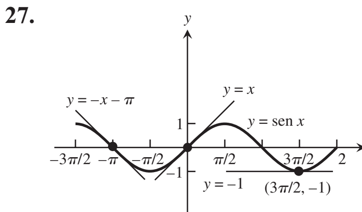
7. $\dfrac{-\csc^2 x}{(1 + \cot x)^2}$ **9.** $4 \tan x \sec x - \csc^2 x$ **11.** $x^2 \cos x$

13. $\sec^2 t - 1$ **15.** $\dfrac{-2 \csc t \cot t}{(1 - \csc t)^2}$ **17.** $-\theta(\theta \cos\theta + 2 \operatorname{sen}\theta)$

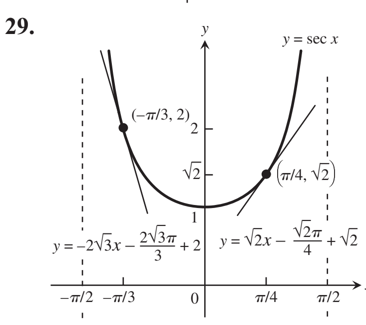
19. $\sec\theta \csc\theta (\tan\theta - \cot\theta) = \sec^2\theta - \csc^2\theta$

21. $\sec^2 q$ **23.** $\sec^2 q$ **25.** **(a)** $2\csc^3 x - \csc x$ **(b)** $2\sec^3 x - \sec x$

27.

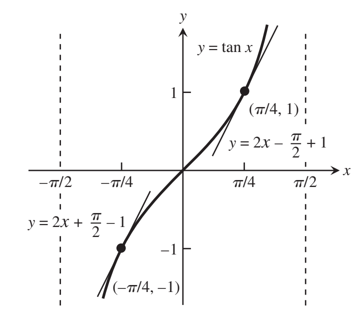


29.



31. Sí, en $x = \pi$ **33.** No

35. $\left(-\dfrac{\pi}{4}, -1\right); \left(\dfrac{\pi}{4}, 1\right)$



37. **(a)** $y = -x + \pi/2 + 2$ **(b)** $y = 4 - \sqrt{3}$

39. 0 **41.** -1 **43.** 0

45. $-\sqrt{2}$ m/seg, $\sqrt{2}$ m/seg, $\sqrt{2}$ m/seg^2, $\sqrt{2}$ m/seg^3

47. $c = 9$ **49.** $\operatorname{sen} x$

Sección 3.5, páginas 201-205

1. $12x^3$ **3.** $3\cos(3x + 1)$ **5.** $-\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)\cos x$

7. $10 \sec^2(10x - 5)$

9. Con $u = (2x + 1), y = u^5 : \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx} = 5u^4 \cdot 2 = 10(2x + 1)^4$

11. Con $u = (1 - (x/7)), y = u^{-7} : \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx} = -7u^{-8} \cdot \left(-\dfrac{1}{7}\right) = \left(1 - \dfrac{x}{7}\right)^{-8}$

13. Con $u = ((x^2/8) + x - (1/x)), y = u^4 : \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx} = 4u^3 \cdot \left(\dfrac{x}{4} + 1 + \dfrac{1}{x^2}\right) = 4\left(\dfrac{x^2}{8} + x - \dfrac{1}{x}\right)^3 \left(\dfrac{x}{4} + 1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$

15. Con $u = \tan x, y = \sec u : \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx} = (\sec u \tan u)(\sec^2 x) = \sec(\tan x)\tan(\tan x)\sec^2 x$

17. Con $u = \operatorname{sen} x, y = u^3 : \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx} = 3u^2 \cos x = 3\operatorname{sen}^2 x(\cos x)$

19. $-\dfrac{1}{2\sqrt{3 - t}}$ **21.** $\dfrac{4}{\pi}(\cos 3t - \operatorname{sen} 5t)$ **23.** $\dfrac{\csc\theta}{\cot\theta + \csc\theta}$

25. $2x \operatorname{sen}^4 x + 4x^2 \operatorname{sen}^3 x \cos x + \cos^{-2} x + 2x \cos^{-3} x \operatorname{sen} x$

27. $(3x - 2)^6 - \dfrac{1}{x^3\left(4 - \dfrac{1}{2x^2}\right)^2}$ **29.** $\dfrac{(4x + 3)^3(4x + 7)}{(x + 1)^4}$

31. $\sqrt{x}\sec^2(2\sqrt{x}) + \tan(2\sqrt{x})$ **33.** $\dfrac{2 \operatorname{sen}\theta}{(1 + \cos\theta)^2}$

35. $\dfrac{dr}{d\theta} = -2\operatorname{sen}(\theta^2)\operatorname{sen} 2\theta + 2\theta\cos(2\theta)\cos(\theta^2)$

37. $\dfrac{dq}{dt} = \left(\dfrac{t+2}{2(t+1)^{3/2}}\right)\cos\left(\dfrac{t}{\sqrt{t+1}}\right)$

39. $2\pi \operatorname{sen}(\pi t - 2)\cos(\pi t - 2)$ **41.** $\dfrac{8\operatorname{sen}(2t)}{(1+\cos 2t)^5}$

43. $-2\cos(\cos(2t-5))(\operatorname{sen}(2t-5))$

45. $\left(1+\tan^4\left(\dfrac{t}{12}\right)\right)^2\left(\tan^3\left(\dfrac{t}{12}\right)\sec^2\left(\dfrac{t}{12}\right)\right)$

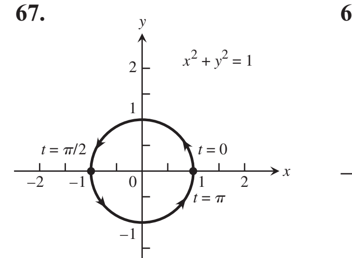
47. $-\dfrac{t\operatorname{sen}(t^2)}{\sqrt{1+\cos(t^2)}}$ **49.** $\dfrac{6}{x^3}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{2}{x}\right)$

51. $2\csc^2(3x-1)\cot(3x-1)$ **53.** $5/2$ **55.** $-\pi/4$ **57.** 0

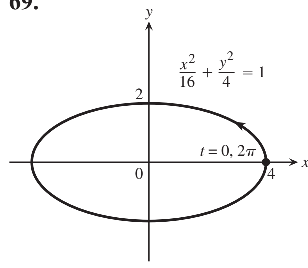
59. **(a)** $2/3$ **(b)** $2\pi+5$ **(c)** $15-8\pi$ **(d)** $37/6$ **(e)** -1 **(f)** $\sqrt{2}/24$ **(g)** $5/32$ **(h)** $-5/(3\sqrt{17})$ **61.** 5

63. **(a)** 1 **(b)** 1 **65.** **(a)** $y = \pi x + 2 - \pi$ **(b)** $\pi/2$

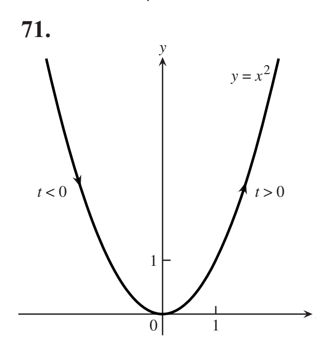
67.



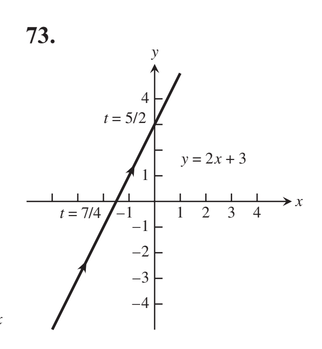
69.



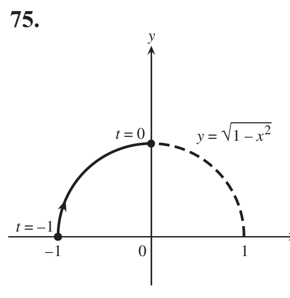
71.



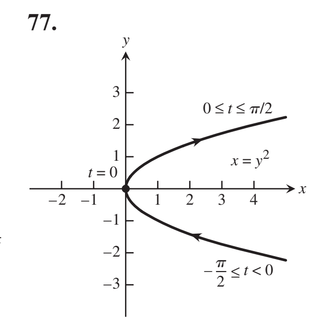
73.



75.



77.



79. **(a)** $x = a\cos t,\ y = -a\operatorname{sen} t,\ 0 \le t \le 2\pi$

(b) $x = a\cos t,\ y = a\operatorname{sen} t,\ 0 \le t \le 2\pi$

(c) $x = a\cos t,\ y = -a\operatorname{sen} t,\ 0 \le t \le 4\pi$

(d) $x = a\cos t,\ y = a\operatorname{sen} t,\ 0 \le t \le 4\pi$

81. Respuesta posible: $x = -1 + 5t,\ y = -3 + 4t,\ 0 \le t \le 1$

83. Respuesta posible: $x = t^2 + 1,\ y = t,\ t \le 0$

85. Respuesta posible: $x = 2 - 3t,\ y = 3 - 4t,\ t \ge 0$

87. $y = -x + 2,\ \left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\pi/4} = -\sqrt{2}$

89. $y = x + \dfrac{1}{4},\ \left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1/4} = -2$

91. $y = x - 4,\ \left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=-1} = \dfrac{1}{2}$

93. $y = 2,\ \left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\pi/2} = -1$

95. Al duplicar la frecuencia, la velocidad, la aceleración y la sacudida se multiplican por 2, 4 y 8, respectivamente.

97. $v(6) = \dfrac{2}{5}$ m/seg, $a(6) = -\dfrac{4}{125}$ m/seg^2

107. $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$, $y = 2x$ en $t = 0$, $y = -2x$ en $t = \pi$

Sección 3.6, páginas 211-213

1. $\dfrac{9}{4}x^{5/4}$ **3.** $\dfrac{2^{1/3}}{3x^{2/3}}$ **5.** $\dfrac{7}{2(x+6)^{1/2}}$ **7.** $-(2x+5)^{-3/2}$

9. $\dfrac{2x^2+1}{(x^2+1)^{1/2}}$ **11.** $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{2}{7}t^{-5/7}$

13. $\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{4}{3}(2t+5)^{-5/3}\cos\left[(2t+5)^{-2/3}\right]$

15. $f'(x) = \dfrac{-1}{4\sqrt{x(1-\sqrt{x})}}$

17. $h'(\theta) = -\dfrac{2}{3}(\operatorname{sen} 2\theta)(1+\cos 2\theta)^{-2/3}$ **19.** $\dfrac{-2xy-y^2}{x^2+2xy}$

21. $\dfrac{1-2y}{2x+2y-1}$ **23.** $\dfrac{-2x^3+3x^2y-xy^2+x}{x^2y-x^3+y}$

25. $\dfrac{1}{y(x+1)^2}$ **27.** $\cos^2 y$ **29.** $\dfrac{-\cos^2(xy)-y}{x}$

31. $\dfrac{-y^2}{y\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{y}\right)-\cos\left(\dfrac{1}{y}\right)+xy}$ **33.** $-\dfrac{\sqrt{r}}{\sqrt{\theta}}$ **35.** $\dfrac{-r}{\theta}$

37. $y' = -\dfrac{x}{y},\ y'' = \dfrac{-y^2-x^2}{y^3}$

39. $y' = \dfrac{x+1}{y},\ y'' = \dfrac{y^2-(x+1)^2}{y^3}$

41. $y' = \dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}+1},\ y'' = \dfrac{1}{2(\sqrt{y}+1)^3}$

43. -2 **45.** $(-2, 1): m = -1,\ (-2, -1): m = 1$

47. **(a)** $y = \dfrac{7}{4}x - \dfrac{1}{2}$, **(b)** $y = -\dfrac{4}{7}x + \dfrac{29}{7}$

49. **(a)** $y = 3x + 6$, **(b)** $y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{8}{3}$

51. **(a)** $y = \dfrac{6}{7}x + \dfrac{6}{7}$, **(b)** $y = -\dfrac{7}{6}x - \dfrac{7}{6}$

53. **(a)** $y = -\dfrac{\pi}{2}x + \pi$, **(b)** $y = \dfrac{2}{\pi}x - \dfrac{2}{\pi} + \dfrac{\pi}{2}$

55. **(a)** $y = 2\pi x - 2\pi$, **(b)** $y = -\dfrac{x}{2\pi} + \dfrac{1}{2\pi}$

57. Puntos: $(-\sqrt{7}, 0)$ y $(\sqrt{7}, 0)$, Pendiente: -2

59. $m = -1$ en $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $m = \sqrt{3}$ en $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}, \dfrac{1}{2}\right)$

61. $(-3, 2) : m = -\dfrac{27}{8}$; $(-3, -2) : m = \dfrac{27}{8}$; $(3, 2) : m = \dfrac{27}{8}$; $(3, -2) : m = -\dfrac{27}{8}$

63. 0 **65.** -6 **67.** **(a)** Falsa **(b)** Cierta **(c)** Cierta **(d)** Cierta **69.** $(3, -1)$

73. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^3 + 2xy}{x^2 + 3xy^2}$, $\dfrac{dx}{dy} = -\dfrac{x^2 + 3xy^2}{y^3 + 2xy}$, $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{dy/dx}$

Sección 3.7, páginas 218-221

1. $\dfrac{dA}{dt} = 2\pi r \dfrac{dr}{dt}$ **3.** **(a)** $\dfrac{dV}{dt} = \pi r^2 \dfrac{dh}{dt}$ **(b)** $\dfrac{dV}{dt} = 2\pi hr \dfrac{dr}{dt}$
(c) $\dfrac{dV}{dt} = \pi r^2 \dfrac{dh}{dt} + 2\pi hr \dfrac{dr}{dt}$ **5.** **(a)** 1 volt/seg
(b) $-\dfrac{1}{3}$ amp/seg **(c)** $\dfrac{dR}{dt} = \dfrac{1}{I}\left(\dfrac{dV}{dt} - \dfrac{V}{I}\dfrac{dI}{dt}\right)$
(d) 3/2 ohms/seg, R está aumentando.

7. **(a)** $\dfrac{dS}{dt} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\dfrac{dx}{dt}$
(b) $\dfrac{dS}{dt} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\dfrac{dy}{dt}$
(c) $\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{y}{x}\dfrac{dy}{dt}$

9. **(a)** $\dfrac{dA}{dt} = \dfrac{1}{2}ab\cos\theta\dfrac{d\theta}{dt}$
(b) $\dfrac{dA}{dt} = \dfrac{1}{2}ab\cos\theta\dfrac{d\theta}{dt} + \dfrac{1}{2}b\,\text{sen}\,\theta\dfrac{da}{dt}$
(c) $\dfrac{dA}{dt} = \dfrac{1}{2}ab\cos\theta\dfrac{d\theta}{dt} + \dfrac{1}{2}b\,\text{sen}\,\theta\dfrac{da}{dt} + \dfrac{1}{2}a\,\text{sen}\,\theta\dfrac{db}{dt}$

11. **(a)** 14 cm^2/seg, crece **(b)** 0 cm/seg, constante **(c)** $-14/13$ cm/seg, decrece

13. **(a)** -12 pies/seg **(b)** -59.5 pies^2/seg **(c)** -1 rad/seg

15. 20 pies/seg

17. **(a)** $\dfrac{dh}{dt} = 11.19$ cm/min **(b)** $\dfrac{dr}{dt} = 14.92$ cm/min

19. **(a)** $\dfrac{-1}{24\pi}$ m/min **(b)** $r = \sqrt{26y - y^2}$ m,
(c) $\dfrac{dr}{dt} = -\dfrac{5}{288\pi}$ m/min

21. 1 pies/min, 40π pies^2/min **23.** 11 pies/seg **25.** Crece en 466/1681 litros/min **27.** 1 rad/seg **29.** -5 m/seg

31. -1500 pies/seg **33.** $\dfrac{5}{72\pi}$ pulg./min, $\dfrac{10}{3}$ pulg.^{2}/min

35. 7.1 pulg./min **37.** **(a)** $-32/\sqrt{13} \approx -8.875$ pies/seg,
(b) $d\theta_1/dt = -8/65$ rad/seg, $d\theta_2/dt = 8/65$ rad/seg
(c) $d\theta_1/dt = -1/6$ rad/seg, $d\theta_2/dt = 1/6$ rad/seg

Sección 3.8, páginas 231-234

1. $L(x) = 10x - 13$ **3.** $L(x) = 2$ **5.** $2x$ **7.** -5

9. $\dfrac{1}{12}x + \dfrac{4}{3}$ **11.** **(a)** $L(x) = x$ **(b)** $L(x) = \pi - x$

13. **(a)** $L(x) = 1$ **(b)** $L(x) = 2 - 2\sqrt{3}\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

15. $f(0) = 1$. También, $f'(x) = k(1 + x)^{k-1}$, de manera que $f'(0) = k$. Esto significa que la linealización en $x = 0$ es $L(x) = 1 + kx$.

17. **(a)** 1.01 **(b)** 1.003

19. $\left(3x^2 - \dfrac{3}{2\sqrt{x}}\right)dx$ **21.** $\dfrac{2 - 2x^2}{(1 + x^2)^2}dx$

23. $\dfrac{1 - y}{3\sqrt{y} + x}dx$ **25.** $\dfrac{5}{2\sqrt{x}}\cos(5\sqrt{x})\,dx$

27. $\left(4x^2\right)\sec^2\left(\dfrac{x^3}{3}\right)dx$

29. $\dfrac{3}{\sqrt{x}}(\csc(1 - 2\sqrt{x})\cot(1 - 2\sqrt{x}))\,dx$

31. **(a)** .41 **(b)** .4 **(c)** .01

33. **(a)** .231 **(b)** .2 **(c)** .031

35. **(a)** $-1/3$ **(b)** $-2/5$ **(c)** $1/15$

37. $dV = 4\pi r_0^2\,dr$ **39.** $dS = 12x_0\,dx$ **41.** $dV = 2\pi r_0 h\,dr$

43. **(a)** 0.08π m^2 **(b)** 2% **45.** $dV \approx 565.5$ pulg.^{3}

47. $\dfrac{1}{3}\%$ **49.** 0.05%

51. La razón es igual a 37.87, de manera que un cambio en la aceleración de la gravedad en la Luna equivale aproximadamente a 38 veces un cambio de la misma magnitud ocurrido en la Tierra.

53. 3% **55.** 3%

59. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1 + x}}{1 + \left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sqrt{1 + 0}}{1 + \left(\frac{0}{2}\right)} = \frac{1}{1} = 1$ **65.** $0.07c$

Ejercicios prácticos, páginas 235-240

1. $5x^4 - 0.25x + 0.25$ **3.** $3x(x - 2)$

5. $2(x + 1)(2x^2 + 4x + 1)$

7. $3(\theta^2 + \sec\theta + 1)^2(2\theta + \sec\theta\tan\theta)$

9. $\dfrac{1}{2\sqrt{t}(1 + \sqrt{t})^2}$ **11.** $2\sec^2 x\tan x$

13. $8\cos^3(1 - 2t)\,\text{sen}(1 - 2t)$ **15.** $5(\sec t)(\sec t + \tan t)^5$

17. $\dfrac{\theta\cos\theta + \text{sen}\,\theta}{\sqrt{2\theta\,\text{sen}\,\theta}}$ **19.** $\dfrac{\cos\sqrt{2\theta}}{\sqrt{2\theta}}$

21. $x\csc\left(\dfrac{2}{x}\right) + \csc\left(\dfrac{2}{x}\right)\cot\left(\dfrac{2}{x}\right)$

23. $\dfrac{1}{2}x^{1/2}\sec(2x)^2\left[16\tan(2x)^2 - x^{-2}\right]$

25. $-10x\csc^2(x^2)$ **27.** $8x^3\,\text{sen}(2x^2)\cos(2x^2) + 2x\,\text{sen}^2(2x^2)$

29. $\dfrac{-(t + 1)}{8t^3}$ **31.** $\dfrac{1 - x}{(x + 1)^3}$ **33.** $\dfrac{-1}{2x^2\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{1/2}}$

35. $\dfrac{-2\operatorname{sen}\theta}{(\cos\theta-1)^2}$ **37.** $3\sqrt{2x+1}$ **39.** $-9\left[\dfrac{5x+\cos 2x}{(5x^2+\operatorname{sen}2x)^{5/2}}\right]$

41. $-\dfrac{y+2}{x+3}$ **43.** $\dfrac{-3x^2-4y+2}{4x-4y^{1/3}}$ **45.** $-\dfrac{y}{x}$

47. $\dfrac{1}{2y(x+1)^2}$ **49.** $\dfrac{dp}{dq}=\dfrac{6q-4p}{3p^2+4q}$

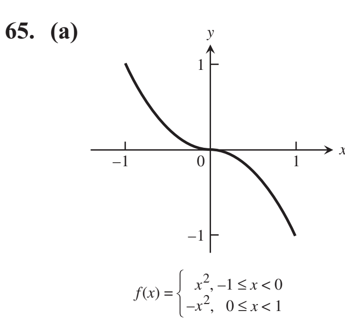
51. $\dfrac{dr}{ds}=(2r-1)(\tan 2s)$

53. **(a)** $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{-2xy^3-2x^4}{y^5}$ **(b)** $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{-2xy^2-1}{x^4y^3}$

55. **(a)** 7 **(b)** -2 **(c)** $5/12$ **(d)** $1/4$ **(e)** 12 **(f)** $9/2$ **(g)** $3/4$

57. 0 **59.** $\sqrt{3}$ **61.** $-\dfrac{1}{2}$ **63.** $\dfrac{-2}{(2t+1)^2}$

65. **(a)**



(b) Sí **(c)** Sí

67. **(a)**

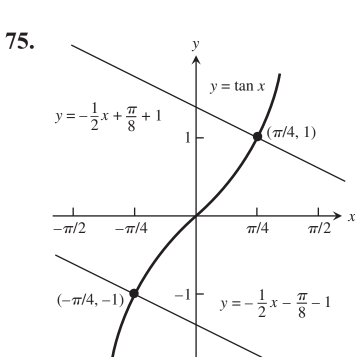
$y=\begin{cases}x, & 0\le x\le 1\\ 2-x, & 1<x\le 2\end{cases}$

(b) Sí **(c)** No

69. $\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{9}{4}\right)$ y $\left(\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{4}\right)$ **71.** $(-1, 27)$ y $(2, 0)$

73. **(a)** $(-2, 16)$, $(3, 11)$ **(b)** $(0, 20)$, $(1, 7)$

75.



77. $\dfrac{1}{4}$ **79.** 4 **81.** Tangente: $y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{9}{4}$, normal: $y=4x-2$

83. Tangente: $y=2x-4$, normal: $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{7}{2}$

85. Tangente: $y=-\dfrac{5}{4}x+6$, normal: $y=\dfrac{4}{5}x-\dfrac{11}{5}$

87. $(1, 1)$: $m=-\dfrac{1}{2}$; $(1, -1)$: m no está definida

89. $y=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)x+\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}$ **91.** $B=$ gráfica de f, $A=$ gráfica de f'

93.

(4, 3) $y=f(x)$; (−1, 2); (6, 1)

95. **(a)** 0, 0 **(b)** 1700 conejos, ≈ 1400 conejos

97. -1 **99.** $1/2$ **101.** 4 **103.** 1

107. **(a)** $\dfrac{dS}{dt}=(4\pi r+2\pi h)\dfrac{dr}{dt}$ **(b)** $\dfrac{dS}{dt}=2\pi r\dfrac{dh}{dt}$

(c) $\dfrac{dS}{dt}=(4\pi r+2\pi h)\dfrac{dr}{dt}+2\pi r\dfrac{dh}{dt}$

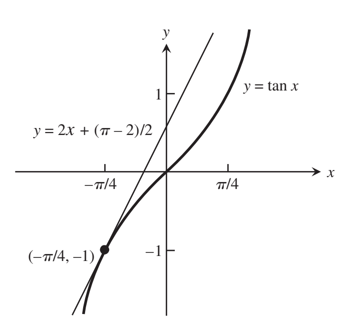
(d) $\dfrac{dr}{dt}=-\dfrac{r}{2r+h}\dfrac{dh}{dt}$

109. $-40\ \text{m}^2/\text{seg}$ **111.** 0.02 ohm/seg **113.** 22 m/seg

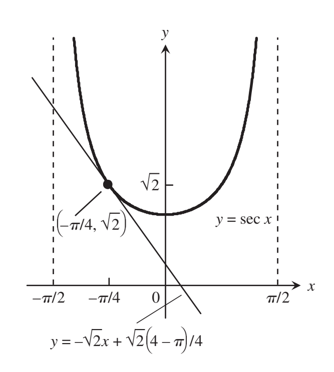
115. **(a)** $r=\dfrac{2}{5}h$ **(b)** $-\dfrac{125}{144\pi}$ pies/min

117. **(a)** $\dfrac{3}{5}$ km/seg o 600 m/seg **(b)** $\dfrac{18}{\pi}$ rpm

119. **(a)** $L(x)=2x+\dfrac{\pi-2}{2}$



(b) $L(x)=-\sqrt{2}x+\dfrac{\sqrt{2}(4-\pi)}{4}$



121. $L(x) = 1.5x + 0.5$ **123.** $dS = \dfrac{\pi r h_0}{\sqrt{r^2 + h_0^2}}\, dh$

125. **(a)** 4% **(b)** 8% **(c)** 12%

Ejercicios adicionales y avanzados, páginas 240-243

1. **(a)** $\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta$; $2\cos 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta(-\operatorname{sen}\theta) + \cos\theta(2\cos\theta)$; $2\cos 2\theta = -2\operatorname{sen}^2\theta + 2\cos^2\theta$; $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$

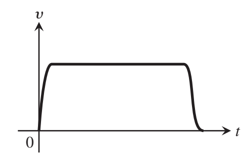
(b) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$; $-2\operatorname{sen} 2\theta = 2\cos\theta(-\operatorname{sen}\theta) - 2\operatorname{sen}\theta(\cos\theta)$; $\operatorname{sen} 2\theta = \cos\theta\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta$; $\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$

3. **(a)** $a = 1, b = 0, c = -\dfrac{1}{2}$ **(b)** $b = \cos a$, $c = \operatorname{sen} a$

5. $h = -4, k = \dfrac{9}{2}, a = \dfrac{5\sqrt{5}}{2}$

7. **(a)** $0.09y$ **(b)** Crece 1% anual

9. Las respuestas variarán. Ésta es una de las respuestas posibles:



11. **(a)** 2 seg, 64 pies/seg **(b)** 12.31 seg, 393.85 pies

15. **(a)** $m = -\dfrac{b}{\pi}$ **(b)** $m = -1, b = \pi$

17. **(a)** $a = \dfrac{3}{4}, b = \dfrac{9}{4}$ **19.** f impar $\Rightarrow f'$ es par

23. h' está definida, pero no es continua en $x = 0$; k' está definida y es continua en $x = 0$.

27. **(a)** 0.8156 pies **(b)** 0.00613 seg **(c)** Perderá alrededor de 8.83 min/día.

CAPÍTULO 4

Sección 4.1, páginas, 252-255

1. Mínimo absoluto en $x = c_2$; máximo absoluto en $x = b$.

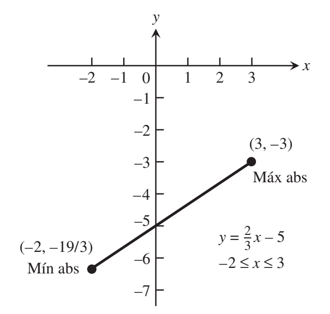
3. Máximo absoluto en $x = c$; no tiene mínimo absoluto

5. Mínimo absoluto en $x = a$; máximo absoluto en $x = c$

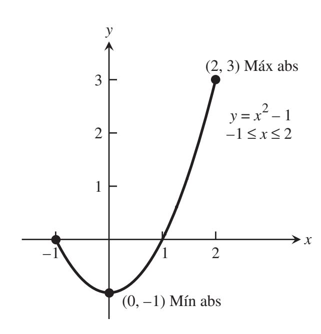
7. Mínimo local en $(-1, 0)$; máximo local en $(1, 0)$

9. Máximo en $(0, 5)$ **11.** (c) **13.** (d)

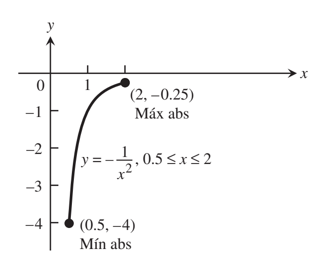
15. Máximo absoluto: -3; mínimo absoluto: $-19/3$



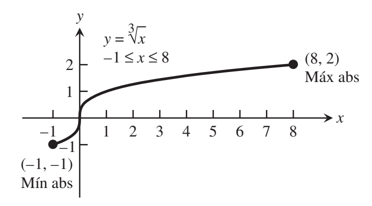
17. Máximo absoluto: 3; mínimo absoluto: -1



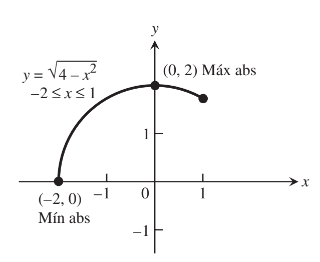
19. Máximo absoluto: -0.25; mínimo absoluto: -4



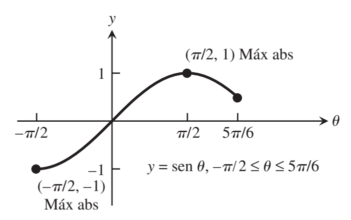
21. Máximo absoluto: 2; mínimo absoluto: -1



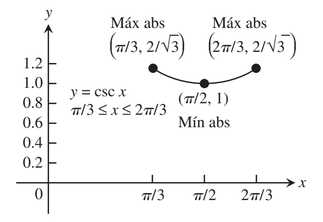
23. Máximo absoluto: 2; mínimo absoluto: 0



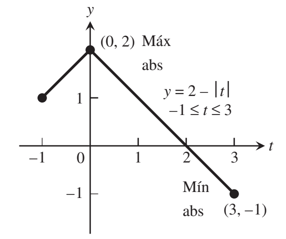
25. Máximo absoluto: 1; mínimo absoluto: -1



27. Máximo absoluto: $2/\sqrt{3}$; mínimo absoluto:



29. Máximo absoluto: 2; mínimo absoluto: -1



31. Crece en (0, 8), decrece en (–1, 0); máximo absoluto: 16 en $x = 8$; mínimo absoluto: 0 en $x = 0$

33. Crece en (–32, 1); máximo absoluto: 1 en $\theta = 1$; mínimo absoluto: –8 en $\theta = -32$

35. El valor mínimo es 1 en $x = 2$.

37. Máximo local en (–2, 17); mínimo local en $\left(\frac{4}{3}, -\frac{41}{27}\right)$

39. El valor mínimo es 0 en $x = -1$ y $x = 1$.

41. Hay un mínimo local en (0, 1).

43. El valor máximo es $\frac{1}{2}$ en $x = 1$; el valor mínimo es $-\frac{1}{2}$ en $x = -1$.

45.

Punto crítico	Derivada	Extremos	Valor
$x = -\frac{4}{5}$	0	Máx local	$\frac{12}{25} 10^{1/3} = 1.034$
$x = 0$	Indefinida	Mín local	0

47.

Punto crítico	Derivada	Extremos	Valor
$x = -2$	Indefinida	Máx local	0
$x = -\sqrt{2}$	0	Mínimo	–2
$x = \sqrt{2}$	0	Máximo	2
$x = 2$	Indefinida	Mín local	0

49.

Punto crítico	Derivada	Extremos	Valor
$x = 1$	Indefinida	Mínimo	2

51.

Punto crítico	Derivada	Extremos	Valor
$x = -1$	0	Máximo	5
$x = 1$	Indefinida	Mín local	1
$x = 3$	0	Máximo	5

53. **(a)** No

(b) La derivada está definida y es distinta de cero para $x \neq 2$. Asimismo, $f(2) = 0$ y $f(x) > 0$ para toda $x \neq 2$.

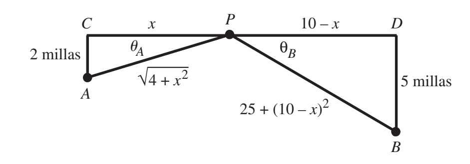
(c) No, porque $(-\infty, \infty)$ no es un intervalo cerrado.

(d) Las respuestas son las mismas que en los incisos (a) y (b), reemplazando 2 por a.

55. **(a)** $C(x) = 0.3\sqrt{16 + x^2} + 0.2(9 - x)$ millones de dólares, donde $0 \le x \le 9$ millas. Para minimizar el costo de construcción se debe colocar la tubería del muelle al punto B , a 3.58 millas a lo largo de la costa desde el punto A, y después a lo largo de esta última, desde el punto B hasta la refinería.

(b) En teoría, el costo de la tubería subacuática, p por milla, tendría que ser infinito para justificar una construcción directamente del muelle al punto A (es decir, para x_c cero). Para todos los valores de $p > 0.218864$, existe siempre un x_c en (0, 9) que dará el valor mínimo para C. Esto se deduce al comprobar que $C''(x_c) = \dfrac{16p}{(16 + x_c^{\,2})^{3/2}}$, siempre es positiva para $p > 0$.

57. La longitud de la tubería es $L(x) = \sqrt{4 + x^2} + \sqrt{25 + (10 - x)^2}$ para $0 \le x \le 10$. $x = \frac{20}{7} \approx 2.857$ millas a lo largo de la costa, del pueblo A al pueblo B.



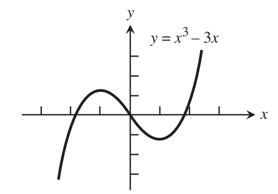
59. **(a)** El valor máximo es 144 en $x = 2$.

(b) El volumen más grande de la caja es de 144 unidades cúbicas, y se alcanza cuando $x = 2$.

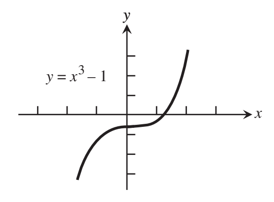
61. La mayor área posible es $A\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right) = \frac{25}{4}$ cm^2.

63. $\frac{v_0^{\,2}}{2g} + s_0$ **65.** Sí **67.** g alcanza un máximo local en $-c$.

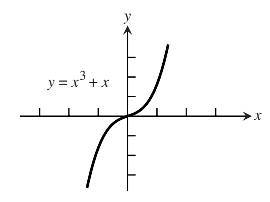
69. **(a)** $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ es una función cuadrática, de manera que puede tener 0, 1 o 2 ceros, que podrían ser los puntos críticos de f. Ejemplos: la función $f(x) = x^3 - 3x$ tiene dos puntos críticos en $x = -1$ y $x = 1$.



La función $f(x) = x^3 - 1$ tiene un punto crítico en $x = 0$.



La función $f(x) = x^3 + x$ no tiene puntos críticos.



(b) Dos o ninguno.

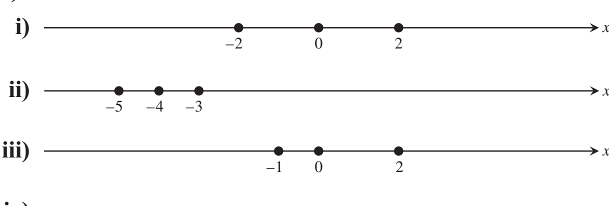
71. El valor máximo es 11 en $x = 5$; el valor mínimo es 5 en el intervalo $[-3, 2]$; máximo local en $(-5, 9)$.

73. El valor máximo es 5 en el intervalo $[3, \infty)$; el valor mínimo es -5 en el intervalo $(-\infty, -2]$.

Sección 4.2, páginas 260-262

1. 1/2 **3.** 1 **5.** No la satisface; f no es diferenciable en el punto interior del dominio $x = 0$. **7.** La satisface.

11. (a)



23. Sí **25. (a)** 4 **(b)** 3 **(c)** 3

27. (a) $\frac{x^2}{2} + C$ **(b)** $\frac{x^3}{3} + C$ **(c)** $\frac{x^4}{4} + C$

29. (a) $\frac{1}{x} + C$ **(b)** $x + \frac{1}{x} + C$ **(c)** $5x - \frac{1}{x} + C$

31. (a) $-\frac{1}{2}\cos 2t + C$ **(b)** $2 \operatorname{sen} \frac{t}{2} + C$

(c) $-\frac{1}{2}\cos 2t + 2 \operatorname{sen} \frac{t}{2} + C$

33. $f(x) = x^2 - x$ **35.** $r(\theta) = 8\theta + \cot\theta - 2\pi - 1$

37. $s = 4.9t^2 + 5t + 10$ **39.** $s = \frac{1 - \cos(\pi t)}{\pi}$

41. $s = 16t^2 + 20t + 5$ **43.** $s = \operatorname{sen}(2t) - 3$

45. Si $T(t)$ es la temperatura del termómetro en el tiempo t, entonces $T(0) = -19$°C y $T(14) = 100$°C. De acuerdo con el teorema del valor medio, existe un $0 < t_0 < 14$ tal que $\frac{T(14) - T(0)}{14 - 0} = 8.5\ ^\circ\text{C/seg} = T'(t_0)$, la razón a la que la temperatura estaba cambiando en $t = t_0$ conforme se medía mediante por la elevación del mercurio en el termómetro.

47. Porque su rapidez promedio era aproximadamente de 7.667 nudos y, de acuerdo con el teorema del valor medio, tendría que haber ido a esa rapidez por lo menos una vez durante el recorrido.

51. La conclusión del teorema del valor medio da por resultado

$$\frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}{b - a} = -\frac{1}{c^2} \Rightarrow c^2\left(\frac{a - b}{ab}\right) = a - b \Rightarrow c = \sqrt{ab}.$$

55. De acuerdo con el teorema del valor intermedio, $f(x)$ debe ser cero al menos una vez entre a y b. Ahora suponga que $f(x)$ es cero dos veces entre a y b. Entonces, según el teorema del valor medio, $f'(x)$ tendría que ser cero al menos una vez entre esos dos ceros de $f(x)$, pero esto no puede ser cierto, ya que se estableció que $f'(x) \neq 0$ en este intervalo. Por lo tanto, $f(x)$ es cero una y solo una vez entre a y b.

61. $1.09999 \le f(0.1) \le 1.1$

Sección 4.3, páginas 266-267

1. (a) 0, 1 **(b)** es creciente en $(-\infty, 0)$ y $(1, \infty)$, y decreciente en $(0, 1)$ **(c)** máximo local en $x = 0$; mínimo local en $x = 1$

3. (a) $-2, 1$ **(b)** es creciente en $(-2, 1)$ y $(1, \infty)$, y decreciente en $(-\infty, -2)$ **(c)** no tiene máximo local; mínimo local en $x = -2$

5. (a) $-2, 1, 3$ **(b)** es creciente en $(-2, 1)$ y $(3, \infty)$, y decreciente en $(-\infty, -2)$ y $(1, 3)$ **(c)** máximo local en $x = 1$; mínimo local en $x = -2, 3$

7. (a) $-2, 0$ **(b)** es creciente en $(-\infty, -2)$ y $(0, \infty)$, y decreciente en $(-2, 0)$ **(c)** máximo local en $x = -2$; mínimo local en $x = 0$

9. (a) Es creciente en $(-\infty, -1.5)$, y decreciente en $(-1.5, \infty)$ **(b)** máximo local: 5.25 en $t = -1.5$ **(c)** máximo absoluto: 5.25 en $t = -1.5$.

11. (a) Es decreciente en $(-\infty, 0)$, creciente en $(0, 4/3)$, decreciente en $(4/3, \infty)$ **(b)** mínimo local en $x = 0$ $(0, 0)$; máximo local en $x = 4/3$ $(4/3, 32/27)$ **(c)** no tiene extremos absolutos

13. (a) Es decreciente en $(-\infty, 0)$, creciente en $(0, 1/2)$, decreciente en $(1/2, \infty)$ **(b)** mínimo local en $\theta = 0$ $(0, 0)$, máximo local en $\theta = 1/2$ $(1/2, 1/4)$ **(c)** no tiene extremos absolutos

15. (a) Es creciente en $(-\infty, \infty)$, y nunca es decreciente **(b)** no tiene extremos locales **(c)** no tiene extremos absolutos

17. (a) Es creciente en $(-2, 0)$ y $(2, \infty)$, y decreciente en $(-\infty, -2)$ y $(0, 2)$ **(b)** máximo local: 16 en $x = 0$; mínimo local: 0 en $x = \pm 2$ **(c)** no tiene máximo absoluto; mínimo absoluto: 0 en $x = \pm 2$

19. (a) Es creciente en $(-\infty, -1)$, decreciente en $(-1, 0)$, creciente en $(0, 1)$, decreciente en $(1, \infty)$ **(b)** máximo local en $x = \pm 1$ $(1, 0.5)$, $(-1, 0.5)$, mínimo local en $x = 0$ $(0, 0)$ **(c)** máximo absoluto; 1/2 en $x = \pm 1$; no tiene mínimo absoluto

21. (a) Es decreciente en $(-2\sqrt{2}, -2)$, creciente en $(-2, 2)$, decreciente en $(2, 2\sqrt{2})$ **(b)** mínimo local: $g(-2) = -4$, $g(2\sqrt{2}) = 0$; máximo local: $g(-2\sqrt{2}) = 0$, $g(2) = 4$ **(c)** máximo absoluto; 4 en $x = 2$; mínimo absoluto: -4 en $x = -2$

23. **(a)** Es creciente en $(-\infty, 1)$, decreciente cuando $1 < x < 2$, decreciente cuando $2 < x < 3$, discontinua en $x = 2$, creciente en $(3, \infty)$ **(b)** mínimo local en $x = 3(3, 6)$, máximo local: $x = 1(1, 2)$ **(c)** no tiene extremos absolutos

25. **(a)** Es creciente en $(-2, 0)$ y $(0, \infty)$, decreciente en $(-\infty, -2)$ **(b)** mínimo local: $-6\sqrt[3]{2}$ en $x = -2$ **(c)** no tiene máximo absoluto; mínimo absoluto: $-6\sqrt[3]{2}$ en $x = -2$

27. **(a)** Es creciente en $\left(-\infty, -2/\sqrt{7}\right)$ y $\left(2/\sqrt{7}, \infty\right)$, decreciente en $\left(-2/\sqrt{7}, 0\right)$ y $\left(0, 2/\sqrt{7}\right)$ **(b)** máximo local: $24\sqrt[3]{2}/7^{7/6} \approx 3.12$ en $x = -2/\sqrt{7}$; mínimo local: $-24\sqrt[3]{2}/7^{7/6} \approx -3.12$ en $x = 2/\sqrt{7}$ **(c)** no tiene extremos absolutos

29. **(a)** Máximo local: 1 en $x = 1$; mínimo local: 0 en $x = 2$ **(b)** Máximo absoluto: 1 en $x = 1$: mínimo; no tiene mínimo absoluto

31. **(a)** Máximo local: 1 en $x = 1$: mínimo local: 0 en $x = 2$ **(b)** no tiene máximo absoluto; mínimo absoluto: 0 en $x = 2$

33. **(a)** Máximos locales: -9 en $t = -3$ y 16 en $t = 2$; mínimo local: -16 en $t = -2$ **(b)** máximo absoluto: 16 en $t = 2$; no tiene mínimo absoluto

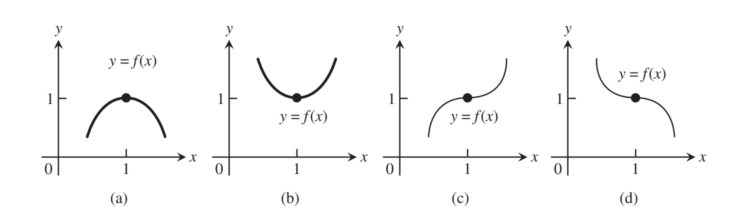
35. **(a)** Mínimo local: 0 en $x = 0$ **(b)** no tiene máximo absoluto; mínimo absoluto: 0 en $x = 0$

37. **(a)** Mínimo local: $(\pi/3) - \sqrt{3}$ en $x = 2\pi/3$; máximo local: 0 en $x = 0$; máximo local: π en $x = 2\pi$

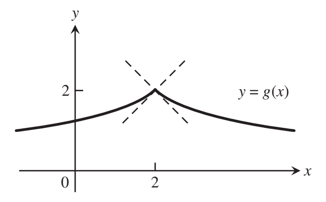
39. **(a)** Mínimo local: 0 en $x = \pi/4$

41. Máximo local: 3 en $\theta = 0$; mínimo local: -3 en $\theta = 2\pi$

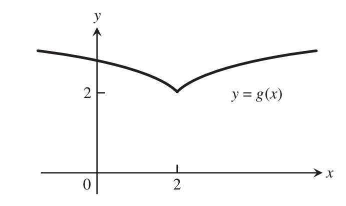
43.



45. **(a)**



(b)



47. Crece

Sección 4.4, páginas 274-277

1. Máximo local: 3/2 en $x = -1$, mínimo local: -3 en $x = 2$, punto de inflexión en $(1/2, -3/4)$, se eleva en $(-\infty, -1)$ y $(2, \infty)$, cae en $(-1, 2)$, es cóncava hacia arriba en $(1/2, \infty)$, y cóncava hacia abajo en $(-\infty, 1/2)$

3. Máximo local: 3/4 en $x = 0$, mínimo local: 0 en $x = \pm 1$, puntos de inflexión en $\left(-\sqrt{3}, \frac{3\sqrt[3]{4}}{4}\right)$ y $\left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt[3]{4}}{4}\right)$, se eleva en $(-1, 0)$ y $(1, \infty)$, cae en $(-\infty, -1)$ y $(0, 1)$, es cóncava hacia arriba en $(-\infty, -\sqrt{3})$ y $(\sqrt{3}, \infty)$, y cóncava hacia abajo en $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

5. Máximo local: $-2\pi/3 + \sqrt{3}/2$ en $x = -2\pi/3$; $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ en $x = \frac{\pi}{3}$, mínimo local: $-\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ en $x = -\frac{\pi}{3}$; $2\pi/3 - \sqrt{3}/2$ en $x = \frac{2\pi}{3}$, puntos de inflexión en $(-\pi/2, -\pi/2)$, $(0, 0)$ y $(\pi/2, \pi/2)$, se eleva en $(-\pi/3, \pi/3)$, cae en $(-2\pi/3, -\pi/3)$ y $(\pi/3, 2\pi/3)$, cóncava hacia arriba en $(-\pi/2, 0)$ y $(\pi/2, 2\pi/3)$, cóncava hacia abajo en $(-2\pi/3, -\pi/2)$ y $(0, \pi/2)$

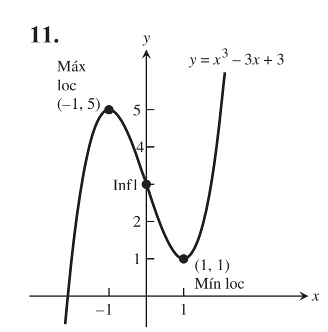
7. Máximo local: 1 en $x = -\frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{\pi}{2}$; 0 en $x = -2\pi$ y $x = 2\pi$; mínimo local: -1 en $x = -\frac{3\pi}{2}$ y $x = \frac{3\pi}{2}$, 0 en $x = 0$, puntos de inflexión en $(-\pi, 0)$ y $(\pi, 0)$, se eleva en $(-3\pi/2, -\pi/2)$, $(0, \pi/2)$ y $(3\pi/2, 2\pi)$, cae en $(-2\pi, -3\pi/2)$, $(-\pi/2, 0)$ y $(\pi/2, 3\pi/2)$, cóncava hacia arriba en $(-2\pi, -\pi)$ y $(\pi, 2\pi)$, cóncava hacia abajo en $(-\pi, \pi)$

9.

$y = x^2 - 4x + 3$

(2, −1) Mín loc

11.



13.

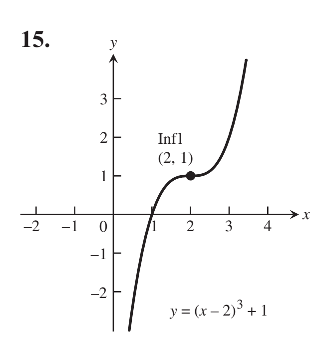
$y = -2x^3 + 6x^2 - 3$

(2, 5) Máx loc

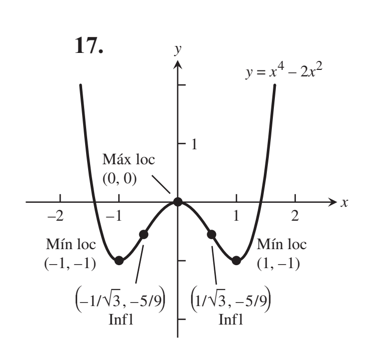
Infl (1, 1)

(0, −3) Mín loc

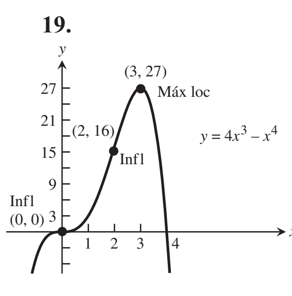
15.



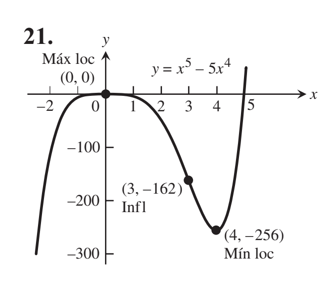
17.



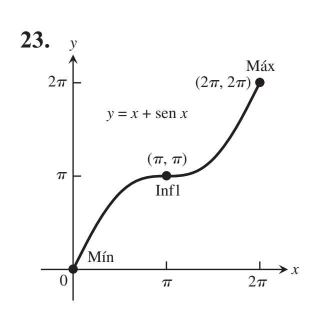
19.



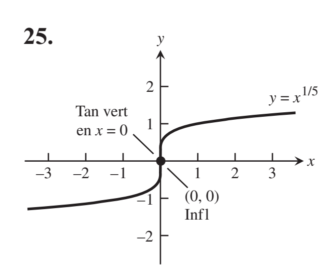
21.



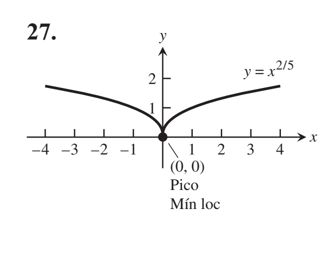
23.



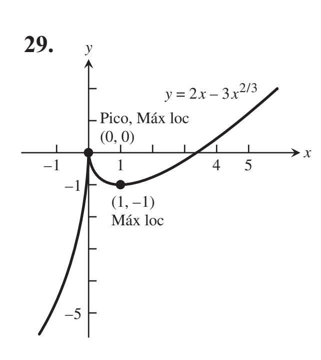
25.



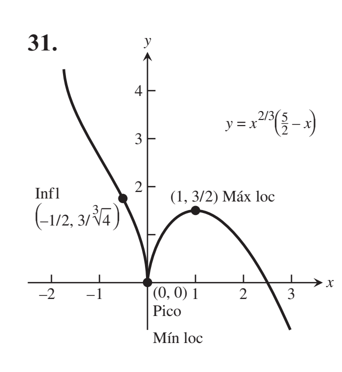
27.



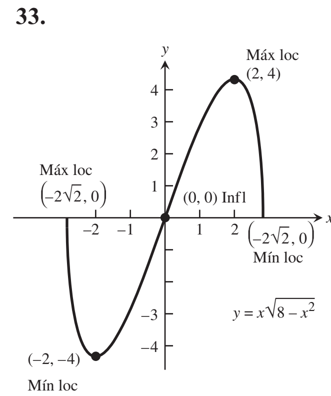
29.



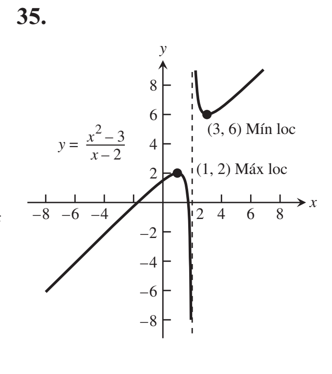
31.



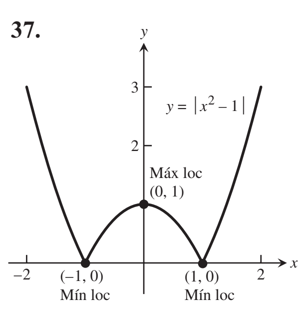
33.



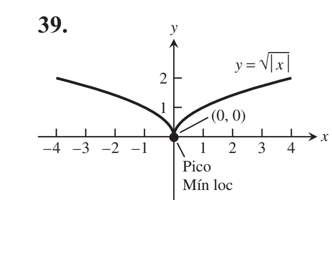
35.



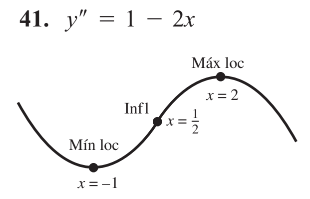
37.



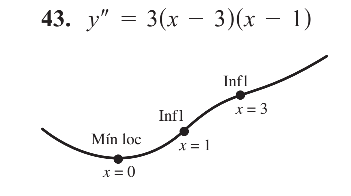
39.



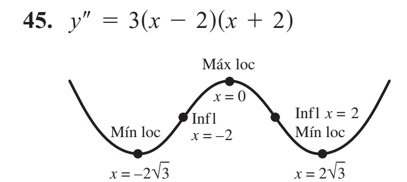
41. $y'' = 1 - 2x$



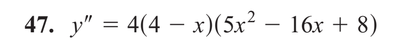
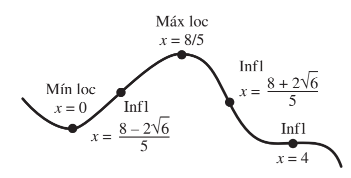
43. $y'' = 3(x - 3)(x - 1)$



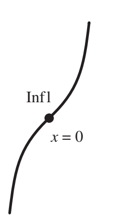
45. $y'' = 3(x - 2)(x + 2)$



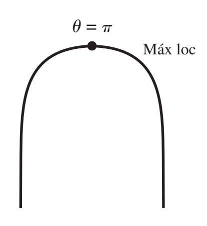
47. $y'' = 4(4 - x)(5x^2 - 16x + 8)$

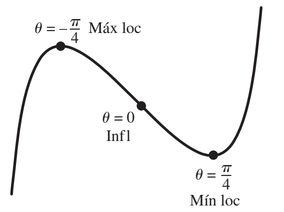
49. $y'' = 2\sec^2 x \tan x$



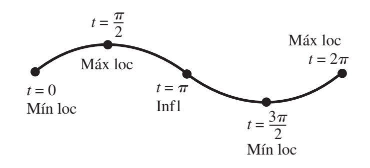
51. $y'' = -\frac{1}{2}\csc^2 \frac{\theta}{2}, 0 < \theta < 2\pi$



53. $y'' = 2 \tan\theta \sec^2\theta,\ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$



55. $y'' = -\text{sen}\, t,\ 0 \le t \le 2\pi$



57. $y'' = -\frac{2}{3}(x+1)^{-5/3}$

59. $y'' = \frac{1}{3}x^{-2/3} + \frac{2}{3}x^{-5/3}$

61. $y'' = \begin{cases} -2, & x < 0 \\ 2, & x > 0 \end{cases}$

63.

65.

67.

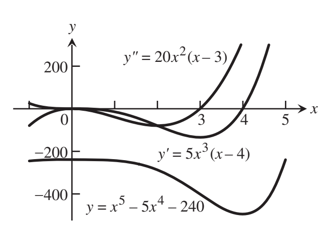
Punto	y'	y''
P	$-$	$+$
Q	$+$	0
R	$+$	$-$
S	0	$-$
T	$-$	$-$

69.

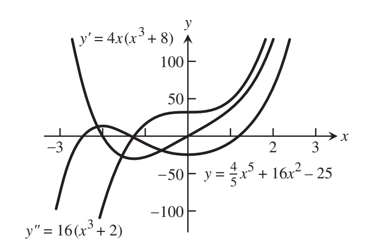
73. ≈ 60 mil unidades **75.** Mínimo local en $x = 2$, puntos de inflexión en $x = 1$ y $x = 5/3$ **79.** $b = -3$

81. **(a)** $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ **(b)** cóncava hacia arriba si $a > 0$, cóncava hacia abajo si $a < 0$.

85. Los ceros de $y' = 0$ y $y'' = 0$ son extremos y puntos de inflexión, respectivamente. Inflexión en $x = 3$, máximo local en $x = 0$, mínimo local en $x = 4$.



87. Los ceros de $y' = 0$ y $y'' = 0$ son extremos y puntos de inflexión, respectivamente. Inflexión en $x = -\sqrt[3]{2}$, máximo local en $x = -2$, mínimo local en $x = 0$.



91. **(b)** $f'(x) = 3x^2 + k$; $-12k$; de manera positiva si $k < 0$, de manera negativa si $k > 0$, 0 si $k = 0$; f' tiene dos ceros si $k < 0$, un cero si $k = 0$, no tiene ceros si $k > 0$; esto es, el signo de k controla el número de extremos locales.

93. **(b)** Un pico, ya que $\lim_{x\to 0^-} y' = \infty$ y $\lim_{x\to 0^+} y' = -\infty$

95. Sí, la gráfica de y' cruza por el cero cerca de -3, de manera que y tiene una tangente horizontal cerca de -3.

Sección 4.5, páginas 285-292

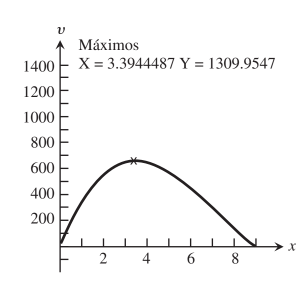
1. 16 pulg., 4 pulg. por 4 pulg. **3.** **(a)** $(x, 1 - x)$
(b) $A(x) = 2x(1 - x)$ **(c)** $\frac{1}{2}$ unidades cuadradas, 1 por $\frac{1}{2}$

5. $\frac{14}{3} \times \frac{35}{3} \times \frac{5}{3}$ pulg., $\frac{2450}{27}$ pulg.^{3} **7.** 80,000 m^2; 400 m por 200 m

9. **(a)** Las dimensiones óptimas del tanque son 10 pies en los límites de la base y 5 pies de profundidad.
(b) Minimizando el área de la superficie del tanque, su peso se minimiza para un espesor dado de la pared. El espesor de las paredes de acero estaría probablemente determinado por otras consideraciones, tales como los requerimientos estructurales.

11. 9×18 pulg. **13.** $\frac{\pi}{2}$ **15.** $h : r = 8 : \pi$

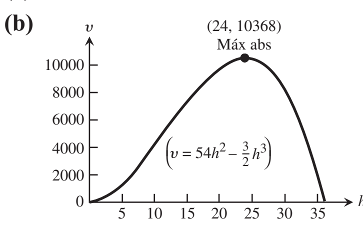
17. **(a)** $V(x) = 2x(24 - 2x)(18 - 2x)$ **(b)** Dominio: (0, 9)



(c) Volumen máximo ≈ 1309.95 pulg.^{3} cuando $x \approx 3.39$ pulg.
(d) $V'(x) = 24x^2 - 336x + 864$, de manera que el punto crítico está en $x = 7 - \sqrt{13}$, lo cual confirma el resultado del inciso (c).
(e) $x = 2$ pulg. o $x = 5$ pulg.

19. ≈ 2418.40 cm^3

21. **(a)** $h = 24$, $w = 18$
(b)



23. Si r es el radio del hemisferio, h la altura del cilindro y V el volumen, entonces $r = \left(\frac{3V}{8\pi}\right)^{1/3}$ y $h = \left(\frac{3V}{\pi}\right)^{1/3}$.

25. **(b)** $x = \frac{51}{8}$ **(c)** $L \approx 11$ pulg.

27. Radio $= \sqrt{2}$ m, altura $= 1$ m, volumen $\frac{2\pi}{3}$ m^3

31. **(a)** $v(0) = 96$ pies/seg **(b)** 256 pies en $t = 3$ seg
(c) Velocidad cuando $s = 0$ es $v(7) = -128$ pies/seg

33. ≈ 46.87 pies **35.** **(a)** $6 \times 6\sqrt{3}$ pulg.

37. **(a)** $10\pi \approx 31.42$ cm/seg; cuando $t = 0.5$ seg, 1.5 seg, 2.5 seg, 3.5 seg; $s = 0$, la aceleración es 0 **(b)** 10 cm de la posición de reposo; la rapidez es 0

39. **(a)** $s = ((12 - 12t)^2 + 64t^2)^{1/2}$ **(b)** -12 nudos, 8 nudos
(c) No **(e)** $4\sqrt{13}$. Este límite es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las rapideces individuales.

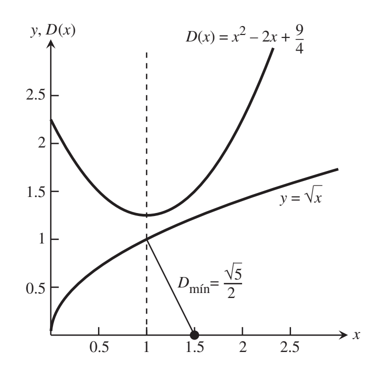
41. $x = \frac{a}{2}$, $v = \frac{ka^2}{4}$ **43.** $\frac{c}{2} + 50$

45'. **(a)** $\sqrt{\frac{2km}{h}}$ **(b)** $\sqrt{\frac{2km}{h}}$

49. **(a)** El fabricante de armarios debe ordenar px unidades de material para tener suficiente hasta la siguiente entrega.
(c) Costo promedio por día $= \dfrac{\left(d + \frac{ps}{2}x^2\right)}{x} = \frac{d}{x} + \frac{ps}{2}x$;
$x^* = \sqrt{\frac{2d}{ps}}$; $px^* = \sqrt{\frac{2pd}{s}}$ da un mínimo.
(d) La recta y la hipérbola se intersecan cuando $\frac{d}{x} = \frac{ps}{2}x$. Para $x > 0$, $x_{\text{intersección}} = \sqrt{\frac{2d}{ps}} = x^*$. El costo promedio por día se minimiza cuando el costo promedio diario de entrega es igual al costo promedio diario de almacenaje.

51. $M = \frac{C}{2}$ **57.** **(a)** $y = -1$

59. **(a)** La distancia mínima es $\frac{\sqrt{5}}{2}$.
(b) La distancia mínima es del punto (3/2, 0) al punto (1, 1) en la gráfica de $y = \sqrt{x}$, mismo que se alcanza en el valor $x = 1$, donde $D(x)$, la distancia al cuadrado, tiene su valor mínimo.



61. **(a)** $V(x) = \frac{\pi}{3}\left(\frac{2\pi a - x}{2\pi}\right)^2 \sqrt{a^2 - \left(\frac{2\pi a - x}{2\pi}\right)^2}$

(b) Cuando $a = 4$: $r = \frac{4\sqrt{6}}{3}, h = \frac{4\sqrt{3}}{3}$; cuando $a = 5$: $r = \frac{5\sqrt{6}}{3}, h = \frac{5\sqrt{3}}{3}$; cuando $a = 6$: $r = 2\sqrt{6}, h = 2\sqrt{3}$; cuando $a = 8$: $r = \frac{8\sqrt{6}}{3}, h = \frac{8\sqrt{3}}{3}$

(c) Como $r = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ y $h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, la relación es $\frac{r}{h} = \sqrt{2}$.

Sección 4.6, páginas 298-299

1. $\frac{1}{4}$ **3.** $\frac{5}{7}$ **5.** $\frac{1}{2}$ **7.** 0 **9.** 1 **11.** $\sqrt{2}$ **13.** $+1$

15. -1 **17.** $\frac{1}{2}$ **19.** 3 **21.** na **23.** $-\frac{1}{2}$ **25.** 0 **27.** 3

29. 1 **31.** (b) es correcto, pero (a) no lo es.

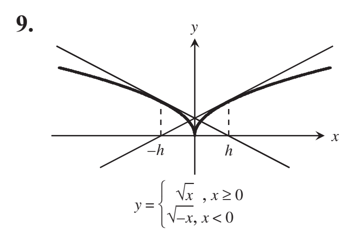
33. $c = \frac{27}{10}$ **35.** -1

Sección 4.7, páginas 305-306

1. $x_2 = -\frac{5}{3}, \frac{13}{21}$ **3.** $x_2 = -\frac{51}{31}, \frac{5763}{4945}$ **5.** $x_2 = \frac{2387}{2000}$

7. x y todas las últimas aproximaciones serán iguales a x_0.

9.



11. Los puntos de intersección de $y = x^3$ y $y = 3x + 1$ o $y = x^3 - 3x$ y $y = 1$ tienen los mismos valores x que las raíces de la parte (i) o las soluciones de la parte (iv). **15.** 1.165561185

17. **(a)** Dos **(b)** 0.35003501505249 y -1.0261731615301

19. $\pm 1.3065629648764, \pm 0.5411961001462$ **21.** $x \approx 0.45$

23. La raíz es 1.17951.

25. **(a)** Para $x_0 = -2$ o $x_0 = -0.8$, $x_i \to -1$ conforme i crece.
(b) Para $x_0 = -0.5$ o $x_0 = 0.25$, $x_i \to 0$ conforme i crece.
(c) Para $x_0 = 0.8$ o $x_0 = 2$, $x_i \to 1$ conforme i crece.
(d) Para $x_0 = -\sqrt{21}/7$ o $x_0 = \sqrt{21}/7$, el método de Newton no converge. Los valores de x_i alternando entre $-\sqrt{21}/7$ y $\sqrt{21}/7$ conforme i crece.

27. Las repuestas variarán de acuerdo con la rapidez de la máquina.

29. 2.45, 0.000245

Sección 4.8, páginas 314-318

1. **(a)** x^2 **(b)** $\frac{x^3}{3}$ **(c)** $\frac{x^3}{3} - x^2 + x$

3. **(a)** x^{-3} **(b)** $-\frac{1}{3}x^{-3}$ **(c)** $-\frac{1}{3}x^{-3} + x^2 + 3x$

5. **(a)** $-\frac{1}{x}$ **(b)** $-\frac{5}{x}$ **(c)** $2x + \frac{5}{x}$

7. **(a)** $\sqrt{x^3}$ **(b)** $\sqrt{x}$ **(c)** $\frac{2\sqrt{x^3}}{3} + 2\sqrt{x}$

9. **(a)** $x^{2/3}$ **(b)** $x^{1/3}$ **(c)** $x^{-1/3}$

11. **(a)** $\cos(\pi x)$ **(b)** $-3\cos x$ **(c)** $-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x) + \cos(3x)$

13. **(a)** $\tan x$ **(b)** $2\tan\left(\frac{x}{3}\right)$ **(c)** $-\frac{2}{3}\tan\left(\frac{3x}{2}\right)$

15. **(a)** $-\csc x$ **(b)** $\frac{1}{5}\csc(5x)$ **(c)** $2\csc\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

17. $\frac{x^2}{2} + x + C$ **19.** $t^3 + \frac{t^2}{4} + C$ **21.** $\frac{x^4}{2} - \frac{5x^2}{2} + 7x + C$

23. $-\frac{1}{x} - \frac{x^3}{3} - \frac{x}{3} + C$ **25.** $\frac{3}{2}x^{2/3} + C$

27. $\frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{3}{4}x^{4/3} + C$ **29.** $4y^2 - \frac{8}{3}y^{3/4} + C$

31. $x^2 + \frac{2}{x} + C$ **33.** $2\sqrt{t} - \frac{2}{\sqrt{t}} + C$ **35.** $-2\,\text{sen}\,t + C$

37. $-21\cos\frac{\theta}{3} + C$ **39.** $3\cot x + C$ **41.** $-\frac{1}{2}\csc\theta + C$

43. $4\sec x - 2\tan x + C$ **45.** $-\frac{1}{2}\cos 2x + \cot x + C$

47. $\frac{t}{2} + \frac{\text{sen}\,4t}{8} + C$ **49.** $\tan\theta + C$

51. $-\cot x - x + C$ **53.** $-\cos\theta - \theta + C$

61. **(a)** Erróneo: $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2}\,\text{sen}\,x + C\right) = \frac{2x}{2}\,\text{sen}\,x + \frac{x^2}{2}\cos x = x\,\text{sen}\,x + \frac{x^2}{2}\cos x$

(b) Erróneo: $\frac{d}{dx}(-x\cos x + C) = -\cos x + x\,\text{sen}\,x$

(c) Correcto: $\frac{d}{dx}(-x\cos x + \text{sen}\,x + C) = -\cos x + x\,\text{sen}\,x + \cos x = x\,\text{sen}\,x$

63. **(a)** Erróneo: $\frac{d}{dx}\left(\frac{(2x+1)^3}{3} + C\right) = \frac{3(2x+1)^2(2)}{3} = 2(2x+1)^2$

(b) Erróneo: $\frac{d}{dx}((2x+1)^3 + C) = 3(2x+1)^2(2) = 6(2x+1)^2$

(c) Correcto: $\frac{d}{dx}((2x+1)^3 + C) = 6(2x+1)^2$

65. (b) **67.** $y = x^2 - 7x + 10$ **69.** $y = -\frac{1}{x} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$

71. $y = 9x^{1/3} + 4$ **73.** $s = t + \text{sen}\,t + 4$

75. $r = \cos(\pi\theta) - 1$ **77.** $v = \frac{1}{2}\sec t + \frac{1}{2}$

79. $y = x^2 - x^3 + 4x + 1$ **81.** $r = \frac{1}{t} + 2t - 2$

83. $y = x^3 - 4x^2 + 5$ **85.** $y = -\text{sen}\,t + \cos t + t^3 - 1$

87. $y = 2x^{3/2} - 50$ **89.** $y = x - x^{4/3} + \frac{1}{2}$

91. $y = -\text{sen}\, x - \cos x - 2$

93. **(a)** **(i)** 33.2 unidades, **(ii)** 33.2 unidades, **(iii)** 33.2 unidades
(b) Cierto.

95. $t = 88/k,\ k = 16$

97. **(a)** $v = 10t^{3/2} - 6t^{1/2}$ **(b)** $s = 4t^{5/2} - 4t^{3/2}$

101. **(a)** $-\sqrt{x} + C$ **(b)** $x + C$ **(c)** $\sqrt{x} + C$
(d) $-x + C$ **(e)** $x - \sqrt{x} + C$ **(f)** $-x - \sqrt{x} + C$

Ejercicios prácticos, páginas 318-321

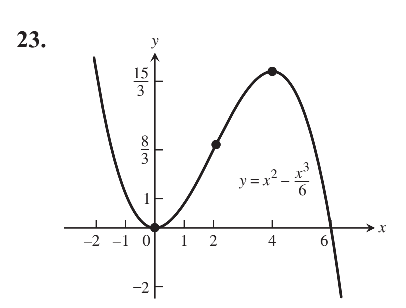
1. No **3.** No hay mínimo; máximo absoluto: $f(1) = 16$; puntos críticos: $x = 1$ y $11/3$ **5.** Sí, excepto en $x = 0$ **7.** No

11. **(b)** Una

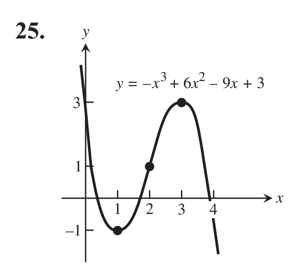
13. **(b)** 0.8555 99677 2 **19.** Valor mínimo global de $\frac{1}{2}$ en $x = 2$

21. **(a)** $t = 0, 6, 12$ **(b)** $t = 3, 9$ **(c)** $6 < t < 12$
(d) $0 < t < 6,\ 12 < t < 14$

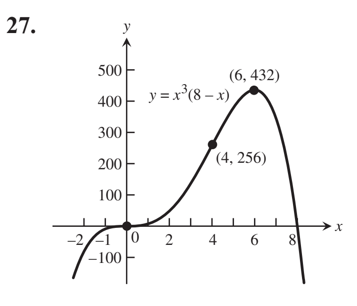
23.



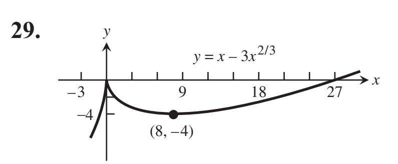
25.



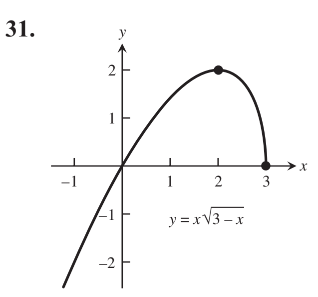
27.



29.

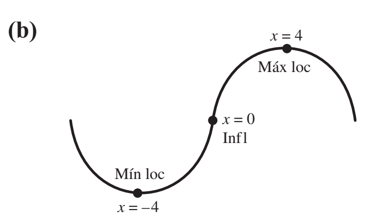


31.



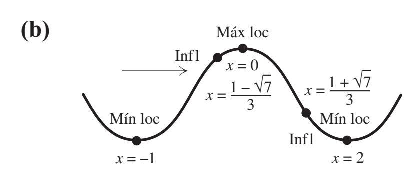
33. **(a)** Máximo local en $x = 4$, mínimo local en $x = -4$, punto de inflexión en $x = 0$

(b)



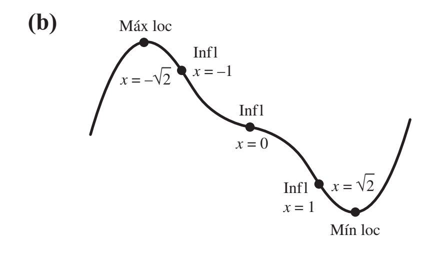
35. **(a)** Máximo local en $x = 0$, mínimo local en $x = -1$ y $x = 2$, puntos de inflexión en $x = \left(1 \pm \sqrt{7}\right)/3$

(b)

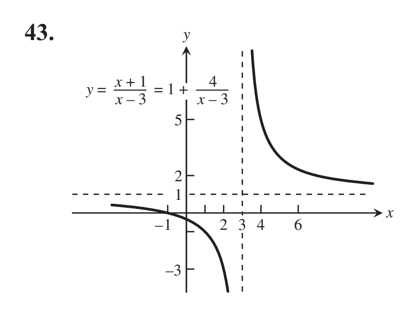


37. **(a)** Máximo local en $x = -\sqrt{2}$, mínimo local en $x = \sqrt{2}$, punto de inflexión en $x = \pm 1$ y 0

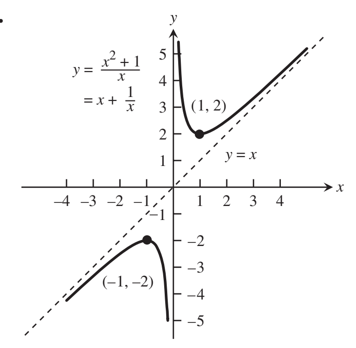
(b)



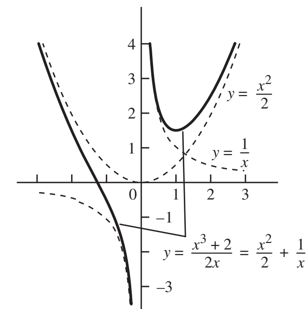
43.



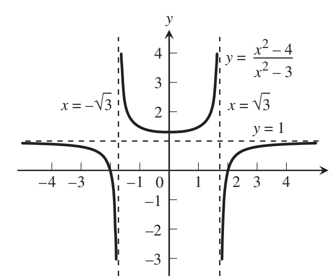
45.



47.



49.



51. 5 **53.** 0 **55.** 1 **57.** 3/7 **59.** 0 **61.** 1

63. **(a)** 0, 36 **(b)** 18, 18 **65.** 54 unidades cuadradas

67. altura = 2, radio = $\sqrt{2}$

69. $x = 5 - \sqrt{5}$ cientos ≈ 276 llantas, $y = 2(5 - \sqrt{5})$ cientos ≈ 553 llantas

71. Dimensiones: la base mide 6 por 12 pulgadas, altura = 2 pulgadas; volumen máximo = 144 pulgadas cúbicas.

73. $x_5 = 2.1958\,23345$ **75.** $\frac{x^4}{4} + \frac{5}{2}x^2 - 7x + C$

77. $2t^{3/2} - \frac{4}{t} + C$ **79.** $-\frac{1}{r+5} + C$

81. $(\theta^2 + 1)^{3/2} + C$ **83.** $\frac{1}{3}(1 + x^4)^{3/4} + C$

85. $10 \tan \frac{s}{10} + C$ **87.** $-\frac{1}{\sqrt{2}} \csc \sqrt{2}\,\theta + C$

89. $\frac{1}{2}x - \operatorname{sen} \frac{x}{2} + C$ **91.** $y = x - \frac{1}{x} - 1$

93. $r = 4t^{5/2} + 4t^{3/2} - 8t$

Ejercicios adicionales y avanzados, páginas 322-324

1. La función es constante en el intervalo.

3. Los puntos extremos no estarán en los extremos de un intervalo abierto.

5. **(a)** Un mínimo local en $x = -1$, puntos de inflexión en $x = 0$ y $x = 2$ **(b)** Un máximo local en $x = 0$ y mínimos locales en $x = -1$ y $x = 2$, puntos de inflexión en $x = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3}$

9. No **11.** $a = 1, b = 0, c = 1$ **13.** Sí **15.** El mejor lugar para taladrar el agujero es en $y = h/2$.

17. $r = \frac{RH}{2(H - R)}$ para $H > 2R$, $r = R$ si $H \le 2R$

19. **(a)** $\frac{10}{3}$ **(b)** $\frac{5}{3}$ **(c)** $\frac{1}{2}$ **(d)** 0 **(e)** $-\frac{1}{2}$ **(f)** 1 **(g)** $\frac{1}{2}$ **(h)** 3

21. **(a)** $\frac{c - b}{2e}$ **(b)** $\frac{c + b}{2}$ **(c)** $\frac{b^2 - 2bc + c^2 + 4ae}{4e}$ **(d)** $\frac{c + b + t}{2}$

23. $m_0 = 1 - \frac{1}{q}, m_1 = \frac{1}{q}$

25. **(a)** $k = -38.72$ **(b)** 25 pies

27. Sí, $y = x + C$ **29.** $v_0 = \frac{2\sqrt{2}}{3} b^{3/4}$

CAPÍTULO 5

Sección 5.1, páginas 333-335

1. **(a)** 0.125 **(b)** 0.21875 **(c)** 0.625 **(d)** 0.46875

3. **(a)** 1.066667 **(b)** 1.283333 **(c)** 2.666667 **(d)** 2.083333

5. 0.3125, 0.328125 **7.** 1.5, 1.574603

9. **(a)** 87 pulg. **(b)** 87 pulg.

11. **(a)** 3490 pies **(b)** 3840 pies

13. **(a)** 74.65 pies/seg **(b)** 45.28 pies/seg **(c)** 146.59 pies

15. $\frac{31}{16}$ **17.** 1

19. **(a)** Superior = 758 galones, inferior = 543 galones
(b) Superior = 2363 galones, inferior = 1693 galones
(c) ≈ 31.4 h, ≈ 32.4 h

21. **(a)** 2 **(b)** $2\sqrt{2} \approx 2.828$
(c) $8 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}\right) \approx 3.061$
(d) Cada área es menor que el área del círculo, π. Conforme n crece, el área del polígono se acerca a π.

Sección 5.2, páginas 342-343

1. $\frac{6(1)}{1+1} + \frac{6(2)}{2+1} = 7$

3. $\cos(1)\pi + \cos(2)\pi + \cos(3)\pi + \cos(4)\pi = 0$

5. $\operatorname{sen} \pi - \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3} - 2}{2}$

7. Todas ellas **9.** b **11.** $\sum_{k=1}^{6} k$ **13.** $\sum_{k=1}^{4} \frac{1}{2^k}$

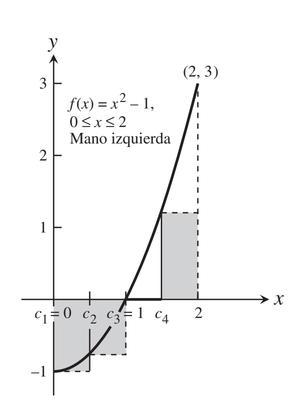
15. $\sum_{k=1}^{5} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$

17. (a) -15 **(b)** 1 **(c)** 1 **(d)** -11 **(e)** 16

19. (a) 55 **(b)** 385 **(c)** 3025

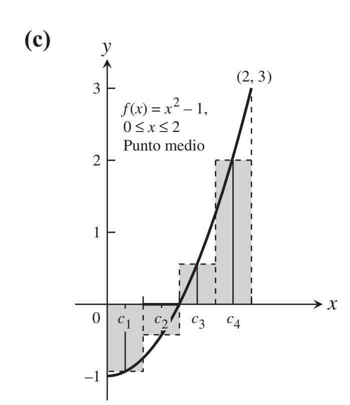
21. -56 **23.** -73 **25.** 240 **27.** 3376

29. (a)

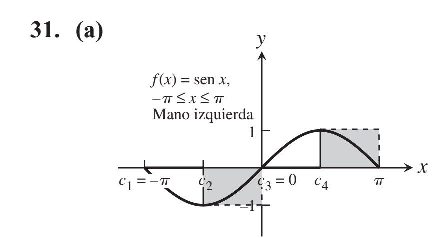


(b)

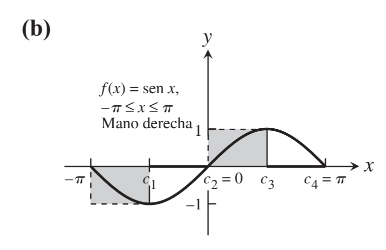
(c)



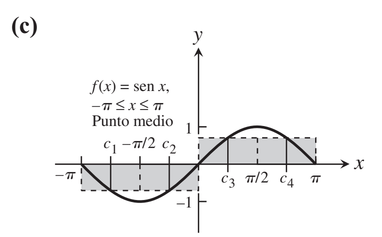
31. (a)



(b)



(c)



33. 1.2

35. $\frac{2}{3} + \frac{3n - 1}{6n^2}, \frac{2}{3}$

37. $12 + \frac{27n + 9}{2n^2}, 12$

39. $\frac{5}{6} + \frac{6n + 1}{6n^2}, \frac{5}{6}$

Sección 5.3, páginas 352-356

1. $\int_0^2 x^2\,dx$ **3.** $\int_{-7}^{5} (x^2 - 3x)\,dx$ **5.** $\int_2^3 \frac{1}{1 - x}\,dx$

7. $\int_{-\pi/4}^{0} \sec x\,dx$

9. (a) 0 **(b)** -8 **(c)** -12 **(d)** 10 **(e)** -2 **(f)** 16

11. (a) 5 **(b)** $5\sqrt{3}$ **(c)** -5 **(d)** -5

13. (a) 4 **(b)** -4 **15.** Área = 21 unidades cuadradas

17. Área = $9\pi/2$ unidades cuadradas **19.** Área = 2.5 unidades cuadradas

21. Área = 3 unidades cuadradas **23.** $b^2/4$ **25.** $b^2 - a^2$
27. $1/2$

29. $3\pi^2/2$ **31.** $7/3$ **33.** $1/24$ **35.** $3a^2/2$ **37.** $b/3$

39. -14 **41.** 10 **43.** -2 **45.** $-7/4$ **47.** 7 **49.** 0

51. Usando n subintervalos de longitud $\Delta x = b/n$ y los valores de los puntos extremos derechos:

$$\text{Área} = \int_0^b 3x^2\,dx = b^3$$

53. Usando n subintervalos de longitud $\Delta x = b/n$ y los valores de los puntos extremos derechos:

$$\text{Área} = \int_0^b 2x\,dx = b^2$$

55. $\text{prom}(f) = 0$ **57.** $\text{prom}(f) = -2$ **59.** $\text{prom}(f) = 1$

61. (a) $\text{prom}(g) = -1/2$ **(b)** $\text{prom}(g) = 1$ **(c)** $\text{prom}(g) = 1/4$

63. $a = 0$ y $b = 1$ maximizan la integral.

65. Cota superior = 1, Cota inferior = 1/2

67. Por ejemplo, $\int_0^1 \text{sen}\,(x^2)\,dx \le \int_0^1 dx = 1$

69. $\int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b 0\,dx = 0$ **71.** Cota superior = 1/2

Sección 5.4, páginas 365-368

1. 6 **3.** 8 **5.** 1 **7.** $5/2$ **9.** 2 **11.** $2\sqrt{3}$ **13.** 0

15. $-\pi/4$ **17.** $\frac{2\pi^3}{3}$ **19.** $-8/3$ **21.** $-3/4$

23. $\sqrt{2} - \sqrt[4]{8} + 1$ **25.** 16 **27.** $(\cos\sqrt{x})\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

29. $4t^5$ **31.** $\sqrt{1+x^2}$ **33.** $-\frac{1}{2}x^{-1/2}\operatorname{sen} x$ **35.** 1

37. 28/3 **39.** 1/2 **41.** 51/4 **43.** π **45.** $\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$

47. d, ya que $y' = \frac{1}{x}$ y $y(\pi) = \int_{\pi}^{\pi} \frac{1}{t}\,dt - 3 = -3$

49. b, ya que $y' = \sec x$ y $y(0) = \int_0^0 \sec t\,dt + 4 = 4$

51. $y = \int_2^x \sec t\,dt + 3$ **53.** $s = \int_{t_0}^{t} f(x)\,dx + s_0$

55. $\frac{2}{3}bh$ **57.** \$9.00

59. (a) $v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\int_0^t f(x)\,dx = f(t) \Rightarrow v(5) = f(5) = 2$ m/seg

(b) $a = df/dt$ es negativo, ya que la pendiente de la recta tangente en $t = 5$ es negativa.

(c) $s = \int_0^3 f(x)\,dx = \frac{1}{2}(3)(3) = \frac{9}{2}$ m ya que la integral es el área del triángulo formado por $y = f(x)$, el eje x y $x = 3$.

(d) $t = 6$, ya que después, entre $t = 6$ a $t = 9$, la región está debajo del eje x.

(e) En $t = 4$ y $t = 7$, ya que ahí hay tangentes horizontales.

(f) Hacia el origen, entre $t = 6$ y $t = 9$, ya que la velocidad es negativa en el intervalo. Alejándose del origen, entre $t = 0$ a $t = 6$, ya que la velocidad es positiva ahí.

(g) Lado derecho o positivo, porque la integral de f de 0 a 9 es positiva, por lo que hay más área arriba del eje x que debajo.

63. $2x - 2$ **65.** $-3x + 5$

67. (a) Cierto. Como f es continua, g es diferenciable, de acuerdo con la parte 1 del teorema fundamental del cálculo.

(b) Cierto: g es continua, porque es diferenciable.

(c) Cierto, ya que $g'(1) = f(1) = 0$.

(d) Falso, ya que $g''(1) = f'(1) > 0$.

(e) Cierto, ya que $g'(1) = 0$ y $g''(1) = f'(1) > 0$.

(f) Falso: $g''(x) = f'(x) > 0$, de manera que g'' nunca cambia de signo.

(g) Cierto, ya que $g'(1) = f(1) = 0$ y $g'(x) = f(x)$ es una función creciente de x (porque $f'(x) > 0$).

Sección 5.5, páginas 374-376

1. $-\frac{1}{3}\cos 3x + C$ **3.** $\frac{1}{2}\sec 2t + C$ **5.** $-(7x-2)^{-4} + C$

7. $-6(1 - r^3)^{1/2} + C$

9. $\frac{1}{3}(x^{3/2} - 1) - \frac{1}{6}\operatorname{sen}(2x^{3/2} - 2) + C$

11. (a) $-\frac{1}{4}(\cot^2 2\theta) + C$ **(b)** $-\frac{1}{4}(\csc^2 2\theta) + C$

13. $-\frac{1}{3}(3 - 2s)^{3/2} + C$ **15.** $\frac{2}{5}(5s + 4)^{1/2} + C$

17. $-\frac{2}{5}(1 - \theta^2)^{5/4} + C$ **19.** $-\frac{1}{3}(7 - 3y^2)^{3/2} + C$

21. $(-2/(1 + \sqrt{x})) + C$ **23.** $\frac{1}{3}\operatorname{sen}(3z + 4) + C$

25. $\frac{1}{3}\tan(3x + 2) + C$ **27.** $\frac{1}{2}\operatorname{sen}^6\left(\frac{x}{3}\right) + C$

29. $\left(\frac{r^3}{18} - 1\right)^6 + C$ **31.** $-\frac{2}{3}\cos(x^{3/2} + 1) + C$

33. $\sec\left(v + \frac{\pi}{2}\right) + C$ **35.** $\frac{1}{2\cos(2t + 1)} + C$

37. $-\frac{2}{3}(\cot^3 y)^{1/2} + C$ **39.** $-\operatorname{sen}\left(\frac{1}{t} - 1\right) + C$

41. $-\frac{\operatorname{sen}^2(1/\theta)}{2} + C$ **43.** $\frac{(s^3 + 2s^2 - 5s + 5)^2}{2} + C$

45. $\frac{1}{16}(1 + t^4)^4 + C$

47. $\frac{1}{5}(x^2 + 1)^{5/2} - \frac{1}{3}(x^2 + 1)^{3/2} + C$

49. (a) $-\frac{6}{2 + \tan^3 x} + C$ **(b)** $-\frac{6}{2 + \tan^3 x} + C$

(c) $-\frac{6}{2 + \tan^3 x} + C$

51. $\frac{1}{6}\operatorname{sen}\sqrt{3(2r - 1)^2 + 6} + C$

53. $s = \frac{1}{2}(3t^2 - 1)^4 - 5$

55. $s = 4t - 2\operatorname{sen}\left(2t + \frac{\pi}{6}\right) + 9$

57. $s = \operatorname{sen}\left(2t - \frac{\pi}{2}\right) + 100t + 1$

59. 6 m **63.** b) 399 volts

Sección 5.6, páginas 383-387

1. (a) 14/3 **(b)** 2/3

3. (a) 1/2 **(b)** $-1/2$

5. (a) 15/16 **(b)** 0

7. (a) 0 **(b)** 1/8

9. (a) 4 **(b)** 0

11. (a) 1/6 **(b)** 1/2

13. (a) 0 **(b)** 0

15. $2\sqrt{3}$ **17.** 3/4 **19.** $3^{5/2} - 1$ **21.** 3 **23.** $\pi/3$

25. 16/3 **27.** $2^{5/2}$ **29.** $\pi/2$ **31.** 128/15 **33.** 4/3

35. 5/6 **37.** 38/3 **39.** 49/6 **41.** 32/3 **43.** 48/5

45. 8/3 **47.** 8 **49.** 5/3 (hay tres puntos de intersección).

51. 18 **53.** 243/8 **55.** 8/3 **57.** 2 **59.** 104/15

61. 56/15 **63.** 4 **65.** $\frac{4}{3} - \frac{4}{\pi}$ **67.** $\pi/2$ **69.** 2 **71.** 1/2

73. 1

75. (a) $(\pm\sqrt{c}, c)$ **(b)** $c = 4^{2/3}$ **(c)** $c = 4^{2/3}$

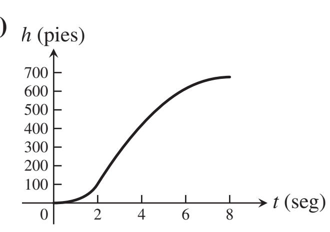
77. 11/3 **79.** 3/4 **81.** Ninguna **83.** $F(6) - F(2)$

85. (a) -3 **(b)** 3

87. $I = a/2$

Ejercicios prácticos, páginas 388-391

1. **(a)** alrededor de 680 pies **(b)**



3. **(a)** $-1/2$ **(b)** 31 **(c)** 13 **(d)** 0

5. $\int_1^5 (2x-1)^{-1/2}\,dx = 2$ **7.** $\int_{-\pi}^{0} \cos\frac{x}{2}\,dx = 2$

9. **(a)** 4 **(b)** 2 **(c)** -2 **(d)** -2π **(e)** $8/5$

11. $8/3$ **13.** 62 **15.** 1 **17.** $1/6$ **19.** 18 **21.** $9/8$

23. $\frac{\pi^2}{32} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$ **25.** 4 **27.** $\frac{8\sqrt{2}-7}{6}$

29. Mín: -4, máx. 0, área: $27/4$ **31.** $6/5$

35. $y = \int_5^x \left(\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right) dt - 3$ **37.** $-4(\cos x)^{1/2} + C$

39. $\theta^2 + \theta + \operatorname{sen}(2\theta + 1) + C$ **41.** $\frac{t^3}{3} + \frac{4}{t} + C$

43. $-\frac{1}{3}\cos(2t^{3/2}) + C$ **45.** 16 **47.** 2 **49.** 1 **51.** 8

53. $27\sqrt{3}/160$ **55.** $\pi/2$ **57.** $\sqrt{3}$ **59.** $6\sqrt{3} - 2\pi$

61. -1 **63.** 2 **65.** -2 **67.** 1 **69.** $\sqrt{2} - 1$

71. **(a)** b **(b)** b

75. 25°F **77.** $\sqrt{2 + \cos^3 x}$ **79.** $\frac{-6}{3 + x^4}$ **81.** Sí

83. $-\sqrt{1 + x^2}$

85. costo ≈ $10,899 usando una estimación con suma inferior

87. 600, $18.00 **89.** 300, $6.00

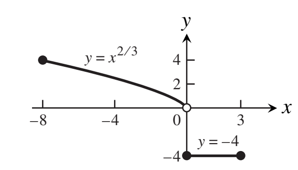
Ejercicios adicionales y avanzados, páginas 391-394

1. **(a)** Sí **(b)** No

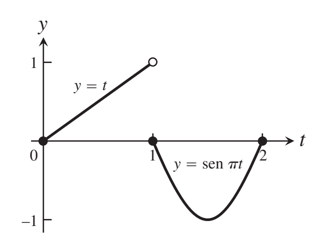
5. **(a)** $1/4$ **(b)** $\sqrt[3]{12}$

7. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ **9.** $y = x^3 + 2x - 4$

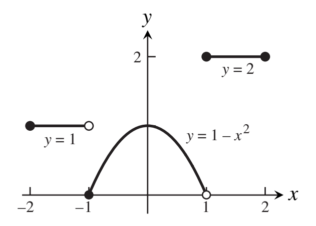
11. $36/5$



13. $\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}$



15. $13/3$



17. $1/2$ **19.** $2/x$

21. $\frac{\operatorname{sen} 4y}{\sqrt{y}} - \frac{\operatorname{sen} y}{2\sqrt{y}}$ **23.** $1/6$ **25.** $\int_0^1 f(x)\,dx$

29. **(a)** 0 **(b)** -1 **(c)** $-\pi$ **(d)** $x = 1$
(e) $y = 2x + 2 - \pi$ **(f)** $x = -1, x = 2$ **(g)** $[-2\pi, 0]$

CAPÍTULO 6

Sección 6.1, páginas 405-409

1. **(a)** $A(x) = \pi(1 - x^2)$ **(b)** $A(x) = 4(1 - x^2)$
(c) $A(x) = 2(1 - x^2)$ **(d)** $A(x) = \sqrt{3}(1 - x^2)$

3. 16 **5.** $\frac{16}{3}$ **7.** **(a)** $2\sqrt{3}$ **(b)** 8 **9.** 8π

11. **(a)** s^2h **(b)** s^2h **13.** $\frac{2\pi}{3}$ **15.** $4 - \pi$ **17.** $\frac{32\pi}{5}$

19. 36π **21.** π **23.** $\pi\left(\frac{\pi}{2} + 2\sqrt{2} - \frac{11}{3}\right)$ **25.** 2π

27. 2π **29.** 3π **31.** $\pi^2 - 2\pi$ **33.** $\frac{2\pi}{3}$ **35.** $\frac{117\pi}{5}$

37. $\pi(\pi - 2)$ **39.** $\frac{4\pi}{3}$ **41.** 8π **43.** $\frac{7\pi}{6}$

45. **(a)** 8π **(b)** $\frac{32\pi}{5}$ **(c)** $\frac{8\pi}{3}$ **(d)** $\frac{224\pi}{15}$

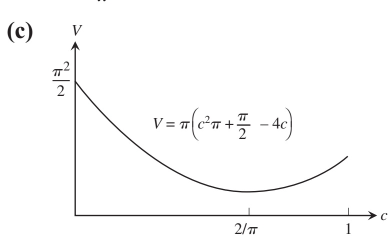
47. **(a)** $\frac{16\pi}{15}$ **(b)** $\frac{56\pi}{15}$ **(c)** $\frac{64\pi}{15}$

49. $V = 2a^2b\pi^2$ **51.** **(a)** $V = \frac{\pi h^2(3a - h)}{3}$ **(b)** $\frac{1}{120\pi}$ m/seg

55. $V = 3308\text{ cm}^3$

57. **(a)** $c = \frac{2}{\pi}$ **(b)** $c = 0$

(c)



Sección 6.2, páginas 414-416

1. 6π **3.** 2π **5.** $\frac{14\pi}{3}$ **7.** 8π **9.** $\frac{5\pi}{6}$ **11.** $\frac{7\pi}{15}$

13. **(b)** 4π **15.** $\frac{16\pi}{15}(3\sqrt{2} + 5)$ **17.** $\frac{8\pi}{3}$ **19.** $\frac{4\pi}{3}$

21. $\frac{16\pi}{3}$ **23.** **(a)** $\frac{6\pi}{5}$ **(b)** $\frac{4\pi}{5}$ **(c)** 2π **(d)** 2π

25. **(a)** Alrededor del eje x: $V = \frac{2\pi}{15}$; alrededor del eje y: $V = \frac{\pi}{6}$

(b) Alrededor del eje x: $V = \frac{2\pi}{15}$; alrededor del eje y: $V = \frac{\pi}{6}$

27. **(a)** $\frac{5\pi}{3}$ **(b)** $\frac{4\pi}{3}$ **(c)** 2π **(d)** $\frac{2\pi}{3}$

29. **(a)** $\frac{4\pi}{15}$ **(b)** $\frac{7\pi}{30}$ **31.** **(a)** $\frac{24\pi}{5}$ **(b)** $\frac{48\pi}{5}$

33. **(a)** $\frac{9\pi}{16}$ **(b)** $\frac{9\pi}{16}$

35. Discos: 2 integrales; arandelas: 2 integrales; cascarones: 1 integral.

Sección 6.3, páginas 423-424

1. $\frac{5\sqrt{10}}{3}$ **3.** 7 **5.** $\frac{21}{2}$ **7.** 12 **9.** $\frac{53}{6}$ **11.** $\frac{123}{32}$

13. $\frac{99}{8}$ **15.** 2 **17.** **(a)** $\int_{-1}^{2} \sqrt{1 + 4x^2}\, dx$ **(c)** ≈ 6.13

19. **(a)** $\int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos^2 y}\, dy$ **(c)** ≈ 3.82

21. **(a)** $\int_{-1}^{3} \sqrt{1 + (y + 1)^2}\, dy$ **(c)** ≈ 9.29

23. **(a)** $\int_0^{\pi/6} \sec x\, dx$ **(c)** ≈ 0.55

25. Sí, $f(x) = \pm x + C$ donde C es cualquier número real.

27. **(a)** $y = \sqrt{x}$ de (1, 1) a (4, 2)

(b) Sólo una. Conocemos la derivada de la función y el valor de la función en un valor de x.

29. **(a)** π **(b)** π

Sección 6.4, páginas 434-435

1. 4 pies **3.** $(L/4, L/4)$ **5.** $M_0 = 8, M = 8, \bar{x} = 1$

7. $M_0 = 15/2, M = 9/2, \bar{x} = 5/3$

9. $M_0 = 73/6, M = 5, \bar{x} = 73/30$ **11.** $M_0 = 3, M = 3, \bar{x} = 1$

13. $\bar{x} = 0, \bar{y} = 12/5$ **15.** $\bar{x} = 1, \bar{y} = -3/5$

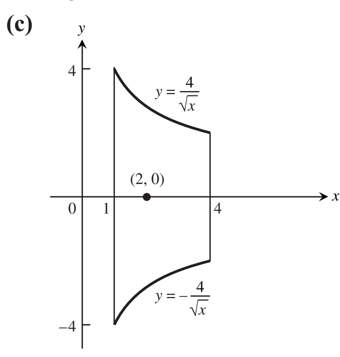
17. $\bar{x} = 16/105, \bar{y} = 8/15$ **19.** $\bar{x} = 0, \bar{y} = \pi/8$

21. $\bar{x} = 1, \bar{y} = -2/5$ **23.** $\bar{x} = \bar{y} = \frac{2}{4 - \pi}$

25. $\bar{x} = 3/2, \bar{y} = 1/2$

27. **(a)** $\frac{224\pi}{3}$ **(b)** $\bar{x} = 2, \bar{y} = 0$

(c)



31. $\bar{x} = \bar{y} = 1/3$ **33.** $\bar{x} = a/3, \bar{y} = b/3$ **35.** $13\delta/6$

37. $\bar{x} = 0, \bar{y} = \frac{a\pi}{4}$

Sección 6.5, páginas 444-447

1. **(a)** $2\pi\int_0^{\pi/4} \tan x\sqrt{1 + \sec^4 x}\, dx$ **(c)** ≈ 3.84

3. **(a)** $2\pi\int_1^{2} \frac{1}{y}\sqrt{1 + y^{-4}}\, dy$ **(c)** ≈ 5.02

5. **(a)** $2\pi\int_1^{4} (3 - \sqrt{x})^2\sqrt{1 + (1 - 3x^{-1/2})^2}\, dx$ **(c)** ≈ 63.37

7. **(a)** $2\pi\int_0^{\pi/3} \left(\int_0^{y} \tan t\, dt\right) \sec y\, dy$ **(c)** ≈ 2.08

9. $4\pi\sqrt{5}$ **11.** $3\pi\sqrt{5}$ **13.** $98\pi/81$ **15.** 2π

17. $\pi\left(\sqrt{8} - 1\right)/9$ **19.** $35\pi\sqrt{5}/3$ **21.** $253\pi/20$

25. $2\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos x)\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 x}\, dx$

27. Ordenar 226.2 litros de cada color. **31.** $5\sqrt{2}\pi$ **33.** $8\pi^2$

35. $52\pi/3$ **37.** $3\pi\sqrt{5}$ **41.** $V = 32\pi, S = 32\sqrt{2}\pi$

43. $4\pi^2$ **45.** $\bar{x} = 0, \bar{y} = \frac{2a}{\pi}$ **47.** $\bar{x} = 0, \bar{y} = \frac{4b}{3\pi}$

49. $\sqrt{2}\pi a^3(4 + 3\pi)/6$ **51.** $\frac{2a^3}{3}$

Sección 6.6, páginas 452-455

1. 400 N · m **3.** 4 cm, 0.08 J

5. **(a)** 7238 libras/pulgada **(b)** 905 pulgadas-libra, 2714 pulgadas-libra **7.** 780 J

9. 72,900 pies-libra **13.** 160 pies-libra

15. **(a)** 1,497,600 pies-libra **(b)** 1 hora, 40 min

(d) En 62.26 libras/pie^3: a) 1,494,240 pies-libra b) 1 hora, 40.1 min en 62.59 libras/pie^3: a) 1,502,160 pies-libra b) 1 hora, 40.1 min

17. 37,306 pies-libra **19.** 7,238,229.47 pies-libra

21. **(a)** 34,583, pies-libra **(b)** 53,483 pies-libra

23. 15,073,100.75 J

27. 85.1 pies-libra **29.** 64.6 pies-libra **31.** 110.6 pies-libra

33. **(a)** $r(y) = 60 - \sqrt{50^2 - (y - 325)^2}$ para $325 \leq y \leq$ 375 pies

(b) $\Delta V \approx \pi[60 - \sqrt{2500 - (y - 325)^2}]^2\, \Delta y$

(c) $W = 6.3358 \cdot 10^7$ pies-libra

35. 91.32 onzas-pulgada **37.** 5.144×10^{10} J

Sección 6.7, páginas 459-461

1. 1684.8 libras **3.** 2808 libras **5.** **(a)** 1164.8 libras **(b)** 1194.7 libras

7. 1309 libras **9.** 41.6 libras **11.** **(a)** 93.33 libras **(b)** 3 pies

13. 1035 pies^3 **15.** $wb/2$

17. No. El tanque se llenará debido a que el extremo móvil se habrá movido sólo $3\frac{1}{3}$ pies, en el momento en que el tanque esté lleno.

19. 4.2 libras **21.** **(a)** 374.4 libras **(b)** 7.5 pulgadas **(c)** No

Ejercicios de práctica, páginas 461-464

1. $\frac{9\pi}{280}$ **3.** π^2 **5.** $\frac{72\pi}{35}$

7. (a) 2π **(b)** π **(c)** $12\pi/5$ **(d)** $26\pi/5$

9. (a) 8π **(b)** $1088\pi/15$ **(c)** $512\pi/15$

11. $\pi(3\sqrt{3} - \pi)/3$

13. (a) $16\pi/15$ **(b)** $8\pi/5$ **(c)** $8\pi/3$ **(d)** $32\pi/5$

15. $\frac{28\pi}{3}$ pies^3 **17.** $\frac{10}{3}$ **19.** $\frac{285}{8}$ **21.** 10 **23.** $\frac{9\pi}{2}$

25. $\bar{x} = 0, \bar{y} = 8/5$ **27.** $\bar{x} = 3/2, \bar{y} = 12/5$

29. $\bar{x} = 9/5, \bar{y} = 11/10$ **31.** $28\pi\sqrt{2}/3$ **33.** 4π

35. $76\pi/3$ **37.** 4640 J **39.** 10 pies-libra, 30 pies-libra

41. 418,208.81 pies-libra **43.** $22{,}500\pi$ pies-libra, 257 seg

45. 332.8 libras **47.** 2196.48 libras **49.** $216w_1 + 360w_2$

Ejercicios adicionales y avanzados, páginas 464-465

1. $f(x) = \sqrt{\frac{2x - a}{\pi}}$ **3.** $f(x) = \sqrt{C^2 - 1}\,x + a$, donde $C \geq 1$

5. $\bar{x} = 0, \bar{y} = \frac{n}{2n + 1}$, $(0, 1/2)$

9. (a) $\bar{x} = \bar{y} = 4(a^2 + ab + b^2)/(3\pi(a + b))$
(b) $(2a/\pi, 2a/\pi)$

11. $28/3$ **13.** $\frac{4h\sqrt{3mh}}{3}$ **15.** ≈ 2329.6 lb

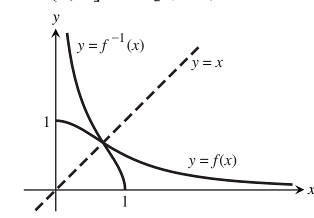
17. (a) $2h/3$ **(b)** $(6a^2 + 8ah + 3h^2)/(6a + 4h)$

CAPÍTULO 7

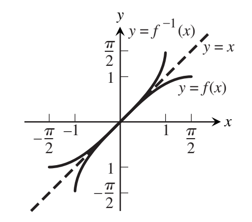
Sección 7.1, páginas 473-475

1. Inyectiva **3.** No inyectiva **5.** Inyectiva

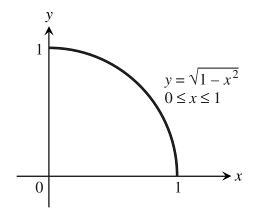
7. D: $(0, 1]$ R: $[0, \infty)$



9. D: $[-1, 1]$ R: $[-\pi/2, \pi/2]$



11. (a) Simétrica respecto de la recta $y = x$



13. $f^{-1}(x) = \sqrt{x - 1}$ **15.** $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x + 1}$

17. $f^{-1}(x) = \sqrt{x} - 1$

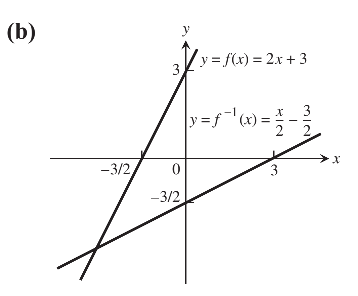
19. $f^{-1}(x) = \sqrt[5]{x}$; dominio $-\infty < x < \infty$; rango: $-\infty < y < \infty$

21. $f^{-1}(x) = 5\sqrt{x - 1}$; dominio $-\infty < x < \infty$; rango: $-\infty < y < \infty$

23. $f^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$; dominio $x > 0$; rango: $y > 0$

25. (a) $f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$

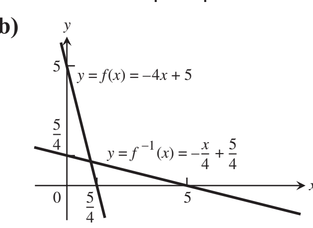
(b)



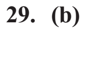
(c) 2, 1/2

27. (a) $f^{-1}(x) = -\frac{x}{4} + \frac{5}{4}$

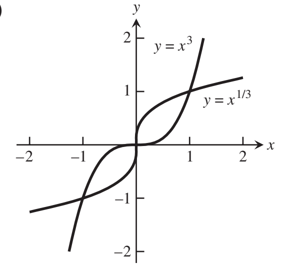
(b)



(c) $-4, -1/4$



29. (b)



(c) Pendiente de f en (1, 1): 3; pendiente de g en (1, 1): 1/3; pendiente de f en $(-1, -1)$: 3; pendiente de g en $(-1, -1)$: 1/3

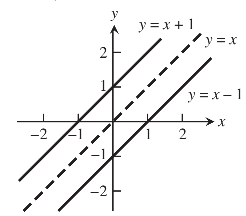
(d) $y = 0$ es tangente a $y = x^3$ en $x = 0$; $x = 0$ es tangente a $y = \sqrt[3]{x}$ en $x = 0$

31. 1/9 **33.** 3

35. **(a)** $f^{-1}(x) = \frac{1}{m}x$

(b) La gráfica de f^{-1} es la recta que pasa por el origen con pendiente $1/m$.

37. **(a)** $f^{-1}(x) = x - 1$



(b) $f^{-1}(x) = x - b$. La gráfica de f^{-1} es la recta paralela a la gráfica de f. Las gráficas de f y f^{-1} están en lados opuestos de la recta $y = x$ y son equidistantes de esa recta.

(c) Sus gráficas serán paralelas una de la otra y están en lados opuestos de la recta $y = x$, y equidistantes de esa recta.

41. Creciente y, por lo tanto, inyectiva; $df^{-1}/dx = \frac{1}{9}x^{-2/3}$

43. Decreciente y, por lo tanto, inyectiva; $df^{-1}/dx = -\frac{1}{3}x^{-2/3}$

Sección 7.2, páginas 484-485

1. **(a)** $\ln 3 - 2\ln 2$ **(b)** $2(\ln 2 - \ln 3)$ **(c)** $-\ln 2$,

(d) $\frac{2}{3}\ln 3$ **(e)** $\ln 3 + \frac{1}{2}\ln 2$ **(f)** $\frac{1}{2}(3\ln 3 - \ln 2)$

3. **(a)** $\ln 5$ **(b)** $\ln(x - 3)$ **(c)** $\ln(t^2)$

5. $1/x$ **7.** $2/t$ **9.** $-1/x$ **11.** $\frac{1}{\theta + 1}$ **13.** $3/x$

15. $2(\ln t) + (\ln t)^2$ **17.** $x^3 \ln x$ **19.** $\frac{1 - \ln t}{t^2}$

21. $\frac{1}{x(1 + \ln x)^2}$ **23.** $\frac{1}{x \ln x}$ **25.** $2\cos(\ln\theta)$

27. $-\frac{3x + 2}{2x(x + 1)}$ **29.** $\frac{2}{t(1 - \ln t)^2}$ **31.** $\frac{\tan(\ln\theta)}{\theta}$

33. $\frac{10x}{x^2 + 1} + \frac{1}{2(1 - x)}$ **35.** $2x\ln|x| - x\ln\frac{|x|}{\sqrt{2}}$ **37.** $\ln\left(\frac{2}{3}\right)$

39. $\ln|y^2 - 25| + C$ **41.** $\ln 3$ **43.** $(\ln 2)^2$ **45.** $\frac{1}{\ln 4}$

47. $\ln|6 + 3\tan t| + C$ **49.** $\ln 2$ **51.** $\ln 27$

53. $\ln(1 + \sqrt{x}) + C$

55. $\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{x(x + 1)}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x + 1}\right) = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x(x + 1)}}$

57. $\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{t}{t + 1}}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t + 1}\right) = \frac{1}{2\sqrt{t}(t + 1)^{3/2}}$

59. $\sqrt{\theta + 3}(\operatorname{sen}\theta)\left(\frac{1}{2(\theta + 3)} + \cot\theta\right)$

61. $t(t + 1)(t + 2)\left[\frac{1}{t} + \frac{1}{t + 1} + \frac{1}{t + 2}\right] = 3t^2 + 6t + 2$

63. $\frac{\theta + 5}{\theta\cos\theta}\left[\frac{1}{\theta + 5} - \frac{1}{\theta} + \tan\theta\right]$

65. $\frac{x\sqrt{x^2 + 1}}{(x + 1)^{2/3}}\left[\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{2}{3(x + 1)}\right]$

67. $\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{x(x - 2)}{x^2 + 1}}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x - 2} - \frac{2x}{x^2 + 1}\right)$

69. **(a)** Máx. = 0 en $x = 0$, mín. = $-\ln 2$ en $x = \pi/3$

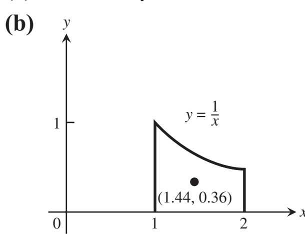
(b) Máx. = 1 en $x = 1$, mín. = $\cos(\ln 2)$ en $x = 1/2$ y $x = 2$

71. $\ln 16$ **73.** $4\pi \ln 4$ **75.** $\pi \ln 16$

77. **(a)** $6 + \ln 2$ **(b)** $8 + \ln 9$

79. **(a)** $\bar{x} \approx 1.44, \bar{y} \approx 0.36$

(b)



81. $y = x + \ln|x| + 2$ **83.** **(b)** 0.00469

Sección 7.3, páginas 493-495

1. **(a)** 7.2 **(b)** $\frac{1}{x^2}$ **(c)** $\frac{x}{y}$

3. **(a)** 1 **(b)** 1 **(c)** $-x^2 - y^2$

5. e^{2t+4} **7.** $e^{5t} + 40$ **9.** $y = 2xe^x + 1$

11. **(a)** $k = \ln 2$ **(b)** $k = (1/10)\ln 2$ **(c)** $k = 1000\ln a$

13. **(a)** $t = -10\ln 3$ **(b)** $t = -\frac{\ln 2}{k}$ **(c)** $t = \frac{\ln .4}{\ln .2}$

15. $4(\ln x)^2$ **17.** $-5e^{-5x}$ **19.** $-7e^{(5-7x)}$ **21.** xe^x

23. x^2e^x **25.** $2e^\theta\cos\theta$ **27.** $2\theta e^{-\theta^2}\operatorname{sen}(e^{-\theta^2})$

29. $\frac{1 - t}{t}$ **31.** $1/(1 + e^\theta)$ **33.** $e^{\cos t}(1 - t\operatorname{sen} t)$

35. $(\operatorname{sen} x)/x$ **37.** $\frac{ye^y\cos x}{1 - ye^y\operatorname{sen} x}$ **39.** $\frac{2e^{2x} - \cos(x + 3y)}{3\cos(x + 3y)}$

41. $\frac{1}{3}e^{3x} - 5e^{-x} + C$ **43.** 1 **45.** $8e^{(x+1)} + C$ **47.** 2

49. $2e^{\sqrt{r}} + C$ **51.** $-e^{-t^2} + C$ **53.** $-e^{1/x} + C$ **55.** e

57. $\frac{1}{\pi}e^{\sec\pi t} + C$ **59.** 1 **61.** $\ln(1 + e^r) + C$

63. $y = 1 - \cos(e^t - 2)$ **65.** $y = 2(e^{-x} + x) - 1$

67. Máximo. 1 en $x = 0$; mínimo: $2 - 2\ln 2$ en $x = \ln 2$

69. El máximo absoluto de $1/(2e)$ se alcanza en $x = 1/\sqrt{e}$

71. 2 **73.** $y = e^{x/2} - 1$

75. **(a)** $\frac{d}{dx}(x\ln x - x + C) = x \cdot \frac{1}{x} + \ln x - 1 + 0 = \ln x$

(b) $\frac{1}{e - 1}$

77. **(b)** $|\text{error}| \approx 0.02140$ **79.** 2.71828183

Sección 7.4, páginas 500-502

1. **(a)** 7 **(b)** $\sqrt{2}$ **(c)** 75 **(d)** 2 **(e)** 0.5 **(f)** -1

3. **(a)** $\sqrt{x}$ **(b)** x^2 **(c)** $\operatorname{sen} x$ **5.** **(a)** $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ **(b)** 3 **(c)** 2

7. $x = 12$ **9.** $x = 3$ o $x = 2$ **11.** $2^x \ln x$

13. $\left(\dfrac{\ln 5}{2\sqrt{s}}\right)5^{\sqrt{s}}$ **15.** $\pi x^{(\pi-1)}$ **17.** $-\sqrt{2}\cos\theta^{(\sqrt{2}-1)}\operatorname{sen}\theta$

19. $7^{\sec\theta}(\ln 7)^2(\sec\theta\tan\theta)$ **21.** $(3\cos 3t)(2^{\operatorname{sen} 3t})\ln 2$

23. $\dfrac{1}{\theta\ln 2}$ **25.** $\dfrac{3}{x\ln 4}$ **27.** $\dfrac{2(\ln r)}{r(\ln 2)(\ln 4)}$

29. $\dfrac{-2}{(x+1)(x-1)}$ **31.** $\operatorname{sen}(\log_7\theta)+\dfrac{1}{\ln 7}\cos(\log_7\theta)$

33. $\dfrac{1}{\ln 5}$ **35.** $\dfrac{1}{t}(\log_2 3)3^{\log_2 t}$ **37.** $\dfrac{1}{t}$

39. $(x+1)^x\left(\dfrac{x}{x+1}+\ln(x+1)\right)$ **41.** $(\sqrt{t})^t\left(\dfrac{\ln t}{2}+\dfrac{1}{2}\right)$

43. $(\operatorname{sen} x)^x(\ln\operatorname{sen} x+x\cot x)$ **45.** $(x^{\ln x})\left(\dfrac{\ln x^2}{x}\right)$

47. $\dfrac{5^x}{\ln 5}+C$ **49.** $\dfrac{1}{2\ln 2}$ **51.** $\dfrac{1}{\ln 2}$ **53.** $\dfrac{6}{\ln 7}$ **55.** 32760

57. $\dfrac{3x^{(\sqrt{3}+1)}}{\sqrt{3}+1}+C$ **59.** $3^{\sqrt{2}+1}$ **61.** $\dfrac{1}{\ln 10}\left(\dfrac{(\ln x)^2}{2}\right)+C$

63. $2(\ln 2)^2$ **65.** $\dfrac{3\ln 2}{2}$ **67.** $\ln 10$ **69.** $(\ln 10)\ln|\ln x|+C$

71. $\ln(\ln x), x>1$ **73.** $-\ln x$ **75.** $2\ln 5$

77. $[10^{-7.44}, 10^{-7.37}]$ **79.** $k=10$

81. **(a)** 10^{-7} **(b)** 7 **(c)** 1 : 1 **83.** $x\approx -0.76666$

85. **(a)** $L(x)=1+(\ln 2)x\approx 0.69x+1$

87. **(a)** 1.89279 **(b)** -0.35621 **(c)** 0.94575 **(d)** -2.80735 **(e)** 5.29595 **(f)** 0.97041 **(g)** -1.03972 **(h)** -1.61181

Sección 7.5, páginas 508-511

1. **(a)** -0.00001 **(b)** 10,536 años **(c)** 82%

3. 54.88 g **5.** 59.8 pies **7.** 2.8147498×10^{14}

9. **(a)** 8 años **(b)** 32.02 años **11.** 15.28 años

13. **(a)** $A_0e^{0.2}$ **(b)** 17.33 años; 27.47 años

15. 4.50% **17.** 0.585 días

21. **(a)** 17.5 min. **(b)** 13.26 min.

23. -3°C **25.** Alrededor de 6659 años **27.** 41 años de antigüedad.

Sección 7.6, páginas 515-517

1. **(a)** más lentamente **(b)** más lentamente **(c)** más lentamente **(d)** más rápidamente **(e)** más lentamente **(f)** más lentamente **(g)** a la misma razón **(h)** más lentamente

3. **(a)** a la misma razón **(b)** más rápidamente **(c)** a la misma razón **(d)** a la misma razón **(e)** más lentamente **(f)** más rápidamente **(g)** más lentamente **(h)** a la misma razón

5. **(a)** a la misma razón **(b)** a la misma razón **(c)** a la misma razón **(d)** más rápidamente **(e)** más rápidamente **(f)** a la misma razón **(g)** más lentamente **(h)** más rápidamente

7. d, a, c, b

9. **(a)** falso **(b)** falso **(c)** cierto **(d)** cierto **(e)** cierto **(f)** cierto **(g)** falso **(h)** cierto

13. Cuando el grado de f es menor o igual al grado de g.

15. 1, 1

21. **(b)** $\ln(e^{17000000})=17{,}000{,}000<(e^{17\times 10^6})^{1/10^6}$ $=e^{17}\approx 24,154,952.75$

(c) $x\approx 3.4306311\times 10^{15}$

(d) Se cruzan en $x\approx 3.4306311\times 10^{15}$

23. **(a)** El algoritmo tarda $O(n\log_2 n)$ pasos.

25. En una búsqueda secuencial podría necesitarse un millón de pasos; en una búsqueda binaria se requerirían cuando mucho 20 pasos.

Sección 7.7, páginas 530-534

1. **(a)** $\pi/4$ **(b)** $-\pi/3$ **(c)** $\pi/6$

3. **(a)** $-\pi/6$ **(b)** $\pi/4$ **(c)** $-\pi/3$

5. **(a)** $\pi/3$ **(b)** $3\pi/4$ **(c)** $\pi/6$

7. **(a)** $3\pi/4$ **(b)** $\pi/6$ **(c)** $2\pi/3$

9. **(a)** $\pi/4$ **(b)** $-\pi/3$ **(c)** $\pi/6$

11. **(a)** $3\pi/4$ **(b)** $\pi/6$ **(c)** $2\pi/3$

13. $\cos\alpha=\dfrac{12}{13}, \tan\alpha=\dfrac{5}{12}, \sec\alpha=\dfrac{13}{12}, \csc\alpha=\dfrac{13}{5}, \cot\alpha=\dfrac{12}{5}$

15. $\operatorname{sen}\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \cos\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \tan\alpha=-2, \csc\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{2},$ $\cot\alpha=-\dfrac{1}{2}$

17. $1/\sqrt{2}$ **19.** $-1/\sqrt{3}$ **21.** $\dfrac{4+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$ **23.** 1

25. $-\sqrt{2}$ **27.** $\pi/6$ **29.** $\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{2}$ **31.** $\sqrt{9y^2-1}$

33. $\sqrt{1-x^2}$ **35.** $\dfrac{\sqrt{x^2-2x}}{x-1}$ **37.** $\dfrac{\sqrt{9-4y^2}}{3}$

39. $\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{x}$ **41.** $\pi/2$ **43.** $\pi/2$ **45.** $\pi/2$

47. 0 **49.** $\dfrac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}$ **51.** $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-2t^2}}$

53. $\dfrac{1}{|2s+1|\sqrt{s^2+s}}$ **55.** $\dfrac{-2x}{(x^2+1)\sqrt{x^4+2x^2}}$

57. $\dfrac{-1}{\sqrt{1-t^2}}$ **59.** $\dfrac{-1}{2\sqrt{t}(1+t)}$ **61.** $\dfrac{1}{(\tan^{-1}x)(1+x^2)}$

63. $\dfrac{-e^t}{|e^t|\sqrt{(e^t)^2-1}}=\dfrac{-1}{\sqrt{e^{2t}-1}}$ **65.** $\dfrac{-2s^n}{\sqrt{1-s^2}}$ **67.** 0

69. $\operatorname{sen}^{-1}x$ **71.** $\operatorname{sen}^{-1}\dfrac{x}{7}+C$ **73.** $\dfrac{1}{\sqrt{17}}\tan^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{17}}+C$

75. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sec^{-1}\left|\dfrac{5x}{\sqrt{2}}\right|+C$ **77.** $2\pi/3$ **79.** $\pi/16$

81. $-\pi/12$ **83.** $\dfrac{3}{2}\operatorname{sen}^{-1}2(r-1)+C$

85. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\tan^{-1}\left(\dfrac{x-1}{\sqrt{2}}\right)+C$ **87.** $\dfrac{1}{4}\sec^{-1}\left|\dfrac{2x-1}{2}\right|+C$

89. π **91.** $\pi/12$ **93.** $\dfrac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1}y^2+C$ **95.** $\operatorname{sen}^{-1}(x-2)+C$

97. π **99.** $\dfrac{1}{2}\tan^{-1}\left(\dfrac{y-1}{2}\right)+C$ **101.** 2π

103. $\sec^{-1}|x+1|+C$ **105.** $e^{\operatorname{sen}^{-1}x}+C$ **107.** $\dfrac{1}{3}(\operatorname{sen}^{-1}(x))^3+C$

109. $\ln|\tan^{-1}y|+C$ **111.** $\sqrt{3}-1$ **113.** 5 **115.** 2

121. $y = \text{sen}^{-1} x$ **123.** $y = \sec^{-1} x + \frac{2\pi}{3}, x > 1$

127. $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 54.7°$

133. **(a)** Definida; hay un ángulo cuya tangente es 2.
(b) No definida; no existe ángulo cuyo coseno sea 2.

135. **(a)** No definida; ningún ángulo tiene secante 0.
(b) No definida; ningún ángulo tiene seno $\sqrt{2}$.

137. $3\sqrt{5}$ pies.

139. Sí, $\text{sen}^{-1}(x)$ y $-\cos^{-1}(x)$ difieren por la constante $\pi/2$.

147. $\pi^2/2$ **149.** **(a)** $\pi^2/2$ **(b)** 2π

151. **(a)** 0.84107 **(b)** -0.72973 **(c)** 0.46365

153. **(a)** Dominio: todos los números reales, excepto aquellos que tienen la forma $\frac{\pi}{2} + k\pi$ donde k es un entero; rango: $-\pi/2 < y < \pi/2$.
(b) Dominio: $-\infty < x < \infty$; rango: $-\infty < y < \infty$

155. **(a)** Dominio: $-\infty < x < \infty$; rango: $0 \le y \le \pi$
(b) Dominio: $-1 \le x \le 1$; rango: $-1 \le y \le 1$

157. Las gráficas son idénticas.

Sección 7.8, páginas 542-546

1. $\cosh x = 5/4, \tanh x = -3/5, \coth x = -5/3, \text{sech}\, x = 4/5, \text{csch}\, x = -4/3$

3. $\text{senh}\, x = 8/15, \tanh x = 8/17, \coth x = 17/8, \text{sech}\, x = 15/17, \text{csch}\, x = 15/8$

5. $x + \frac{1}{x}$ **7.** e^{5x} **9.** e^{4x} **13.** $2\cosh\frac{x}{3}$

15. $\text{sech}^2\sqrt{t} + \frac{\tanh\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$ **17.** $\coth z$

19. $(\ln \text{sech}\,\theta)(\text{sech}\,\theta \tanh\theta)$ **21.** $\tanh^3 v$ **23.** 2

25. $\frac{1}{2\sqrt{x(1+x)}}$ **27.** $\frac{1}{1+\theta} - \tanh^{-1}\theta$

29. $\frac{1}{2\sqrt{t}} - \coth^{-1}\sqrt{t}$ **31.** $-\text{sech}^{-1} x$ **33.** $\frac{\ln 2}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2\theta}}}$

35. $|\sec x|$ **41.** $\frac{\cosh 2x}{2} + C$

43. $12\,\text{senh}\left(\frac{x}{2} - \ln 3\right) + C$ **45.** $7\ln|e^{x/7} + e^{-x/7}| + C$

47. $\tanh\left(x - \frac{1}{2}\right) + C$ **49.** $-2\,\text{sech}\sqrt{t} + C$ **51.** $\ln\frac{5}{2}$

53. $\frac{3}{32} + \ln 2$ **55.** $e - e^{-1}$ **57.** $3/4$ **59.** $\frac{3}{8} + \ln\sqrt{2}$

61. $\ln(2/3)$ **63.** $\frac{-\ln 3}{2}$ **65.** $\ln 3$

67. **(a)** $\text{senh}^{-1}(\sqrt{3})$ **(b)** $\ln(\sqrt{3} + 2)$

69. **(a)** $\coth^{-1}(2) - \coth^{-1}(5/4)$ **(b)** $\left(\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{1}{3}\right)$

71. **(a)** $-\text{sech}^{-1}\left(\frac{12}{13}\right) + \text{sech}^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$
(b) $-\ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - (12/13)^2}}{(12/13)}\right) + \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - (4/5)^2}}{(4/5)}\right) = -\ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln(2) = \ln(4/3)$

73. **(a)** 0 **(b)** 0

75. **(b)** i) $f(x) = \frac{2f(x)}{2} + 0 = f(x)$, ii) $f(x) = 0 + \frac{2f(x)}{2} = f(x)$

77. **(b)** $\sqrt{\frac{mg}{k}}$ **(c)** $80\sqrt{5} \approx 178.89$ pies/seg

79. $y = \text{sech}^{-1}(x) - \sqrt{1 - x^2}$ **81.** 2π **83.** $\frac{6}{5}$

85. $16\pi \ln 6 + \frac{455\pi}{9}$

89. **(c)** $a \approx 0.0417525$ **(d)** ≈ 47.90 lb

Ejercicios de práctica, páginas 547-550

1. $-2e^{-x/5}$ **3.** xe^{4x} **5.** $\frac{2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta}{\text{sen}^2\theta} = 2\cot\theta$ **7.** $\frac{2}{(\ln 2)x}$

9. $-8^{-t}(\ln 8)$ **11.** $18x^{2.6}$

13. $(x + 2)^{x+2}(\ln(x + 2) + 1)$ **15.** $-\frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}$

17. $\frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}\cos^{-1} x}$ **19.** $\tan^{-1}(t) + \frac{t}{1 + t^2} - \frac{1}{2t}$

21. $\frac{1 - z}{\sqrt{z^2 - 1}} + \sec^{-1} z$ **23.** -1

25. $\frac{2(x^2 + 1)}{\sqrt{\cos 2x}}\left[\frac{2x}{x^2 + 1} + \tan 2x\right]$

27. $5\left[\frac{(t + 1)(t - 1)}{(t - 2)(t + 3)}\right]^5\left[\frac{1}{t + 1} + \frac{1}{t - 1} - \frac{1}{t - 2} - \frac{1}{t + 3}\right]$

29. $\frac{1}{\sqrt{\theta}}(\text{sen}\,\theta)^{\sqrt{\theta}}\left(\frac{\ln\sqrt{\text{sen}\,\theta}}{2} + \theta\cot\theta\right)$ **31.** $-\cos e^x + C$

33. $\tan(e^x - 7) + C$ **35.** $e^{\tan x} + C$ **37.** $\frac{-\ln 7}{3}$

39. $\ln 8$ **41.** $\ln(9/25)$ **43.** $-[\ln|\cos(\ln v)|] + C$

45. $-\frac{1}{2}(\ln x)^{-2} + C$ **47.** $-\cot(1 + \ln r) + C$

49. $\frac{1}{2\ln 3}(3^{x^2}) + C$ **51.** $3\ln 7$ **53.** $15/16 + \ln 2$

55. $e - 1$ **57.** $1/6$ **59.** $9/14$

61. $\frac{1}{3}\left[(\ln 4)^3 - (\ln 2)^3\right]$ o $\frac{7}{3}(\ln 2)^3$ **63.** $\frac{9\ln 2}{4}$ **65.** π

67. $\pi/\sqrt{3}$ **69.** $\sec^{-1}|2y| + C$ **71.** $\pi/12$

73. $\text{sen}^{-1}(x + 1) + C$ **75.** $\pi/2$ **77.** $\frac{1}{3}\sec^{-1}\left(\frac{t + 1}{3}\right) + C$

79. $y = \frac{\ln 2}{\ln(3/2)}$ **81.** $y = \ln x - \ln 3$ **83.** $y = \frac{1}{1 - e^x}$

85. $\ln 10$ **87.** $\ln 2$ **89.** 5 **91.** $-\infty$ **93.** 1 **95.** e^3

97. **(a)** a la misma tasa **(b)** a la misma tasa **(c)** más rápido **(d)** más rápido **(e)** a la misma tasa **(f)** a la misma tasa

99. **(a)** verdadero **(b)** falso **(c)** falso **(d)** verdadero **(e)** verdadero **(f)** verdadero

101. 1/3

103. Máximo absoluto = 0 en $x = e/2$, mínimo absoluto = -0.5 en $x = 0.5$ en $x = 0.5$

105. 1 **107.** $1/e$ m/seg

109. $1/\sqrt{2}$ unidades de longitud por $1/\sqrt{e}$ unidades de altura, $A = 1/\sqrt{2e} \approx 0.43$ unidades^2

111. $\ln 5x - \ln 3x = \ln(5/3)$ **113.** 1/2

115. **(a)** Máximo absoluto de $2/e$ en $x = e^2$, punto de inflexión $(e^{8/3}, (8/3)e^{-4/3})$, cóncava hacia arriba en $(e^{8/3}, \infty)$, cóncava hacia abajo en $(0, e^{8/3})$
(b) Máximo absoluto de 1 en $x=0$, puntos de inflexión $(\pm 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{e})$, cóncava hacia arriba en $(-\infty, -1/\sqrt{2}) \cup (1/\sqrt{2}, \infty)$, cóncava hacia abajo en $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$
(c) Máximo absoluto de 1 en $x=0$, punto de inflexión $(1, 2/e)$, cóncava hacia arriba en $(1, \infty)$, cóncava hacia abajo en $(-\infty, 1)$

117. 18,935 años **119.** $20(5 - \sqrt{17})$ m

Ejercicios adicionales y avanzados, páginas 550-552

1. $\pi/2$ **3.** $1/\sqrt{e}$ **5.** ln 2 **7.** **(a)** 1 **(b)** $\pi/2$ **(c)** π

9. $\frac{1}{\ln 2}, \frac{1}{2\ln 2}, 2:1$ **11.** $x = 2$ **13.** $2/17$

21. $\bar{x} = \frac{\ln 4}{\pi}, \bar{y} = 0$ **25.** **(b)** 61°

CAPÍTULO 8

Sección 8.1, páginas 558-560

1. $2\sqrt{8x^2 + 1} + C$ **3.** $2(\operatorname{sen} v)^{3/2} + C$ **5.** ln 5

7. $2\ln\left(\sqrt{x} + 1\right) + C$ **9.** $-\frac{1}{7}\ln|\operatorname{sen}(3 - 7x)| + C$

11. $-\ln|\csc(e^\theta + 1) + \cot(e^\theta + 1)| + C$

13. $3\ln\left|\sec\frac{t}{3} + \tan\frac{t}{3}\right| + C$

15. $-\ln|\csc(s - \pi) + \cot(s - \pi)| + C$ **17.** 1

19. $e^{\tan v} + C$ **21.** $\frac{3^{(x+1)}}{\ln 3} + C$ **23.** $\frac{2^{\sqrt{w}}}{\ln 2} + C$

25. $3\tan^{-1} 3u + C$ **27.** $\pi/18$ **29.** $\operatorname{sen}^{-1} s^2 + C$

31. $6\sec^{-1}|5x| + C$ **33.** $\tan^{-1} e^x + C$ **35.** $\ln\left(2 + \sqrt{3}\right)$

37. 2π **39.** $\operatorname{sen}^{-1}(t - 2) + C$

41. $\sec^{-1}|x + 1| + C$, cuando $|x + 1| > 1$

43. $\tan x - 2\ln|\csc x + \cot x| - \cot x - x + C$

45. $x + \operatorname{sen} 2x + C$ **47.** $x - \ln|x + 1| + C$ **49.** $7 + \ln 8$

51. $2t^2 - t + 2\tan^{-1}\left(\frac{t}{2}\right) + C$ **53.** $\operatorname{sen}^{-1} x + \sqrt{1 - x^2} + C$

55. $\sqrt{2}$ **57.** $\tan x - \sec x + C$ **59.** $\ln|1 + \operatorname{sen}\theta| + C$

61. $\cot x + x + \csc x + C$ **63.** 4 **65.** $\sqrt{2}$ **67.** 2

69. $\ln\left|\sqrt{2} + 1\right| - \ln\left|\sqrt{2} - 1\right|$ **71.** $4 - \frac{\pi}{2}$

73. $-\ln|\csc(\operatorname{sen}\theta) + \cot(\operatorname{sen}\theta)| + C$

75. $\ln|\operatorname{sen} x| + \ln|\cos x| + C$ **77.** $12\tan^{-1}\left(\sqrt{y}\right) + C$

79. $\sec^{-1}\left|\frac{x - 1}{7}\right| + C$ **81.** $\ln|\sec(\tan t)| + C$

83. **(a)** $\operatorname{sen}\theta - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3\theta + C$

(b) $\operatorname{sen}\theta - \frac{2}{3}\operatorname{sen}^3\theta + \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5\theta + C$

(c) $\int \cos^9\theta\, d\theta = \int \cos^8\theta(\cos\theta)\, d\theta$
$= \int (1 - \operatorname{sen}^2\theta)^4(\cos\theta)\, d\theta$

85. **(a)** $\int \tan^3\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\tan^2\theta - \int \tan\theta\, d\theta$
$= \frac{1}{2}\tan^2\theta + \ln|\cos\theta| + C$

(b) $\int \tan^5\theta\, d\theta = \frac{1}{4}\tan^4\theta - \int \tan^3\theta\, d\theta$

(c) $\int \tan^7\theta\, d\theta = \frac{1}{6}\tan^6\theta - \int \tan^5\theta\, d\theta$

(d) $\int \tan^{2k+1}\theta\, d\theta = \frac{1}{2k}\tan^{2k}\theta - \int \tan^{2k-1}\theta\, d\theta$

87. $2\sqrt{2} - \ln\left(3 + 2\sqrt{2}\right)$ **89.** π^2

91. $\ln\left(2 + \sqrt{3}\right)$ **93.** $\bar{x} = 0, \bar{y} = \frac{1}{\ln\left(2\sqrt{2} + 3\right)}$

Sección 8.2, páginas 568-570

1. $-2x\cos(x/2) + 4\operatorname{sen}(x/2) + C$

3. $t^2\operatorname{sen} t + 2t\cos t - 2\operatorname{sen} t + C$ **5.** $\ln 4 - \frac{3}{4}$

7. $y\tan^{-1}(y) - \ln\sqrt{1 + y^2} + C$

9. $x\tan x + \ln|\cos x| + C$

11. $(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x + C$

13. $(x^2 - 7x + 7)e^x + C$

15. $(x^5 - 5x^4 + 20x^3 - 60x^2 + 120x - 120)e^x + C$

17. $\frac{\pi^2 - 4}{8}$ **19.** $\frac{5\pi - 3\sqrt{3}}{9}$

21. $\frac{1}{2}(-e^\theta\cos\theta + e^\theta\operatorname{sen}\theta) + C$

23. $\frac{e^{2x}}{13}(3\operatorname{sen} 3x + 2\cos 3x) + C$

25. $\frac{2}{3}\left(\sqrt{3s + 9}\, e^{\sqrt{3s+9}} - e^{\sqrt{3s+9}}\right) + C$

27. $\frac{\pi\sqrt{3}}{3} - \ln(2) - \frac{\pi^2}{18}$

29. $\frac{1}{2}[-x\cos(\ln x) + x\operatorname{sen}(\ln x)] + C$

31. **(a)** π **(b)** 3π **(c)** 5π **(d)** $(2n + 1)\pi$

33. $2\pi(1 - \ln 2)$ **35.** **(a)** $\pi(\pi - 2)$ **(b)** 2π

37. $\frac{1}{2\pi}(1 - e^{-2\pi})$ **39.** $u = x^n, dv = \cos x\, dx$

41. $u = x^n, dv = e^{ax}\, dx$ **43.** $x\operatorname{sen}^{-1} x + \cos(\operatorname{sen}^{-1} x) + C$

45. $x \sec^{-1} x - \ln\left|x + \sqrt{x^2 - 1}\right| + C$ **47.** Sí

49. **(a)** $x \operatorname{senh}^{-1} x - \cosh(\operatorname{senh}^{-1} x) + C$
(b) $x \operatorname{senh}^{-1} x - (1 + x^2)^{1/2} + C$

Sección 8.3, páginas 579-581

1. $\frac{2}{x-3} + \frac{3}{x-2}$ **3.** $\frac{1}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2}$

5. $\frac{-2}{z} + \frac{-1}{z^2} + \frac{2}{z-1}$ **7.** $1 + \frac{17}{t-3} + \frac{-12}{t-2}$

9. $\frac{1}{2}[\ln|1+x| - \ln|1-x|] + C$

11. $\frac{1}{7}\ln|(x+6)^2(x-1)^5| + C$ **13.** $(\ln 15)/2$

15. $-\frac{1}{2}\ln|t| + \frac{1}{6}\ln|t+2| + \frac{1}{3}\ln|t-1| + C$ **17.** $3\ln 2 - 2$

19. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - \frac{x}{2(x^2-1)} + C$ **21.** $(\pi + 2\ln 2)/8$

23. $\tan^{-1} y - \frac{1}{y^2+1} + C$

25. $-(s-1)^{-2} + (s-1)^{-1} + \tan^{-1} s + C$

27. $\frac{-1}{\theta^2 + 2\theta + 2} + \ln(\theta^2 + 2\theta + 2) - \tan^{-1}(\theta + 1) + C$

29. $x^2 + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + C$

31. $9x + 2\ln|x| + \frac{1}{x} + 7\ln|x-1| + C$

33. $\frac{y^2}{2} - \ln|y| + \frac{1}{2}\ln(1+y^2) + C$ **35.** $\ln\left(\frac{e^t+1}{e^t+2}\right) + C$

37. $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{\operatorname{sen} y - 2}{\operatorname{sen} y + 3}\right| + C$

39. $\frac{(\tan^{-1} 2x)^2}{4} - 3\ln|x-2| + \frac{6}{x-2} + C$

41. $x = \ln|t-2| - \ln|t-1| + \ln 2$ **43.** $x = \frac{6t}{t+2} - 1$

45. $3\pi \ln 25$ **47.** 1.10

49. **(a)** $x = \frac{1000e^{4t}}{499 + e^{4t}}$ **(b)** 1.55 días

51. **(a)** $\frac{22}{7} - \pi$ **(b)** 0.04% **(c)** El área es menor que 0.003.

Sección 8.4, páginas 585-586

1. $8/15$ **3.** $4/3$ **5.** $16/35$ **7.** 3π **9.** π **11.** 2

13. 1 **15.** 4 **17.** 2 **19.** $2\ln(1 + \sqrt{2})$ **21.** $\sqrt{2}$

23. $2\sqrt{3} + \ln(2 + \sqrt{3})$ **25.** $4/3$ **27.** $4/3$

29. $2(1 - \ln 2)$ **31.** $\frac{4}{3} - \ln\sqrt{3}$ **33.** $-6/5$ **35.** π

37. 0 **39.** $\frac{2\pi\left(\left(9\sqrt[3]{4} + 1\right)^{3/2} - 1\right)}{27}$ **41.** $\ln(1 + \sqrt{2})$

43. $\pi^2/2$

Sección 8.5, páginas 591-592

1. $\ln\left|\sqrt{9 + y^2} + y\right| + C$ **3.** $\pi/4$ **5.** $\pi/6$

7. $\frac{25}{2}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{t}{5}\right) + \frac{t\sqrt{25 - t^2}}{2} + C$

9. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2x}{7} + \frac{\sqrt{4x^2 - 49}}{7}\right| + C$

11. $7\left[\frac{\sqrt{y^2 - 49}}{7} - \sec^{-1}\left(\frac{y}{7}\right)\right] + C$ **13.** $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C$

15. $\frac{1}{3}(x^2+4)^{3/2} - 4\sqrt{x^2+4} + C$ **17.** $\frac{-2\sqrt{4 - w^2}}{w} + C$

19. $4\sqrt{3} - 4\pi/3$ **21.** $-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} + C$

23. $-\frac{1}{5}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^5 + C$ **25.** $2\tan^{-1} 2x + \frac{4x}{(4x^2+1)} + C$

27. $\frac{1}{3}\left(\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}\right)^3 + C$ **29.** $\ln 9 - \ln(1 + \sqrt{10})$

31. $\pi/6$ **33.** $\sec^{-1} x + C$ **35.** $\sqrt{x^2-1} + C$

37. $y = 2\left[\frac{\sqrt{x^2-4}}{2} - \sec^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right]$

39. $y = \frac{3}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{3\pi}{8}$ **41.** $3\pi/4$

43. $\frac{2}{1 - \tan(x/2)} + C$ **45.** 1 **47.** $\frac{\sqrt{3}\pi}{9}$

49. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\tan(t/2) + 1 - \sqrt{2}}{\tan(t/2) + 1 + \sqrt{2}}\right| + C$

51. $\ln\left|\frac{1 + \tan(\theta/2)}{1 - \tan(\theta/2)}\right| + C$

Sección 8.6, páginas 600-603

1. $\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\tan^{-1}\sqrt{\frac{x-3}{3}}\right) + C$

3. $\sqrt{x-2}\left(\frac{2(x-2)}{3} + 4\right) + C$

5. $\frac{(2x-3)^{3/2}(x+1)}{5} + C$

7. $\frac{-\sqrt{9-4x}}{x} - \frac{2}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{9-4x} - 3}{\sqrt{9-4x} + 3}\right| + C$

9. $\frac{(x+2)(2x-6)\sqrt{4x - x^2}}{6} + 4\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right) + C$

11. $-\frac{1}{\sqrt{7}}\ln\left|\frac{\sqrt{7} + \sqrt{7 + x^2}}{x}\right| + C$

13. $\sqrt{4 - x^2} - 2\ln\left|\frac{2 + \sqrt{4 - x^2}}{x}\right| + C$

15. $\frac{p}{2}\sqrt{25 - p^2} + \frac{25}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{p}{5} + C$

17. $2 \operatorname{sen}^{-1} \frac{r}{2} - \frac{1}{2} r\sqrt{4 - r^2} + C$

19. $-\frac{1}{3} \tan^{-1}\left[\frac{1}{3}\tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)\right] + C$

21. $\frac{e^{2t}}{13}(2\cos 3t + 3 \operatorname{sen} 3t) + C$

23. $\frac{x^2}{2}\cos^{-1}(x) + \frac{1}{4}\operatorname{sen}^{-1}(x) - \frac{1}{4}x\sqrt{1 - x^2} + C$

25. $\frac{s}{18(9 - s^2)} + \frac{1}{108}\ln\left|\frac{s + 3}{s - 3}\right| + C$

27. $-\frac{\sqrt{4x + 9}}{x} + \frac{2}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{4x + 9} - 3}{\sqrt{4x + 9} + 3}\right| + C$

29. $2\sqrt{3t - 4} - 4\tan^{-1}\sqrt{\frac{3t - 4}{4}} + C$

31. $\frac{x^3}{3}\tan^{-1} x - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6}\ln(1 + x^2) + C$

33. $-\frac{\cos 5x}{10} - \frac{\cos x}{2} + C$ **35.** $8\left[\frac{\operatorname{sen}(7t/2)}{7} - \frac{\operatorname{sen}(9t/2)}{9}\right] + C$

37. $6 \operatorname{sen}(\theta/12) + \frac{6}{7}\operatorname{sen}(7\theta/12) + C$

39. $\frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + \frac{x}{2(1 + x^2)} + \frac{1}{2}\tan^{-1} x + C$

41. $\left(x - \frac{1}{2}\right)\operatorname{sen}^{-1}\sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x - x^2} + C$

43. $\operatorname{sen}^{-1}\sqrt{x} - \sqrt{x - x^2} + C$

45. $\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} - \ln\left|\frac{1 + \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t}}{\operatorname{sen} t}\right| + C$

47. $\ln\left|\ln y + \sqrt{3 + (\ln y)^2}\right| + C$

49. $\ln\left|3r + \sqrt{9r^2 - 1}\right| + C$

51. $x\cos^{-1}\sqrt{x} + \frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1}\sqrt{x} - \frac{1}{2}\sqrt{x - x^2} + C$

53. $-\frac{\operatorname{sen}^4 2x\cos 2x}{10} - \frac{2\operatorname{sen}^2 2x\cos 2x}{15} - \frac{4\cos 2x}{15} + C$

55. $\frac{\cos^3 2\pi t\operatorname{sen} 2\pi t}{\pi} + \frac{3}{2}\frac{\cos 2\pi t\operatorname{sen} 2\pi t}{\pi} + 3t + C$

57. $\frac{\operatorname{sen}^3 2\theta\cos^2 2\theta}{10} + \frac{\operatorname{sen}^3 2\theta}{15} + C$ **59.** $\frac{2}{3}\tan^3 t + C$

61. $\tan^2 2x - 2\ln|\sec 2x| + C$

63. $8\left[-\frac{1}{3}\cot^3 t + \cot t + t\right] + C$

65. $\frac{(\sec\pi x)(\tan\pi x)}{\pi} + \frac{1}{\pi}\ln|\sec\pi x + \tan\pi x| + C$

67. $\frac{\sec^2 3x\tan 3x}{3} + \frac{2}{3}\tan 3x + C$

69. $\frac{-\csc^3 x\cot x}{4} - \frac{3\csc x\cot x}{8} - \frac{3}{8}\ln|\csc x + \cot x| + C$

71. $4x^4(\ln x)^2 - 2x^4(\ln x) + \frac{x^2}{2} + C$ **73.** $\frac{e^{3x}}{9}(3x - 1) + C$

75. $2x^3e^{x/2} - 12x^2e^{x/2} + 96e^{x/2}\left(\frac{x}{2} - 1\right) + C$

77. $\frac{x^2 2^x}{\ln 2} - \frac{2}{\ln 2}\left[\frac{x2^x}{\ln 2} - \frac{2^x}{(\ln 2)^2}\right] + C$ **79.** $\frac{x\pi^x}{\ln\pi} - \frac{\pi^x}{(\ln\pi)^2} + C$

81. $\frac{1}{2}[\sec(e^t - 1)\tan(e^t - 1) + \ln|\sec(e^t - 1)$ $+ \tan(e^t - 1)|] + C$

83. $\sqrt{2} + \ln\left(\sqrt{2} + 1\right)$ **85.** $\pi/3$

87. $\frac{1}{120}\operatorname{senh}^4 3x\cosh 3x - \frac{1}{90}\operatorname{senh}^2 3x\cosh 3x + \frac{1}{45}\cosh 3x + C$

89. $\frac{x^2}{3}\operatorname{senh} 3x - \frac{2x}{9}\cosh 3x + \frac{2}{27}\operatorname{senh} 3x + C$

91. $-\frac{\operatorname{sech}^7 x}{7} + C$ **101.** $2\pi\sqrt{3} + \pi\sqrt{2}\ln(\sqrt{2} + \sqrt{3})$

103. $\bar{x} = 4/3, \bar{y} = \ln\sqrt{2}$ **105.** 7.62 **107.** $\pi/8$ **111.** $\pi/4$

Sección 8.7, páginas 613-619

1. I: (a) 1.5, 0 **(b)** 1.5, 0 **(c)** 0%
II: (a) 1.5, 0 **(b)** 1.5, 0 **(c)** 0%
3. I: (a) 2.75, 0.08 **(b)** 2.67, 0.08 **(c)** $0.0312 \approx 3\%$
II: (a) 2.67, 0 **(b)** 2.67, 0 **(c)** 0%
5. I: (a) 6.25, 0.5 **(b)** 6, 0.25 **(c)** $0.0417 \approx 4\%$
II: (a) 6, 0 **(b)** 6, 0 **(c)** 0%
7. I: (a) 0.509, 0.03125 **(b)** 0.5, 0.009 **(c)** $0.018 \approx 2\%$
II: (a) 0.5, 0.002604 **(b)** 0.5, 0.0004 **(c)** 0%
9. I: (a) 1.8961, 0.161 **(b)** 2, 0.1039 **(c)** $0.052 \approx 5\%$
II: (a) 2.0045, 0.0066 **(b)** 2, 0.00454 **(c)** 0%
11. (a) 0.31929 **(b)** 0.32812 **(c)** 1/3, 0.01404, 0.00521
13. (a) 1.95643 **(b)** 2.00421 **(c)** 2, 0.04357, −0.00421
15. (a) 1 **(b)** 2
17. (a) 116 **(b)** 2
19. (a) 283 **(b)** 2
21. (a) 71 **(b)** 10
23. (a) 76 **(b)** 12
25. (a) 82 **(b)** 8
27. 15,990 pies^3 **29.** 5166.346 pies ≈ 0.9785 millas
31. ≈ 10.63 pies
33. (a) ≈0.00021 **(b)** ≈1.37079 **(c)** ≈0.015%
35. (a) 3.11571 **(b)** 0.02588
(c) Con $M = 3.11$, obtenemos $|E_T| \le (\pi^3/1200)(3.11) > 0.081$
39. 1.08943 **41.** 0.82812
43. (a) $T_{10} \approx 1.983523538$, $T_{100} \approx 1.999835504$,
$T_{1000} \approx 1.999998355$

(b)

n	$\lvert E_T\rvert = 2 - T_n$
10	$0.016476462 = 1.6476462 \times 10^{-2}$
100	1.64496×10^{-4}
1000	1.645×10^{-6}

(c) $|E_{10n}| \approx 10^{-2}|E_n|$

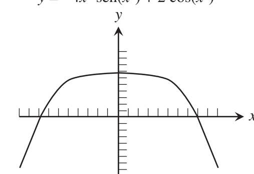
(d) $b - a = \pi, h^2 = \frac{\pi^2}{n^2}, M = 1$

$$|E_n| \le \frac{\pi}{12}\left(\frac{\pi^2}{n^2}\right) = \frac{\pi^3}{12n^2}$$

$$|E_{10n}| \le \frac{\pi^3}{12(10n)^2} = 10^{-2}|E_n|$$

45. **(a)** $f''(x) = 2\cos(x^2) - 4x^2 \operatorname{sen}(x^2)$

(b)



(c) La gráfica muestra que $-3 \le f''(x) \le 2$ para $-1 \le x \le 1$.

(d) $|E_T| \le \dfrac{1-(-1)}{12}(\Delta x^2)(3) = \dfrac{\Delta x^2}{2}$

(e) $|E_T| \le \dfrac{\Delta x^2}{2} \le \dfrac{0.1^2}{2} < 0.01$ **(f)** $n \ge 20$

47. **(a)** 2.3, 1.6, 1.5, 2.1, 3.2, 4.8, 7.0, 9.3, 10.7, 10.7, 9.3, 6.4, 3.2

(b) $\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_0^6 (C(y))^2\, dy$ **(c)** ≈ 34.7 pulgadas^3.

(d) $V \approx 34.79$ pulgadas^3, por medio de la regla de Simpson. La estimación de la regla de Simpson debe ser más precisa que la estimación con la regla del trapecio. El error en la estimación de la regla de Simpson es proporcional a $\Delta x^4 = 0.0625$, mientras que el error en la estimación con la regla del trapecio es proporcional a $\Delta x^2 = 0.25$, un número más grande cuando $\Delta x = 0.5$ pulgadas.

49. **(a)** ≈ 5.870 **(b)** $|E_T| \le 0.0032$

51. 21.07 pulg. 53. 14.4 55. 54.9

Sección 8.8, páginas 631-633

1. $\pi/2$ **3.** 2 **5.** 6 **7.** $\pi/2$ **9.** ln 3 **11.** ln 4 **13.** 0

15. $\sqrt{3}$ **17.** π **19.** $\ln\left(1 + \dfrac{\pi}{2}\right)$ **21.** -1 **23.** 1

25. $-1/4$ **27.** $\pi/2$ **29.** $\pi/3$ **31.** 6 **33.** ln 2

35. Diverge **37.** Converge **39.** Converge **41.** Converge

43. Diverge **45.** Converge **47.** Converge **49.** Diverge

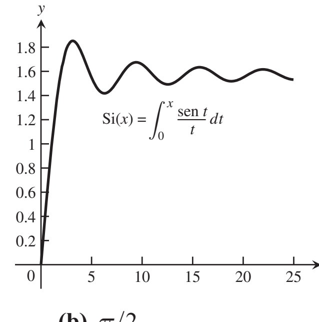
51. Converge **53.** Converge **55.** Diverge **57.** Converge

59. Diverge **61.** Converge **63.** Converge

65. **(a)** Converge cuando $p < 1$ **(b)** Converge cuando $p > 1$

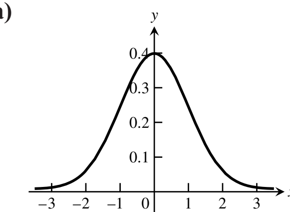
67. 1 **69.** 2π **71.** ln 2 **73.** **(b)** ≈ 0.88621

75. **(a)**



(b) $\pi/2$

77. **(a)**



(b) ≈ 0.683, ≈ 0.954, ≈ 0.997

81. Diverge **83.** Converge **85.** Converge **87.** Diverge

Ejercicios prácticos, páginas 634-638

1. $\dfrac{1}{12}(4x^2 - 9)^{3/2} + C$ **3.** $\dfrac{(2x+1)^{5/2}}{10} - \dfrac{(2x+1)^{3/2}}{6} + C$

5. $\dfrac{\sqrt{8x^2+1}}{8} + C$ **7.** $\dfrac{1}{2}\ln(25 + y^2) + C$

9. $\dfrac{-\sqrt{9 - 4t^4}}{8} + C$ **11.** $\dfrac{9}{25}(z^{5/3} + 1)^{5/3} + C$

13. $-\dfrac{1}{2(1 - \cos 2\theta)} + C$ **15.** $-\dfrac{1}{4}\ln|3 + 4\cos t| + C$

17. $-\dfrac{1}{2}e^{\cos 2x} + C$ **19.** $-\dfrac{1}{3}\cos^3(e^\theta) + C$ **21.** $\dfrac{2^{x-1}}{\ln 2} + C$

23. $\ln|\ln v| + C$ **25.** $\ln|2 + \tan^{-1} x| + C$

27. $\operatorname{sen}^{-1}(2x) + C$ **29.** $\dfrac{1}{3}\operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{3t}{4}\right) + C$

31. $\dfrac{1}{3}\tan^{-1}\left(\dfrac{t}{3}\right) + C$ **33.** $\dfrac{1}{5}\sec^{-1}\left|\dfrac{5x}{4}\right| + C$

35. $\operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{x-2}{2}\right) + C$ **37.** $\dfrac{1}{2}\tan^{-1}\left(\dfrac{y-2}{2}\right) + C$

39. $\sec^{-1}|x - 1| + C$ **41.** $\dfrac{x}{2} - \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C$

43. $\dfrac{2}{3}\cos^3\left(\dfrac{\theta}{2}\right) - 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) + C$

45. $\dfrac{\tan^2(2t)}{4} - \dfrac{1}{2}\ln|\sec 2t| + C$

47. $-\dfrac{1}{2}\ln|\csc(2x) + \cot(2x)| + C$ **49.** $\ln\sqrt{2}$ **51.** 2

53. $2\sqrt{2}$ **55.** $x - 2\tan^{-1}\left(\dfrac{x}{2}\right) + C$

57. $x + x^2 + 2\ln|2x - 1| + C$

59. $\ln(y^2 + 4) - \dfrac{1}{2}\tan^{-1}\left(\dfrac{y}{2}\right) + C$

61. $-\sqrt{4 - t^2} + 2\operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{t}{2}\right) + C$ **63.** $x - \tan x + \sec x + C$

65. $-\dfrac{1}{3}\ln|\sec(5 - 3x) + \tan(5 - 3x)| + C$

67. $4\ln\left|\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{4}\right)\right| + C$

69. $-2\left(\dfrac{(\sqrt{1-x})^3}{3} - \dfrac{(\sqrt{1-x})^5}{5}\right) + C$

71. $\frac{1}{2}\left(z\sqrt{z^2+1} + \ln\left|z + \sqrt{z^2+1}\right|\right) + C$

73. $\ln\left|y + \sqrt{25+y^2}\right| + C$ **75.** $\frac{-\sqrt{1-x^2}}{x} + C$

77. $\frac{\operatorname{sen}^{-1} x}{2} - \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + C$ **79.** $\ln\left|\frac{x}{3} + \frac{\sqrt{x^2-9}}{3}\right| + C$

81. $\sqrt{w^2-1} - \sec^{-1}(w) + C$

83. $(x+1)(\ln(x+1)) - (x+1) + C$

85. $x\tan^{-1}(3x) - \frac{1}{6}\ln(1+9x^2) + C$

87. $(x+1)^2e^x - 2(x+1)e^x + 2e^x + C$

89. $\frac{2e^x \operatorname{sen} 2x}{5} + \frac{e^x \cos 2x}{5} + C$

91. $2\ln|x-2| - \ln|x-1| + C$

93. $\ln|x| - \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C$

95. $-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\cos\theta - 1}{\cos\theta + 2}\right| + C$

97. $4\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 4\tan^{-1} x + C$

99. $\frac{1}{16}\ln\left|\frac{(v-2)^5(v+2)}{v^6}\right| + C$

101. $\frac{1}{2}\tan^{-1} t - \frac{\sqrt{3}}{6}\tan^{-1}\frac{t}{\sqrt{3}} + C$

103. $\frac{x^2}{2} + \frac{4}{3}\ln|x+2| + \frac{2}{3}\ln|x-1| + C$

105. $\frac{x^2}{2} - \frac{9}{2}\ln|x+3| + \frac{3}{2}\ln|x+1| + C$

107. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right| + C$ **109.** $\ln\left|1 - e^{-s}\right| + C$

111. $-\sqrt{16-y^2} + C$ **113.** $-\frac{1}{2}\ln|4-x^2| + C$

115. $\ln\frac{1}{\sqrt{9-x^2}} + C$ **117.** $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x+3}{x-3}\right| + C$

119. $-\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + C$ **121.** $\frac{\tan^5 x}{5} + C$

123. $\frac{\cos\theta}{2} - \frac{\cos 11\theta}{22} + C$ **125.** $4\sqrt{1-\cos(t/2)} + C$

127. Por lo menos 16 **129.** $T = \pi, S = \pi$ **131.** 25°F

133. (a) ≈ 2.42 gal **(b)** ≈ 24.83 mi/gal

135. $\pi/2$ **137.** 6 **139.** ln 3 **141.** 2 **143.** $\pi/6$

145. Diverge **147.** Diverge **149.** Converge

151. $\frac{2x^{3/2}}{3} - x + 2\sqrt{x} - 2\ln(\sqrt{x}+1) + C$

153. $\ln\left|\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+1}}\right| - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2 + C$

155. $\operatorname{sen}^{-1}(x+1) + C$ **157.** $\ln\left|u + \sqrt{1+u^2}\right| + C$

159. $-2\cot x - \ln|\csc x + \cot x| + \csc x + C$

161. $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{3+v}{3-v}\right| + \frac{1}{6}\tan^{-1}\frac{v}{3} + C$

163. $\frac{\theta \operatorname{sen}(2\theta+1)}{2} + \frac{\cos(2\theta+1)}{4} + C$

165. $\frac{x^2}{2} + 2x + 3\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$

167. $-\cos(2\sqrt{x}) + C$ **169.** $-\ln|\csc(2y) + \cot(2y)| + C$

171. $\frac{1}{2}\tan^2 x + C$ **173.** $-\sqrt{4-(r+2)^2} + C$

175. $\frac{1}{4}\sec^2\theta + C$ **177.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

179. $2\left(\frac{(\sqrt{2-x})^3}{3} - 2\sqrt{2-x}\right) + C$ **181.** $\tan^{-1}(y-1) + C$

183. $\frac{1}{3}\ln\left|\sec\theta^3\right| + C$

185. $\frac{1}{4}\ln|z| - \frac{1}{4z} - \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\ln(z^2+4) + \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{z}{2}\right)\right] + C$

187. $-\frac{1}{4}\sqrt{9-4t^2} + C$ **189.** $\ln|\operatorname{sen}\theta| - \frac{1}{2}\ln(1+\operatorname{sen}^2\theta) + C$

191. $\ln\left|\sec\sqrt{y}\right| + C$ **193.** $-\theta\ln\left|\frac{\theta+2}{\theta-2}\right| + C$ **195.** $x + C$

197. $-\frac{\cos x}{2} + C$ **199.** $\ln(1+e^t) + C$ **201.** 1/4

203. $\ln|\ln \operatorname{sen} v| + C$ **205.** $\frac{2}{3}x^{3/2} + C$

207. $-\frac{1}{5}\tan^{-1}\cos(5t) + C$ **209.** $\frac{1}{3}\left(\frac{27^{3\theta+1}}{\ln 27}\right) + C$

211. $2\sqrt{r} - 2\ln(1+\sqrt{r}) + C$

213. $\ln\left|\frac{y}{y+2}\right| + \frac{2}{y} - \frac{2}{y^2} + C$ **215.** $4\sec^{-1}\left(\frac{7m}{2}\right) + C$

217. $\frac{\sqrt{8}-1}{6}$ **219.** $\frac{\pi}{2}(3b-a) + 2$

Ejercicios adicionales y avanzados, páginas 638-641

1. $x(\operatorname{sen}^{-1} x)^2 + 2(\operatorname{sen}^{-1} x)\sqrt{1-x^2} - 2x + C$

3. $\frac{x^2 \operatorname{sen}^{-1} x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2} - \operatorname{sen}^{-1} x}{4} + C$

5. $\frac{\ln|\sec 2\theta + \tan 2\theta| + 2\theta}{4} + C$

7. $\frac{1}{2}\left(\ln\left(t - \sqrt{1-t^2}\right) - \operatorname{sen}^{-1} t\right) + C$

9. $\frac{1}{16}\ln\left|\frac{x^2+2x+2}{x^2-2x+2}\right| + \frac{1}{8}(\tan^{-1}(x+1) + \tan^{-1}(x-1)) + C$

11. 0 **13.** $\ln(4) - 1$ **15.** 1 **17.** $32\pi/35$ **19.** 2π

21. (a) π **(b)** $\pi(2e-5)$

23. (b) $\pi\left(\frac{8(\ln 2)^2}{3} - \frac{16(\ln 2)}{9} + \frac{16}{27}\right)$ **25.** $\left(\frac{e^2+1}{4}, \frac{e-2}{2}\right)$

27. $\sqrt{1+e^2} - \ln\left(\frac{\sqrt{1+e^2}}{e} + \frac{1}{e}\right) - \sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

29. 6 **31.** $y = \sqrt{x},\ \ 0 \le x \le 4$ **33. (b)** 1

37. $a = \frac{1}{2}, -\frac{\ln 2}{4}$ **39.** $\frac{1}{2} < p \le 1$

41. $\frac{e^{2x}}{13}(3 \operatorname{sen} 3x + 2 \cos 3x) + C$

43. $\frac{\cos x \operatorname{sen} 3x - 3 \operatorname{sen} x \cos 3x}{8} + C$

45. $\frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a \operatorname{sen} bx - b \cos bx) + C$ **47.** $x \ln(ax) - x + C$

CAPÍTULO 9

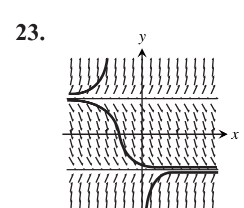
Sección 9.1, páginas 648-650

9. $\frac{2}{3}y^{3/2} - x^{1/2} = C$ **11.** $e^y - e^x = C$

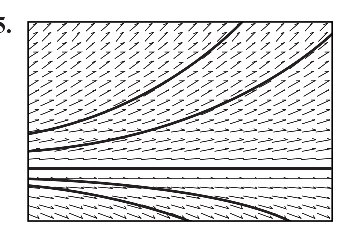
13. $-x + 2 \tan \sqrt{y} = C$ **15.** $e^{-y} + 2e^{\sqrt{x}} = C$

17. $y = \operatorname{sen}(x^2 + C)$ **19.** (d) **21.** (a)

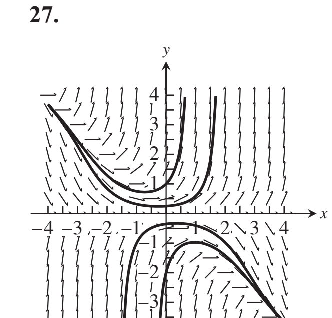
23.



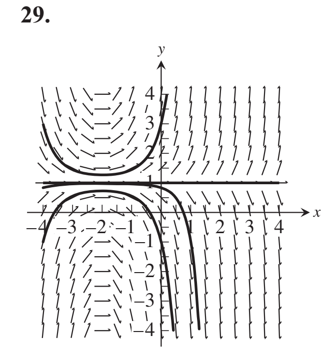
25.



27.



29.



Sección 9.2, páginas 657-659

1. $y = \frac{e^x + C}{x}, \quad x > 0$ **3.** $y = \frac{C - \cos x}{x^3}, \quad x > 0$

5. $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{x} + \frac{C}{x^2}, \quad x > 0$ **7.** $y = \frac{1}{2}xe^{x/2} + Ce^{x/2}$

9. $y = x(\ln x)^2 + Cx$

11. $s = \frac{t^3}{3(t-1)^4} - \frac{t}{(t-1)^4} + \frac{C}{(t-1)^4}$

13. $r = (\csc \theta)(\ln|\sec \theta| + C), \quad 0 < \theta < \pi/2$

15. $y = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t}$ **17.** $y = -\frac{1}{\theta}\cos\theta + \frac{\pi}{2\theta}$

19. $y = 6e^{x^2} - \frac{e^{x^2}}{x+1}$ **21.** $y = y_0 e^{kt}$

23. **(b)** es correcta, pero **(a)** no.

25. **(a)** 10 libras/min **(b)** $(100 + t)$ gal

(c) $4\left(\frac{y}{100 + t}\right)$ libras/min

(d) $\frac{dy}{dt} = 10 - \frac{4y}{100 + t}, \quad y(0) = 50,$

$y = 2(100 + t) - \frac{150}{\left(1 + \frac{t}{100}\right)^4}$

(e) Concentración $= \frac{y(25)}{\text{cantidad de salmuera en el depósito}} = \frac{188.6}{125} \approx 1.5$ libras/gal

27. $y(27.8) \approx 14.8$ lb, $t \approx 27.8$ min **29.** $t = \frac{L}{R}\ln 2$ seg

31. **(a)** $i = \frac{V}{R} - \frac{V}{R}e^{-3} = \frac{V}{R}(1 - e^{-3}) \approx 0.95\frac{V}{R}$ amp **(b)** 86%

33. $y = \frac{1}{1 + Ce^{-x}}$ **35.** $y^3 = 1 + Cx^{-3}$

Sección 9.3, páginas 664-665

1. $y\,(\text{exacta}) = \frac{x}{2} - \frac{4}{x}$, $y_1 = -0.25$, $y_2 = 0.3$, $y_3 = 0.75$

3. $y\,(\text{exacta}) = 3e^{x(x+2)}$, $y_1 = 4.2$, $y_2 = 6.216$, $y_3 = 9.697$

5. $y\,(\text{exacta}) = e^{x^2} + 1$, $y_1 = 2.0$, $y_2 = 2.0202$, $y_3 = 2.0618$

7. $y \approx 2.48832$, el valor exacto es e.

9. $y \approx -0.2272$, el valor exacto es $1/(1 - 2\sqrt{5}) \approx -0.2880$

11.

x	z	y aprox.	y exacta	Error
0	1	3	3	0
0.2	4.2	4.608	4.658122	0.050122
0.4	6.81984	7.623475	7.835089	0.211614
0.6	11.89262	13.56369	14.27646	0.712777

13. El método de Euler da $y \approx 3.45835$; la solución exacta es $y = 1 + e \approx 3.71828$

15. $y \approx 1.5000$; el valor exacto es 1.5275.

17. **(a)** $y = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$, $y(3) = -0.2$
(b) -0.1851, error ≈ 0.0149 **(c)** -0.1929, error ≈ 0.0071
(d) -0.1965, error ≈ 0.0035

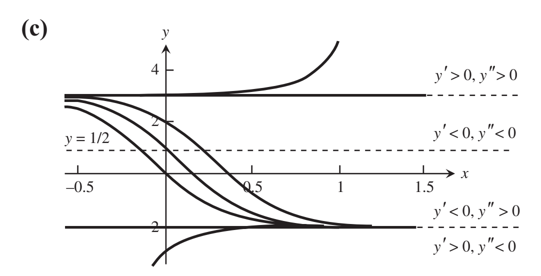
19. La solución exacta en $y = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$, por lo que $y(3) = -0.2$.
Para determinar la aproximación, sea $z_n = y_{n-1} + 2y_{n-1}(x_{n-1} - 1)dx$ y $y_n = y_{n-1} + (y_{n-1}^2 \; (x_{n-1} - 1) + z_n^2 \; (x_n^2 \; - 1))\,dx$ con valores iniciales $x_0 = 2$ y $y_0 = -\frac{1}{2}$. Utilice una hoja de cálculo, una calculadora o un software matemático como se indica en los incisos (a) a (d).
(a) -0.2024, error ≈ 0.0024
(b) -0.2005, error ≈ 0.0005
(c) -0.2001, error ≈ 0.0001
(d) Cada vez que el tamaño del paso se divide a la mitad, el error se reduce a un cuarto de lo que era para el tamaño de paso más grande.

Sección 9.4, páginas 671-672

1. $y' = (y + 2)(y - 3)$
(a) $y = -2$ es un valor de equilibrio estable y $y = 3$ es un equilibrio inestable.

(b) $y'' = 2(y + 2)\left(y - \dfrac{1}{2}\right)(y - 3)$

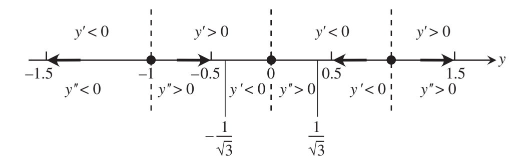
(c)



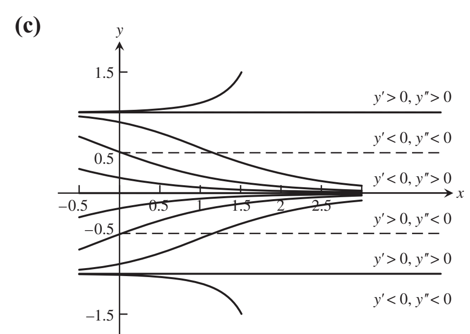
3. $y' = y^3 - y = (y + 1)y(y - 1)$

(a) $y = -1$ y $y = 1$ son equilibrios inestables y $y = 0$ es un equilibrio estable.

(b) $y'' = (3y^2 - 1)y' = 3(y + 1)\left(y + 1/\sqrt{3}\right)y\left(y - 1/\sqrt{3}\right)(y - 1)$



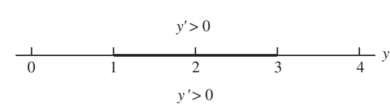
(c)



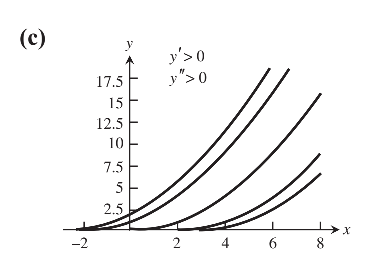
5. $y' = \sqrt{y}, y > 0$

(a) No hay valores de equilibrio.

(b) $y'' = \dfrac{1}{2}$



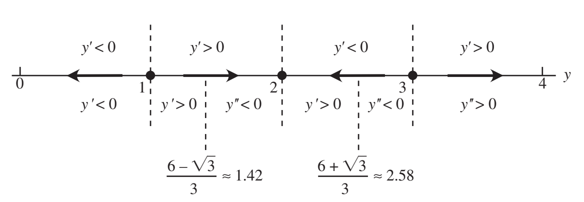
(c)



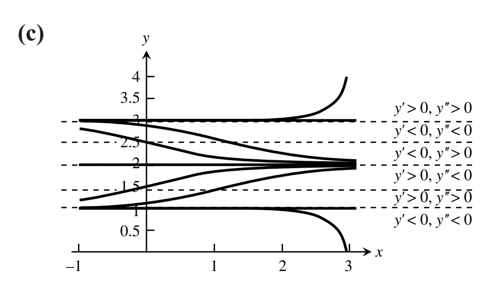
7. $y' = (y - 1)(y - 2)(y - 3)$

(a) $y = 1$ y $y = 3$ son equilibrios inestables y $y = 2$ es un equilibrio estable.

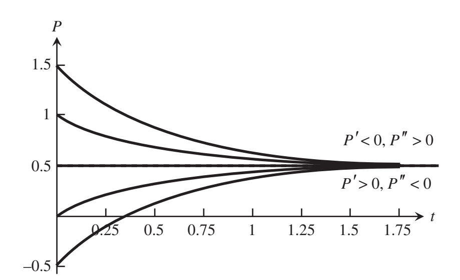
(b) $y'' = (3y^2 - 12y + 11)(y - 1)(y - 2)(y - 3) = (y - 1)\left(y - \dfrac{6 - \sqrt{3}}{3}\right)(y - 2)\left(y - \dfrac{6 + \sqrt{3}}{3}\right)(y - 3)$



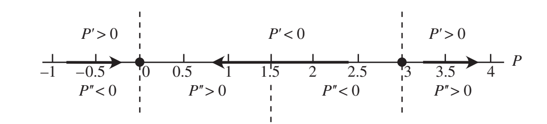
(c)

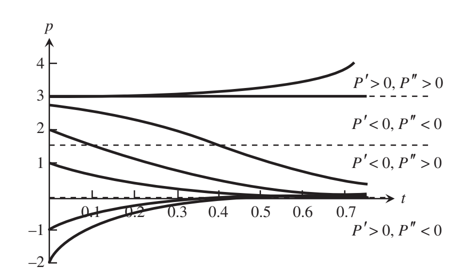


9. $\dfrac{dP}{dt} = 1 - 2P$ tiene un equilibrio estable en $P = \dfrac{1}{2}$; $\dfrac{d^2P}{dt^2} = -2\dfrac{dP}{dt} = -2(1 - 2P)$.

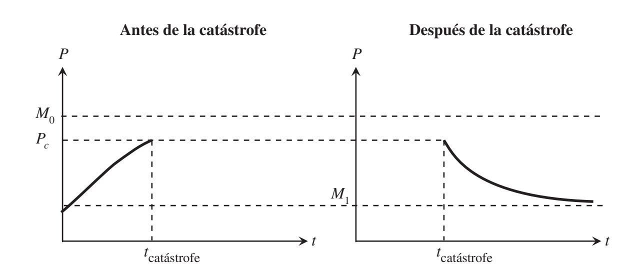


11. $\dfrac{dP}{dt} = 2P(P - 3)$ tiene un equilibrio estable en $P = 0$ y un equilibrio inestable en $P = 3$; $\dfrac{d^2P}{dt^2} = 2(2P - 3)\dfrac{dP}{dt} = 4P(2P - 3)(P - 3)$





13. Antes de la catástrofe, la población exhibía un crecimiento logístico y $P(t)$ aumentaba hacia M_0, el equilibrio estable. Después de la catástrofe, la población disminuye logísticamente y $P(t)$ disminuye hacia M_1, el nuevo equilibrio estable.

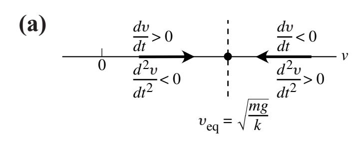


15. $\dfrac{dv}{dt} = g - \dfrac{k}{m}v^2, \quad g, k, m > 0$ y $v(t) \geq 0$

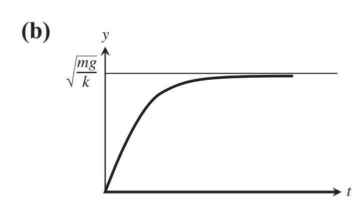
Equilibrio: $\dfrac{dv}{dt} = g - \dfrac{k}{m}v^2 = 0 \Rightarrow v = \sqrt{\dfrac{mg}{k}}$

Concavidad: $\dfrac{d^2v}{dt^2} = -2\left(\dfrac{k}{m}v\right)\dfrac{dv}{dt} = -2\left(\dfrac{k}{m}v\right)\left(g - \dfrac{k}{m}v^2\right)$

(a)



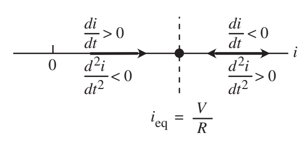
(b)



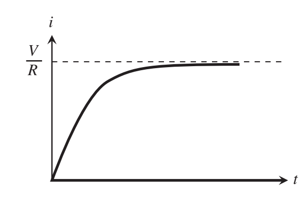
(c) $v_{\text{terminal}} = \sqrt{\dfrac{160}{0.005}} = 178.9$ pies/seg $= 122$ mph

17. $F = F_p - F_r$; $ma = 50 - 5|v|$; $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{1}{m}(50 - 5|v|)$. La velocidad máxima ocurre cuando $\dfrac{dv}{dt} = 0$ o $v = 10$ pies/seg.

19. Línea de fase:



Si el interruptor se cierra en $t = 0$, entonces $i(0) = 0$ y la gráfica de la solución se parece a ésta:



Cuando $t \to \infty$, $i(t) \to i_{\text{estado estable}} = \dfrac{V}{R}$.

Sección 9.5, páginas 680-681

1. **(a)** 168.5 m **(b)** 41.13 seg

3. $s(t) = 4.91(1 - e^{-(22.36/39.92)t})$

5. **(a)** $P(t) = \dfrac{150}{1 + 24e^{-0.225t}}$

(b) Alrededor de 17.21 semanas; 21.28 semanas

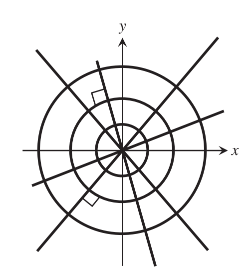
7. **(a)** $y(t) = \dfrac{8 \times 10^7}{1 + 4e^{-0.71t}} \Rightarrow y(1) \approx 2.69671 \times 10^7$ kg

(b) $t \approx 1.95253$ años

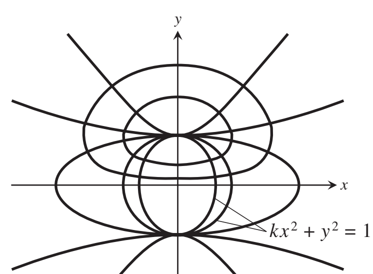
9. **(a)** $y = 2e^t - 1$ **(b)** $y(t) = \dfrac{400}{1 + 199e^{-200t}}$

11. **(a)** $P(t) = \dfrac{P_0}{1 - kP_0 t}$ **(b)** Asíntota vertical en $t = \dfrac{1}{kP_0}$

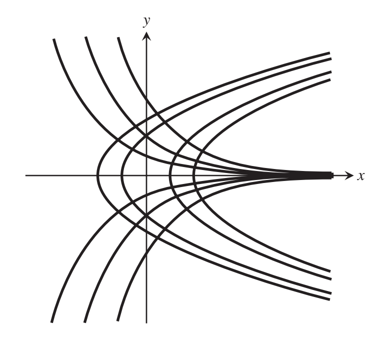
13. $x^2 + y^2 = C$



15. $\ln|y| - \dfrac{1}{2}y^2 = \dfrac{1}{2}x^2 + C$



17. $y = \pm\sqrt{2x + C}$



Ejercicios prácticos, páginas 682-683

1. $y = \left(\tan^{-1}\left(\frac{x + C}{2}\right)\right)^2$ **3.** $y^2 = \operatorname{sen}^{-1}(2\tan x + C)$

5. $y = -\ln\left(C - \frac{2}{5}(x - 2)^{5/2} - \frac{4}{3}(x - 2)^{3/2}\right)$

7. $\tan y = -x \operatorname{sen} x - \cos x + C$ **9.** $(y + 1)e^{-y} = -\ln|x| + C$

11. $y = C\frac{x - 1}{x}$ **13.** $y = \frac{x^4}{4}e^{x/2} + Ce^{x/2}$

15. $y = \frac{x^2 - 2x + C}{2x^2}$ **17.** $y = \frac{e^{-x} + C}{1 + e^x}$ **19.** $xy + y^3 = C$

21. $y = -2 + \ln(2 - e^{-x})$ **23.** $y = \frac{2x^3 + 3x^2 + 6}{6(x + 1)^2}$

25. $y = \frac{1}{3}(1 - 4e^{-x^3})$ **27.** $y = 4x - 4\sqrt{x} + 1$

29. $y = e^{-x}(3x^3 - 3x^2)$

31.

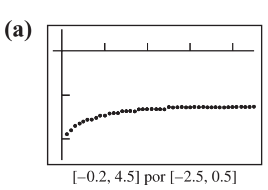
x	y
0	0
0.1	0.1000
0.2	0.2095
0.3	0.3285
0.4	0.4568
0.5	0.5946
0.6	0.7418
0.7	0.8986
0.8	1.0649
0.9	1.2411
1.0	1.4273

x	y
1.1	1.6241
1.2	1.8319
1.3	2.0513
1.4	2.2832
1.5	2.5285
1.6	2.7884
1.7	3.0643
1.8	3.3579
1.9	3.6709
2.0	4.0057

33. $y(3) \approx 0.9063$

35.

(a)



[−0.2, 4.5] por [−2.5, 0.5]

(b) Observe que elegimos un intervalo pequeño de valores de x, ya que los valores de y disminuyen rápidamente y su calculadora no puede manejar los cálculos para $x \leq -1$. (Esto sucede debido a que la solución analítica es $y = -2 + \ln(2 - e^{-x})$, que tiene una asíntota en $x = -\ln 2 \approx -0.69$. Obviamente, las aproximaciones de Euler son engañosas para $x \leq -0.7$).

[−1, 0.2] por [−10, 2]

37. y (exacta) $= \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}$; $y(2) \approx 0.4$; el valor exacto es $\frac{1}{2}$

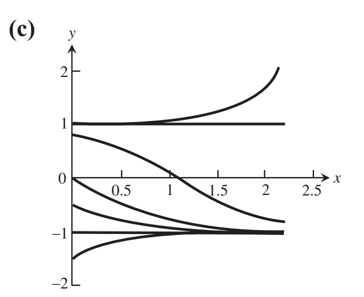
39. y (exacta) $= -e^{(x^2-1)/2}$; $y(2) \approx -3.4192$; el valor exacto es $-e^{3/2} \approx -4.4817$.

41. **(a)** $y = -1$ es estable y $y = 1$ es inestable.

(b) $\frac{d^2y}{dx^2} = 2y\frac{dy}{dx} = 2y(y^2 - 1)$

$y = -1$ | $y = 1$ | $y = 0$
$\frac{dy}{dx} > 0$, $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ | $\frac{dy}{dx} < 0$, $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ | $\frac{dy}{dx} < 0$, $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ | $\frac{dy}{dx} > 0$, $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$

(c)



Ejercicios adicionales y avanzados, páginas 683-684

1. **(a)** $y = c + (y_0 - c)e^{-k(A/V)t}$

(b) Solución de estado estable: $y_\infty = c$

3. 0.179%

APÉNDICES

Apéndice A.5

1. **(a)** (14, 8) **(b)** (−1, 8) **(c)** (0, −5)

3. **(a)** Reflejando z con respecto del eje real

(b) Reflejando z con respecto del eje imaginario

(c) Reflejando z en el eje real y luego multiplicando la longitud del vector por $1/|z|^2$

5. **(a)** Puntos sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$

(b) Puntos dentro de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$

(c) Puntos fuera de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$

7. Puntos sobre el círculo de radio 1 con centro en $(-1, 0)$

9. Puntos sobre la recta $y = -x$ **11.** $4e^{2\pi i/3}$ **13.** $1e^{2\pi i/3}$

15. $\cos^4\theta - 6\cos^2\theta \operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}^4\theta$ **17.** $1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$

19. $2i, -\sqrt{3} - i, \sqrt{3} - i$ **21.** $\frac{\sqrt{6}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i, -\frac{\sqrt{6}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$

23. $1 \pm \sqrt{3}i, -1 \pm \sqrt{3}i$

ÍNDICE

Nota: Los números de página en *itálicas* indican figuras; “t” indica una tabla; “e” indica un ejercicio.

D

E

F

G

H

I

M

FÓRMULAS DE OPERADORES VECTORIALES (FORMA CARTESIANA)

Fórmulas para Grad, Div, Espiral y de Laplace

	En el plano cartesiano (x, y, z) **i**, **j**, y **k** son vectores unitarios en dirección creciente de x, y, y z. M, N, y P so los componentes escalares de $\mathbf{F}(x, y, z)$ en dichas direcciones.
Gradiente	$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$
Divergencia	$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$
Espiral	$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix}$
De Laplace	$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

Teorema fundamental de rectas integrales

1. Sea $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ un campo vectorial cuyos componentes son continuos a lo largo de una región conectada D abierta en el espacio. En consecuencia, existe una función diferenciable f tal que

$$\mathbf{F} = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

si y sólo si para todos los puntos A y B en D el valor de $\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria que une A a B en D.

2. Si la integral es independiente de la trayectoria de A a B, su valor es

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A).$$

El teorema de Green y su generalización en tres dimensiones

Forma normal del teorema de Green: $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint_R \nabla \cdot \mathbf{F}\, dA$

Teorema de divergencia: $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV$

Forma tangencial del teorema de Green: $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{k}\, dA$

Teorema de Stokes: $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$

Productos vectoriales triples

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$$
$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$$

Identidades vectoriales

En las identidades siguientes, f y g son funciones escalares diferenciables, $\mathbf{F}$, $\mathbf{F}_1$, y $\mathbf{F}_2$ son campos vectoriales diferenciables, y a y b son constantes reales.

$$\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}$$
$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$$

$$\nabla \cdot (g\mathbf{F}) = g\nabla \cdot \mathbf{F} + \nabla g \cdot \mathbf{F}$$
$$\nabla \times (g\mathbf{F}) = g\nabla \times \mathbf{F} + \nabla g \times \mathbf{F}$$

$$\nabla \cdot (a\mathbf{F}_1 + b\mathbf{F}_2) = a\nabla \cdot \mathbf{F}_1 + b\nabla \cdot \mathbf{F}_2$$
$$\nabla \times (a\mathbf{F}_1 + b\mathbf{F}_2) = a\nabla \times \mathbf{F}_1 + b\nabla \times \mathbf{F}_2$$

$$\nabla(\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_2) = (\mathbf{F}_1 \cdot \nabla)\mathbf{F}_2 + (\mathbf{F}_2 \cdot \nabla)\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_1 \times (\nabla \times \mathbf{F}_2) + \mathbf{F}_2 \times (\nabla \times \mathbf{F}_1)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2) = \mathbf{F}_2 \cdot \nabla \times \mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_1 \cdot \nabla \times \mathbf{F}_2$$

$$\nabla \times (\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2) = (\mathbf{F}_2 \cdot \nabla)\mathbf{F}_1 - (\mathbf{F}_1 \cdot \nabla)\mathbf{F}_2 + (\nabla \cdot \mathbf{F}_2)\mathbf{F}_1 - (\nabla \cdot \mathbf{F}_1)\mathbf{F}_2$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - (\nabla \cdot \nabla)\mathbf{F} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2\mathbf{F}$$
$$(\nabla \times \mathbf{F}) \times \mathbf{F} = (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{F} - \frac{1}{2}\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{F})$$